فصل ۱

مجموعه، الگو و دنباله


آلا داغلار یا کوه‌های رنگی در شهرستان ماه‌نشان استان زنجان

تست

مجموعهٔ $A=\{x \mid x(x-1)(x-2)=0\ ,\ x\in\mathbb{N}\}$ دارای چند زیرمجموعه است؟ (کنکور سراسری)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۷ ۴) ۸

پاسخ گزینهٔ (۲) است. پاسخ: وقتی ضرب چند عبارت صفر می‌شود، تک‌تک آن‌ها را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$AB=0 \rightarrow A=0$ یا $B=0$

$x(x-1)(x-2)=0 \rightarrow x=0$ یا $x-1=0 \rightarrow x=1$ یا $x-2=0 \rightarrow x=2$

چون صفر، عضو اعداد طبیعی نیست، پس A دارای دو عضو ۱ و ۲ می‌باشد. زیرمجموعه‌های A عبارتند از $\{\}$، $\{1\}$، $\{2\}$، $\{1,2\}$ می‌باشد، پس A دارای ۴ زیرمجموعه است.

تذکر: تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ n عضوی 2^n می‌باشد. اگر $A=\{2,3,5\}$ باشد، تعداد زیرمجموعه‌ها $n=2^3$ می‌باشد.

درس اوّل: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی


جورج کانتور

«مجموعه» یکی از اساسی‌ترین مفاهیم ریاضی است که بسیاری از نظریه‌های دیگر ریاضی در یک قرن اخیر بر مبنای آن پایه‌گذاری یا سازماندهی شده‌اند. مطالعات جدی دربارهٔ مجموعه‌ها با کار جورج کانتور در سال ۱۸۷۰ آغاز می‌شود.

مجموعه‌های اعداد

انسان در طول تاریخ برحسب نیاز خود از مجموعه‌های مختلف اعداد استفاده کرده است. برخی از این مجموعه‌ها که در سال‌های قبل با آنها آشنا شدیم، به شرح زیرند :

مجموعه اعداد طبیعی: $\mathbb{N}=\{1,2,3,4,\dots\}$

مجموعه اعداد حسابی: $\mathbb{W}=\{0,1,2,3,4,\dots\}$

مجموعه اعداد صحیح: $\mathbb{Z}=\{\dots,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}$

مجموعه اعداد گویا : $\mathbb{Q}=\{\frac{m}{n} \mid m,n\in\mathbb{Z}\ ,n\neq0\}$ مانند $\frac{1}{2}$ و $\frac{-3}{7}$ و ۲

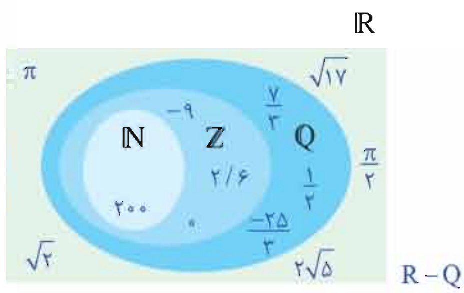
مجموعه اعداد گنگ : $\mathbb{Q}'$ = مجموعه اعدادی که نتوان آنها را به‌صورت نسبت دو عدد صحیح نمایش داد.
اعدادی مانند $\sqrt{2}$ و π گنگ هستند.

مجموعه اعداد حقیقی : $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود رابطهٔ زیرمجموعه بودن بین این مجموعه‌ها به شکل $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{W}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$ برقرار است. به‌عبارت دیگر تمام مجموعه‌های اعدادی که تاکنون با آنها آشنا شده‌ایم، زیرمجموعه‌هایی از اعداد حقیقی‌اند. در نتیجه، هر عدد دلخواهی را که درنظر بگیریم، باید جایی روی محور اعداد حقیقی داشته باشد و همچنین هر نقطه روی این محور نشان‌دهندهٔ یک عدد حقیقیِ مشخص است.

کار در کلاس

۱ الف) مجموعه $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ چه نام دارد؟ مجموعه اعداد گنگ آن را روی شکل مقابل هاشور بزنید و دو عضو دلخواه از آن را در ناحیهٔ هاشورخورده بنویسید.



ب) دو عددگویا مثال بزنید که عدد صحیح نباشند و آنها را روی شکل مقابل در محل مناسب بنویسید. یکی $\frac{7}{3}$، یکی دیگه رو خودت بگو

پ) اعداد زیر را روی شکل و در محل مناسب بنویسید.

$\sqrt{17},0,200,\frac{\pi}{2},2/6,2\sqrt{5},-\frac{25}{3},-9$

ت) مجموعه اعداد صحیح غیر حسابی را با نمایش اعضا بنویسید. $\mathbb{Z}-\mathbb{W}=\{\dots,-3,-2,-1\}$

ث) مجموعهٔ $\mathbb{W}-\mathbb{N}$ چند عضو دارد؟ یک عضو $\mathbb{W}-\mathbb{N}=\{0\}$

تست

اگر $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$ به‌ترتیب مجموعهٔ اعداد طبیعی، صحیح، گویا و حقیقی باشند، کدام رابطه نادرست است؟ (کنکور سراسری)

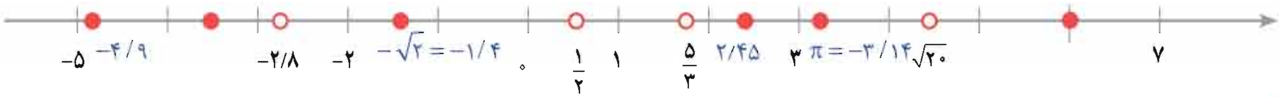
۱) $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}\subseteq\mathbb{N}$ ۳) $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}$ ۴) $\mathbb{N}\subset\mathbb{Q}$

پاسخ گزینهٔ (۲) است.

