ریاضی دهم

یگانه

(رشته های علوم تجربی و ریاضی فیزیک)

از مجموعه رشادت

سعید جلالی

مقدمه

به نام خداوند جان و خرد
کزین برتر اندیشه برنگذرد

بسیار خرسندیم که کتاب «ریاضیات دهم یگانه» را تقدیم دانش‌آموزان می‌کنیم. این کتاب مطالب ریاضی پایهٔ اوّل دورهٔ دوم متوسطه را در سطح پیشرفته ارائه می‌دهد. دانش‌آموز، ابتدا با مباحث هر فصل آشنا می‌شود و با مثال‌های فراوان بر حل آن‌ها اشراف پیدا می‌کند. سپس برای هر فصل، تعدادی سؤال چهارگزینه‌ای و تعدادی مسئلهٔ تشریحی را پاسخ می‌دهد تا بر موضوع تسلط یابد. سؤالات چهارگزینه‌ای برخی تألیفی هستند و برخی مربوط به کنکورهای سراسری دانشگاه‌ها می‌باشند. دانش‌آموزان باید توجه داشته باشند که ترتیب مطالعه و حل آن‌ها باید رعایت شود.

انتظار می‌رود کتاب حاضر، همهٔ نیازهای دانش‌آموزان کلاس دهم را که مایل به تحصیل در بهترین دانشگاه‌ها و بهترین رشته‌های کشور هستند، پاسخ‌گو باشد.

در این‌جا لازم می‌دانیم از مؤلف محترم آقای مهندس سعید جلالی که کتاب را زیر نظر دبیر مجموعه تألیف کرده‌اند تشکر کنیم. هم‌چنین از خانم‌ها ناهید صبائی (حروفچین و صفحه‌آرا)، ملیحه محمدی و بهاره خُدامی (گرافیست‌ها) و مدیران و همکاران واحدهای حروف‌چینی، تولید و فروش سپاسگزاریم.

امیدواریم دبیران محترم ریاضی و دانش‌آموزان و خانواده‌های عزیز آن‌ها ما را با اعلام نظرات، پیشنهادها و انتقادهای خود دربارهٔ این کتاب یاری فرمایند.

انتشارات مبتکران

فهرست

فهرست

عنوان | صفحه

پاسخ‌نامهٔ تشریحی

فصل اول

مجموعه‌ها،
الگوها و دنباله‌ها

فصل ۱
مجموعه‌ها، الگوها و دنباله‌ها

مجموعه‌ها، الگوها و دنباله‌ها

«مجموعه‌ها»، دسته یا گروهی از اشیا یا اعداد یا... هستند که عضوهای آن‌ها قابل تشخیص باشند. مجموعهٔ بدون عضو، «تهی» نامیده می‌شود. عضوهای مجموعه‌ها را داخل «آکولاد» قرار داده و اعضا را با ویرگول (،) جدا می‌کنند. در مواردی که تعداد اعضا زیاد باشد، از نماد «...» استفاده می‌کنیم.

مجموعه‌های عددی با توجه به نیاز به‌صورت مقابل معرفی و نام‌گذاری شدند: مجموعهٔ اعداد طبیعی $\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,...\}$

انواع مختلف اعداد، برای موارد مختلفی استفاده می‌شوند (شمارش یا اندازه‌گیری). مجموعهٔ اعداد طبیعی (Natural) مجموعه‌ای شمارشی است. $W=\{۰,۱,۲,۳,...\}$

مجموعهٔ اعداد حسابی (Whole number) با افزودن عضو صفر به مجموعهٔ اعداد طبیعی مشخص شد. پیش از آن صفر را به عنوان عدد، نمی‌شناختند. (مخترعین عدد صفر، هندی‌ها بودند در ۲۵۰۰ سال پیش.)

مجموعهٔ اعداد صحیح $\mathbb{Z}=\{...,-۴,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,...\}$

که (Integer number) است و شامل اعضای W و قرینهٔ اعضای آن است. $\mathbb{Z}$، حرف اوّل واژهٔ (Zahl) به معنی عدد است.

مجموعهٔ اعداد گویا $Q:\{\frac{m}{n}|m,n\in\mathbb{Z},n\neq ۰\}$

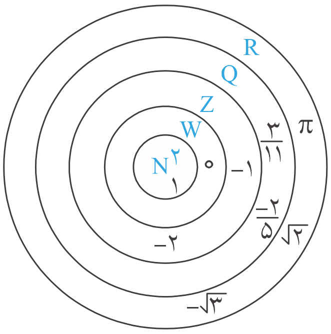
که (Rational number) نامیده می‌شود و شامل همهٔ اعدادی است که بتوان آن‌ها را از یک کسر با صورت و مخرج صحیح به دست آورد.

اعداد گنگ Q^c یا Q'

که (Irrational number) نامیده می‌شود و به عددی که گویا نباشد، گفته می‌شود.

مجموعهٔ اعداد حقیقی $\mathbb{R}$

که (Real number) نامیده می‌شود و شامل همهٔ اعداد گویا و گنگ است.



$N\subset W\subset\mathbb{Z}\subset Q\subset R$

$Q'\subset R$

$Q\cap Q'=\varnothing$

$Q\cup Q'=R$

الگوسازی

بسیاری از امور را از طریق مشاهده و یا الگوبرداری از کارهای دیگران یاد گرفته‌ایم. در ریاضیات نیز مشاهدهٔ رابطه‌های بین اشیاء (اعم از اعداد و یا اشکال هندسی) و یافتن ارتباط بین آن‌ها به الگوسازی می‌انجامد و از روی این الگوها می‌توان به حکم‌های ریاضی دسترسی پیدا کرد.

به‌جای علامت سؤال، عدد مناسب قرار دهید:

$۱ , ۲ , ۴ , ۸ , ۱۶ , ۳۲ , ۶۴ , ?$

$۳ , ۸ , ۱۳ , ۱۸ , ۲۳ , ۲۸ , ۳۳ , ?$

$۱ , ۲ , ۴ , ۷ , ۱۱ , ۱۶ , ۲۲ , ?$

$۱ , ۶ , ۷ , ۱۲ , ۱۳ , ۱۸ , ۱۹ , ?$

در ادامهٔ کار، پس از تشخیص الگو باید بتوانیم حکمی پیدا کنیم.

مثال **اگر داشته باشیم ... , ۱۳ , ۱۰ , ۷ , ۴ , ۱، صدمین جمله چه عددی است؟**

پاسخ ملاحظه می‌کنیم:

جمله	مقدار
اوّل	۱
دوم	$۴ = ۱ + ۳$
سوم	$۷ = ۱ + ۳ + ۳ = ۱ + ۲ \times ۳$
چهارم	$۱۰ = ۱ + ۳ + ۳ + ۳ = ۱ + ۳ \times ۳$
پنجم	$۱۳ = ۱ + ۳ + ۳ + ۳ + ۳ = ۱ + ۴ \times ۳$
$\vdots$	$\vdots$

بنابراین جملهٔ صدم برابر است با: $۱ + ۹۹ \times ۳ = ۲۹۸$

و در حالت کلی جملهٔ n اُم برابر است با: $۱ + (n - ۱) \times ۳$

اگر در عبارت اخیر به‌جای n، عددی طبیعی قرار دهیم، مقدار جملهٔ متناظر حاصل خواهد شد.

