

# فصل اول

## تابع

(۲۳ پیمانه)



با درخت دانش، گام به گام پیشرفت خود را ارزیابی کنید.

**گام اول:** میزان تسلط خود را با رنگ مشخص کنید.  
**آبی:** مسلطم.  
**سبز:** نسبتاً مسلطم.  
**زرد:** مسلط نیستم.  
**گام‌های بعدی:** اگر در گام اول دانش خود را در حد رنگ زرد ارزیابی کردید اما در نوبت‌های بعدی پیشرفت کردید، می‌توانید خانه‌های سبز یا آبی را رنگ کنید. هرگاه به رنگ‌ها نگاه کنید متوجه می‌شوید در کدام قسمت‌ها نیاز به تمرین بیشتر دارید.

آبی  سبز  زرد

۱	انتقال‌های عمودی و افقی	۱۰ پیمانه ۱۰۰ تست	تبدیل نمودار توابع	۱
۲	انعکاس نمودارها (قرینه‌یابی و تقارن)			
۳	انبساط و انقباض عمودی و افقی			

آبی  سبز  زرد

۱	تابع درجه سوم	۱۲ پیمانه ۱۲۰ تست	تابع درجه سوم، توابع یکنوا و بخش‌پذیری و تقسیم	۲
۲	توابع صعودی و توابع نزولی			
۳	تقسیم و بخش‌پذیری			

## تابع

۲۳۰ سؤال شناسنامه‌دار

۱۳۱ سؤال تالیفی و طراحی شده از کتاب درسی

۵۱ سؤال از آزمون‌های کانون

۴۸ سؤال از کنکورهای سراسری

در درسنامه می‌بینید

۶۴ سؤال

۳۱ تست طراحی شده با نگاه به رویکرد کنکورهای جدید

۳۳ مثال برای ادراک و تثبیت

آبی  سبز  زرد

۱ پیمانه	آزمون جمع‌بندی پایان فصل
۱۰ تست	

## تبدیل نمودار توابع

فصل اول	حسابان ۲
صفحه‌های: ۲ تا ۱۲	دوازدهم

با به کارگیری تبدیلات معینی روی نمودار تابعی مفروض، می‌توانیم نمودار تابع‌های وابسته به آن را به دست آوریم و به این ترتیب، میزان کار در رسم نمودارها را کاهش دهیم. این تبدیلات عبارتند از: انتقال‌های افقی و عمودی، انبساط و انقباض‌های عمودی، انبساط و انقباض‌های افقی و انعکاس‌ها (قرینه‌بایی). در این بخش انتقال‌های افقی و عمودی را بررسی می‌کنیم. قبل از بررسی، نمودار توابع مرجع رسم را یادآوری می‌کنیم.

$y = x^2$	$y =  x $	$y = \sqrt{x}$	$y = \frac{1}{x}$	$y = \log_a x, a > 1$	$y = a^x, a > 1$
دامنه: $\mathbb{R}$ برد: $[0, +\infty)$	دامنه: $\mathbb{R}$ برد: $[0, +\infty)$	دامنه: $[0, +\infty)$ برد: $[0, +\infty)$	دامنه: $\mathbb{R} - \{0\}$ برد: $\mathbb{R} - \{0\}$	دامنه: $(0, +\infty)$ برد: $\mathbb{R}$	دامنه: $\mathbb{R}$ برد: $(0, +\infty)$

### انتقال‌های عمودی و افقی

اگر نمودار تابع  $y = f(x)$  در اختیار باشد، با فرض  $c > 0$  جدول زیر انتقال‌های افقی و عمودی تابع  $f$  را نمایش می‌دهد.

نوع انتقال	تابع	روش ترسیم	نمودار	ویژگی
افقی	$f(x - c)$	نمودار تابع $f$ را $c$ واحد به راست انتقال می‌دهیم.		<ol style="list-style-type: none"> <li>نقطه‌ی <math>A(x_0, y_0)</math> روی تابع <math>f</math> به نقطه‌ی <math>A'(x_0 + c, y_0)</math> روی تابع <math>y = f(x - c)</math> تبدیل می‌شود.</li> <li>برد ثابت است ولی دامنه تغییر می‌کند.</li> </ol>
	$f(x + c)$	نمودار تابع $f$ را $c$ واحد به چپ انتقال می‌دهیم.		<ol style="list-style-type: none"> <li>نقطه‌ی <math>A(x_0, y_0)</math> روی تابع <math>f</math> به نقطه‌ی <math>A'(x_0 - c, y_0)</math> روی تابع <math>y = f(x + c)</math> تبدیل می‌شود.</li> <li>برد ثابت است ولی دامنه تغییر می‌کند.</li> </ol>
عمودی	$f(x) + c$	نمودار تابع $f$ را $c$ واحد به بالا انتقال می‌دهیم.		<ol style="list-style-type: none"> <li>نقطه‌ی <math>A(x_0, y_0)</math> روی تابع <math>f</math> به نقطه‌ی <math>A'(x_0, y_0 + c)</math> روی تابع <math>y = f(x) + c</math> تبدیل می‌شود.</li> <li>دامنه ثابت است ولی برد تغییر می‌کند.</li> </ol>
	$f(x) - c$	نمودار تابع $f$ را $c$ واحد به پایین انتقال می‌دهیم.		<ol style="list-style-type: none"> <li>نقطه‌ی <math>A(x_0, y_0)</math> روی تابع <math>f</math> به نقطه‌ی <math>A'(x_0, y_0 - c)</math> روی تابع <math>y = f(x) - c</math> تبدیل می‌شود.</li> <li>دامنه ثابت است ولی برد تغییر می‌کند.</li> </ol>

● مثال: مختصات تبدیل یافته‌ی نقطه‌ی  $A(3, 1)$  روی تابع  $y = f(x)$  را در توابع زیر بیابید.

(۱)  $y = f(x) + 2$       (۲)  $y = f(x - 2)$       (۳)  $y = 2 + f(x + 1)$

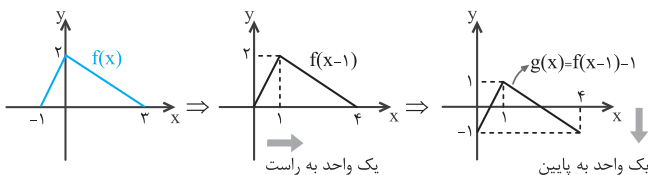
○ حل: (۱) به عرض هر نقطه ۲ واحد اضافه می‌شود، پس  $A'(3, 1 + 2) = (3, 3)$ .

(۲) به طول هر نقطه ۲ واحد اضافه می‌شود، پس  $A'(3 + 2, 1) = (5, 1)$ .

(۳) به طول هر نقطه ۱- واحد و به عرض آن ۲ واحد اضافه می‌شود، پس  $A'(3 - 1, 1 + 2) = (2, 3)$ .

● مثال: اگر نمودار تابع  $f$  به صورت زیر باشد، نمودار تابع  $g(x) = f(x - 1) - 1$  را رسم کرده و دامنه و برد آن را بیابید.

○ حل: برای رسم نمودار تابع  $g$ ، کافی است نمودار تابع  $f$  را یک واحد به راست و سپس یک واحد به پایین انتقال دهیم. دامنه‌ی تابع  $g$  بازه‌ی  $[0, 4]$  و برد آن  $[-1, 1]$  است.



**تذکره ۱** در انتقال افقی، برد تابع و در انتقال عمودی، دامنه تابع تغییری نخواهد کرد.

**تست** اگر دامنه تابع  $f$  بازه  $[-2, 5]$  و برد آن بازه  $[-3, 2]$  باشد، آنگاه دامنه و برد تابع  $g(x) = 2 + f(x+2)$  چند عدد صحیح مشترک دارند؟

- ۱) ۶      ۲) ۳      ۳) ۵      ۴) ۴

**پاسخ** گزینه ۳ نمودار تابع  $g$  از انتقال نمودار تابع  $f$  به اندازه ۲ واحد به چپ و سپس ۲ واحد به بالا به دست می‌آید. در انتقال افقی دامنه و در انتقال عمودی برد تغییر می‌کند، لذا:

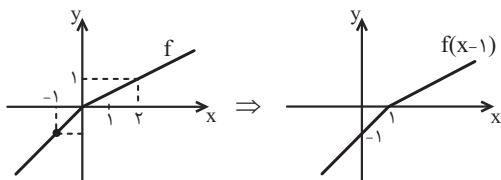
$$\begin{aligned} \text{دامنه } f(x+2) &: [-2-2, 5-2] = [-4, 3] & \Rightarrow & \text{بدون تغییر } 2+f(x+2) \text{ دامنه: } [-4, 3] \\ \text{برد } f(x+2) &: [-3, 2] & \Rightarrow & \text{برد } 2+f(x+2) : [-3+2, 2+2] = [-1, 4] \end{aligned}$$

بنابراین اشتراک دامنه و برد تابع  $g$  برابر است با:

$$D_g \cap R_g = [-4, 3] \cap [-1, 4] = [-1, 3]$$

که اعداد صحیح در این فاصله عبارتند از:  $-1, 0, 1, 2, 3$ ، پس پنج عدد صحیح مشترک در دامنه و برد تابع  $g$  وجود دارد.

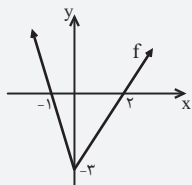
**مثال:** اگر نمودار تابع  $y = f(x)$  به شکل زیر باشد، دامنه تابع  $g(x) = \sqrt{f(x-1)}$  را بیابید.



**حل:** برای تعیین دامنه تابع  $g$ ، باید نامعادله  $f(x-1) \geq 0$  را حل کنیم. برای رسم نمودار تابع  $f(x-1)$ ، کافی است نمودار تابع  $f$  را یک واحد به راست انتقال دهیم. با توجه به نمودار دیده می‌شود که تابع  $f(x-1)$  به ازای  $x \geq 1$  نامنفی است، پس  $D_g = [1, +\infty)$ .

**تست** اگر نمودار تابع  $f$  به شکل زیر باشد، معادله  $f(f(x+1)) = -3$  چند ریشه دارد؟

- ۱) یک ریشه  
۲) دو ریشه  
۳) سه ریشه  
۴) ریشه ندارد.



**پاسخ** گزینه ۲ فرض می‌کنیم  $f(x+1) = a$ ، بنابراین  $f(a) = -3$ ، با توجه به نمودار باید  $a = 0$  باشد، در نتیجه  $f(x+1) = 0$ . برای یافتن ریشه‌های این معادله کافی است نمودار تابع  $f$  را یک واحد به چپ انتقال دهیم. بنابراین صفرهای تابع  $y = f(x+1)$ ،  $1$  و  $-2$  هستند، پس ریشه‌های معادله  $f(f(x+1)) = -3$  برابر  $1$  و  $-2$  هستند.

**تذکره ۲** گاهی لازم است با استفاده از عملیات جبری (مربع کامل کردن، تفکیک کسر، ...) ابتدا تابع را به یکی از توابع مرجع هم‌خانواده تبدیل کرده و سپس با انتقال‌های افقی و عمودی تابع مرجع، نمودار خواسته شده را رسم کنیم.

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 6x \xrightarrow{x^2 + ax = (x + \frac{a}{2})^2 - \frac{a^2}{4}} y = (x-3)^2 - 9 \\ y &= \frac{x}{x+1} \xrightarrow{\text{صورت را شبیه منفرجه می‌سازیم}} y = \frac{(x+1)-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1} \\ y &= \sqrt{x^2 - 4x + 4} \xrightarrow{\text{زیر رادیکال مربع کامل}} y = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2| \end{aligned}$$

به عنوان مثال:

**تست** در نظر بگیرید  $f(x) = \frac{1}{x}$ . در اینصورت نمودارهای توابع  $g$  و  $h$  به ترتیب با انتقال یک واحد به راست و ۲ واحد به چپ تابع  $f$  به دست می‌آیند.

در صورتی که خط  $y = \frac{5}{4}$ ، نمودار تابع  $g+h$  را در دو نقطه  $A$  و  $B$  قطع کند، اندازه‌ی پاره خط  $AB$  کدام است؟

- ۱)  $\frac{17}{5}$       ۲)  $\frac{5}{3}$       ۳)  $\frac{14}{5}$       ۴)  $\frac{17}{3}$

**پاسخ** گزینه ۱ ابتدا ضابطه‌ی توابع  $g$  و  $h$  را به دست آورده و سپس تابع  $g+h$  را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{x} \xrightarrow{\text{یک واحد به راست}} g(x) = \frac{1}{x-1} & \quad f(x) = \frac{1}{x} \xrightarrow{\text{دو واحد به چپ}} h(x) = \frac{1}{x+2} \\ \Rightarrow g(x) + h(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2} \end{aligned}$$

محل تلاقی نمودار تابع  $g+h$  با خط  $y = \frac{5}{4}$ ، از حل معادله‌ی زیر به دست می‌آید:

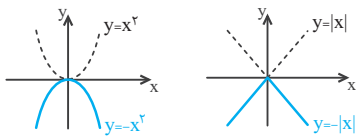
$$g(x) + h(x) = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{(x+2) + (x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{2x+1}{x^2+x-2} = \frac{5}{4} \Rightarrow 5(x^2+x-2) = 4(2x+1) \Rightarrow 5x^2-3x-14=0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(5)(-14)}}{2 \times 5} = \frac{3 \pm \sqrt{289}}{10} \Rightarrow x_A = \frac{3+17}{10} = 2, \quad x_B = \frac{3-17}{10} = \frac{-14}{10} = \frac{-7}{5}$$

نقاط  $A$  و  $B$  روی یک خط افقی ( $y = \frac{5}{4}$ ) قرار دارند، بنابراین طول پاره خط  $AB$  برابر است با:

$$\overline{AB} = |x_A - x_B| = |2 - \frac{-7}{5}| = \frac{17}{5}$$

۲ انعکاس نمودارها (قرینه‌یابی و تقارن)



در ریاضی ۱ دیدیم که نمودار تابع  $y = -x^2$  قرینه‌ی نمودار تابع  $y = x^2$  نسبت به محور  $x$  هاست، هم‌چنین نمودار تابع  $y = -|x|$  قرینه‌ی نمودار تابع  $y = |x|$  نسبت به محور  $x$  هاست.

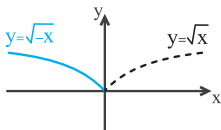
■ **انعکاس (قرینه‌یابی) نمودارها** ◀ در حالت کلی با در اختیار داشتن نمودار تابع  $y = f(x)$  می‌توانیم نمودار تابع‌های  $y = f(-x)$ ،  $y = -f(x)$  و  $y = -f(-x)$  را به روش قرینه‌یابی رسم کنیم. به جدول زیر توجه کنید.