تذکر: رابطهٔ $A\subseteq B$ که می‌خوانیم A زیرمجموعهٔ B بدین معناست که کلیهٔ اعضای مجموعهٔ A در مجموعهٔ B باشد، پس B قوی‌تر است، زیرا علاوه بر اعضای A می‌تواند عضوهای دیگری نیز داشته باشد. در این‌جا $\mathbb{R}\subseteq\mathbb{N}$ نادرست است، چون $\mathbb{R}$ قوی‌تر است. راه‌حل تستی: مثال نقض $\sqrt{2}\in\mathbb{R}$ اما در $\mathbb{N}$ وجود ندارد.

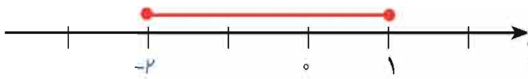
۲ هریک از اعداد داده شده را در یکی از جاهای مشخص شده روی محور بنویسید. کدام یک از این شش عدد گنگ‌اند؟ زیر آنها خط بکشید.

$$۲/۴۵\ ,\ \frac{-۷}{۲}\ ,\ ۶\ ,\ -۴/۹\ ,\ \pi\ ,\ -\sqrt{۲}$$



بازه‌ها

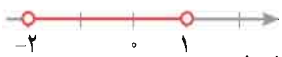
در اینجا گونهٔ دیگری از زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$ را درنظر می گیریم. فرض کنید A مجموعهٔ شامل تمام اعداد حقیقی بین ۲− و ۱ به همراه خود این دو عدد باشد؛ یعنی $A=\{x\in\mathbb{R} \mid -۲\le x\le ۱\}$. اعضای A را روی محور زیر، با رنگ کردن مشخص کنید. آیا می‌توان تمام اعضای A را فهرست کرد؟ غیر آیا می‌توان اولین عدد حقیقیِ بعد از ۲− را مشخص کرد؟ غیر



زیرمجموعه‌هایی از $\mathbb{R}$ را که شامل تمام اعداد حقیقی بین دو عدد مشخص‌اند، «بازه» یا «فاصله» می‌نامیم. بازه‌ها در ریاضیات از اهمیت نسبتاً زیادی برخوردارند و ما هم در برخی از فصل‌های بعدی این کتاب به دفعات با آنها سر و کار خواهیم داشت. از این‌رو شایسته است که برای نشان دادن آنها از نماد ساده‌تری استفاده شود. بنابراین A را با نماد $[-۲,۱]$ نشان می‌دهیم و آن را بازهٔ بسته از ۲− تا ۱ می‌نامیم. حال اگر نقاط ابتدایی و انتهایی این بازه یعنی ۲− و ۱ را از A حذف کنیم، آنگاه مجموعه‌ای مانند $B=\{x\in\mathbb{R} \mid -۲<x<۱\}$ به‌دست می‌آید که آن را بازهٔ باز بین ۲− و ۱ می‌نامیم و با نماد $(-۲,۱)$ نشان می‌دهیم. به‌طور خلاصه:

بازه بسته بین ۲− و ۱ : $A=[-۲,۱]=\{x\in\mathbb{R} \mid -۲\le x\le ۱\}$

بازه باز بین ۲− و ۱ : $B=(-۲,۱)=\{x\in\mathbb{R} \mid -۲<x<۱\}$



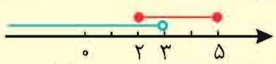
بازه‌های نیم باز هم به روش مشابه تعریف می‌شوند.

تست

کدام‌یک از اعداد زیر متعلق به مجموعهٔ $[۲,۵)-[۳,۴]\cap(-\infty,۳)$ می‌باشد؟

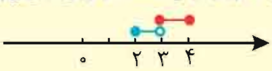
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۱

پاسخ: ابتدا به کمک نمودار $(-\infty,۳)\cap[۲,۵)$ را می‌یابیم:



باتوجه‌به نمایش هندسی اشتراک بین دو بازه $[۲,۳)$ می‌باشد. سپس $[۲,۳)-[۳,۴]$ را بررسی می‌کنیم یعنی مقادیری که در $[۲,۳)$ هست و در $[۳,۴]$ وجود ندارد:

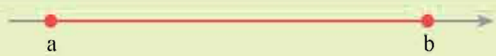
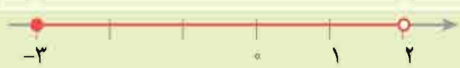
باتوجه‌به نمایش هندسی بازهٔ $[۲,۳)$ می‌باشد که با در نظر گرفتن گزینه‌ها عدد ۲ متعلق به بازه است: $۲\in[۲,۳)$



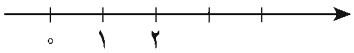
پاسخ گزینهٔ (۱) است.