مثال **با شناسایی الگوی مربوط، به‌جای علامت سؤال اعداد مناسب قرار دهید.**

$۹ \times ۰ + ۱ = ۱$
$۹ \times ۱ + ۲ = ۱۱$
$۹ \times ۲ + ۳ = ۲۱$
$۹ \times ۳ + ۴ = ?$
$? = ۴۱$

$۱۲۳۴۵۶۷۹ \times ۹ = ۱۱۱۱۱۱۱۱۱$
$۱۲۳۴۵۶۷۹ \times ۱۸ = ۲۲۲۲۲۲۲۲۲$
$۱۲۳۴۵۶۷۹ \times ۲۷ = ۳۳۳۳۳۳۳۳۳$
$۱۲۳۴۵۶۷۹ \times ۳۶ = ?$
$۱۲۳۴۵۶۷۹ \times ? = ۵۵۵۵۵۵۵۵۵$

$۶ \times ۷ = ۴۲$
$۶۶ \times ۶۷ = ۴۴۲۲$
$۶۶۶ \times ۶۶۷ = ۴۴۴۲۲۲$
$۶۶۶۶ \times ۶۶۶۷ = ?$

$۱ \times ۱ = ۱$
$۱۱ \times ۱۱ = ۱۲۱$
$۱۱۱ \times ۱۱۱ = ۱۲۳۲۱$
$۱۱۱۱ \times ۱۱۱۱ = ?$

مثال **در عبارت ... , ۳۲ , ۱۶ , ۸ , ۴ , ۲ جملهٔ صدم چیست؟**

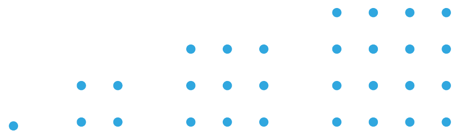
پاسخ به سادگی ملاحظه می‌کنیم:

جمله	مقدار
اوّل	$۲ = ۲^{۱}$
دوم	$۴ = ۲^{۲}$
سوم	$۸ = ۲^{۳}$
چهارم	$۱۶ = ۲^{۴}$
$\vdots$	$\vdots$

پس جملهٔ صدم برابر $۲^{۱۰۰}$ و در حالت کلی، جملهٔ n اُم برابر ۲^{n} است.

مثال **در یونان باستان، اعداد مربعی را به‌صورت مقابل نمایش می‌دادند:**

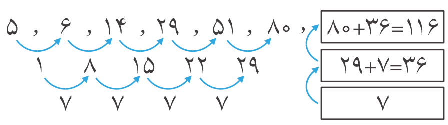
الگوی تعداد نقاط چیست؟



پاسخ این اعداد به‌صورت $\dots , ۴^۲ , ۳^۲ , ۲^۲ , ۱^۲$؛ پس صدمین عدد مربعی $\mathbf{۱۰۰^۲}$ و n اُمین عدد $n^۲$ است.

مثال **به‌جای علامت سؤال، چه عددی بگذاریم؟** **۵ , ۶ , ۱۴ , ۲۹ , ۵۱ , ۸۰ , ?**

پاسخ یافتن الگوی مربوط با توجه به تفاضل اعداد متوالی چندان آسان نیست ولی با توجه به تفاضل جملات متوالی می‌توان الگو را یافت:



مثال **به‌جای □، عدد مناسب قرار دهید.**

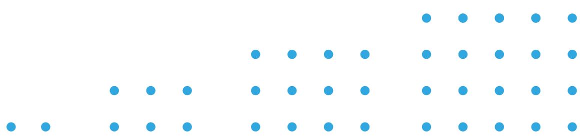
الف) **۵ , ۶ , ۱۴ , ۳۲ , ۶۴ , ۱۱۵ , ۱۹۱ , □**

ب) **۰ , ۲ , ۶ , ۱۲ , ۲۰ , ۳۰ , ۴۲ , □**

مثال **اعداد مستطیلی‌شکل را به‌صورت مقابل در نظر می‌گیریم:**

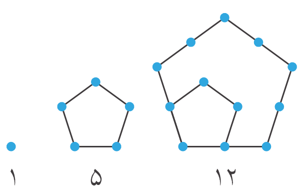
الف) **جملهٔ بعدی را مشخص کنید.**

ب) **جملهٔ صدم چیست؟**



مثال **اعداد مخمّسی (پنج‌ضلعی شکل) را به‌صورت مقابل در نظر می‌گیریم:**

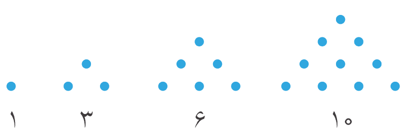
سه جملهٔ دیگر چیست؟



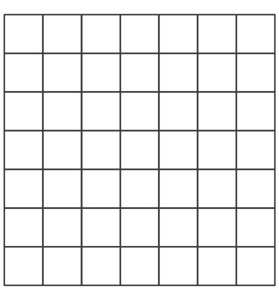
مثال **اعداد مثلثی به‌صورت مقابل تعریف می‌شوند:**

الف) **سه جملهٔ بعدی اعداد مثلثی چیست؟**

ب) **n اُمین جمله چیست؟**

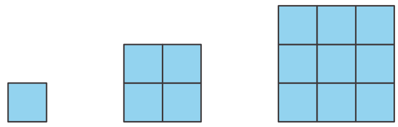


مثال **در شکل مقابل، چند مربع متفاوت است؟**



پاسخ مقصود از مربع، یک چهارضلعی است که چهار ضلع مساوی دارد و ضلع‌های مجاور بر یکدیگر عمود باشند. مربع‌های متفاوت آن‌هایی هستند که یا ابعاد متفاوت دارند و یا جای قرار گرفتن آن‌ها متفاوت باشد.

در هر مربع ۱×۱، فقط یک مربع ۱×۱ داریم و در هر مربع ۲×۲ چهار مربع ۱×۱ و یک مربع ۲×۲ و در هر مربع ۳×۳، ۹ مربع ۱×۱ و ۴ مربع ۲×۲ و ۱ مربع ۳×۳ داریم.



حال اگر مربع ۴×۴ را در نظر داشته باشیم، ۱۶ مربع ۱×۱، ۹ مربع ۲×۲ و ۴ مربع ۳×۳ و سرانجام ۱ مربع ۴×۴ وجود دارد.