ویژگی‌ها	روش ترسیم	نمودار	تابع خواسته شده
① نقطه‌ی $A(x_0, y_0)$ روی تابع $f$ به نقطه‌ی $A'(x_0, -y_0)$ روی تابع $y = -f(x)$ تبدیل می‌شود. ② دامنه ثابت است ولی برد تغییر می‌کند. مقادیر برد قرینه می‌شوند.	کافی است قرینه‌ی تابع $y = f(x)$ را نسبت به محور $x$ ها رسم کنیم.		$y = -f(x)$
① نقطه‌ی $A(x_0, y_0)$ روی تابع $f$ به نقطه‌ی $A'(-x_0, y_0)$ روی تابع $y = f(-x)$ تبدیل می‌شود. ② برد ثابت است ولی دامنه تغییر می‌کند. مقادیر دامنه قرینه می‌شوند.	کافی است قرینه‌ی تابع $y = f(x)$ را نسبت به محور $y$ ها رسم کنیم.		$y = f(-x)$
① نقطه‌ی $A(x_0, y_0)$ روی تابع $f$ به نقطه‌ی $A'(-x_0, -y_0)$ روی تابع $y = -f(-x)$ تبدیل می‌شود. ② دامنه و برد هر دو تغییر می‌کنند. مقادیر دامنه و برد قرینه می‌شوند.	کافی است قرینه‌ی تابع $y = f(x)$ را نسبت به مبدأ مختصات رسم کنیم.		$y = -f(-x)$

● **مثال:** با توجه به نمودار تابع  $y = \sqrt{x}$  که به شکل است، نمودار توابع زیر را رسم کنید.

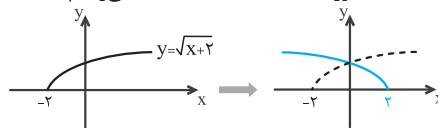
(۱)  $y = \sqrt{-x}$

برای رسم  $y = \sqrt{-x}$  کافی است قرینه‌ی نمودار تابع  $y = \sqrt{x}$  را نسبت به محور  $y$  ها رسم کنیم.



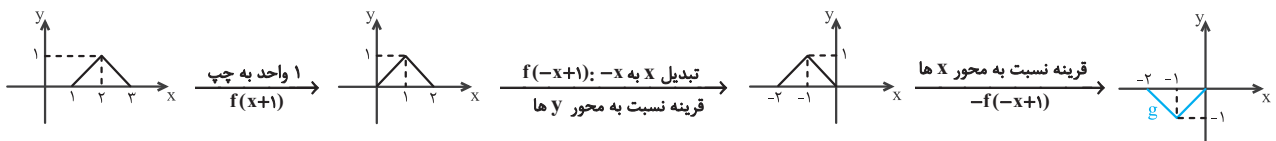
(۲)  $y = \sqrt{-x+2}$

ابتدا نمودار تابع  $y = \sqrt{x}$  را ۲ واحد به چپ انتقال می‌دهیم تا تابع  $y = \sqrt{x+2}$  به دست آید؛ سپس با تبدیل  $x$  به  $-x$  (یعنی تقارن نسبت به محور  $y$  ها) به  $y = \sqrt{-x+2}$  می‌رسیم.



● **مثال:** اگر نمودار تابع  $f$  به صورت باشد، نمودار تابع  $g(x) = -f(1-x)$  را رسم کرده و دامنه و برد آن را بیابید.

○ حل: تابع  $g$  را با ساختن  $-f(-x+1)$  رسم می‌کنیم. برای این منظور از تابع  $f(x)$  شروع می‌کنیم:



با توجه به نمودار، دامنه  $D_g = [-2, 0]$  و برد  $R_g = [-1, 0]$  است.

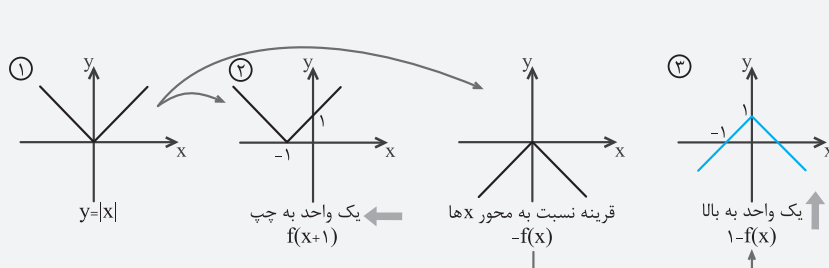
**نست** اگر  $f(x) = |x|$  باشد، آنگاه نمودار دو تابع  $f(x+1)$  و  $1-f(x)$  در کدام بازه‌ی زیر بر هم منطبق‌اند؟

(۴)  $[1, +\infty)$

(۳)  $[-1, 0]$

(۲)  $[0, 1]$

(۱)  $(-\infty, -1]$



پاسخ **گزینه‌ی «۳»** برای رسم  $f(x+1)$ ، نمودار تابع  $f$  را یک واحد به چپ انتقال می‌دهیم (شکل ۲). برای رسم نمودار  $1-f(x)$ ، کافی است ابتدا نمودار تابع  $f$  را نسبت به محور  $x$  ها قرینه کرده و سپس نمودار حاصل را یک واحد به بالا انتقال دهیم (شکل ۳).

بنابراین نمودار شکل‌های (۲) و (۳) در بازه‌ی  $[-1, 0]$  بر هم منطبق‌اند.

**تذکره ۱** اگر ضابطه‌ی تابع  $y = f(x)$  در اختیار باشد، آنگاه برای یافتن قرینه‌ی تابع  $y = f(x)$ :

- نسبت به محور  $x$  ها، کافی است در معادله  $y$  را به  $-y$  تبدیل کنیم.
- نسبت به محور  $y$  ها، کافی است در معادله  $x$  را به  $-x$  تبدیل کنیم.
- نسبت به مبدأ مختصات، کافی است در معادله  $x$  را به  $-x$  و  $y$  را به  $-y$  تبدیل کنیم.

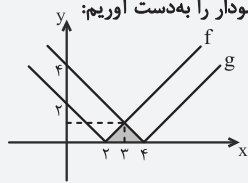
**تست** اگر نمودار تابع  $f(x) = |x-2|$  را ۶ واحد به چپ انتقال داده و سپس قرینه‌ی نمودار حاصل را نسبت به محور  $y$  ها تعیین کنیم، تابع  $g$  به دست می‌آید. مساحت ناحیه‌ی محدود بین دو نمودار  $f$  و  $g$  و محور  $x$  ها، کدام است؟

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)

**پاسخ** گزینه‌ی «۱» ابتدا ضابطه‌ی تابع  $g$  را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = |x-2| \xrightarrow{\text{۶ واحد به چپ}} y = |x+6-2| = |x+4| \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } y} g(x) = |-x+4| = |x-4|$$

نمودار دو تابع  $f$  و  $g$  را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. برای محاسبه‌ی ناحیه‌ی سایه زده شده باید عرض نقطه‌ی تلاقی دو نمودار را به دست آوریم:



$$f(x) = g(x) \Rightarrow |x-2| = |x-4| \Rightarrow x-2 = \pm(x-4)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2 = x-4 & \text{جواب ندارد} \\ x-2 = -(x-4) \Rightarrow x=3 \Rightarrow y=1 \end{cases} \Rightarrow S = \frac{2 \times 1}{2} = 1$$

**تست** اگر  $f(x) = \sqrt{x}$  باشد، برای رسم تابع  $g$  باید قرینه‌ی  $f$  را نسبت به محور  $y$  ها تعیین کرده و سپس یک واحد به راست انتقال داده و در انتها نمودار حاصل را یک واحد به پایین منتقل کنیم. فاصله‌ی نقطه‌ی وسط دو نقطه‌ی تلاقی تابع  $g$  و قرینه‌ی تابع  $f$  نسبت به محور  $x$  ها، از مبدأ مختصات کدام است؟

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)

**پاسخ** گزینه‌ی «۱» ضابطه‌ی تابع  $g$  را با توجه به مراحل گفته شده می‌یابیم:

$$y = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } y} y = \sqrt{-x} \xrightarrow{\text{یک واحد به راست}} y = \sqrt{-(x-1)} = \sqrt{1-x} \xrightarrow{\text{یک واحد به پایین}} g(x) = \sqrt{1-x} - 1$$

قرینه‌ی تابع  $f$  نسبت به محور  $x$  ها، به صورت  $h(x) = -f(x) = -\sqrt{x}$  است. برای یافتن محل‌های تلاقی دو تابع باید معادله‌ی  $h(x) = g(x)$  را حل کنیم.

$$\sqrt{1-x} - 1 = -\sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{1-x} + \sqrt{x} = 1 \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} 1 - x + x + 2\sqrt{1-x} \times \sqrt{x} = 1 \Rightarrow 2\sqrt{1-x} \times \sqrt{x} = 0 \Rightarrow x=1, x=0$$

بنابراین با قرار دادن این دو طول در تابع  $g$ ، دو نقطه‌ی تلاقی  $A(0, 0)$  و  $B(1, -1)$  خواهند بود. وسط این دو نقطه،  $M(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$  است که فاصله‌ی آن از مبدأ مختصات

$$OM = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (-\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

برابر است با:

**تذکره ۲** اگر در یک منحنی با ضابطه‌ی  $y = f(x)$ :

- با تبدیل  $x$  به  $-x$ ، ضابطه‌ی منحنی تغییر نکند، منحنی نسبت به محور  $y$  ها متقارن است، یعنی  $f(x) = f(-x)$ .
- با تبدیل  $y$  به  $-y$ ، ضابطه‌ی منحنی تغییر نکند، منحنی نسبت به محور  $x$  ها متقارن است، یعنی  $f(x) = -f(x)$ .
- با تبدیل  $x$  به  $-x$  و  $y$  به  $-y$ ، ضابطه‌ی منحنی تغییر نکند، منحنی نسبت به مبدأ مختصات متقارن است، یعنی  $f(x) = -f(-x)$ .

**تست** نمودار کدام تابع نسبت به محور  $y$  ها، متقارن است؟

۱ (۱)  $f(x) = \frac{9^x - 3}{3^x}$       ۲ (۲)  $g(x) = \frac{9^x - 1}{3^x}$       ۳ (۳)  $h(x) = \frac{9^x + 1}{3^x}$       ۴ (۴)  $k(x) = \frac{9^x + 3}{3^x}$

**پاسخ** گزینه‌ی «۳» اگر  $f(-x) = f(x)$  باشد، تابع  $f$  نسبت به محور  $y$  ها متقارن است. در تابع گزینه‌ی (۳) داریم:

$$h(x) = \frac{9^x + 1}{3^x} = \frac{9^x}{3^x} + \frac{1}{3^x} = (\frac{9}{3})^x + (\frac{1}{3})^x = 3^x + 3^{-x} \xrightarrow{\text{تبدیل } x \text{ به } -x} h(-x) = 3^{-x} + 3^{-(x)} = 3^{-x} + 3^x = h(x)$$

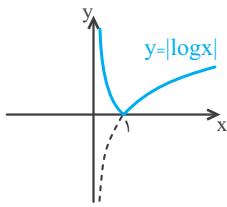
بنابراین تابع  $h$  نسبت به محور  $y$  ها متقارن است. با ساده کردن ضابطه‌ی سایر گزینه‌ها و تبدیل  $x$  به  $-x$ ، می‌بینیم که این تساوی وجود ندارد.

**رسم نمودار تابع  $y = |f(x)|$  و  $y = f(|x|)$**  با استفاده از تعریف قدرمطلق می‌توانیم نمودار تابع  $y = |f(x)|$  و  $y = f(|x|)$  را با در اختیار داشتن نمودار تابع  $y = f(x)$  رسم کنیم. به جدول زیر توجه کنید.

روش رسم بدون ضابطه‌بندی	نمودار	تعریف ضابطه‌ی قدرمطلق	تابع خواسته شده
کافی است قسمت‌هایی از نمودار را که پایین محور $x$ هاست نسبت به محور $x$ ها قرینه کرده و سپس قسمت پایین محور $x$ ها را حذف کنیم.		$y = \begin{cases} f(x) & , f(x) \geq 0 \\ -f(x) & , f(x) < 0 \end{cases}$	$y =  f(x) $
کافی است قسمت سمت چپ محور $y$ ها را حذف کرده (در صورت وجود) و سپس قرینه‌ی قسمت سمت راست محور $y$ ها را نسبت به محور $y$ ها رسم کنیم.		$y = \begin{cases} f(x) & , x \geq 0 \\ f(-x) & , x < 0 \end{cases}$	$y = f( x )$

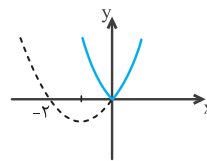
● مثال: به رسم نمودار توابع زیر توجه کنید.

(۱)  $y = |\log x|$



○ حل: با استفاده از نمودار تابع  $f(x) = \log x$  و ویژگی رسم نمودار تابع  $y = |f(x)|$  شکل روبه‌رو را داریم.

(۲)  $y = x^2 + 2|x|$

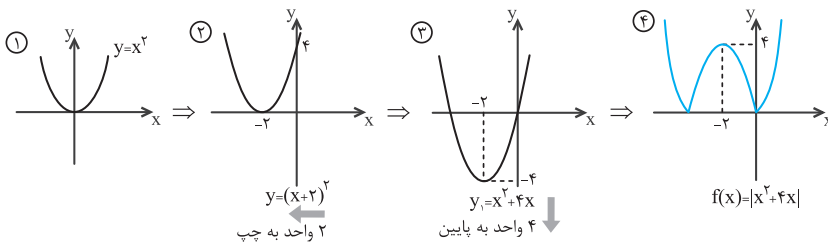


○ حل: با توجه به اینکه  $|x|^2 = x^2$  و با استفاده از نمودار تابع  $f(x) = x^2 + 2x$  و ویژگی رسم نمودار تابع  $y = f(|x|)$  شکل روبه‌رو را داریم.

● مثال: نمودار تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = |x^2 + 4x|$  را رسم کنید و سپس تعیین کنید خط‌های  $y = 1$ ،  $y = 4$  و  $y = 5$  آن را در چند نقطه قطع می‌کنند.  
○ حل: برای رسم نمودار تابع، ابتدا تابع  $y_1 = x^2 + 4x$  را رسم می‌کنیم، داریم:

$y_1 = (x^2 + 4x + 4) - 4 = (x+2)^2 - 4$

کافی است نمودار  $y = x^2$  را ۲ واحد به چپ و سپس ۴ واحد به پایین انتقال دهیم.