فعالیت

اگر a و b دو عدد حقیقی دلخواه باشند، به‌طوری که a<b آنگاه جدول زیر را کامل کنید:

نمایش هندسی	نمایش مجموعه‌ای	بازه	نوع بازه
	$\{x\in\mathbb{R} \mid a<x<b\}$		باز
		$[a,b]$	بسته
		$[a,b)$	نیم باز
		$(a,b]$	نیم باز
	$\{x\in\mathbb{R} \mid ۱<x\le ۵\}$		
	$\{x\in\mathbb{R} \mid -۳\le x<۲\}$		

گاهی تمام اعداد حقیقی مثلاً بزرگ‌تر از ۲ مورد نظر است. به‌عنوان مثال، می‌دانیم که مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $۲x > ۴$ به‌صورت $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x > ۲\}$ است. اعضای C را روی محور زیر نشان دهید.

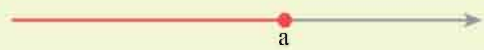


(۲,+∞)

آیا می‌توانید C را به صورت یک بازه بنویسید؟ برای اینکه این مجموعه را به شکل بازه بنویسیم، از نماد $+\infty$ (بخوانید : مثبت بی‌نهایت) استفاده می‌کنیم. مجموعهٔ C را در قالب بازه با نماد $(۲,+\infty)$ نمایش می‌دهیم که یک بازه باز محسوب می‌شود. به همین ترتیب برای مجموعه‌ای مثل $D = \{x \in \mathbb{R} | x \leq ۱\}$ نمایش بازه‌ای به صورت $(-\infty,۱]$ خواهد بود که یک بازهٔ نیم باز است. توجه داریم که $+\infty$ و $-\infty$ اعداد حقیقی نیستند. در سال‌های آینده با این دو نماد بیشتر آشنا خواهیم شد.

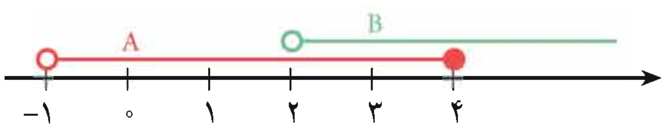
فعالیت

اگر a عدد حقیقی دلخواهی باشد، جدول زیر را کامل کنید.

نمایش هندسی	نمایش مجموعه‌ای	بازه	نوع بازه
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$		
		$[a,+\infty)$	نیم باز
			
		$(-\infty,a)$	
	$\mathbb{R}$		
			
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < ۵\}$		

مثال

می‌خواهیم اجتماع و اشتراک دو بازهٔ $A=(-۱,۴]$ و $B=(۲,+\infty)$ را به‌دست آوریم. نمایش هندسی هر دو بازه را مطابق شکل روی یک محور رسم می‌کنیم.



از روی شکل دیده می‌شود که $A \cup B$ برابر است با مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی بزرگ‌تر از(۱-) یعنی :

$(-۱,۴] \cup (۲,+\infty) = (-۱,+\infty)$

همچنین با توجه به شکل ملاحظه می‌شود که $A \cap B$ برابر است با مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی بین ۲ و ۴ به همراه خود عدد ۴؛ یعنی :

$(-۱,۴] \cap (۲,+\infty) = (۲,۴]$

توضیح دهید که چرا $۲ \notin A \cap B$.

تذکر: در اشتراک باید عضو در هر دو مجموعه باشد، در این‌جا ۲ عضو B نیست، پس در اشتراک وجود ندارد.

کار در کلاس

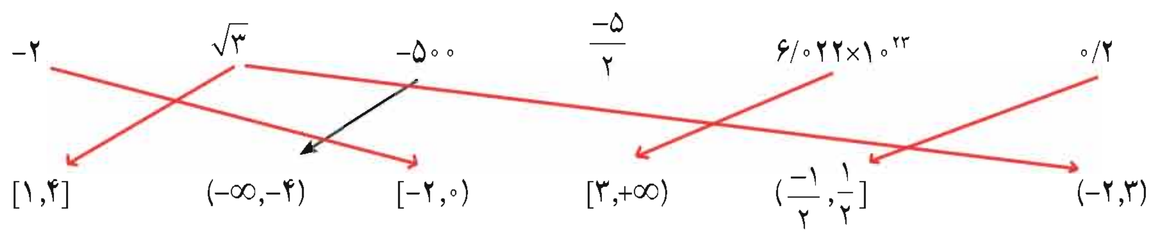
تهی زیرمجموعهٔ همهٔ مجموعه‌هاست.

۱ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید:

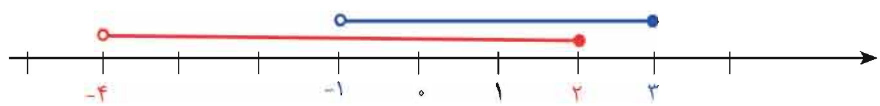
الف) $\frac{4}{3} \in [\frac{1}{2}, 2)$ درست   ب) $-2 \in (-2, 0]$ نادرست   پ) $0 \in (-2, 0]$ درست   ت) $-2 \in \{-2, 0\}$ درست   ث) $-1 \in \{-2, 0\}$ نادرست

ج) $[-1, 2] \subseteq (-1, 2)$ نادرست   چ) $\{0, 1\} \subseteq [-1, 2)$ درست   ح) $\varnothing \subseteq (-17, 0]$ درست   خ) $[2, 5] = (2, 5]$ نادرست   د) $\sqrt{2} \in (0, 1)$ نادرست

۲ هر یک از اعداد زیر عضو یک یا چند تا از بازه‌های داده شده هستند. هر عدد را به بازه یا بازه‌های نظیر آن وصل کنید.