با همین الگو $۷^۲ + \cdots + ۲^۲ + ۱^۲$ مربع در شکل اصلی داریم.

مثال **در روز نخست در کلاس دهم دبیرستان زندگی، ۲۰ دانش‌آموز برای آشنایی با یک‌دیگر، دست می‌دهند. اگر هر دانش‌آموز دقیقاً یک‌بار با دیگری دست دهد، در کل چند بار عمل دست دادن انجام می‌شود؟**

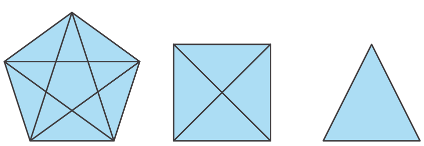
پاسخ مسأله را ساده‌تر می‌کنیم، فرض کنید در کلاس فقط ۵ نفر حاضر بودند. می‌توان از آن برای یافتن الگو کمک گرفت.

تعداد دانش‌آموزان	تعداد دست دادن‌ها
۱	صفر
۲	۱
۳	$۳ = ۲ + ۱$
۴	$۶ = ۳ + ۲ + ۱$
۵	$۱۰ = ۴ + ۳ + ۲ + ۱$

بنابراین تعداد دست دادن‌ها برای ۵ نفر برابر مجموع اعداد ۱ تا ۴ است. با توجه به این الگو، تعداد دست دادن‌ها برابر است با:

$$۱ + ۲ + ۳ + \cdots + ۱۹ = \frac{۱۹ \times ۲۰}{۲} = ۱۹۰$$

روش دوم: با توجه به رسم نمودار نیز می‌توان مسأله را حل کرد: هر فرد را با یک نقطه مشخص می‌کنیم و عمل دست دادن را با اتصال آن دو نقطه نشان می‌دهیم. برای ۳، ۴ و ۵ نفر، شکل‌های زیر را خواهیم داشت:



بنابراین پرسش مورد نظر به این مسأله تبدیل می‌شود که تعداد پاره‌خط‌های وصل‌کننده بین تعدادی نقطه را پیدا کنیم. مشخص است که هر دانش‌آموز با بقیه (اگر تعداد ۵ نفر باشد با ۴ نفر دیگر) دست دهد و حال که ۵ دانش‌آموز داریم $۲۰ = ۴ \times ۵$ بار دست دادن تکرار شده است. ولی عمل دست دادن دوطرفه است. پس در شمارش، دست دادن بین هر دو نفر را دو بار شمرده‌ایم. پس تعداد کل دست دادن‌ها $۱۰ = \frac{۵ \times ۴}{۲}$ است. در حالت ۲۰ دانش‌آموز تعداد $۱۹۰ = \frac{۲۰ \times ۱۹}{۲}$ است.

مثال **اگر ۲۰ نفر دور میزی نشسته باشند و هر نفر با افراد کناری خود دست دهد و پس از میهمانی با بقیه دست دهد، تعداد کل دست دادن‌ها، پس از میهمانی چند است؟**

پاسخ در واقع مانند آن است که تعداد قطرهای یک n ضلعی را بیابیم:

$$\underbrace{\frac{n(n-۱)}{۲}}_{\text{تعداد کل پاره‌خط‌ها}} - \underbrace{n}_{\text{تعداد اضلاع}} = \frac{n(n-۳)}{۲}$$

برای ۲۰ نفر، تعداد دست دادن‌ها پس از میهمانی برابر است با: $۱۷۰ = \frac{۲۰(۲۰-۳)}{۲}$

یا این‌که: تعداد دست دادن‌ها سر میز $۴۰ = ۲ \times ۲۰$ است، ولی هر دست دادن را دو بار به حساب آورده‌ایم؛ پس تعداد دست دادن‌ها بعد از اتمام جلسه $۱۹۰ - ۲۰ = ۱۷۰$ است.

روش تفاضل متناهی

این تکنیک بسیار جالب، روشی برای حدس زدن فرمول دنباله‌های چندجمله‌ای است. مثلاً دنبالهٔ زیر را در نظر بگیرید:

۱۶۹ , ۱۹۶ , ۲۲۵ , ۲۵۶ , ۲۸۹ , ۳۲۴ , ...

اگر این دنباله، دنباله‌ای چندجمله‌ای باشد، آیا می‌توانید عدد بعدی را حدس بزنید؟ روش تفاضل متناهی، این است که تفاضل هر دو جملهٔ متناهی را حساب کنیم و دنبالهٔ دیگری به دست آوریم. سپس همین کار را با دنبالهٔ جدید تکرار کنیم تا جایی که تفاضل هر دو جملهٔ متوالی، عددی ثابت باشد:

۱۶۹ , ۱۹۶ , ۲۲۵ , ۲۵۶ , ۲۸۹ , ۳۲۴ , ...

۲۷ , ۲۹ , ۳۱ , ۳۳ , ۳۵ , ...

۲ ۲ ۲ ۲

در ردیف دوم: ۱۹۶−۱۶۹=۲۷ ۲۲۵−۱۹۶=۲۹ , ...

در ردیف سوم: ۲۹−۲۷=۲ ۳۱−۲۹=۲ , ...

آیا اکنون می‌توانید عددد بعدی در دنباله را حدس بزنید؟ با بازگشت به عقب می‌توان جملات بعدی دنباله را حدس زد. عدد بعدی در ردیف سوم، ۲ است. پس در ردیف دوم عدد بعدی باید ۳۷ باشد. بنابراین عدد بعدی در دنبالهٔ اصلی باید ۳۶۱ باشد.

این تکنیک یکی از روش‌های بسیار قدرتمند است و می‌توان از آن برای دنباله‌های بسیاری فرمول چند جمله‌ای به دست آورد. برای برخی دنباله‌های عددی تنها یک ردیف تفاضل گرفتن کافی است و برای بعضی دیگر باید چندین دنبالهٔ تفاضلی حساب کرد. البته این روش همیشه کارآمد نیست، بعضی وقت‌ها اعداد داده شده برای حدس زدن عدد بعدی کافی نیست. یک اتفاق جالب دیگر که ممکن است در دنباله‌ها بیافتد این است که ممکن است دنبالهٔ تفاضلی، تکرار دنبالهٔ اصلی باشد؛ مثلاً:

۲ ، ۳ ، ۵ ، ۷ ، ۱۰ ، ۱۵ ، ۲۲ ، ۳۲ ، ...

۲ ۳ ۵ ۷ ۱۰

در هر صورت محاسبهٔ عدد بعدی کار ساده‌ای است. عدد بعدی در ردیف دوم ۱۵ است. بنابراین عددی که باید در دنبالهٔ اصلی حدس بزنیم ۴۷ است.