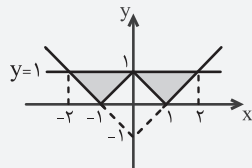


برای رسم تابع  $y = |x^2 + 4x|$ ، قرینه‌ی قسمت‌های پایین محور  $x$  ها را نسبت به محور  $x$  ها رسم می‌کنیم (شکل ۴).  
با توجه به نمودار دیده می‌شود که خط  $y = 1$  آن را در ۴ نقطه، خط  $y = 4$  آن را در ۳ نقطه و خط  $y = 5$  آن را در ۲ نقطه قطع می‌کند.

**تست** اگر  $f(x) = |x|$ ، آنگاه مساحت محدود به نمودار تابع  $g(x) = f(f(x)-1)$  و خط  $y = 1$  کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) ۴ (۴)  $\frac{3}{2}$

**پاسخ** گزینه‌ی «۱» تابع  $g$  را تشکیل داده و نمودار آن را رسم می‌کنیم:



$f(x) = |x|$   
 $g(x) = f(f(x)-1) = f(|x|-1) = ||x|-1|$

برای رسم نمودار تابع  $g$ ، نمودار تابع  $y = |x| - 1$  را رسم کرده و قسمت پایین محور  $x$  ها را نسبت به محور  $x$  ها قرینه می‌کنیم.

مساحت مورد نظر، مساحت قسمت سایه زده شده است که دو مثلث با قاعده‌ی ۲ و ارتفاع ۱ است:

$S = 2 \times \frac{2 \times 1}{2} = 2$  سایه زده شده

پیمانه‌های

۶ پیمانه

۱ تا ۶

۶۰ تست

پرسش‌های چهارگزینه‌ای



صفحه‌های ۲ تا ۵ حسابان ۲

تیب ۱

انتقال‌های افقی و عمودی

۱. اگر نقطه‌ی  $A(x_0, y_0)$  روی تابع  $y = f(x)$  باشد، نقطه‌ی  $A'$  متناظر آن روی تابع  $g(x) = f(x+1) - 3$  کدام است؟ (صفحه‌ی ۵- مرتبط با مثال)

- (۱)  $(x_0 + 1, y_0 + 3)$  (۲)  $(x_0 - 1, y_0 - 3)$  (۳)  $(x_0 + 1, y_0 - 3)$  (۴)  $(x_0 - 1, y_0 + 3)$

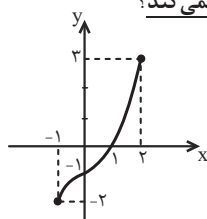
۲. نقطه‌ی  $A(1, -8)$  روی تابع  $y = f(x+1) - 2$  است، تبدیل یافته‌ی این نقطه در تابع  $y = f(x-1) + 2$  در کدام فاصله از مبدأ مختصات است؟ (صفحه‌ی ۵- مرتبط با مثال)

- (۱)  $2\sqrt{5}$  (۲)  $\sqrt{5}$  (۳) ۵ (۴)  $4\sqrt{5}$

۳. اگر دامنه و برد تابع  $k(x) = f(x-1) + 1$  به ترتیب  $D_k = [-1, 1]$  و  $R_k = [0, 4]$  باشند، آنگاه در تابع  $g(x) = f(x+1) - 1$ ، مجموعه‌ی  $D_g \cap R_g$  شامل چند عدد صحیح است؟ (صفحه‌ی ۵- مرتبط با مثال)

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۴. اگر نمودار تابع  $y = f(x)$  به شکل زیر باشد، نمودار کدام تابع از ناحیه‌ی چهارم عبور نمی‌کند؟ (صفحه‌ی ۵- مرتبط با مثال)



(۱)  $y = f(x-2)$

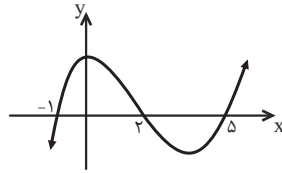
(۲)  $y = f(x+1) - 1$

(۳)  $y = f(x-1) + 1$

(۴)  $y = f(x+2)$

۵. اگر نمودار تابع  $y = f(x)$  به شکل زیر باشد، به ازای کدام مقدار  $a$ ، مجموع ریشه‌های معادله‌ی  $f(x-a) = 0$  صفر است؟

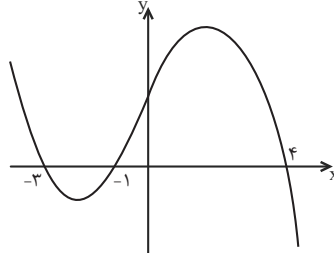
(صفحه‌ی ۵- کار در کلاس- مکمل ۲)



- ۲ (۱)
- ۲ (۲)
- ۳ (۳)
- ۳ (۴)

۶. شکل روبه‌رو، نمودار تابع  $y = f(x-2)$  است. دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی  $y = \sqrt{xf(x)}$ ، کدام است؟

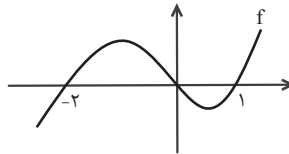
(صفحه‌ی ۵- کار در کلاس- مکمل ۲) (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۴)



- $[-1, 1] \cup [0, 6]$  (۱)
- $[-3, 1] \cup [0, 2]$  (۲)
- $[-5, -3] \cup [-1, 2]$  (۳)
- $[-5, -3] \cup [0, 2]$  (۴)

۷. نمودار زیر، تابع  $f$  را نشان می‌دهد. دامنه‌ی تابع  $g(x) = \sqrt{\frac{f(x)}{f(x+2)}}$  شامل چند عدد صحیح است؟

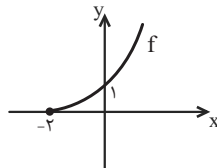
(صفحه‌ی ۵- کار در کلاس- مکمل ۲) (سراسری تجربی- تیر ۱۴۰۲)



- ۳ (۱)
- ۶ (۲)
- ۴ (۳)
- ۵ (۴)

۸. اگر نمودار تابع  $f$  به شکل زیر باشد، نمودار تابع  $y = -2 + f^{-1}(x-1)$  از کدام ناحیه (نواحی) دستگاه مختصات عبور نمی‌کند؟

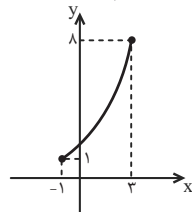
(صفحه‌ی ۵- مکمل مثال)



- دوم (۱)
- سوم (۲)
- سوم و چهارم (۳)
- دوم و سوم (۴)

۹. اگر نمودار تابع  $y = f(x-2)$  به صورت زیر باشد و  $f(0) = 4$ ، آنگاه دامنه‌ی تابع  $g(x) = \sqrt{f^{-1}(x)}$  کدام است؟

(صفحه‌ی ۵- کار در کلاس- مرتبط با ۲)



- $[-3, 1]$  (۱)
- $[0, 8]$  (۲)
- $[4, 8]$  (۳)
- $[1, 8]$  (۴)

۱۰. نمودار تابع  $f(x) = |x|$  را ۲ واحد به طرف  $x$  های منفی انتقال می‌دهیم. نمودار جدید و نمودار اولیه در چند نقطه متقاطع‌اند؟ (صفحه‌ی ۲- مکمل مثال)

- یک نقطه (۱)
- دو نقطه (۲)
- سه نقطه (۳)
- چهار نقطه (۴)

۱۱. نمودار تابع  $f(x) = |x-1| - 4$  را ۲ واحد به طرف  $x$  های منفی و سپس ۳ واحد به طرف  $y$  های مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار تابع جدید در کدام بازه بالای نیمساز ربع چهارم است؟

(صفحه‌ی ۳- مکمل مثال) (آزمون کانون - ۱۹ مهر ۹۸)

- $(-\infty, 0)$  (۱)
- $(-1, 1)$  (۲)
- $[0, +\infty)$  (۳)
- $(0, +\infty)$  (۴)

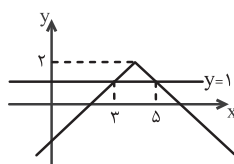
۱۲. مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودارهای دو تابع  $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$  و  $y = \frac{1}{3}x + 2$ ، کدام است؟ (صفحه‌ی ۲- مکمل مثال) (سراسری ریاضی- ۹۹)

- ۸ (۱)
- ۹ (۲)
- ۱۰ (۳)
- ۱۲ (۴)

۱۳. نمودار تابع  $y = |x|$  را یک واحد به راست و سپس ۲ واحد به پایین انتقال داده و آن را  $f(x)$  می‌نامیم. نمودار تابع  $f$  در بازه‌ی  $(x_1, x_2)$  پایین خط  $\Delta$  به معادله‌ی  $y = \frac{1}{3}x + 2$  است، بیشترین مقدار  $x_2 - x_1$  کدام است؟ (صفحه‌ی ۲- مکمل مثال)

- ۹ (۱)
- ۱۴ (۲)
- ۱۲ (۳)
- ۱۳ (۴)

۱۴. نمودار تابع  $f$  در شکل زیر، از انتقال  $k$  واحد به راست و سپس  $m$  واحد به بالای تابع  $y = -|x|$  به دست آمده است. خط  $y = 1$  نمودار تابع  $f$  را در دو نقطه به طول‌های ۳ و ۵ قطع می‌کند. مقدار  $m+k$  کدام است؟ (صفحه‌ی ۲- مکمل مثال)



- ۲ (۱)
- ۴ (۲)
- ۸ (۳)
- ۶ (۴)

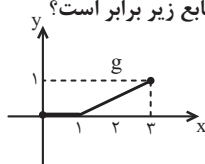
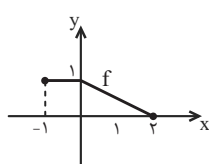
۱۵. اگر  $f(x) = x^2 + x$ ، آنگاه نمودار کدام تابع زیر، محور  $x$  ها را در دو نقطه به طول مثبت قطع می‌کند؟ (صفحه ۴-مکمل مثال)
- (۱)  $f(x) - 2$  (۲)  $f(x) + 2$  (۳)  $f(x - 2)$  (۴)  $f(x + 1)$
۱۶. نمودار تابع  $f(x) = x^2 - 6x$  با دو انتقال بر نمودار تابع  $g(x) = x^2 + 2x$  منطبق می‌شود. در این انتقال، نقطه‌ای به طول ۵ واقع بر تابع  $f$  به نقطه‌ای با کدام عرض در تابع  $g$  تبدیل می‌شود؟ (صفحه ۵-مرتبط با مثال)
- (۱)  $-13$  (۲)  $-5$  (۳)  $3$  (۴)  $-9$
۱۷. نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = 4x - x^2$  را در امتداد محور  $x$  ها، ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. فاصله‌ی نقطه‌ی برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع  $f$ ، از مبدأ مختصات کدام است؟ (صفحه ۵-مرتبط با مثال) (سراسری تجربی - تیر ۱۴۰۱)
- (۱)  $1$  (۲)  $2$  (۳)  $2\sqrt{5}$  (۴)  $\sqrt{10}$
۱۸. نمودار تابع  $y = x^2 - x - 3$  را ۲ واحد به طرف  $x$  های منفی سپس ۹ واحد به طرف  $y$  های منفی انتقال می‌دهیم. نمودار جدید، در کدام بازه، زیر محور  $x$  ها است؟ (انتقال نمودار توابع و نامعادلات درجه دوم-سؤال ترکیبی) (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۸)
- (۱)  $(-5, 2)$  (۲)  $(-5, 3)$  (۳)  $(-2, 3)$  (۴)  $(-2, 5)$
۱۹. نمودار تابع  $y = -x^2 + 2x + 5$  را ۳ واحد به طرف  $x$  های مثبت، سپس ۲ واحد به طرف  $y$  های منفی انتقال می‌دهیم. نمودار جدید در کدام بازه، بالای نیمساز ربع اول است؟ (انتقال نمودار توابع و نامعادلات درجه دوم-سؤال ترکیبی) (سراسری ریاضی - ۹۸)
- (۱)  $(3, 4)$  (۲)  $(2, 5)$  (۳)  $(3, 5)$  (۴)  $(2, 6)$
۲۰. تابع درجه‌ی دوم  $y = f(x)$  را یک واحد به طرف  $x$  های منفی انتقال می‌دهیم. ضابطه‌ی نمودار حاصل  $g(x) = x^2 - x + k$  است. اگر نقطه‌ی  $A(2, 5)$  روی تابع  $f$  باشد،  $g(2)$  کدام است؟ (صفحه ۴-مکمل مثال)
- (۱)  $7$  (۲)  $3$  (۳)  $2$  (۴)  $4$
۲۱. تابع  $f$  از انتقال ۲ واحد به چپ تابع  $y = -x^2$  و تابع  $g$  از انتقال  $m$  واحد به چپ و سپس  $k$  واحد به پایین تابع  $y = x^2$  به دست می‌آید. اگر طول‌های محل تلاقی توابع  $f$  و  $g$  برابر با  $-1$  و  $-2$  باشند، مقدار  $g(5)$  کدام است؟ (صفحه ۴-مکمل مثال)
- (۱)  $19$  (۲)  $27$  (۳)  $35$  (۴)  $12$
۲۲. اگر نمودار تابع  $y = f(x)$  را یک واحد به راست و سپس دو واحد به پایین انتقال دهیم، نمودار تابع  $g(x) = (x-1)^2$  حاصل می‌شود. در این صورت تابع  $f \circ g$  محور  $y$  ها را با چه عرضی قطع می‌کند؟ (صفحه ۵-مرتبط با مثال) (آزمون کانون - ۵ آذر ۹۵)
- (۱)  $1$  (۲)  $2$  (۳)  $3$  (۴)  $4$
۲۳. اگر  $f(x) = \sqrt{x}$  باشد، آنگاه نمودار دو تابع  $y = f(x) + 1$  و  $y = f(x + 2)$  در نقطه‌ای ..... متقاطع‌اند. (صفحه ۴-کاردر کلاس-مکمل ۱)
- (۱) روی محور  $y$  ها (۲) بالای نیمساز ناحیه‌ی اول (۳) پایین نیمساز ناحیه‌ی اول (۴) در ناحیه‌ی دوم
۲۴. برای رسم نمودار تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = \sqrt{x-2}$  با استفاده از تابع  $g(x) = -1 + \sqrt{x+1}$  کافی است ابتدا نمودار تابع  $g$  را ..... و سپس ..... انتقال دهیم. (صفحه ۴-کار در کلاس-مشابه ۱-ج)
- (۱) ۳ واحد به راست - یک واحد به بالا (۲) ۳ واحد به چپ - یک واحد به بالا (۳) ۳ واحد به راست - یک واحد به پایین (۴) یک واحد به راست - یک واحد به پایین
۲۵. قرینه‌ی نمودار تابع  $y = 2 + \sqrt{x-1}$  را نسبت به خط  $y = x$  رسم کرده و سپس نمودار حاصل را ۲ واحد در جهت مثبت محور  $x$  ها و ۳ واحد در جهت منفی محور  $y$  ها انتقال می‌دهیم و آن را  $y = g(x)$  می‌نامیم. مقدار  $g(4)$  کدام است؟ (تابع وارون و انتقال نمودار توابع-سؤال ترکیبی) (سراسری تجربی - ۱۴۰۰)
- (۱)  $3$  (۲)  $-3$  (۳)  $-2$  (۴)  $-4$
۲۶. نمودار تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = \sqrt{x}$  را در امتداد محور  $x$  ها، ۱۲ واحد در جهت مثبت و سپس در امتداد محور  $y$  ها، ۲ واحد در جهت مثبت، انتقال می‌دهیم. فاصله‌ی نقطه‌ی برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع  $f$ ، از مبدأ مختصات، کدام است؟ (انتقال نمودار توابع و معادلات رادیکالی-سؤال ترکیبی) (سراسری تجربی - ۹۹)
- (۱)  $4\sqrt{15}$  (۲)  $6\sqrt{7}$  (۳)  $4\sqrt{17}$  (۴)  $6\sqrt{10}$
۲۷. تابع  $y = 2^x + |x|$  را ۳ واحد در امتداد محور  $x$  ها در جهت منفی و سپس در امتداد محور  $y$  ها ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. منحنی حاصل، محور  $x$  ها را با کدام طول، قطع می‌کند؟ (انتقال نمودار توابع و معادلات قدرمطلق-سؤال ترکیبی) (سراسری تجربی خارج از کشور - ۱۴۰۰)
- (۱)  $-\frac{5}{2}$  (۲)  $-\frac{3}{2}$  (۳)  $\frac{5}{2}$  (۴)  $\frac{7}{2}$