۳ نمایش هندسی دو بازه $A = (-4, 2]$ و $B = (-1, 3]$ را روی محور زیر رسم کنید و سپس حاصل عبارت های زیر را بنویسید.



الف) $A \cap B = (-1, 2]$ ب) $A \cup B = (-4, 3]$ پ) $A - B = (-4, -1]$ ت) $B - A = (2, 3]$

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

فعالیت

فرض کنید A مجموعهٔ اعداد طبیعی کمتر از ۴ و B مجموعهٔ اعداد صحیح کمتر از ۴ باشد.

الف) این دو مجموعه را با نمایش اعضای آنها مشخص کنید. $A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{\ldots, -1, 0, 1, 2, 3\}$

ب) A چند عضو دارد؟ ۳ عضو

پ) دربارهٔ تعداد اعضای B چه می‌توان گفت؟ بی‌شمار

مجموعه‌هایی مانند A را که تعداد اعضای آنها یک عدد حسابی است، **مجموعه‌های متناهی** می‌نامیم.

با توجه به مطلب فوق، B یک مجموعهٔ متناهی نیست؛ زیرا نمی‌توان تعداد اعضای آن را با یک عدد بیان کرد. در واقع تعداد اعضای این مجموعه از هر عددی که در نظر بگیریم، بزرگ‌تر است. چنین مجموعه‌هایی را **مجموعه‌های نامتناهی** می‌نامیم.

تست

اگر A مجموعه‌ای نامتناهی و B مجموعه‌ای متناهی باشد، کدام گزینه نادرست است؟

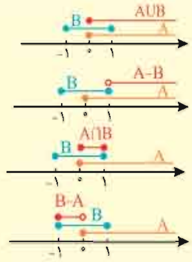
۱) $A \cup B$ نامتناهی ۲) $A - B$ نامتناهی ۳) $A \cap B$ متناهی ۴) $B - A$ نامتناهی

پاسخ: گزینهٔ (۱) درست است، زیرا اجتماع $A \cup B$ هر مجموعه متناهی و نامتناهی، مجموعه‌ای نامتناهی است.

گزینهٔ (۲) درست است، اگر از مجموعهٔ نامتناهی A مجموعهٔ متناهی B را کم کنیم، $A - B$ مجموعه‌ای نامتناهی می‌باشد.

گزینهٔ (۳) درست است، اشتراک مجموعهٔ نامتناهی A و مجموعهٔ متناهی B، مجموعهٔ $A \cap B$ مجموعه‌ای متناهی است.

گزینهٔ (۴) نادرست است، اگر از مجموعهٔ متناهی B مجموعهٔ نامتناهی A را کم کنیم، مجموعهٔ $B - A$ متناهی است.



کار در کلاس

۱) متناهی یا نامتناهی بودن هر یک از مجموعه‌های زیر را مشخص کنید. دربارهٔ مجموعه‌های متناهی سعی کنید تعداد دقیق یا تقریبی اعضای هر یک از آنها را بنویسید.

مجموعه	نامتناهی	متناهی	تعداد اعضا (در مورد مجموعه‌های متناهی)
مجموعه اعداد اول یک رقمی		✓	
مجموعه انسان‌های روی زمین		✓	
مجموعه اعداد طبیعی فرد	✓		
مجموعه سلول‌های عصبی مغز یک انسان		✓	
مجموعه تمام دایره‌های به مرکز مبدأ مختصات	✓		
مجموعه دانش‌آموزان مدرسهٔ شما		✓	
مجموعه اعداد طبیعی ده رقمی		✓	
مجموعه درخت‌های جنگل های آمازون		✓	
مجموعه کسرهای مثبت با صورت یک	✓		
مجموعه مضرب‌های طبیعی عدد ۱۰	✓		
بازه (۰, ۱)	✓		
مجموعه مولکول‌های موجود در یک مول مشخص از آب		✓	

۲) دو مجموعهٔ متناهی نام ببرید. پاسخ ۲ یک مثال: مجموعهٔ اعداد زوج و اول {۲}. مثال دیگر را خودت بگو!

۳) دو مجموعهٔ نامتناهی مثال بزنید که یکی از آنها زیرمجموعهٔ دیگری باشد. پاسخ ۳ یک مثال: A= اعداد طبیعی B= اعداد طبیعی زوج $B \subseteq A$

۴) دو مجموعهٔ نامتناهی مثل A و B مثال بزنید که $A \subseteq B$ بوده و $B - A$ تک عضوی باشد. پاسخ ۴ یک مثال: $W - N = \{0\}$

تذکر: تعداد اعضای برخی از مجموعه‌های متناهی ممکن است بسیار زیاد باشد؛ با این حال با داشتن امکانات لازم و صرف وقت کافی ممکن است بتوان تعداد آنها را به‌دست آورد.