مثال **با کمک روش دنباله‌های تفاضلی، جملهٔ بعدی هر یک را حساب کنید:**

الف) **۵ , ۹ , ۱۳ , ۱۷ , ۲۱ , ... (دنبالهٔ خطی)**

ب) **۲۴ , ۵۴ , ۹۶ , ۱۵۰ , ۲۱۶ , ۲۹۴ , ۳۸۴ , ... (تعداد مربع‌های واحد روی سطح مکعب)**

ج) **۴ , ۸ , ۱۶ , ۳۲ , ۶۴ , ۱۲۸ , ۲۵۶ , ... (توان‌های عدد ۲)**

د) **۷ , ۱۱ , ۱۸ , ۲۹ , ۴۷ , ۷۶ , ۱۲۳ , ... (اعداد لوکا)**

دنبالهٔ عددی (حسابی، خطی)

نوعی دنباله که به هر جملهٔ آن مقداری ثابت (d) افزوده شود تا جملهٔ بعدی به دست آید، دنبالهٔ عددی یا دنبالهٔ حسابی نامیده می‌شود. به d، قدر نسبت دنباله گفته می‌شود. جملهٔ عمومی دنبالهٔ عددی پس از ساده شدن به‌صورت عبارتی خطی به فرم: $t_n = n \cdot d + k$ است. بنابراین ضریبِ n همان قدر نسبت است و n، شمارهٔ جمله است.

به‌طور مثال $t_n = -۷n + ۲$ دنبالهٔ عددی با قدر نسبتِ $d = -۷$ و $t_n = \frac{۲-۳n}{۱۱}$ که در واقع $t_n = \frac{۲}{۱۱} - \frac{۳}{۱۱}n$ است قدر نسبت برابر

$d=\frac{-۳}{۱۱}$ دارد. برای $t_n=(n+۲)^۲-(n-۱)^۲+۱۱$ که با ساده شدن به $t_n=n^۲+۴n+۴-n^۲+۲n-۱+۱۱ \to t_n=۶n+۱۴$ می‌رسیم که فرم درجهٔ ۱ (خطی) دارد و بنابراین دنبالهٔ عددی با قدر نسبت ۶ (ضریب n = d) است.

اگر $t_{n+۳}=۳=t_n+۱۱$ که با ساده شدن به $t_{n+۳}-t_n=۱۱$ می‌رسیم به این معنی که تفاضل هر جمله و سه جملهٔ قبلی همیشه ثابت و مقداری ثابت است، نتیجه می‌گیریم که دنبالهٔ عددی است. در این حالت انتظار داریم که $۳d=۱۱$ باشد، پس $d=\frac{۱۱}{۳}$ است.

برای نوشتن فرمولی برای دنبالهٔ عددی (جملهٔ عمومی)، نخست باید قدر نسبت را به دست آوریم. اگر دو جملهٔ دنباله را داشته باشیم به راحتی می‌توان d را مشخص کرد. به این ترتیب که می‌دانیم فاصلهٔ هر دو جملهٔ متوالی d است و بنابراین فاصلهٔ جمله‌های هفتم و سوم برابر $۴d$ خواهد بود یعنی $t_۷-t_۳=۴d$ به همین ترتیب:

$$t_m-t_n=(m-n)d$$

سپس می‌نویسیم $t_n=nd+k$ که در آن به‌جای d، مقدار قدر نسبت را می‌نویسیم و سپس با کمک یکی از جمله‌ها، k را می‌یابیم.

مثال **اگر $t_۷=۳$ و $d=-۲$ باشد، جملهٔ عمومی دنبالهٔ عددی چیست؟**

پاسخ

$d=-۲ \qquad t_n=-۲n+k \qquad t_۷=-۲(۷)+k=۳$

$-۱۴+k=۳ \qquad k=۱۷ \qquad t_n=-۲n+۱۷$

مثال **جمله‌های پنجم و هشتم دنباله‌ای حسابی به ترتیب ۳ و ۹− هستند، جملهٔ عمومی را مشخص کنید.**

پاسخ

روش اوّل:

$t_۸-t_۵=(۸-۵)d \qquad -۹-۳=۳d \qquad -۱۲=۳d \qquad d=-۴$

$t_n=nd+k \qquad t_n=-۴n+k \qquad t_۵=۳ \qquad ۳=-۴(۵)+k$

$k=۲۳ \qquad t_n=-۴n+۲۳$

روش دوم:

$t_n=nd+k \qquad \left.\begin{array}{l}۳=۵d+k\\-۹=۸d+k\end{array}\right\} \qquad -۱۲=۳d$

$d=-۴ \qquad k=۲۳ \qquad t_n=-۴n+۲۳$

اگر a ، b و c تشکیل دنبالهٔ عددی (حسابی) دهند $c-b=b-a=$ **قدر نسبت** $\to c+a=۲b \to b=\frac{a+c}{۲}$

b را واسطهٔ عددی دو عدد a و c می‌نامیم.

چنانچه جمله‌های متوالی دنباله‌ای (رشته‌ای) را مشخص کرده باشند، در صورتی که دو برابر هر عددی برابر مجموع دو عدد قبل و بعدِ آن باشد، نوع دنباله عددی است.

مثال **جملهٔ عمومی دنبالهٔ مقابل را مشخص کنید.** $۳ , ۱ , -۱ , ...$

پاسخ در هر مرحله، دو واحد کم شده است. $d=-۲$

دقت کنید که دو برابر جملهٔ وسط، برابر مجموع دو جملهٔ طرفین آن است یعنی نوع دنباله، عددی است.

$t_n=nd+k \qquad t_n=-۲n+k \qquad t_۱=۳ \qquad ۳=-۲+k \qquad k=۵ \qquad t_n=-۲n+۵$

مثال **جملهٔ عمومی دنباله‌ای عددی را مشخص کنید که قدر نسبت آن ۳ و جملهٔ دوم آن ۷ باشد.**

پاسخ $d=۳$ $\quad t_n=nd+k$ $\quad t_۲=۷$ $\quad ۷=۲\times۳+k$ $\quad k=۱$ $\quad t_n=۳n+۱$

مثال **جملهٔ عمومی دنباله‌ای عددی را مشخص کنید که جمله‌های سوم و هفتم آن به ترتیب، ۴ و ۱۶- باشند.**

پاسخ با توجه به این‌که در دنباله‌های عددی فاصلهٔ هر دو جملهٔ متوالی مقدار ثابت d است، فاصلهٔ جمله‌های سوم و هفتم برابر ۴d خواهد بود:

$t_۷-t_۳=۴d$ $\quad -۱۶-۴=۴d$ $\quad -۲۰=۴d$

$d=-۵$ $\quad t_n=-۵n+k$ $\quad t_۳=۴$ $\quad ۴=-۵\times۳+k$

$k=۱۹$ $\quad t_n=-۵n+۱۹$

مثال **بین دو عدد ۳ و ۱۵، پنج عدد درج می‌کنیم که دنبالهٔ حاصل تشکیل دنبالهٔ عددی دهد. دنباله را مشخص کنید.**