صفحه‌های ۷ تا ۱۲ حسابان ۲

تیپ ۲

انعکاس نمودارها (قرینه‌یابی)

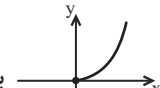
(صفحه ۸-کار در کلاس-مکمل ۳)

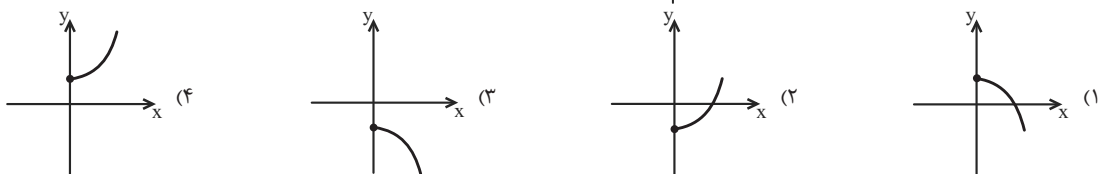


۲۸. نمودار دو تابع  $f$  و  $g$  در زیر رسم شده‌اند.  $g(x)$  با کدام تابع زیر برابر است؟

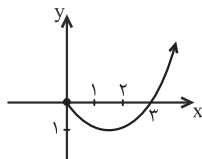
- (۱)  $-1 + f(x + 1)$   
 (۲)  $2 + f(x + 1)$   
 (۳)  $2 - f(x - 1)$   
 (۴)  $1 - f(x - 1)$



۲۹. اگر نمودار تابع  $y = 1 - f(x)$  به شکل  باشد، نمودار تابع  $y = f(x)$  به کدام شکل زیر است؟ (صفحه ۸- کار در کلاس- مکمل ۳)

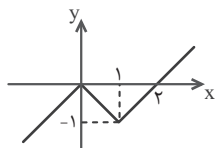


۳۰. اگر نمودار تابع  $y = f(x+1)$  به صورت زیر باشد، آنگاه دامنه‌ی تابع  $y = \sqrt{-f(x+2)}$  کدام است؟ (صفحه ۱۲- مکمل تمرین ۳) (آزمون کانون - ۲ شهریور ۹۷)



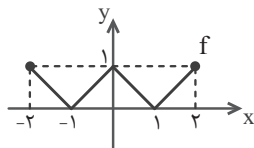
- (۱)  $[-1, 2]$
- (۲)  $[1, 3]$
- (۳)  $[2, +\infty)$
- (۴)  $[-3, 0]$

۳۱. نمودار تابع  $f$  به شکل زیر است. نمودار تابع  $f$  را نسبت به محور  $x$  ها قرینه کرده و سپس  $\frac{1}{3}$  واحد به پایین انتقال می‌دهیم و در انتها در جاهایی که نمودار زیر محور  $x$  هاست، تصویر آینه‌وار آن را نسبت به محور  $x$  ها رسم کرده و تابع حاصل را  $g$  می‌نامیم. معادله‌ی  $g(x) = k$  به ازای کدام مجموعه مقادیر  $k$  بیشترین ریشه را دارد؟ (صفحه ۱۲- مکمل تمرین ۳)



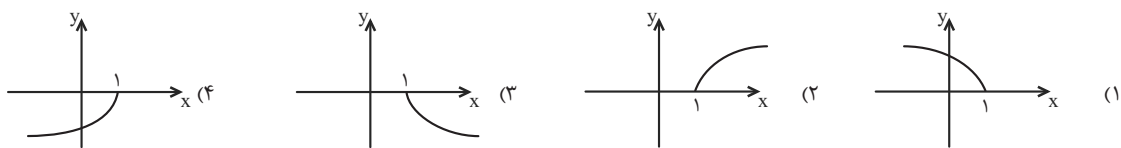
- (۱)  $(0, 1)$
- (۲)  $(0, \frac{1}{3})$
- (۳)  $(0, \frac{2}{3})$
- (۴)  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$

۳۲. اگر نمودار تابع  $f$  به شکل زیر باشد، آنگاه خط  $y = 1$  با نمودار تابع  $g(x) = \begin{cases} f(x+2), & -4 \leq x \leq 0 \\ f(1-x), & 0 < x \leq 3 \end{cases}$  چند نقطه‌ی مشترک دارد؟ (صفحه ۱۲- مکمل تمرین ۳)

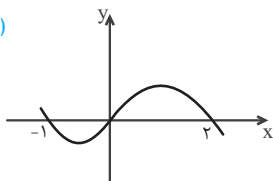


- (۱) ۵
- (۲) ۶
- (۳) ۳
- (۴) ۴

۳۳. هرگاه نمودار تابع  $y = f(x)$  به شکل  باشد، نمودار تابع  $y = -f(1-x)$  به کدام شکل زیر است؟ (صفحه ۱۲- مکمل تمرین ۳) (آزمون کانون - ۸۸)



۳۴. شکل زیر، نمودار  $f(x-2)$  را نشان می‌دهد. دامنه‌ی تابع  $g(x) = \sqrt{\frac{f(1-x)}{f(x+1)}}$  شامل چند عدد صحیح است؟ (صفحه ۱۲- مکمل تمرین ۳) (سراسری تجربی خارج از کشور - تیر ۱۴۰۲)



- (۱) ۴
- (۲) ۲
- (۳) صفر
- (۴) بیش از ۴

۳۵. نمودار تابع  $f(x) = 4x - x^2$  با انتقال‌هایی بر نمودار تابع  $g(x) = x^2 + 2x$  منطبق می‌شود. در این انتقال‌ها، نقطه‌ای به طول ۱ واقع بر تابع  $f$  به نقطه‌ای با کدام مختصات بر روی  $g$  تبدیل می‌شود؟ (صفحه ۷- مکمل کار در کلاس)

- (۱)  $(0, 0)$
- (۲)  $(-1, -1)$
- (۳)  $(-2, 0)$
- (۴)  $(1, 3)$

۳۶. ابتدا قرینه‌ی نمودار تابع  $f(x) = (x-1)^2$  را نسبت به مبدأ مختصات رسم کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم. طول نقاط تلاقی منحنی اخیر با منحنی اصلی، کدام است؟ (صفحه ۷- مکمل کار در کلاس) (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۹)

- (۱)  $0, 2$
- (۲)  $-1, 1$
- (۳)  $-1, 2$
- (۴)  $-2, 1$

۳۷. نمودار تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = x^2 - 2x$  ;  $(x > 1)$ ، مفروض است. قرینه‌ی نمودار آن نسبت به محور  $x$  ها را،  $۱۶$  واحد در امتداد محور  $y$  ها در جهت مثبت انتقال می‌دهیم. فاصله‌ی نقطه‌ی برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع  $f$ ، از مبدأ مختصات، کدام است؟

(صفحه‌ی ۷- مکتب کار در کلاس) (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۹)

- (۱)  $4\sqrt{5}$  (۲)  $6\sqrt{2}$  (۳)  $5\sqrt{2}$  (۴)  $2\sqrt{5}$

۳۸. فرض کنید  $f(x) = |x|$ . تابع  $g$  از انتقال یک واحد  $f$  به راست و سپس انعکاس نمودار حاصل نسبت به محور  $x$  ها و در انتها انتقال یک واحد به بالای نمودار حاصل در راستای محور  $y$  ها به دست می‌آید. در چه بازه‌ای نمودار دو تابع  $f$  و  $g$  بر هم منطبق‌اند؟

(صفحه‌ی ۷- مکتب کار در کلاس)

- (۱)  $[0, 1]$  (۲)  $[1, +\infty)$  (۳)  $(-\infty, 0]$  (۴)  $R$

۳۹. نمودار تابع  $g$  از انتقال یک واحد به راست تابع  $f(x) = |x|$  و نمودار تابع  $h$  از تقارن تابع  $f$  نسبت به محور  $x$  ها و سپس انتقال  $۳$  واحد به بالا به دست می‌آید. مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودار دو تابع  $g$  و  $h$  کدام است؟

(صفحه‌ی ۷- مکتب کار در کلاس)

- (۱)  $3$  (۲)  $4$  (۳)  $5$  (۴)  $6$

۴۰. فرض کنید  $f(x) = |x|$  باشد. اگر نمودار  $f$  را  $۱۱$  واحد به راست و سپس انعکاس نمودار حاصل را نسبت به محور  $x$  ها رسم کرده و در انتها  $۵$  واحد به بالا انتقال دهیم، تابع  $g$  به دست می‌آید. در بازه یا بازه‌هایی نمودار تابع  $g(x)$  بالای نمودار تابع  $f(x)$  است، طول بزرگترین این بازه‌ها کدام است؟

(نامعادلات و تبدیل نمودار توابع- سؤال ترکیبی)

- (۱)  $\frac{10}{3}$  (۲)  $\frac{7}{3}$  (۳)  $2$  (۴)  $4$

۴۱. نمودار تابع  $f(x) = \frac{1}{x}$  را در امتداد محور  $x$  ها،  $۱$  واحد در جهت مثبت و سپس قرینه‌ی آن نسبت به محور  $x$  ها را در امتداد محور  $y$  ها،  $۲$  واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. فاصله‌ی نقطه‌های برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع  $f$ ، از مبدأ مختصات، کدام است؟

(معادلات و تبدیل نمودار توابع- سؤال ترکیبی) (سراسری تجربی خارج از کشور- تیر ۱۴۰۱)

- (۱)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۲)  $\frac{\sqrt{5}}{2}$  (۳)  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$  (۴)  $\frac{\sqrt{10}}{2}$

۴۲. اگر  $f(x) = \sqrt{x}$  باشد، آنگاه نمودار دو تابع  $y = f(x-2) - 2$  و  $y = 3 - f(x)$ ، یکدیگر را در کدام بازه‌ی زیر قطع می‌کنند؟

(صفحه‌ی ۸- کار در کلاس- مکتب ۳)

- (۱)  $(0, 2)$  (۲)  $(2, 6)$  (۳)  $(6, 9)$  (۴)  $(9, +\infty)$

۴۳. قرینه‌ی نمودار تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  را نسبت به محور  $y$  ها تعیین کرده، سپس  $۲$  واحد به طرف  $x$  های مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل، نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم را با کدام طول قطع می‌کند؟

(صفحه‌ی ۱۱- مکتب تمرین ۱) (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۷)

- (۱)  $-2$  (۲)  $0/5$  (۳)  $1$  (۴)  $1/5$

۴۴. قرینه‌ی نمودار تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  را نسبت به محور  $y$  ها تعیین کرده، سپس منحنی حاصل را  $۴$  واحد به سمت راست، انتقال می‌دهیم. منحنی اخیر و منحنی اصلی نسبت به کدام خط، متقارن هستند؟

(صفحه‌ی ۱۱- مکتب تمرین ۱) (سراسری ریاضی- ۹۹)

- (۱)  $x = 1$  (۲)  $x = 1/5$  (۳)  $x = 2$  (۴)  $x = 2/5$

۴۵. نمودار منحنی  $y = \sqrt{4-x}$  را  $k$  واحد در راستای قائم و  $۲-k$  واحد در جهت افقی چنان انتقال می‌دهیم که منحنی جدید وارون تابع خود را در نقطه‌ای با عرض  $۱$  قطع کند. سپس منحنی حاصل را  $۱$  واحد در راستای قائم به سمت پایین انتقال می‌دهیم. طول نقطه‌ی برخورد منحنی به دست آمده با محور  $x$  ها، کدام است؟

(نمودار تابع وارون و انتقال- سؤال ترکیبی) (سراسری ریاضی- ۱۴۰۰)

- (۱)  $-4$  (۲)  $-3$  (۳)  $1$  (۴)  $2$

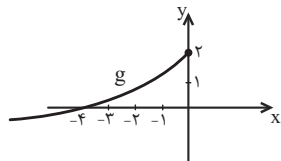
۴۶. نمودار منحنی  $y = \sqrt{x+3}$  را  $k$  واحد در راستای قائم چنان انتقال می‌دهیم که منحنی جدید وارون تابع خود را در نقطه‌ای با عرض  $۱$  قطع کند. سپس منحنی حاصل را نسبت به محور  $x$  ها قرینه کرده و  $۴$  واحد در جهت افقی به سمت چپ انتقال می‌دهیم. کدام یک از نقاط زیر روی نمودار منحنی به دست آمده، قرار دارد؟