تست

اگر A مجموعه‌ای نامتناهی و B مجموعه‌ای متناهی باشد، کدام مجموعه نامتناهی است؟ (خارج از کشور ـ ۹۲)

۱) $A \cap B$ ۲) $B - A$ ۳) $A - B$ ۴) $(A - B) - A$

پاسخ: گزینهٔ ۱: اشتراک مجموعهٔ متناهی و نامتناهی مجموعه‌ای متناهی است، پس نادرست می‌باشد.

گزینهٔ ۲: اگر از مجموعهٔ متناهی B مجموعهٔ نامتناهی A را کم کنیم، $B - A$ مجموعه‌ای متناهی است، پس نادرست می‌باشد.

گزینهٔ ۳: اگر از مجموعهٔ نامتناهی A مجموعهٔ متناهی B را کم کنیم، $A - B$ مجموعه‌ای نامتناهی است، پس درست است.

گزینهٔ ۴: می‌دانیم $A - B$ نامتناهی است و $A - B \subset A$ است، پس $(A - B) - A$ تهی می‌شود که متناهی است، پس نادرست است.

پاسخ گزینهٔ (۳) است.

جنگل‌های آمازون

آمازون که به ریه‌های زمین مشهور است، جنگل بسیار بزرگی در شمالِ آمریکای جنوبی است و به‌دلیل همین وسعت، به آن جنگل‌های آمازون گفته می‌شود. حدود ۶۰ درصد این جنگل در خاک برزیل قرار دارد، همچنین بخش‌هایی از آن هم در کشورهای پرو، اکوادور، گویان، کلمبیا، ونزوئلا، بولیوی و سورینام واقع شده است. در واقع این جنگل بیش از سه برابر خاک کشور ما وسعت دارد. رودخانهٔ آمازون با طول حدود ۶۵۰۰ کیلومتر به‌عنوان پرآب‌ترین رودخانهٔ دنیا که ۵ درصد آب شیرین جهان را در خود جای می‌دهد، نیز از دل این جنگل عبور می‌کند. نتیجهٔ یک مطالعه بزرگ که مدت ۱۰ سال به طول انجامید، نشان می‌دهد که ۳۹۰/۰۰۰/۰۰۰/۰۰۰ اصله درخت در ۱۶۰۰۰ گونهٔ مختلف در جنگل‌های آمازون وجود دارد. با این‌حساب سهم هر فرد دنیا از این جنگل چند درخت می‌شود؟! با وجود این، مجموعه درخت‌های جنگل های آمازون یک مجموعه متناهی محسوب می‌شود یا نامتناهی؟


طرحی از سلول‌های عصبی مغز

تست

اگر عدد ۳ متعلق به بازهٔ $(2m+1, 3m+5)$ باشد، حدود m کدام است؟

۱) $(-\infty, 1)$ ۲) $(-\frac{2}{3}, +\infty)$ ۳) $(-\frac{2}{3}, 1)$ ۴) $(\frac{2}{3}, 1)$

پاسخ: برای آن‌که ۳ متعلق به بازه باشد، باید یک‌بار کم‌تر از $(3m+5)$ و یک‌بار بیشتر از $2m+1$ بگیریم سپس بین جواب‌ها اشتراک بگیریم.

$2m+1<3 \rightarrow 2m<2 \rightarrow m<1$

$3<3m+5 \rightarrow 3-5<3m \rightarrow -2<3m \rightarrow -\frac{2}{3}<m \overset{\cap}{\Rightarrow} -\frac{2}{3}<m<1$

پاسخ گزینهٔ (۳) است.

فعالیت

الف) $\frac{1}{3}$ عددی بین ۰ و ۱ است. چهار عدد گویای دیگر از بازهٔ (۰ , ۱) بنویسید و جواب خود را با جواب‌های دوستانتان مقایسه کنید. بله، $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{4}$، دو مثال دیگر خودتان بگویید.

ب) آیا می‌توان بین ۰ و ۱ به هر تعداد دلخواه عدد گویا ارائه کرد؟ بله

پ) در مورد متناهی یا نامتناهی بودن اعداد گویای موجود در بازهٔ (۰ , ۱) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ نامتناهی

ت) در مورد متناهی یا نامتناهی بودن Q چه می توان گفت؟ نامتناهی

ث) اگر A دارای یک زیر مجموعهٔ نامتناهی باشد، آنگاه A یک مجموعه .... نامتناهی خواهد بود.

عدد آووگادرو

در شیمی تعداد $6/022\times10^{23}$ عدد از هر ذره (مولکول یا اتم) را یک مول از آن ذره می‌نامند. برای درک میزان بزرگی این عدد، فرض کنیم تعداد مولکول‌های موجود در یک مول آب را که ۱۸ گرم است، بتوانیم مولکول به مولکول بشماریم و کار شمردن هر مولکول آن هم یک ثانیه زمان ببرد. در این صورت کار شمارش نزدیک به ۲۰ میلیون میلیارد سال به طول خواهد انجامید که این زمان حدود یک میلیون برابر عمر جهان است!

به نظر شما، مجموعه مولکول های یک مول مشخص از آب، یک مجموعهٔ متناهی است یا نا متناهی؟

تمرین

۱) فرض کنید U مجموعهٔ تمام مضرب‌های طبیعی عدد ۵ باشد.