پاسخ اگر عدد ۳ را جملهٔ اوّل بگیریم و ۵ جملهٔ وسط و سپس عدد ۱۵، در کل ۷ جمله خواهیم داشت که جملهٔ هفتم ۱۵ خواهد بود. فاصلهٔ جمله‌های هفتم و اوّل، شش جمله است:

$t_۷-t_۱=۶d$ $\quad ۱۵-۳=۶d$ $\quad d=۲$

$t_n=۲n+k$ $\quad t_۱=۳$ $\quad ۳=۲+k$ $\quad k=۱$ $\quad t_n=۲n+۱$

$۳,۵,۷,۹,۱۱,۱۳,۱۵$

مثال **جملهٔ عمومی دنباله‌های زیر را بنویسید.**

الف) $-۲a\ ,\ ۱۱a\ ,\ ۲۴a\ ,\ \dots$ $\qquad$ ب) $a+b\ ,\ ۰\ ,\ -(a+b)\ ,\ \dots$

پاسخ

الف) $۲\times۱۱a=(-۲a)+۲۴a$ نوع دنباله، عددی است.

$d=۱۱a-(-۲a)=۱۳a$ $\quad t_n=nd+k$ $\quad t_n=۱۳an+k$

$t_۱=-۲a$ $\quad -۲a=۱۳a+k$ $\quad k=-۱۵a$ $\quad t_n=۱۳an-۱۵a$

ب) $۲\times۰=(a+b)+(-(a+b))$ نوع دنباله، عددی است.

$d=۰-(a+b)=-(a+b)$ $\quad t_n=nd+k$

$t_n=-(a+b)n+k$ $\quad t_۱=(a+b)$ $\quad a+b=-(a+b)+k$

$k=۲a+۲b$ $\quad t_n=-(a+b)n+۲a+۲b$

مثال **کدام جمله از دنبالهٔ $۷,۱۱,۱۵,\dots$، برابر ۱۰۳ است؟**

پاسخ نوع دنباله، عددی است. $۲\times۱۱=۷+۱۵$

$d=۱۱-۷=۴$ $\quad t_n=۴n+k$ $\quad t_۱=۷$ $\quad ۷=۴+k$ $\quad k=۳$

$t_n=۴n+۳$ $\quad t_n=۱۰۳$ $\quad ۱۰۳=۴n+۳$ $\quad ۱۰۰=۴n$ $\quad n=۲۵$

جملهٔ بیست و پنجم برابر ۱۰۳ است.

مثال **کدام جملهٔ دنبالهٔ $-۱۰۴,-۹۱,-۷۸,\dots$ برابر صفر است؟**

پاسخ نوع دنباله، عددی است. $۲\times(-۹۱)=(-۱۰۴)+(-۷۸)$ $\quad -۱۸۲=-۱۸۲$

$d = -91 - (-104) = -91 + 104 = 13 \qquad t_n = 13n + k$

$t_1 = -104 \qquad -104 = 13 + k \qquad k = -117$

$t_n = 13n - 117 \qquad t_n = 0 \qquad 0 = 13n - 117 \qquad n = 9$

جملهٔ نهم دنباله، برابر صفر است. $t_9 = 0$

مثال **در یک دنبالهٔ حسابی داریم: $t_{11} - t_4 = 35$ و $t_3 + t_{12} = 69$، جملهٔ عمومی دنباله را مشخص کنید.**

پاسخ

$t_{11} - t_4 = 7d \qquad 35 = 7d \qquad d = 5$

$t_n = 5n + k \qquad t_3 + t_{12} = (15 + k) + (60 + k) = 75 + 2k = 69$

$2k = -6 \qquad k = -3 \qquad t_n = 5n - 3$

مثال **در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع جمله‌های نهم و سیزدهم برابر ۵۰ و جملهٔ پنجم آن ۱۳ است، جملهٔ عمومی دنباله را بیابید.**

پاسخ

$t_n = nd + k \qquad t_9 + t_{13} = (9d + k) + (13d + k) = 22d + 2k = 50$

رابطهٔ (۱) : $11d + k = 25$

$t_5 = 13 \qquad$ رابطهٔ (۲) : $13 = 5d + k$

$\begin{cases} 11d + k = 25 \\ 5d + k = 13 \end{cases} \qquad 6d = 12 \qquad d = 2 \qquad 10 + k = 13 \qquad k = 3 \qquad t_n = 2n + 3$

مثال **اگر در یک دنبالهٔ عددی، جملهٔ هشتم، دو برابر جملهٔ سیزدهم باشد، ثابت کنید جملهٔ دوم نیز دو برابر جملهٔ دهم خواهد بود.**

پاسخ

$t_n = nd + k \qquad t_8 = 2t_{13} \qquad 8d + k = 2(13d + k)$

$8d + k = 26d + 2k \qquad$ رابطهٔ (۱) : $-18d = k$

$$\frac{t_2}{t_{10}} = \frac{2d + k}{10d + k} \xleftrightarrow{k=-18d} = \frac{2d - 18d}{10d - 18d} = \frac{-16d}{-8d} = 2$$

$\frac{t_2}{t_{10}} = 2 \qquad t_2 = 2t_{10}$

مثال **x، چه باشد اگر $x + 5$ واسطهٔ عددی $2x + 1$ و $x + 2$ باشد؟**

پاسخ اگر a ، b و c تشکیل دنبالهٔ عددی دهند، گوییم: b واسطهٔ عددی a و c است و رابطهٔ $2b = a + c$ بین آن‌ها برقرار است.

$2(x + 5) = (2x + 1) + (x + 2)$

$2x + 10 = 3x + 3 \qquad x = 7$

مثال **اگر جمله‌های دوازدهم و هشتادوپنجم و جملهٔ آخر در دنباله‌ای عددی به ترتیب ۳۸ ، ۲۵۷ و ۳۹۵ باشند، جملهٔ عمومی دنباله و تعداد جمله‌ها را مشخص کنید.** $t_{12} = 38 \qquad t_{85} = 257$

پاسخ فاصلهٔ جمله‌های هشتاد و پنجم و دوازدهم، ۷۳ جمله است، پس:

$t_{85} - t_{12} = 73d \qquad 257 - 38 = 219 = 73d \qquad d = 3$

$t_n = nd + k \qquad t_n = 3n + k \qquad t_{12} = 38 \qquad 38 = 36 + k \qquad k = 2$

$t_n = 3n + 2$ جملهٔ عمومی

دنباله ۱۳۱ جمله دارد. $395 = 3n + 2 \qquad 393 = 3n \qquad n = 131$

مثال **ثابت کنید اگر a ، b و c تشکیل دنبالهٔ حسابی دهند، آن‌گاه $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ، $\frac{f(c)-f(a)}{c-a}$ و $\frac{f(c)-f(b)}{c-b}$ نیز دنبالهٔ عددی تشکیل می‌دهند.**

پاسخ اگر a ، b و c تشکیل دنبالهٔ عددی دهند و قدر نسبت این دنباله d باشد: $b-a=d$ ، $c-a=۲d$ و $c-b=d$ است.