(نمودار تابع وارون و انتقال- سؤال ترکیبی) (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۱۴۰۰)

- (۱)  $(1-\sqrt{5}, 0)$  (۲)  $(-\sqrt{5}, 0)$  (۳)  $(0, 1-\sqrt{5})$  (۴)  $(0, -\sqrt{5})$

۴۷. نمودار تابع  $g$  در شکل زیر، فقط از قرینه‌یابی و انتقال نمودار تابع  $y = \sqrt{x}$  به دست آمده است. خط  $y = -4$  نمودار تابع  $y = g(x)$  را با چه طولی قطع می‌کند؟

(صفحه‌ی ۱۲- مکتب تمرین ۴)



- (۱)  $-25$  (۲)  $-9$   
(۳)  $-16$  (۴)  $-36$

۴۸. اگر در بازه‌ی  $(0, a)$  نمودار تابع  $y = |x+2|$  بالای نمودار تابع  $y = \sqrt{b-x}$  قرار گیرد، آنگاه:

(صفحه‌ی ۱۱- مکتب تمرین ۱)

- (۱)  $a = b$  (۲)  $a + b = 0$  (۳)  $2a = b$  (۴)  $2b = a$

۴۹. نمودار تابع  $f(x) = \sqrt{|x-2| + |x+4|}$  نسبت به کدام خط، متقارن است؟

(معادلات و تقارن- سؤال ترکیبی)

- (۱) محور  $x$  (۲) خط  $x = -1$  (۳) خط  $x = 1$  (۴) محور  $y$  ها

۵۰. اگر  $f$  یک تابع چند جمله‌ای و  $f(2-x) = f(2+x)$  باشد، آنگاه نمودار تابع  $f$  نسبت به کدام خط زیر، متقارن است؟ (معادلات و تقارن - سؤال ترکیبی)

- (۱) محور  $x$  ها (۲) خط  $x=0$  (۳) خط  $x=2$  (۴) خط  $x=-2$

۵۱. اگر نمودار تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = x^4 + 3x^3 + A(x+1)^2 + Bx$  نسبت به محور  $y$  ها متقارن باشد، آنگاه  $A+B$  کدام است؟ (معادلات و تقارن - سؤال ترکیبی)

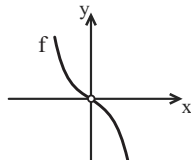
- (۱)  $-6$  (۲)  $-3$  (۳) صفر (۴)  $6$

۵۲. اگر تابع  $f$  نسبت به محور  $y$  ها و تابع  $g$  نسبت به مبدأ مختصات متقارن باشد و داشته باشیم:  $f(x) + g(x) = 2^x$ ، آنگاه  $g(2)$  کدام است؟ (معادلات و تقارن - سؤال ترکیبی)

- (۱)  $\frac{15}{4}$  (۲)  $\frac{15}{8}$  (۳)  $\frac{15}{2}$  (۴)  $\frac{15}{16}$

رسم نمودار تابع‌های  $y=f(x)$  و  $y=f(|x|)$  تیب ۳ صفحه‌های ۷ تا ۱۲ حسابان ۲

(صفحه‌ی ۷ - متن درس)

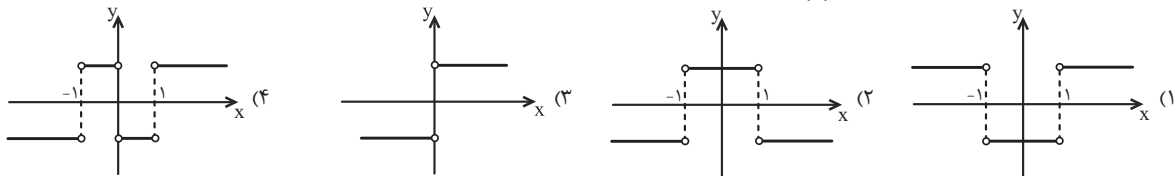


۵۳. اگر نمودار تابع  $f$  به صورت زیر باشد، آنگاه تابع  $y = \frac{|x|}{x} f(x)$  با کدام تابع زیر برابر است؟

- (۱)  $y = -|f(x)|$   
 (۲)  $y = |f(x)|$   
 (۳)  $y = f(x)$   
 (۴)  $y = -f(x)$

(صفحه‌ی ۷ - متن درس) (آزمون کانون - ۸ بهمن ۹۵)

۵۴. اگر  $f(x) = |x-1|$  باشد، نمودار تابع  $y = \frac{|f(x)|}{f(x)}$  به کدام صورت است؟



۵۵. خط  $y=k$  نمودار تابع  $f(x) = |x^2 - 4x|$  را دقیقاً در ۳ نقطه قطع می‌کند. مقدار  $k$  کدام است؟

(صفحه‌ی ۷ - کار در کلاس - مرتبط با ۲) (آزمون کانون - ۷ فروردین ۹۶)

- (۱)  $3$  (۲)  $4$  (۳)  $\frac{9}{2}$  (۴)  $\frac{11}{2}$

۵۶. اگر  $x_1$  و  $x_2$  طول‌های محل تلاقی خط  $y-x=2$  و نمودار تابع  $y = \frac{1}{5}|x^2 - 4|$  باشند، حاصل  $x_1 x_2$  کدام است؟

(معادلات و تبدیل نمودار توابع - سؤال ترکیبی)

- (۱)  $-7$  (۲)  $-14$  (۳)  $-12$  (۴)  $-6$

(صفحه‌ی ۷ - کار در کلاس - مرتبط با ۲) (آزمون کانون - ۵ آذر ۹۵)

۵۷. معادله‌ی  $\|x-2\| = \sqrt{x-k}$  به‌ازای مقادیر مختلف  $k$ ، حداکثر چند ریشه دارد؟

- (۱)  $3$  (۲)  $4$  (۳)  $5$  (۴)  $6$

(صفحه‌ی ۱۲ - مرتبط با تمرین ۳)

۵۸. نمودار دو تابع  $y = 3^{-|x|}$  و  $y = 2 - x^2$  در چند نقطه مشترکند؟

- (۱) یک (۲) دو (۳) هیچ (۴) بی‌شمار

۵۹. نمودار تابع  $y = 2|\sin x|$  را ابتدا به اندازه‌ی  $\frac{\pi}{4}$  در امتداد محور  $x$  ها در جهت مثبت و سپس  $\frac{3}{4}$  در امتداد محور  $y$  ها در جهت منفی انتقال می‌دهیم. تعداد محل تقاطع نمودار حاصل با محور  $x$  ها در فاصله‌ی  $[0, \pi]$ ، کدام است؟ (معادلات و تبدیل نمودار توابع - سؤال ترکیبی) (سراسری تجربی - ۱۴۰۰)

- (۱) صفر (۲)  $1$  (۳)  $2$  (۴)  $4$

۶۰. نمودار  $\frac{1}{f}$  را در امتداد محور  $x$  ها،  $a$  واحد در جهت مثبت انتقال داده و آن را  $g$  می‌نامیم. سپس تابع  $|g|$  را در امتداد محور  $y$  ها،  $2$  واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. طول نقطه‌ی برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع  $\frac{1}{|f|}$  برابر  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  است. اگر  $f$  تابع همانی باشد، اختلاف مقادیر در

تساوی  $f(x+a) = 3$  کدام است؟ (معادلات و تبدیل نمودار توابع - سؤال ترکیبی) (سراسری تجربی - دی ۱۴۰۱)

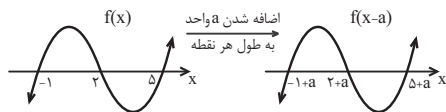
- (۱)  $2 + \sqrt{2}$  (۲)  $2$  (۳)  $2 - \sqrt{2}$  (۴)  $\sqrt{2}$

## ۴. گزینه ۴

اگر نمودار تابع  $f$  بیشتر از یک واحد به چپ یا بیشتر از یک واحد به بالا منتقل شود، آنگاه از ناحیه‌ی چهارم عبور نخواهد کرد. در گزینه‌ی (۴)، تابع  $f$  دو واحد به چپ منتقل می‌شود، پس نمودار تابع  $f(x+2)$  از ناحیه‌ی چهارم عبور نخواهد کرد.

## ۵. گزینه ۲

به طول هر نقطه‌ی تابع  $f(x)$ ،  $a$  واحد اضافه می‌شود و تابع  $f(x-a)$  تشکیل می‌شود، پس نمودار تابع  $f(x-a)$  به صورت زیر خواهد بود:



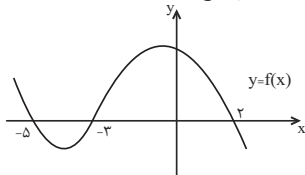
با توجه به نمودار تابع  $f(x-a)$ ، ریشه‌های معادله‌ی  $f(x-a)=0$  به صورت  $x_1 = -1+a$ ،  $x_2 = 2+a$ ،  $x_3 = 5+a$  است، لذا:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow -1+a+2+a+5+a=0$$

$$\Rightarrow 3a+6=0 \Rightarrow a=-2$$

## ۶. گزینه ۴

ابتدا نمودار تابع  $y=f(x-2)$  را دو واحد به چپ انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع  $y=f(x)$  حاصل شود.



حال دامنه‌ی تابع  $y=\sqrt{xf(x)}$  را می‌یابیم. باید:  $xf(x) \geq 0$  با تعیین علامت، جواب را می‌یابیم:

	-5	-3	0	2	
x	-	-	-	+	+
f(x)	+	0	-	+	0
xf(x)	-	0	+	0	-

پس مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی بالا و در نتیجه دامنه‌ی تابع برابر است با:

$$x \in [-5, -3] \cup [0, 2]$$

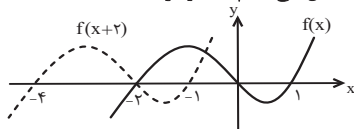
## ۷. گزینه ۱

عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد:

$$g(x) = \sqrt{-\frac{f(x)}{f(x+2)}} \rightarrow -\frac{f(x)}{f(x+2)} \geq 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{f(x+2)} \leq 0$$

برای تعیین علامت عبارت  $P = \frac{f(x)}{f(x+2)}$ ، ابتدا نمودار  $f(x)$  را دو

واحد به چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار  $f(x+2)$  به دست آید:



با توجه به نمودار، عبارت  $P$  را تعیین علامت می‌کنیم:

x	-4	-2	-1	0	1
f(x)	-	-	+	+	0
f(x+2)	-	+	0	-	+
P	+	-	-	+	+

بازه‌هایی که در آن‌ها  $P$  منفی یا صفر است، دامنه‌ی تابع  $g$  را تشکیل می‌دهند، یعنی:  $D_g = (-4, -2) \cup (-2, -1) \cup [0, 1]$ ، که این مجموعه شامل اعداد صحیح  $-3$ ،  $0$  و  $1$  است.

پاسخ تشریحی: حسین حاجیلو، فرهاد حامی  
فرزانه دانایی، حمیدرضا رحیم‌خانلو

## راهبرد حل تیب (۱)

الف) نمودار تابع  $f(x+k)$  با انتقال نمودار تابع  $f(x)$  در راستای محور  $x$  ها به دست می‌آید که اگر  $k$  مثبت باشد،  $k$  واحد به سمت چپ و اگر  $k$  منفی باشد،  $k$  واحد به سمت راست انتقال می‌یابد.

نمودار تابع  $f(x)+k$  با انتقال نمودار تابع  $f(x)$  در راستای محور  $y$  ها به دست می‌آید که اگر  $k$  مثبت باشد،  $k$  واحد به سمت بالا و اگر  $k$  منفی باشد،  $k$  واحد به سمت پایین انتقال می‌یابد.

ب) اگر نقطه‌ی  $A(x_0, y_0)$  روی تابع  $y=f(x)$  باشد، آنگاه نقطه‌ی  $A'(x_0+k, y_0+c)$  روی تابع  $y=f(x-k)+c$  است.

• نکته‌ی ۱: اگر دامنه‌ی تابع  $f(x)$  بازه‌ی  $[a, b]$  و برد آن بازه‌ی  $[m, n]$  باشد، تأثیر انتقال‌های افقی و عمودی تابع بر روی دامنه و برد به صورت زیر است:

انتقال تابع $f(x)$	دامنه	برد
$f(x+k)$	$[a-k, b-k]$	تأثیری ندارد.
$f(x)+k$	تأثیری ندارد.	$[m+k, n+k]$

• نکته‌ی ۲: اگر دو تابع از یک خانواده باشند، مثلاً هر دو تابع درجه‌ی دوم یا هر دو تابع گویا باشند، آنگاه می‌توان با انتقال‌های افقی و عمودی نمودار یکی از آنها به نمودار دیگری رسید. برای این منظور باید ضابطه‌ی هر دو تابع را به شکل استاندارد تبدیل کنیم. به شکل استاندارد تابع‌های زیر توجه کنید:

$$y = (x-h)^2 + k \quad \text{تابع درجه‌ی دوم}$$

$$y = \frac{1}{x-h} + k \quad \text{تابع گویا}$$

## ۱. گزینه ۲

در تبدیل نقاط تابع  $f(x)$  به نقاط تابع  $f(x+1)-3$ ، به طول هر نقطه  $-1$  واحد و به عرض هر نقطه  $-3$  واحد اضافه می‌شود:

$$A(x_0, y_0) \xrightarrow{f(x+1)-3} A'(x_0-1, y_0-3)$$

## ۲. گزینه ۳

اگر تابع  $y=f(x+1)-2$  را ابتدا دو واحد به راست و سپس  $4$  واحد به بالا منتقل کنیم، تابع  $y=f(x-1)+2$  حاصل می‌شود. پس به طول هر نقطه  $2$  واحد و به عرض هر نقطه  $4$  واحد اضافه می‌شود:

$$A(1, -8) \rightarrow A'(1+2, -8+4) = (3, -4)$$

فاصله‌ی نقطه‌ی  $A'$  از مبدأ مختصات برابر است با:

$$OA' = \sqrt{x_{A'}^2 + y_{A'}^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

## ۳. گزینه ۱

با انتقال تابع  $k(x)=f(x-1)+1$  و دو واحد به چپ و دو واحد به پایین، تابع  $g(x)=f(x+1)-1$  ساخته می‌شود.

$$g(x) = k(x+2) - 2$$

$$D_k = [-1, 1] \xrightarrow{-2} D_g = [-1-2, 1-2] = [-3, -1]$$

$$R_k = [0, 4] \xrightarrow{-2} R_g = [0-2, 4-2] = [-2, 2]$$

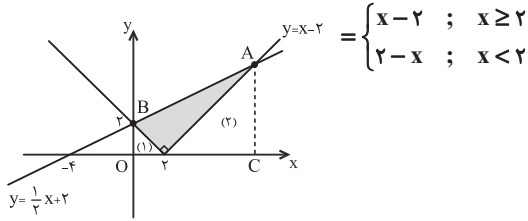
$$D_g \cap R_g = [-3, -1] \cap [-2, 2] = [-2, -1] \rightarrow$$

شامل دو عدد صحیح است.