الف) U را با نمایش اعضای آن بنویسید. $U=\{5,10,15,...\}$

ب) U متناهی است یا نامتناهی؟ نامتناهی

پ) یک زیرمجموعهٔ متناهی از U بنویسید.

ت) دو زیر مجموعهٔ نامتناهی مانند C و D از U بنویسید؛ به‌طوری که $C\subseteq D$.

۲) متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) مجموعه اعداد طبیعی. نامتناهی

ب) مجموعه شمارنده‌های طبیعی عدد ۳۶.

پ) بازه $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$.

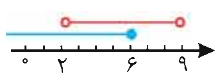
ت) $A=\{x\in \mathbb{N} \mid 1<x<2\}$. متناهی $A=\varnothing$

ث) مجموعهٔ مضرب‌های طبیعی عدد ۱۰۰. نامتناهی

A= مجموعهٔ اعداد زوج و B= مجموعهٔ اعداد اول $A\cap B=\{2\}$

۳) دو مجموعهٔ نامتناهی مثال بزنید که اشتراک آنها مجموعه‌ای متناهی باشد.

۴) حاصل هر یک از مجموعه‌های زیر را با رسم بازه‌های آنها روی یک محور به‌دست آورید:

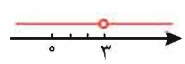


الف) $(-3,0)\cup(-2,5]$ ب) $(-\infty,6]\cap(2,9)$

پ) $(3,+\infty)\cap(6,10]$ ت) $(-\infty,1)\cup[1,+\infty)$

ث) $(3,+\infty)-[2,4)$ ج) $[2,4)-(3,+\infty)$

۵) مجموعهٔ $\mathbb{R}-\{3\}$ را روی محور نشان دهید و سپس آن را به‌صورت اجتماع دو بازه بنویسید.



$(-\infty,3)\cup(3,+\infty)=\mathbb{R}-\{3\}$

۶) اگر $A\subseteq B$ و B مجموعه‌ای متناهی باشد، آنگاه A متناهی خواهد بود یا نامتناهی؟ متناهی

تست

اگر A مجموعهٔ اعداد طبیعی فرد و B مجموعهٔ اعداد اول باشد، کدام مجموعه متناهی و غیرتهی است؟ (خارج از کشور ـ ۹۱)

۱) $A-B$ ۲) $B-A$
۳) $A\cap B$ ۴) $A-(A\cup B)$

پاسخ:

مجموعهٔ اعداد طبیعی فرد مجموعه‌ای نامتناهی است:

$A=\{1,3,5,7,...\}$

مجموعهٔ اعداد اول نیز مجموعه‌ای نامتناهی است:

$B=\{2,3,5,7,...\}$

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱: نامتناهی و غیرتهی؛ $A-B=\{1,9,15,21,...\}$

گزینهٔ ۲: متناهی و غیرتهی؛ $B-A=\{2\}$

(B-A در واقع اعداد اولی است که فرد نباشد و تنها عدد اول زوج، عدد ۲ است.)

نامتناهی و غیر تهی $A\cap B=\{3,5,7,...\}$

گزینهٔ ۴: متناهی و تهی؛ $A-(A\cup B)\overset{A\subseteq A\cup B}{=}\varnothing$

پاسخ گزینهٔ (۲) است.

درس دوم: متمم یک مجموعه

کتابخانهٔ آیت اللّٰه العظمی مرعشی نجفی(ره)، در شهر مقدس قم یکی از بزرگ‌ترین کتابخانه‌های جهان اسلام است که کتاب‌های نفیس و قدیمی بسیاری را در موضوعات مختلف در خود جای داده است. این کتابخانه از نظر فراوانی نسخه‌های خطی، نخستین کتابخانهٔ کشور و سومین کتابخانهٔ جهان اسلام به‌شمار می‌رود. جدول زیر اطلاعات مختصری دربارهٔ تعداد کتاب‌های این کتابخانه در اختیار ما قرار می‌دهد.

نوع کتاب	تعداد
کتاب‌های خطی	۴۲۰۰۰ جلد
کتاب‌های چاپی	۱۰۰۰۰۰۰ جلد
کل کتاب‌ها	۱۰۴۲۰۰۰ جلد

مجموعه مرجع

فرض کنیم U نشان‌دهندهٔ مجموعهٔ تمام کتاب‌های کتابخانهٔ آیت اللّٰه العظمی مرعشی نجفی (ره) و A مجموعهٔ کتاب‌های خطی آن باشد. اگر مجموعه‌ای را که شامل کتاب‌های چاپی این کتابخانه است، با A' نشان دهیم، آنگاه می‌توانیم نمودار پایین صفحه را دربارهٔ کتاب‌های این کتابخانه رسم کنیم. در این مثال U را که شامل تمام کتاب‌های کتابخانه می‌باشد، مجموعهٔ مرجع و A' را متمم مجموعهٔ A می‌نامیم.

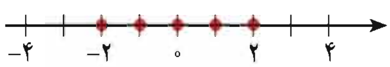
در هر مبحث، مجموعه‌ای را که همهٔ مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعهٔ آن باشند، مجموعهٔ مرجع می‌نامیم و آن را با U نشان می‌دهیم.