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(b)-f(a)}{d} \quad , \quad \frac{f(c)-f(a)}{c-a}=\frac{f(c)-f(a)}{۲d} \quad , \quad \frac{f(c)-f(b)}{c-b}=\frac{f(c)-f(b)}{d}$$

برای آن‌که نشان دهیم این سه جمله، تشکیل دنبالهٔ عددی می‌دهند باید بررسی کنیم که دو برابرِ جملهٔ وسط، برابر مجموع دو جملهٔ دیگر باشد:

$$۲\left(\frac{f(c)-f(a)}{۲d}\right)=\frac{f(b)-f(a)}{d}+\frac{f(c)-f(b)}{d}$$

$$\frac{f(c)-f(a)}{d}=\frac{f(b)-f(a)+f(c)-f(b)}{d}$$

$$\frac{f(c)-f(a)}{d}=\frac{f(c)-f(a)}{d} \quad \text{(رابطهٔ بدیهی)}$$

مثال **حاصل‌ضرب سه جملهٔ متوالی دنباله‌ای عددی ۱۲۸۷ و مجموع آن‌ها ۳۳ است، آن‌ها را مشخص کنید.**

پاسخ فرض کنیم سه عدد مورد نظر به‌صورت: a ، b و c باشند. $a\cdot b\cdot c=۱۲۸۷ \qquad a+b+c=۳۳$

می‌دانیم: $a+c=۲b$ است. (b واسطهٔ عددی a و c است.)

$$۲b+b=۳b=۳۳ \qquad b=۱۱ \qquad \begin{cases}a+c=۲۲\\ ۱۱ac=۱۲۸۷\end{cases} \qquad \begin{cases}a+c=۲۲\\ a\cdot c=۱۱۷\end{cases}$$

$$c=۲۲-a \qquad a(۲۲-a)=۱۱۷ \qquad -a^۲+۲۲a=۱۱۷$$

$$a^۲-۲۲a+۱۱۷=۰ \qquad \begin{cases}a=۱۳ \ , \ c=۹\\ a=۹ \ , \ c=۱۳\end{cases}$$

دنباله به یکی از دو شکل مقابل است: $۹,۱۱,۱۳$ یا $۱۳,۱۱,۹$

مثال **بین اعداد ۱۱ و ۱۱۱، چه تعداد واسطهٔ عددی می‌توان قرار داد که بزرگ‌ترین واسطه از کوچک‌ترینِ آن‌ها ۹۲ واحد بیش‌تر باشد؟**

پاسخ فرض کنیم که تعدادِ واسطه‌ها، n باشد در این حالت با در نظر گرفتن ۱۱ به عنوان جملهٔ نخست، ۱۱۱ جملهٔ $(n+۲)$ اُم خواهد بود.

$$t_{n+۲}-t_۱=(n+۱)d \qquad ۱۱۱-۱۱=۱۰۰=(n+۱)d$$

اوّلین واسطه، جملهٔ دوم و آخرین واسطه، جملهٔ $(n+۱)$ اُم خواهد بود.

$$t_{n+۱}-t_۲=(n+۱-۲)d \qquad ۹۲=(n-۱)d$$

$$\begin{cases}۱۰۰=(n+۱)d\\ ۹۲=(n-۱)d\end{cases} \qquad \frac{۱۰۰}{۹۲}=\frac{(n+۱)d}{(n-۱)d} \qquad \frac{۱۰۰}{۹۲}=\frac{n+۱}{n-۱}$$

تعداد واسطه‌ها، ۲۴ است.

$$۱۰۰n-۱۰۰=۹۲n+۹۲ \qquad ۸n=۱۹۲ \qquad n=\frac{۱۹۲}{۸}=۲۴$$

مثال **جملهٔ عمومی دنبالهٔ اعداد بخش‌پذیر بر ۱۳ و سه رقمی را مشخص کنید. این دنباله چند جمله دارد؟**

پاسخ اوّلین عدد سه رقمی ۱۰۰ است:

$$\begin{array}{r|l} ۱۰۰ & ۱۳ \\ \hline -۹۱ & ۷ \\ ۹ & \end{array}$$

۱۰۰ بر ۱۳ بخش‌پذیر نیست و با توجه به باقی‌ماندهٔ ۹، اگر ۴ واحد به آن بیافزاییم یعنی ۱۰۴، نخستین عدد از دنباله است.

به همین ترتیب ۹۹۹ آخرین عدد سه رقمی است.

با توجه به باقی‌مانده، $۹۸۸=۹۹۹-۱۱$، آخرین عدد بخش‌پذیر بر ۱۳ و سه رقمی است.

$$\begin{array}{r|l} ۹۹۹ & ۱۳ \\ \hline -۹۱ & ۷۶ \\ ۸۹ & \\ -۷۸ & \\ \hline ۱۱ & \end{array}$$

$t_n = nd + k \qquad t_n = ۱۳n + k \qquad t_۱ = ۱۰۴$

جملهٔ عمومی: $۱۰۴ = ۱۳ + k \qquad k = ۹۱ \qquad t_n = ۱۳n + ۹۱$

$۹۸۸ = ۱۳n + ۹۱ \qquad n = ۶۹$

تعداد کل اعداد بخش‌پذیر بر ۱۳ و سه رقمی، ۶۹ جمله است.

مثال در دنبالهٔ عددی ... , y , ۳۵ , x , ۱۲۵، عدد y کدام است؟ *(کنکور)*

۱) -۱۰　　۲) -۵　　۳) صفر　　۴) ۵

پاسخ گزینهٔ (۱) درست است.

$t_۱ = ۱۲۵ \qquad t_۳ = ۳۵ \qquad t_۳ - t_۱ = ۲d \qquad -۹۰ = ۲d \qquad d = -۴۵ \qquad y = ۳۵ + (-۴۵) = -۱۰$

مثال کدام‌یک از دنباله‌های زیر، دنباله‌ای حسابی است؟

۱) $t_n = ۸n + ۱$　　۲) $t_n = n^۲$　　۳) $t_n = \frac{۱}{n} - ۳$　　۴) $t_n = n^۳ + n$

پاسخ گزینهٔ (۱) درست است. جملهٔ عمومی دنبالهٔ عددی به فرم $t_n = nd + k$ (عبارتِ درجهٔ ۱ برحسب n) است و در این حالت، ضریبِ n، برابر d است.

مثال اعداد $۲p+۳$ ، $۳p+۴$ و $۵p-۱$، سه جملهٔ متوالی دنباله‌ای عددی هستند، قدر نسبت این دنباله کدام است؟ *(کنکور)*

۱) -۴　　۲) -۵　　۳) -۶　　۴) -۷

پاسخ گزینهٔ (۴) درست است.