۱۲. گزینه ۴

نمودارهای دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم، توجه کنید که:

$$y = \sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$$



حال باید مختصات نقطه‌ی A را پیدا کنیم:

$$\begin{cases} y = x - 2 \\ y = \frac{1}{2}x + 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \begin{cases} x = 8 \\ y = 6 \end{cases} \Rightarrow A(8, 6)$$

راه حل اول: مساحت ناحیه‌ی مورد نظر برابر است با مساحت دوزنقه‌ی ABOC منهای مجموع مساحت‌های دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی (۱) و (۲).

$$\begin{cases} S(ABOC) = \frac{(2+6) \times 8}{2} = 32 \\ S_1 = \frac{2 \times 2}{2} = 2, S_2 = \frac{6 \times 6}{2} = 18 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S \text{ مطلوب} = 32 - (2 + 18) = 12$$

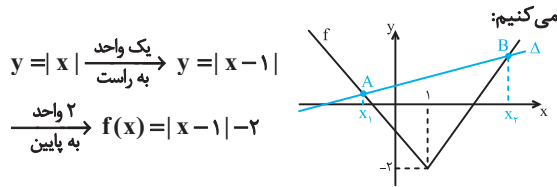
راه حل دوم: مساحت ناحیه‌ی مورد نظر، مساحت یک مثلث قائم‌الزاویه به

اضلاع قائم  $2\sqrt{2}$  و  $2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$  و  $\sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$  است، بنابراین:

$$S \text{ مطلوب} = \frac{2\sqrt{2} \times 6\sqrt{2}}{2} = 12$$

۱۳. گزینه ۳

ابتدا ضابطه‌ی تابع f را می‌یابیم و سپس نمودار آن را رسم



با توجه به نمودار، تابع f در بازه‌ی (x1, x2) پایین خط Δ قرار دارد. نقاط تقاطع خط با دو شاخه‌ی نمودار تابع f هستند:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + 2 = x - 1 - 2 \Rightarrow \frac{x}{2} = 5 \Rightarrow x_2 = 10 \\ \frac{1}{2}x + 2 = -(x - 1) - 2 \Rightarrow \frac{3x}{2} = -3 \Rightarrow x_1 = -2 \end{cases}$$

بنابراین مجموعه جواب نامعادله بازه‌ی (-2, 10) است، پس بیشترین مقدار  $x_2 - x_1 = 10 - (-2) = 12$  است.

۱۴. گزینه ۴

$$y = -|x| \xrightarrow{k \text{ واحد به راست}} y = -|x - k|$$

$$\xrightarrow{m \text{ واحد به بالا}} f(x) = -|x - k| + m$$

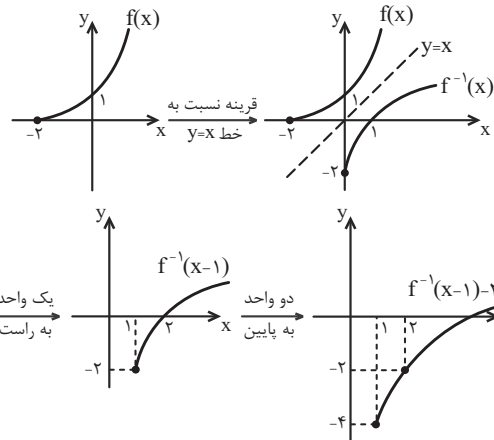
از آنجا که نقاط به طول ۳ و ۵ دارای عرض یکسانی هستند، پس نقطه‌ی وسط آنها روی خط تقارن نمودار قرار دارد، بنابراین:

$$\text{محور تقارن } x = \frac{3+5}{2} = 4$$

محور تقارن تابع  $f(x) = -|x - k| + m$  به صورت  $x = k$  است، بنابراین  $k = 4$  است. از طرفی نمودار، ۲ واحد به بالا رفته است، پس  $m + k = 4 + 2 = 6$  است، در نتیجه:

۸. گزینه ۴

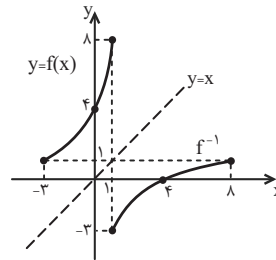
نمودار تابع  $y = -2 + f^{-1}(x-1)$  را به صورت زیر رسم می‌کنیم.



بنابراین نمودار از ناحیه‌ی دوم و سوم عبور نمی‌کند.

۹. گزینه ۳

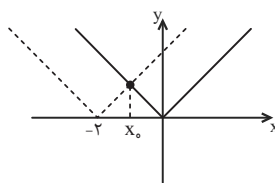
عبارت زیر رادیکال در تابع  $g(x) = \sqrt{f^{-1}(x)}$  باید نامنفی باشد، پس  $f^{-1}(x) \geq 0$ . برای یافتن نمودار تابع  $f^{-1}$ ، ابتدا نمودار تابع  $y = f(x-2)$  را دو واحد به چپ منتقل کرده و سپس نسبت به خط  $y = x$  قرینه می‌کنیم. (توجه کنید که  $f(0) = 4$  است).



با توجه به نمودار، تابع  $f^{-1}(x)$  به ازای  $x \in [4, 8]$  نامنفی است، پس:  $D_g = [4, 8]$

۱۰. گزینه ۱

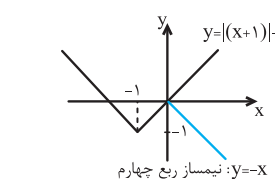
با رسم نمودار تابع‌های  $y_1 = |x+2|$  و  $y_2 = |x|$  در یک دستگاه دیده می‌شود که دو نمودار در یک نقطه متقاطع‌اند.



۱۱. گزینه ۴

$$\begin{aligned} f(x) &= |x-1| - 4 \\ \xrightarrow{2 \text{ واحد به طرف } x \text{ های منفی}} y &= |x+2-1| - 4 = |x+1| - 4 \\ \xrightarrow{3 \text{ واحد به طرف } y \text{ های مثبت}} y &= |x+1| - 4 + 3 = |x+1| - 1 \end{aligned}$$

نیمساز ربع چهارم و نمودار تابع  $y = |x+1| - 1$  را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. برای رسم نمودار کافی است نمودار تابع  $|x|$  را یک واحد به چپ و سپس یک واحد به پایین انتقال دهیم.



با توجه به نمودار، در بازه‌ی  $(0, +\infty)$  نمودار تابع جدید بالای نیمساز ناحیه‌ی چهارم قرار دارد.

## ۱۹. گزینه ۱

برای ساده شدن محاسبات، ابتدا عبارت درجه دوم را به صورت مربع کامل می‌نویسیم:

$$y = -x^2 + 2x + 5 = -(x^2 - 2x) + 5$$

$$= -((x-1)^2 - 1) + 5 = -(x-1)^2 + 6$$

حال تغییرات را اعمال می‌کنیم:

$$y = -(x-1)^2 + 6 \xrightarrow{\text{سه واحد به راست}} y = -((x-3)-1)^2 + 6$$

$$\xrightarrow{\text{دو واحد به پایین}} y = -((x-3)-1)^2 + 6 - 2$$

$$\Rightarrow \text{ضابطه‌ی جدید: } y = -(x-4)^2 + 4$$

برای آنکه بدانیم نمودار  $y_1 = -(x-4)^2 + 4$  در کدام بازه بالای نمودار  $y_2 = x$  (نیمساز ربع اول،  $x \geq 0$ ) قرار می‌گیرد باید نامعادله  $y_1 > y_2$  را حل کنیم.

$$y_1 > y_2 \Rightarrow -(x-4)^2 + 4 > x \Rightarrow (x-4)^2 + x - 4 < 0$$

$$\Rightarrow (x-4)(x-4+1) < 0 \Rightarrow (x-4)(x-3) < 0$$

$$\Rightarrow 3 < x < 4$$

## ۲۰. گزینه ۱

نقطه‌ی  $A(2, 5)$  روی تابع  $f$  است و انتقال یک واحد به چپ آن روی تابع  $g$  خواهد بود، پس  $A'(1, 5)$  روی تابع  $g$  است و در ضابطه‌ی آن صدق می‌کند:

$$g(1) = 5 \Rightarrow 5 = 1 - 1 + k \Rightarrow k = 5$$

$$\text{بنابراین } g(x) = x^2 - x + 5 \text{، پس: } g(2) = 2^2 - 2 + 5 = 7$$

## ۲۱. گزینه ۳

ابتدا ضابطه‌ی توابع  $f$  و  $g$  را می‌یابیم:

$$y = -x^2 \xrightarrow{\text{۲ واحد به چپ}} f(x) = -(x+2)^2$$

$$y = x^2 \xrightarrow{\text{m واحد به چپ}} g(x) = (x+m)^2$$

$$\xrightarrow{\text{k واحد به پایین}} g(x) = (x+m)^2 - k$$

معادله‌ی تلاقی:  $f(x) = g(x) \Rightarrow -(x+2)^2 = (x+m)^2 - k$   
طول نقاط تلاقی  $x = -1$  و  $x = -2$  است، پس در معادله‌ی تلاقی صدق می‌کنند:

$$\begin{cases} x = -1 \rightarrow -(-1+2)^2 = (-1+m)^2 - k \\ x = -2 \rightarrow -(-2+2)^2 = (-2+m)^2 - k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (m-1)^2 - k = -1 \Rightarrow k = (m-1)^2 + 1 \\ (m-2)^2 - k = 0 \Rightarrow k = (m-2)^2 \quad (*) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (m-1)^2 + 1 = (m-2)^2$$

$$\Rightarrow m^2 - 2m + 1 + 1 = m^2 - 4m + 4$$

$$\Rightarrow 2m = 2 \Rightarrow m = 1 \xrightarrow{(*)} k = (1-2)^2 = 1$$

بنابراین:  $g(x) = (x+1)^2 - 1$ ، در نتیجه:  $g(5) = 6^2 - 1 = 35$ .

## ۲۲. گزینه ۳

ابتدا باید ضابطه‌ی  $y = f(x)$  را بیابیم. برای این کار به صورت زیر عمل می‌کنیم:

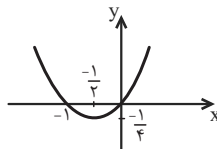
$$g(x) = (x-1)^2 \xrightarrow{\text{نمودار دو واحد بالا برود}} y = (x-1)^2 + 2$$

$$\xrightarrow{\text{نمودار یک واحد به چپ برود}} f(x) = (x+1-1)^2 + 2$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 + 2$$

## ۱۵. گزینه ۳

نمودار تابع  $f(x) = x^2 + x = x(x+1)$  به صورت زیر است.



اگر نمودار این تابع بیشتر از یک واحد به راست منتقل شود، آنگاه در دو نقطه با طول مثبت محور  $x$  را قطع خواهد کرد.

تابع گزینه‌ی (۳)،  $f(x-2)$  با انتقال ۲ واحد به راست تابع  $f$  به دست می‌آید، بنابراین نمودار  $f(x-2)$  محور  $x$  را در دو نقطه با طول مثبت قطع خواهد کرد.

## ۱۶. گزینه ۳

ابتدا ضابطه‌ی دو تابع را به فرم استاندارد  $y = (x-h)^2 + k$  تبدیل می‌کنیم:

$$f(x) = x^2 - 6x = x^2 - 6x + 9 - 9 = (x-3)^2 - 9$$

$$g(x) = x^2 + 2x = x^2 + 2x + 1 - 1 = (x+1)^2 - 1$$

بنابراین با انتقال نمودار تابع  $f(x) = (x-3)^2 - 9$ ، ۴ واحد به چپ و ۸ واحد به بالا، نمودار تابع  $g(x) = (x+1)^2 - 1$  حاصل می‌شود. بنابراین به طول نقاط تابع  $f$ ،  $-4$  واحد و به عرض نقاط تابع  $f$ ، ۸ واحد اضافه می‌شود و نقاط تابع  $g$  حاصل می‌شود. بنابراین نقطه به طول ۵ روی تابع  $f$  که عرض آن برابر با  $-5$  است،  $f(5) = 5^2 - 6 \times 5 = -5$ ، به نقطه‌ی زیر تبدیل می‌شود:

$$(5, -5) \rightarrow (5-4, -5+8) = (1, 3)$$

## ۱۷. گزینه ۴

اگر نمودار  $y = f(x)$  در امتداد محور  $x$  ها،  $k$  واحد در جهت منفی منتقل شود، نمودار  $y = f(x+k)$  به دست می‌آید:

$$\xrightarrow{\text{۲ واحد در جهت منفی محور } x \text{ ها}} f(x) = 4x - x^2$$

$$f(x+2) = 4(x+2) - (x+2)^2 = 4 - x^2$$

حال نقطه‌ی تقاطع نمودارهای  $y = 4x - x^2$  و  $y = 4 - x^2$  را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} y = 4x - x^2 \\ y = 4 - x^2 \end{cases} \Rightarrow 4x - x^2 = 4 - x^2 \Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 3$$

بنابراین  $A(1, 3)$  نقطه‌ی تقاطع دو نمودار است که فاصله‌ی آن از نقطه‌ی  $O(0, 0)$  برابر است با:

$$OA = \sqrt{(1-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{10}$$

## ۱۸. گزینه ۱

اگر نمودار تابع  $y = f(x)$  را دو واحد به سمت  $x$  های منفی انتقال دهیم،  $x$  تبدیل به  $(x+2)$  می‌شود و اگر نمودار  $f$  را ۹ واحد به طرف  $y$  های منفی انتقال دهیم، از مقادیر  $y$ ، ۹ واحد کم می‌شود. با این توضیح، معادله‌ی نمودار مورد نظر سؤال به صورت  $y = f(x+2) - 9$  است، داریم:

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - x - 3 \\ y = f(x+2) - 9 \Rightarrow y = (x+2)^2 - (x+2) - 3 - 9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = (x^2 + 4x + 4) - (x+2) - 12$$

$$= x^2 + 3x - 10$$

برای آنکه بدانیم نمودار  $y = x^2 + 3x - 10$  در چه بازه‌ای زیر محور  $x$  ها قرار می‌گیرد باید نامعادله‌ی  $y < 0$  را حل کنیم:

$$x^2 + 3x - 10 < 0 \Rightarrow (x+5)(x-2) < 0 \Rightarrow -5 < x < 2$$

تابع  $f$  و  $g$  را به دست آوریم که طول آن از حل معادله‌ی  $f(x) = g(x)$  به دست می‌آید.

$$\sqrt{x} = 2 + \sqrt{x-12}$$

طرفین به توان ۲  $\rightarrow x = 4 + (x-12) + 4\sqrt{x-12}$

$$\Rightarrow 8 = 4\sqrt{x-12} \Rightarrow \sqrt{x-12} = 2 \Rightarrow x-12 = 4$$

$$\Rightarrow x = 16$$

جایگذاری در  $f \rightarrow y = \sqrt{16} = 4 \Rightarrow$  نقطه‌ی تقاطع  $A(16, 4)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow OA &= \sqrt{16^2 + 4^2} = \sqrt{4^2 \times 4^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{4^2(4^2 + 1)} = 4\sqrt{17} \end{aligned}$$

۲۷. گزینه ۱

ابتدا تابع را به صورت دوضابطه‌ای نوشته و سپس انتقال می‌دهیم:

$$y = 2^{x+|x|} = \begin{cases} 2^{x+x}, & x \geq 0 \\ 2^{x-x}, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2^{2x}, & x \geq 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$$

۳ واحد در جهت منفی محور  $x$  ها  $\rightarrow y = \begin{cases} 2^{2(x+3)}, & x+3 \geq 0 \\ 1, & x+3 < 0 \end{cases}$

۲ واحد در جهت منفی محور  $y$  ها  $\rightarrow y = \begin{cases} 2^{2(x+3)} - 2, & x \geq -3 \\ 1 - 2, & x < -3 \end{cases}$

تلاقی نمودار با محور  $x$  ها از حل معادله‌ی  $y = 0$  به دست می‌آید:

ضابطه‌ی بالایی  $\rightarrow 2^{2(x+3)} - 2 = 0 \Rightarrow 2^{2(x+3)} = 2$

$$\Rightarrow 2(x+3) = 1 \Rightarrow x+3 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -3 + \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$$

راهبرد حل تیب (۲)

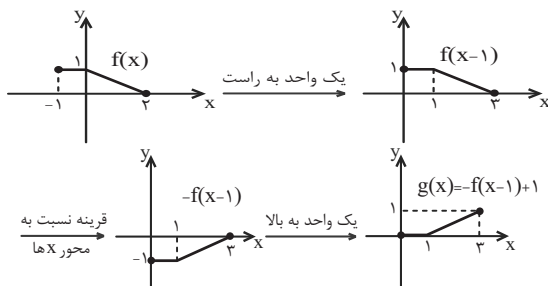
الف- نمودار تابع  $-f(x)$  با قرینه کردن نمودار تابع  $f(x)$  نسبت به محور  $x$  ها به دست می‌آید.

ب- نمودار تابع  $f(-x)$  با قرینه کردن نمودار تابع  $f(x)$  نسبت به محور  $y$  ها به دست می‌آید.

پ- نمودار تابع  $-f(-x)$  با قرینه کردن نمودار تابع  $f(x)$  نسبت به مبدأ مختصات به دست می‌آید.

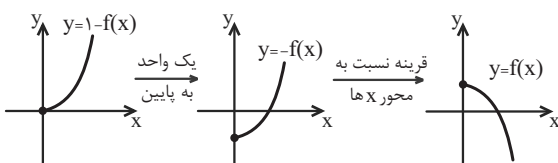
۲۸. گزینه ۴

برای تشکیل تابع  $g$  به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:



۲۹. گزینه ۱

نمودار تابع  $y = f(x)$  را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

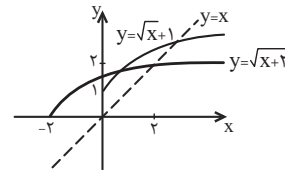


برای یافتن نقطه‌ی تلاقی تابع  $f \circ g$  با محور  $y$  ها،  $x = 0$  را در تابع

$$f(g(0)) = f((0-1)^2) = f(1) = 1^2 + 2 = 3$$

۲۴. گزینه ۲

نمودار دو تابع  $f(x) + 1$  و  $f(x+2)$  را در یک دستگاه مختصات رسم کرده و محل تقاطع آنها را می‌یابیم. نمودار تابع  $f(x) + 1$  را با انتقال نمودار تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  یک واحد به بالا و نمودار تابع  $f(x+2)$  را با انتقال نمودار تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  دو واحد به چپ رسم می‌کنیم.



همانطور که مشاهده می‌شود دو نمودار بالای نیمساز ناحیه‌ی اول یکدیگر را قطع می‌کنند. با حل معادله‌ی  $f(x+2) = f(x) + 1$  نیز می‌توان محل تقاطع را یافت.

به توان ۲  $\rightarrow \sqrt{x+2} = \sqrt{x+1} \rightarrow x+2 = x+1+2\sqrt{x}$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x} = 1 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

$$y = \sqrt{x+1} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

بنابراین محل تقاطع نقطه‌ی  $(\frac{1}{4}, \frac{3}{2})$  است که بالای خط  $y = x$  قرار دارد.

۲۴. گزینه ۱

برای رسم نمودار تابع  $f(x) = \sqrt{x-2}$  کافی است ابتدا نمودار تابع  $g(x) = -1 + \sqrt{x+1}$  را ۳ واحد به راست انتقال دهیم تا نمودار تابع  $y_1 = -1 + \sqrt{x-2}$  حاصل شود، سپس نمودار تابع  $y_1$  را یک واحد به بالا انتقال دهیم تا نمودار تابع  $y = \sqrt{x-2}$  به دست آید.

۲۵. گزینه ۳

با قرینه کردن نمودار نسبت به خط  $y = x$ ، جای  $x$  و  $y$  عوض می‌شود و نمودار وارون آن به دست می‌آید:

قرینه نسبت به خط  $y = x$   $\rightarrow x = 2 + \sqrt{y-1}$

$$\Rightarrow x-2 = \sqrt{y-1} \rightarrow (x-2)^2 = y-1$$

$$\Rightarrow y = (x-2)^2 + 1$$

حال تغییرات گفته شده را روی این تابع اعمال می‌کنیم:

دو واحد در جهت مثبت محور  $x$  ها  $\rightarrow y = ((x-2)-2)^2 + 1$

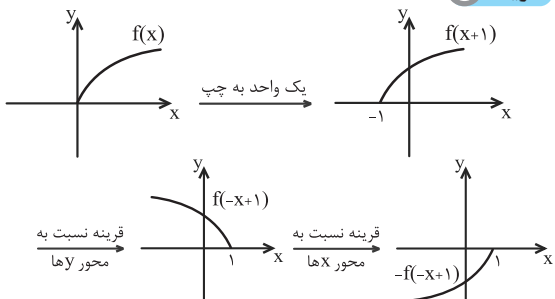
سه واحد در جهت منفی محور  $y$  ها  $\rightarrow y = (x-4)^2 + 1 - 3$

$$\Rightarrow g(x) = (x-4)^2 - 2 \Rightarrow g(4) = -2$$

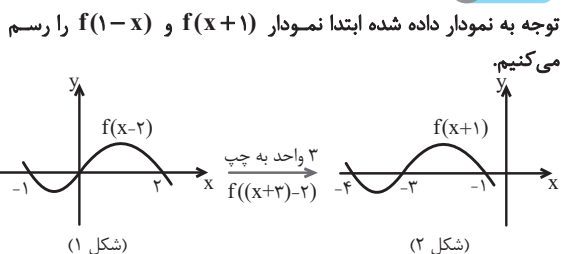
۲۶. گزینه ۳

اگر نمودار تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  را ۱۲ واحد در امتداد محور  $x$  ها در جهت مثبت انتقال دهیم،  $y = \sqrt{x-12}$  به دست می‌آید و اگر این نمودار را در امتداد محور  $y$  ها، ۲ واحد در جهت مثبت انتقال دهیم،  $g(x) = 2 + \sqrt{x-12}$  به دست می‌آید. پس باید نقطه‌ی برخورد دو

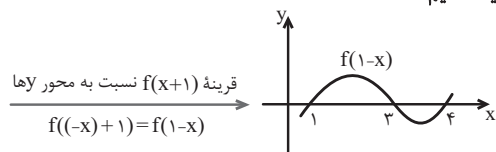
گزینه ۴ .۳۳



گزینه ۱ .۳۴



برای رسم  $f(-x+1)$  کافی است نمودار  $f(x+1)$  را نسبت به محور  $y$  ها قرینه کنیم.



برای تعیین علامت عبارت، ریشه‌های هر یک از توابع زیر رادیکال را یافته و در جدول تعیین علامت قرار می‌دهیم. فقط دقت کنید که تابع  $g$  در ریشه‌های مخرج تعریف نمی‌شود.

$f(x+1) = 0 \Rightarrow x = -4, -3, -1$   
 $f(1-x) = 0 \Rightarrow x = 1, 3, 4$

$x$	$-4$	$-3$	$-1$	$1$	$3$	$4$
$f(x+1)$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$
$f(1-x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$\frac{f(1-x)}{f(x+1)}$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$

دامنه‌ی تابع، بازه‌هایی است که زیر رادیکال نامنفی باشد، پس:  
 $D_g = (-4, -3) \cup (-1, 1) \cup [3, 4]$

بنابراین دامنه شامل اعداد صحیح  $0, 1, 3, 4$  است.

گزینه ۳ .۳۵

ابتدا ضابطه‌ی هر دو تابع را به فرم استاندارد می‌نویسیم:

$f(x) = -(x^2 - 4x + 4 - 4) = -(x-2)^2 + 4$

$g(x) = x^2 + 2x + 1 - 1 = (x+1)^2 - 1$

برای تبدیل  $f$  به  $g$ ، ابتدا  $f$  را نسبت به محور  $x$  ها قرینه می‌کنیم که

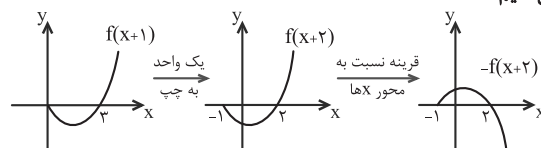
تابع  $y = -f(x) = (x-2)^2 - 4$  حاصل می‌شود. سپس  $3$  واحد به چپ و  $3$  واحد به بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار  $g$  به دست آید. بنابراین عرض نقاط تابع  $f$  ابتدا قرینه شده و سپس  $-3$  واحد به طول نقاط و  $3$  واحد به عرض نقاط اضافه می‌شود. پس نقطه به طول  $1$  بر روی تابع  $f$  که عرض آن  $f(1) = 4 - 1 = 3$  است، به نقطه‌ی زیر تبدیل می‌شود:

$(1, 3) \rightarrow (1, -3)$  عرض قرینه شود

$(-3, 0) = (1-3, -3+3)$   $-3$  واحد به طول  $3$  واحد به عرض

گزینه ۱ .۳۰

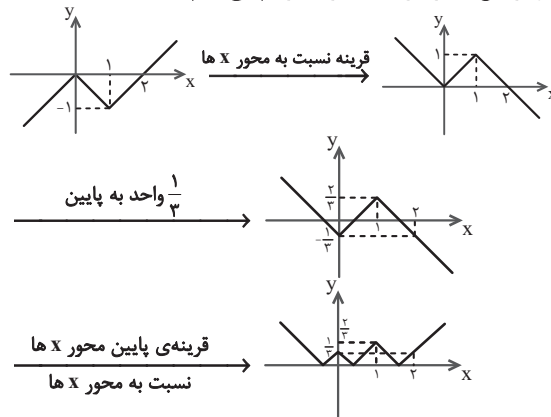
ابتدا با انتقال نمودار تابع  $f(x+1)$ ، نمودار تابع  $-f(x+2)$  را رسم می‌کنیم.



برای دامنه‌ی تابع  $y = \sqrt{-f(x+2)}$  عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد، بنابراین باید  $-f(x+2) \geq 0$  باشد. با توجه به نمودار  $-f(x+2)$ ، دامنه، بازه‌ی  $[-1, 2]$  است.

گزینه ۲ .۳۱

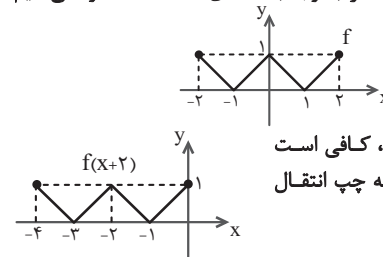
نمودار تابع  $g$  را مرحله به مرحله رسم می‌کنیم:



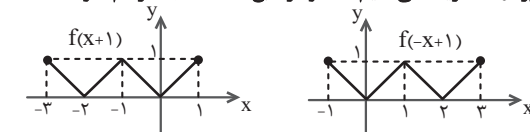
ریشه‌های معادله‌ی  $g(x) = k$ ، محل‌های تلاقی خط  $y = k$  با نمودار تابع  $g$  هستند، با توجه به نمودار، وقتی  $0 < k < \frac{1}{3}$  باشد، خط نمودار را در نقاط بیشتری قطع می‌کند.

گزینه ۱ .۳۲

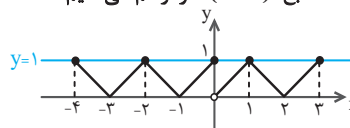
برای رسم نمودار تابع  $g$ ، نمودار دو تابع  $f(x+2)$  و  $f(1-x)$  را رسم کرده و سپس نمودار هر یک را با توجه به دامنه‌ی داده شده محدود می‌کنیم.



برای رسم نمودار  $f(1-x)$ ، ابتدا نمودار تابع  $f(x)$  را یک واحد به چپ انتقال داده تا نمودار تابع  $f(x+1)$  به دست آید، سپس نسبت به محور  $y$  ها قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع  $f(-x+1)$  رسم شود.