هرگاه U مجموعهٔ مرجع باشد و $A \subseteq U$، آنگاه مجموعهٔ $U-A$ را متمم A می‌نامیم و آن را با نماد A' نشان می‌دهیم. به‌عبارت دیگر A' شامل عضوهایی از U است که در A نیستند.

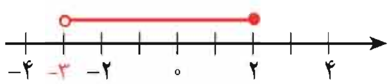
فعالیت

الف) دو مجموعهٔ زیر را در نظر بگیرید و اعضای هر یک را روی محور نشان دهید.

$A=\{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x \le 2\}$



$B=\{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \le 2\}$



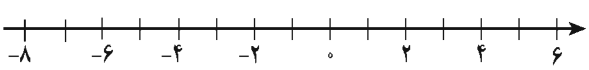
ب) A را با نمایش اعضا و B را به‌صورت یک بازه بنویسید.

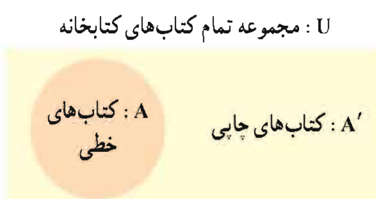
$A=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

$B=(-3, 2]$

پ) در مورد A، اگر مجموعهٔ مرجع را $\mathbb{Z}$ در نظر بگیریم، A' را مشخص کنید.

ت) در مورد B با فرض این که $\mathbb{R}$ مجموعهٔ مرجع باشد، B' را مشخص کنید و آن را روی محور نمایش دهید.





کار در کلاس

۱) اگر U مجموعهٔ شامل تمام استان‌های کشورمان باشد و A مجموعهٔ استان‌های غیرساحلی، آنگاه A' را با نمایش اعضای آن بنویسید.

۲) فرض کنیم U مجموعهٔ تمام اتومبیل‌های پلاک‌گذاری شدهٔ کشور و B مجموعهٔ اتومبیل‌های با پلاک فرد باشد. در این‌صورت B' چه مجموعه‌ای خواهد بود؟

۳) با فرض آنکه $\mathbb{N}$ مجموعه مرجع باشد، هر مجموعه را به متمم خودش وصل کنید.

$\{۱,۳,۵,۷,۹,...\}$	$\{۱,۴,۶,۸,۹,۱۰,۱۲,۱۴,...\}$
$\{۳,۶,۹,۱۲,...\}$	$\{۲,۴,۶,۸,۱۰,...\}$
$\{۱,۲,۳,...,۹\}$	$\{۱,۲,۴,۵,۷,۸,...\}$
$\{۲,۳,۵,۷,۱۱,۱۳,...\}$	$\{۱۰,۱۱,۱۲,۱۳,۱۴,...\}$

۴) U مجموعهٔ مرجع و A زیرمجموعهٔ دلخواهی از آن می باشد. با رسم نمودار، طرف دوم تساوی‌های زیر را بنویسید.

$\varnothing' = U$ $\qquad$ $U' = \varnothing$ $\qquad$ $A \cup A' = U$ $\qquad$ $A \cap A' = \varnothing$

۵) الف) اگر $\mathbb{Z}$ را به‌عنوان مجموعهٔ مرجع درنظر بگیریم، آنگاه $\mathbb{N}'$ را با نوشتن اعضای آن مشخص کنید.

ب) اگر $\mathbb{R}$ را به‌عنوان مجموعهٔ مرجع درنظر بگیریم، در این صورت $\mathbb{N}'$ را روی محور نمایش دهید.

نرخ بیکاری

جمعیت در سن کار در یک کشور را به‌عنوان مجموعه مرجع یعنی U درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم A نشان‌دهنده مجموعه افراد شاغل این کشور باشد. در این‌صورت A' برابر مجموعه افراد بیکار و نسبت $\frac{n(A')}{n(U)}$ بیانگر نرخ بیکاری آن کشور خواهد بود.

۶) فرض کنیم $U=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ مجموعه مرجع باشد و $A=\{۱,۲,۳\}$ و $B=\{۲,۴\}$. ابتدا A' و B' را بنویسید و سپس جدول‌های زیر را کامل کنید. از هر قسمت چه نتیجه ای می گیرید؟

$A' = \{ ۴,۵ \}$ $\qquad$ $B' = \{ ۱,۳,۵ \}$

$(A')'$
$\{۱,۲,۳\}$

$\Longrightarrow \quad (A')' = A$

$A \cup B$	$(A \cup B)'$	$A' \cap B'$
$\{ ۱,۲,۳,۴,۵ \}$	$\{ \quad \}$	$\{ \quad \}$

$\Longrightarrow \quad (A \cup B)' = A' \cap B'$ قانون دمورگان

$A \cap B$	$(A \cap B)'$	$A' \cup B'$
$\{ ۲ \}$	$\{ ۱,۳,۴,۵ \}$	$\{ ۱,۳,۴,۵ \}$

$\Longrightarrow \quad (A \cap B)' = A' \cup B'$ قانون دمورگان

$A-B$	$A-(A \cap B)$
$\{ ۱,۳ \}$	$\{ ۱,۳ \}$

$\Longrightarrow \quad A-B = A-(A \cap B) = A \cap B'$

تست

اگر مجموعهٔ اعداد طبیعی مجموعهٔ مرجع باشد و داشته باشیم $A=\{n \mid n<۱۰\}$ در این‌صورت A' برابر کدام است؟ (کنکور سراسری)