$۲(۳p+۴) = (۵p-۱) + (۲p+۳)$

$۶p + ۸ = ۷p + ۲ \qquad p = ۶ \qquad ۱۵, ۲۲, ۲۹$

$d = ۲۲ - ۲۹ = -۷$

مثال اگر در یک دنبالهٔ عددی، $t_۷ - t_{۱۱} = ۱۲$، قدر نسبت کدام است؟ *(کنکور)*

۱) -۳　　۲) -۲　　۳) ۲　　۴) ۳

پاسخ گزینهٔ (۱) درست است.

$t_۷ - t_{۱۱} = (۷-۱۱)d \qquad ۱۲ = -۴d \qquad d = -۳$

مثال در دنبالهٔ حسابی با جملهٔ عمومی $t_n = (k+۱)n^۲ + ۳kn + k - ۱$ جملهٔ اوّل و قدر نسبت به ترتیب کدام‌اند؟

۱) -۵ و -۲　　۲) ۵ و ۲　　۳) ۵ و ۳　　۴) -۵ و -۳

پاسخ گزینهٔ (۴) درست است. جملهٔ عمومی دنبالهٔ عددی، عبارتی درجهٔ ۱ است؛ پس باید ضریب $n^۲$ برابر صفر باشد.

$k + ۱ = ۰ \qquad k = -۱ \qquad t_n = -۳n - ۲$

ضریبِ n، همان قدر نسبت است: $t_۱ = -۵$ و $d = -۳$

مثال چندمین جمله از دنبالهٔ ... , ۸ , ۵ , ۲ برابر ۵۶ است؟ *(کنکور)*

۱) ۱۸　　۲) ۱۹　　۳) ۲۰　　۴) ۲۱

پاسخ گزینهٔ (۲) درست است. نوع دنباله، عددی است.

$۲(۵) = ۲ + ۸ \qquad ۱۰ = ۱۰$

$d = ۵ - ۲ = ۳ \qquad t_n = ۳n + k \qquad t_۱ = ۲ \qquad ۲ = ۳ + k \qquad k = -۱$

$t_n = ۳n - ۱ \qquad t_n = ۵۶ \qquad ۵۶ = ۳n - ۱ \qquad n = ۱۹ \qquad t_{۱۹} = ۵۶$

مثال در دنبالهٔ حسابی که $t_۱ = ۱۷۰$ و $t_۲ = ۱۶۱$، چند جملهٔ مثبت دارد؟ *(کنکور)*

۱) ۱۷ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۱۹

پاسخ گزینهٔ (۴) درست است.

$d = t_۲ - t_۱ = ۱۶۱ - ۱۷۰ = -۹$

$t_n = -۹n + k \qquad t_۱ = ۱۷۰ \qquad ۱۷۰ = -۹ + k \qquad k = ۱۷۹$

$t_n = -۹n + ۱۷۹$

جمله‌های مثبت : $t_n > ۰ \qquad -۹n + ۱۷۹ > ۰ \qquad ۱۷۹ > ۹n \qquad n < \frac{۱۷۹}{۹}$

$n < ۱۹/۸ \quad , \quad n \in N$

۱۹ جملهٔ مثبت دارد.

مثال قطار سریع‌السیر به‌طور آزمایشی، فاصلهٔ دو شهر را بار اوّل در ۴ ساعت طی کرده است، طبق برنامهٔ تعیین شده، در هر رفت و برگشت، ۵ دقیقه از مدت‌زمان نوبت قبل کاسته می‌شود تا مدت‌زمان پیمودن این ساعت به ۲ ساعتِ پیش‌بینی شده برسد، تعداد نوبت‌های آزمایشی (با احتسابِ بار اوّل) کدام است؟ *(کنکور)*

۱) ۱۶ ۲) ۲۰ ۳) ۲۴ ۴) ۲۵

پاسخ گزینهٔ (۴) درست است. جملهٔ اوّل ۴ ساعت یعنی ۲۴۰ دقیقه و جملهٔ آخر ۱۲۰ دقیقه و قدر نسبت، (-۵) است.

$t_n = nd + k \qquad t_n = -۵n + k$

$t_۱ = ۲۴۰ \qquad ۲۴۰ = -۵ + k \qquad k = ۲۴۵$

$t_n = -۵n + ۲۴۵ \qquad ۱۲۰ = -۵n + ۲۴۵$

$۵n = ۱۲۵ \qquad n = ۲۵$

مثال اگر مجموع جمله‌های اوّل، پنجم و نهم دنباله‌ای عددی ۳۶ و جملهٔ پانزدهم برابر ۴۲ باشد، قدر نسبت کدام است؟ *(کنکور)*

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) $\frac{۴}{۳}$

پاسخ گزینهٔ (۳) درست است.

$t_n = nd + k \qquad t_۱ + t_۵ + t_۹ = d + k + ۵d + k + ۹d + k$

$۱۵d + ۳k = ۳۶ \qquad ۵d + k = ۱۲$

$t_{۱۵} = ۱۵d + k = ۴۲ \qquad \begin{cases} ۵d + k = ۱۲ \\ ۱۵d + k = ۴۲ \end{cases} \qquad ۱۰d = ۳۰ \qquad d = ۳$

مثال در دنباله‌ای عددی، $t_k = m$ و $t_m = k$ است، t_{m+k} کدام است؟ *(کنکور)*

۱) $m + k$ ۲) $\frac{m+k}{۲}$ ۳) $m \times k$ ۴) صفر

پاسخ گزینهٔ (۴) درست است.

$t_m - t_k = (m - k)d \qquad k - m = (m - k)d$

$d = \frac{k - m}{m - k} \qquad d = -۱ \qquad t_{m+k} = t_m + kd = k + k(-۱) = ۰$

دنبالهٔ هندسی

چنانچه در دنباله‌ای، هر جمله در عددی ثابت ضرب شود تا جملهٔ بعدی مشخص شود، دنبالهٔ هندسی نامیده می‌شود. در این حالت نسبت هر جمله به جملهٔ قبلی برابر مقداری ثابت (قدر نسبت $= r$) خواهد بود.

جملهٔ عمومی هر دنبالهٔ هندسی را می‌توان به‌صورت سادهٔ شدهٔ $t_n = r^n \cdot k$ نوشت که n، شمارهٔ جمله و t_n، جملهٔ n اُم و r، قدر نسبت دنباله و k عددی ثابت است.

با توجه به این‌که نسبت هر جمله به جملهٔ قبلی r است، اگر نسبت جمله‌ای به چهارمین جملهٔ قبل آن بیابیم حاصل r^4 و به همین ترتیب داریم $\frac{t_m}{t_n} = r^{m-n}$ است، سپس می‌نویسیم $t_n = r^n \cdot k$ و با کمک یکی از جمله‌ها، k را می‌یابیم.