۱) $\{۱۰,۱۱,۱۲,...\}$ $\qquad$ ۲) $\{۹,۱۰,۱۱,...\}$ $\qquad$ ۳) $\{۱,۲,۳,...,۹\}$ $\qquad$ ۴) $\{۱۱,۱۲,۱۳,...\}$

پاسخ: مجموعه اعداد طبیعی، $\{۱,۲,۳,...\}$ می‌باشند، اعضای مجموعهٔ A عبارت‌اند از $A=\{۱,۲,۳,...,۹\}$ می‌باشند.
A' متمم A هست، یعنی عضوهایی که در اعداد طبیعی هست و در A وجود ندارد:

$A' = \mathbb{N} - A = \{۱,۲,۳,...\} - \{۱,۲,...,۹\} = \{۱۰,۱۱,۱۲,۱۳,...\}$

پاسخ گزینهٔ (۱) است.

تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

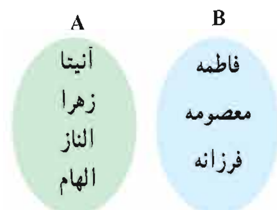
در سال گذشته دیدیم که اگر A یک مجموعه متناهی باشد، آنگاه برای نشان دادن تعداد عضوهای آن از علامت n(A) استفاده می‌شود. مثلاً اگر {۷ ,۵ ,۳ ,۲}=G در این‌صورت می‌توانیم بنویسیم ۴=n(G). در این بخش می‌خواهیم رابطه‌ای برای $n(A\cup B)$ به‌دست آوریم.

فعالیت

۱ یک تیم کوه‌نوردی متشکل از ۴ دانش‌آموز و ۳ دانشجوی عضو یک مؤسسهٔ طرفدار محیط زیست است. اعضای این تیم به‌طور داوطلبانه در روزهای جمعهٔ هر هفته کوه‌های اطراف شهر خود را از وجود زباله پاک‌سازی می‌کنند.

اعضای دانش‌آموز این تیم مجموعه {آنیتا، زهرا، الناز، الهام}=A و اعضای دانشجوی آن مجموعه {فاطمه، معصومه، فرزانه}=B هستند. همان‌گونه که دیده می‌شود، این دو مجموعه هیچ عضو مشترکی ندارند؛ به‌عبارت دیگر $A\cap B=\varnothing$.

به هر دو مجموعه مثل A و B که فاقد عضو مشترک باشند، دو مجموعهٔ جدا از هم یا مجزا می‌گوییم.



الف) اعضای $A\cup B$ را که بیانگر اعضای تیم کوه‌نوردی می‌باشد، بنویسید و جدول زیر را تکمیل کنید.

$A\cup B=$

n(A)	n(B)	$n(A\cup B)$	$n(A\cap B)$
۴	۳	۷	۰

ب) تعداد عضوهای $A\cup B$ چه رابطه‌ای با n(A) و n(B) دارد؟ این رابطه را به‌صورت یک فرمول بنویسید. $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$

پ) تحت چه شرایطی این فرمول برای دو مجموعه دلخواه A و B برقرار است؟ $A\cap B=\varnothing$

۲ الف) مجموعهٔ شمارنده‌های طبیعی دو عدد ۲۸ و ۳۰ را به ترتیب A و B می‌نامیم. موارد خواسته شده را بنویسید.

مجموعه شمارنده‌های عدد ۲۸ : $A=\{$ ۱,۲,۴,۷,۱۴,۲۸ $\}\Rightarrow n(A)=$۶

مجموعه شمارنده‌های عدد ۳۰ : $B=\{$ ۱,۲,۳,۵,۶,۱۰,۱۵,۳۰ $\}\Rightarrow n(B)=$ ۸

شمارنده‌های مشترک ۲۸ و ۳۰ : $A\cap B=\{$ ۱,۲ $\}\Rightarrow n(A\cap B)=$ ۲

$A\cup B=\{$ ۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۱۰,۱۴,۱۵,۲۸,۳۰ $\}\Rightarrow n(A\cup B)=$ ۱۲

تست

اگر {a,b,۱,۲,۵,۶}=A و {a,c,۲,۴,۵}=B باشد، آن‌گاه $(A\cap B)\cup B$ چند عضو دارد؟
(کنکور سراسری)

۱) ۴　۲) ۵　۳) ۶　۴) ۷

پاسخ: ابتدا اعضای مشترک A و B را می‌یابیم، سپس عضوهای $A\cap B$، a، ۲ و ۵ هستند که $n(A\cap B)=3$ است. حال اجتماع اعضای $A\cap B$ و B را می‌یابیم.

$(A\cap B)\cup B=\{a,c,۲,۴,۵\}$

پس $n((A\cap B)\cup B)=5$ است.

راه‌حل دوم:

می‌دانیم $A\cap B\subset B$ است، پس $(A\cap B)\cup B=B$ می‌شود، در نتیجه $n((A\cap B)\cup B)=n(B)=5$ است.

پاسخ گزینهٔ (۲) است.