مثال اگر در دنباله‌ای هندسی، $r = 3$ و $t_2 = 7$ باشد، جملهٔ عمومی چیست؟

پاسخ $t_n = r^n \cdot k \qquad t_n = 3^n \times k \qquad t_2 = 7 = 3^2 \times k \qquad k = \frac{7}{9} \qquad t_n = 3^n \times \frac{7}{9}$

مثال اگر در دنباله‌ای هندسی $t_5 = 40$ و $t_2 = 5$ باشد، جملهٔ عمومی چیست؟

پاسخ $\frac{t_5}{t_2} = r^{5-2} = r^3 = \frac{40}{5} = 8 \qquad r^3 = 8 \qquad r = 2$

$t_n = 2^n \times k \qquad 5 = 2^2 \times k \qquad k = \frac{5}{4} \qquad t_n = 2^n \times \frac{5}{4}$

اگر a ،b و c سه جملهٔ متوالی دنباله‌ای هندسی باشند، داریم: $\frac{c}{b} = \frac{b}{a} \rightarrow b^2 = ac$

در این حالت b را واسطهٔ هندسی a و c می‌نامیم.

برای b در این حالت دو مقدار قرینهٔ هم می‌توان یافت: $b = \sqrt{ac} \ , \ b = -\sqrt{ac}$

برای آن‌که تشخیص دهیم که دنباله‌ای از نوع هندسی است یا نه، باید مربع (به توان ۲ رسیده) هر جمله برابر حاصل‌ضرب جمله‌های قبل و بعد از آن باشد.

در صورتی جملهٔ عمومی یک دنباله می‌تواند مربوط به دنبالهٔ هندسی باشد که (پس از ساده شدن) فقط از ضرب و تقسیم تشکیل شده و متغیرِ n، در توان باشد. در این حالت، عددی که به توانِ n رسیده که در واقع: «پایه به توانِ ضریبِ n است، همان قدر نسبت است.»

به‌طور مثال در $t_n = \frac{2^{2n+1} \times 3}{5^{n+3} \times 11}$، فقط ضرب و تقسیم داریم و متغیر در توان است، پس دنبالهٔ هندسی است.

$r = n$ پایه به توانِ ضریبِ $\rightarrow r = \frac{2^2}{5^1} = \frac{4}{5}$

$b_n = \frac{2^{1-n} \times 3}{5^{2n+1} \times 7} \rightarrow$ دنبالهٔ هندسی $\rightarrow r = \frac{2^{-1}}{5^2} = \frac{1}{2 \times 25} = \frac{1}{50}$

مثال در دنباله‌های زیر، جملهٔ عمومی را مشخص کنید.

الف) $2, -4, 8, \ldots$

ب) $5, 15, 45, \ldots$

پاسخ

الف) نوع دنباله، هندسی است.
$(-4)^2=2\times 8 \qquad 16=16$

$r=\frac{-4}{2}$ یا $\frac{8}{-4}=-2 \qquad t_n=k\cdot r^n \qquad t_n=k(-2)^n$ و $t_1=2 \Rightarrow 2=k(-2)^1 \qquad k=-1 \qquad \boxed{t_n=-(-2)^n}$

ب) نوع دنباله، هندسی است.
$15^2=5\times 45 \qquad 225=225$

$r=\frac{15}{5}=\frac{45}{15}=3 \qquad t_n=k\cdot r^n \qquad t_n=k\times 3^n$ و $t_1=5 \Rightarrow 5=k\times 3 \qquad k=\frac{5}{3} \qquad \boxed{t_n=\frac{5}{3}\times 3^n}$

مثال **در دنباله‌ای هندسی، جمله‌های سوم و ششم، به ترتیب برابر ۵ و ۴۰- هستند، جملهٔ عمومی دنباله را مشخص کنید.**

پاسخ فاصلهٔ بین جمله‌های سوم و ششم، ۳ جمله است.

$\frac{t_6}{t_3}=r^3 \qquad \frac{-40}{5}=-8=r^3 \qquad r=-2 \qquad t_n=r^n\cdot k \qquad t_n=(-2)^n\cdot k$ و $t_3=5$

$5=(-2)^3\cdot k \qquad k=\frac{-5}{8} \qquad \boxed{t_n=(-2)^n\times\frac{-5}{8}}$

مثال **جملهٔ هفتم یک دنبالهٔ هندسی، هشت برابر جملهٔ چهارم آن است. نسبت جملهٔ سیزدهم به جملهٔ سوم، چیست؟**

پاسخ
$t_7=8t_4 \qquad \frac{t_7}{t_4}=8$

فاصلهٔ جمله‌های چهارم و هفتم، سه جمله است.

$\frac{t_7}{t_4}=r^3=8 \qquad r=2 \qquad \frac{t_{13}}{t_3}=r^{13-3}=r^{10}=2^{10}=1024$

مثال **نشان دهید، دو دنبالهٔ هندسی می‌توان یافت که در هر دو جملهٔ هفتم، ۱۶ برابر جملهٔ پنجم باشد و مجموع سه جملهٔ نخست، برابر ۲۷۳ باشد. جملهٔ چهارم را در هر دو مشخص کنید.**

پاسخ فاصلهٔ جمله‌های هفتم و پنجم، ۲ جمله است.

$\frac{t_7}{t_5}=r^{7-5}=r^2 \qquad 16=r^2 \qquad r=4$ یا $r=-4$

اگر جملهٔ اوّل را a فرض کنیم، سه جملهٔ اوّل به‌صورت: ar^2 ، ar و a خواهند بود.

$r=4:\ a\,,\,4a\,,\,16a$

$a+4a+16a=273 \qquad 21a=273 \qquad a=13 \qquad t_1=13 \to t_4=t_1\cdot r^3=13\times 4^3=832$

$r=-4:\ a\,,\,-4a\,,\,16a \qquad 13a=273 \qquad a=21 \qquad t_4=21(-4)^3=-1344$

مثال **در یک دنبالهٔ هندسی، حاصل‌ضرب جمله‌های چهارم و ششم برابر جملهٔ دهم است، اگر جملهٔ نهم مخالف صفر باشد، تفاضل جملهٔ نخست و قدر نسبت را مشخص کنید.**

پاسخ اگر جملهٔ عمومی $t_n=kr^n$ باشد، $t_4=kr^4$ و $t_6=kr^6$ و جملهٔ دهم $t_{10}=kr^{10}$ خواهد بود.

$t_4\cdot t_6=t_{10} \qquad kr^4\cdot kr^6=kr^{10} \qquad k^2r^{10}=kr^{10} \qquad k^2=k$

$k^2-k=0 \qquad k(k-1)=0 \qquad k=0$ یا $k=1$

$t_1=kr \qquad t_1-r=kr-r=r(k-1)=r(1-1)=0$