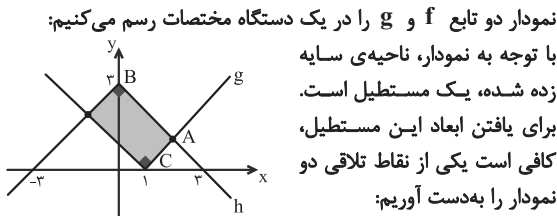


حال برای رسم تابع  $g$ ، در بازه‌ی  $-4 \leq x \leq 0$  تابع  $f(x+2)$  و در بازه‌ی  $0 < x \leq 3$  تابع  $f(1-x)$  را رسم می‌کنیم.



با توجه به نمودار دیده می‌شود که خط  $y = 1$  با نمودار تابع  $g$  در  $5$  نقطه مشترک است.





نمودار دو تابع  $f$  و  $g$  را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:  
 با توجه به نمودار، ناحیه‌ی سایه زده شده، یک مستطیل است. برای یافتن ابعاد این مستطیل، کافی است یکی از نقاط تلاقی دو نمودار را به دست آوریم:

$$g(x) = h(x) \Rightarrow |x-1| = -|x| + 3$$

$$\xrightarrow{1 < x_A < 3} (x-1) = -(x) + 3 \Rightarrow 2x = 4$$

$$\Rightarrow x_A = 2, y_A = 1$$

بنابراین:  $A(2, 1)$ ،  $B(2, 3)$  و  $C(1, 0)$ ، حال طول و عرض مستطیل را می‌یابیم:

$$\begin{cases} \overline{AB} = \sqrt{(2-2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{4} \\ \overline{AC} = \sqrt{(2-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{\text{مستطیل}} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

۴. گزینه ۱

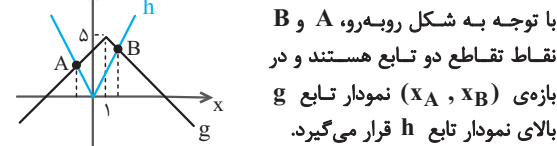
ابتدا تابع  $g$  را با توجه به اعمال گفته شده تشکیل می‌دهیم:

یک واحد به راست  $f(x) = |x| \xrightarrow{\text{یک واحد به راست}} y = |x-1|$

انعکاس نسبت به محور  $x$  ها  $\xrightarrow{\text{انعکاس نسبت به محور } x \text{ ها}} y = -|x-1|$

۵ واحد به بالا  $\xrightarrow{\text{۵ واحد به بالا}} g(x) = -|x-1| + 5$

نمودار دو تابع  $h(x) = 2f(x) = 2|x|$  و  $g(x) = -|x-1| + 5$  را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



با توجه به شکل روبه‌رو،  $A$  و  $B$  نقاط تقاطع دو تابع هستند و در بازه‌ی  $(x_A, x_B)$  نمودار تابع  $g$  بالای نمودار تابع  $h$  قرار می‌گیرد.

برای یافتن  $x_A$  و  $x_B$  باید معادله‌ی زیر را حل کنیم:

$$g(x) = h(x) \Rightarrow -|x-1| + 5 = 2|x|$$

$A: x < 0 \xrightarrow{\frac{|x|=-x}{|x-1|=-(x-1)}} x-1+5 = -2x$

$$\Rightarrow 3x = -4 \Rightarrow x_A = -\frac{4}{3}$$

$B: x > 0 \xrightarrow{\frac{|x|=x}{|x-1|=(x-1)}} -(x-1)+5 = 2x$

$$\Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x_B = 2$$

بنابراین بازه‌ی مورد نظر  $(x_A, x_B) = (-\frac{4}{3}, 2)$  است و در نتیجه:

طول بازه  $= 2 - (-\frac{4}{3}) = \frac{10}{3}$

۴.۱. گزینه ۴

تغییرات را مرحله به مرحله اعمال می‌کنیم:

یک واحد به راست  $y = \frac{1}{x} \xrightarrow{\text{یک واحد به راست}} y = \frac{1}{x-1}$

قرینه نسبت به محور  $x$  ها  $\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x \text{ ها}} y = -\frac{1}{x-1}$

دو واحد به پایین  $\xrightarrow{\text{دو واحد به پایین}} y = -\frac{1}{x-1} - 2$

حالا باید نقطه‌ی برخورد دو منحنی زیر را پیدا کنیم:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ y = -\frac{1}{x-1} - 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x} = -\frac{1}{x-1} - 2 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} = -2$$

۳.۶. گزینه ۲

برای به دست آوردن معادله‌ی قرینه‌ی یک منحنی نسبت به مبدأ مختصات، در معادله‌ی آن  $x$  را به  $(-x)$  و  $y$  را به  $(-y)$  تبدیل می‌کنیم:

$$f: y = (x-1)^2$$

$$\Rightarrow \text{قرینه‌ی } f \text{ نسبت به مبدأ} \Rightarrow -y = (-x-1)^2$$

$$\Rightarrow y = -(x+1)^2$$

سیس منحنی فوق را چهار واحد به بالا منتقل می‌کنیم که معادله‌ی آن به صورت  $g(x) = -(x+1)^2 + 4$  خواهد شد که طول نقاط تلاقی آن با منحنی اصلی، از حل معادله‌ی  $f(x) = g(x)$  به دست می‌آید:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow (x-1)^2 = -(x+1)^2 + 4$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + (x+1)^2 = 4 \Rightarrow 2x^2 + 2 = 4 \Rightarrow x^2 = 1$$

$$\Rightarrow x = \pm 1$$

۳.۷. گزینه ۱

قرینه‌ی نمودار تابع  $f(x)$  نسبت به محور  $x$  ها به صورت  $-f(x)$  است، پس:

$$f(x) = x^2 - 2x \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x \text{ ها}} y = -(x^2 - 2x)$$

$$\Rightarrow y = -x^2 + 2x$$

اگر نمودار  $y = -x^2 + 2x$  را ۱۶ واحد در امتداد محور  $y$  ها در جهت مثبت انتقال دهیم، نمودار  $g(x) = -x^2 + 2x + 16$  به دست خواهد آمد. پس باید نقطه‌ی برخورد دو منحنی  $f$  و  $g$  را به دست آوریم که طول آن از حل معادله‌ی  $f(x) = g(x)$  به دست می‌آید:

$$x^2 - 2x = -x^2 + 2x + 16 \Rightarrow 2x^2 - 4x - 16 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -2 \end{cases}$$

طبق فرض سؤال، دامنه‌ی تابع  $f$  به صورت  $x > 1$  است، پس  $x = -2$  قابل قبول نیست.

$x = 4 \rightarrow f(4) = 4^2 - 2 \times 4 = 8$

نقطه‌ی تقاطع:  $A(4, 8)$

فاصله‌ی  $OA$  از مبدأ  $O$ :  $OA = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{4^2 + 2^2 \times 4^2} = 4\sqrt{1+2^2} = 4\sqrt{5}$

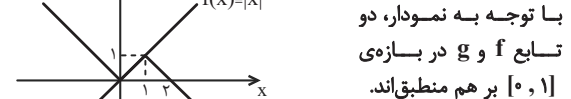
۳.۸. گزینه ۱

یک واحد به راست  $f(x) = |x| \xrightarrow{\text{یک واحد به راست}} y = |x-1|$

انعکاس نسبت به محور  $x$  ها  $\xrightarrow{\text{انعکاس نسبت به محور } x \text{ ها}} y = -|x-1|$

یک واحد به بالا  $\xrightarrow{\text{یک واحد به بالا}} y = -|x-1| + 1 \Rightarrow g(x) = -|x-1| + 1$

می‌خواهیم ببینیم در چه بازه‌ای  $f$  بر  $g$  منطبق است. نمودار دو تابع را در یک دستگاه رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار، دو تابع  $f$  و  $g$  در بازه‌ی  $[0, 1]$  بر هم منطبق‌اند.

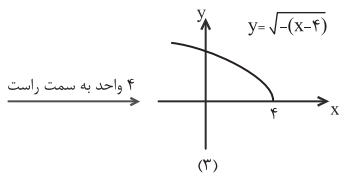
۳.۹. گزینه ۲

ابتدا ضابطه‌ی توابع  $g$  و  $h$  را به دست می‌آوریم:

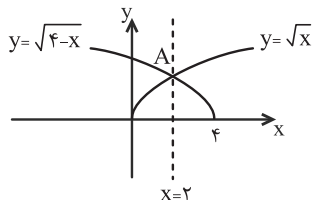
یک واحد به راست  $f(x) = |x| \xrightarrow{\text{یک واحد به راست}} g(x) = |x-1|$

تقارن نسبت به محور  $x$  ها  $\xrightarrow{\text{تقارن نسبت به محور } x \text{ ها}} y = -|x|$

۳ واحد به بالا  $\xrightarrow{\text{۳ واحد به بالا}} y = -|x| + 3 \Rightarrow h(x) = -|x| + 3$



حال به شکل زیر دقت کنید. اگر نمودار اولیه را نسبت به خط  $x = 2$  قرینه کنیم، نمودار مرحله‌ی (۳) به دست می‌آید.

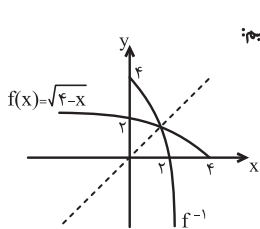


توضیح بیشتر آنکه برای به دست آوردن معادله‌ی خط مورد نظر، باید مختصات نقطه‌ی A را به دست آوریم:

$$\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = \sqrt{4-x} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{4-x} \Rightarrow x = 4-x \Rightarrow x = 2$$

توجه کنید که هیچ کدام از این دو نمودار متقارن نیستند، بلکه نسبت به یک خط قرینه‌ی یکدیگرند و منظور طراح قرینه بوده، نه متقارن.

۴۵. گزینه ۳



تابع  $f(x) = \sqrt{4-x}$  را رسم می‌کنیم:

با توجه به نمودار تابع  $f(x)$ ، در صورت هرگونه انتقال افقی یا عمودی تابع  $f$ ، نقطه‌ی تقاطع نمودار  $f$  و وارون آن روی خط  $y = x$  قرار خواهد داشت.

با توجه به صورت سؤال، منحنی به دست آمده بعد از انتقال‌های افقی و عمودی نمودار وارون خود را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع کرده است، بنابراین نقطه‌ی (۱، ۱) روی این منحنی قرار دارد. حال اگر منحنی را ۱ واحد به پایین انتقال دهیم محل برخورد آن با محور  $x$  ها نقطه‌ی (۱، ۰) خواهد شد.

۴۶. گزینه ۳

اگر نمودار  $y = \sqrt{\sqrt{x+3}}$  را  $k$  واحد در راستای قائم انتقال دهیم، معادله‌ی منحنی به صورت  $y = \sqrt{\sqrt{x+3}} + k$  خواهد بود؛ با توجه به افزایشی بودن این تابع، نقطه‌ی برخورد آن با وارونش، روی خط  $y = x$  واقع است، پس اگر عرض نقطه‌ی برخورد ۱ باشد، داریم:

$$y = 1 \xrightarrow{y=x} x = 1 \Rightarrow \text{نقطه‌ی برخورد} (1, 1)$$

پس مختصات نقطه‌ی (۱، ۱) در معادله‌ی تابع صدق می‌کند:

$$1 = \sqrt{\sqrt{1+3}} + k \Rightarrow 1 = 2 + k \Rightarrow k = -1$$

$$\Rightarrow \text{معادله‌ی منحنی: } y = \sqrt{\sqrt{x+3}} - 1$$

$$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x \text{ ها}} y = -(\sqrt{\sqrt{x+3}} - 1)$$

$$\xrightarrow{\text{واحد به چپ}} y = -\sqrt{\sqrt{x+4}} + 3 + 1$$

در بین گزینه‌ها، مختصات نقطه‌ی (۰، ۱- $\sqrt{5}$ ) در معادله‌ی به دست آمده صدق می‌کند.

$$\Rightarrow \frac{(x-1)+x}{x(x-1)} = -2 \Rightarrow \frac{2x-1}{x^2-x} = -2 \Rightarrow 2x-1 = -2x^2+2x$$

$$\Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \xrightarrow{y=\frac{1}{x}} y = \pm \sqrt{2}$$

یعنی مختصات نقاط برخورد به صورت  $A(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2})$  و

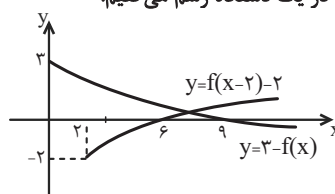
$B(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2})$  است که فاصله‌ی هر دوی آنها از نقطه‌ی

$O(0, 0)$  برابر است با:

$$\sqrt{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + 2} = \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

۴۷. گزینه ۳

برای رسم نمودار تابع  $y = f(x-2) - 2$  کافی است نمودار تابع  $y = \sqrt{x}$  را دو واحد به راست و سپس دو واحد به پایین انتقال دهیم و برای رسم نمودار تابع  $y = 3 - f(x)$  ابتدا قرینه‌ی تابع  $y = \sqrt{x}$  را نسبت به محور  $x$  ها رسم نموده و سپس ۳ واحد به بالا انتقال می‌دهیم و هر دو نمودار را در یک دستگاه رسم می‌کنیم.



همانطور که مشاهده می‌شود محل تقاطع دو نمودار در بازه‌ی (۶، ۹) قرار دارد. توجه کنید که محل تقاطع نمودارها با محور  $x$  ها از حل معادله‌ی  $y = 0$  به دست می‌آید.

$$\begin{cases} 3 - \sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 9 \\ \sqrt{x-2} - 2 = 0 \Rightarrow x - 2 = 4 \Rightarrow x = 6 \end{cases}$$

۴۸. گزینه ۳

قرینه نسبت به محور  $y$  ها  $y = \sqrt{-x}$

$$\xrightarrow{\text{واحد به راست}} y = \sqrt{-(x-2)} = \sqrt{-x+2}$$

برای یافتن نقاط تلاقی نمودار توابع  $y = \sqrt{-x+2}$  و  $y = x$  (نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم)، آنها را مساوی هم قرار می‌دهیم:

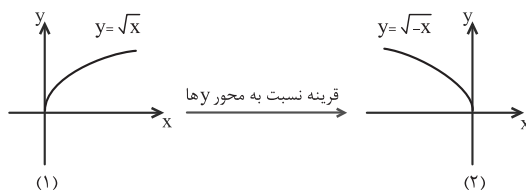
$$\sqrt{-x+2} = x \xrightarrow{\text{به توان ۲}} -x+2 = x^2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases} \text{ غ.ق.ق}$$

$x = -2$  غیر قابل قبول است، زیرا در معادله‌ی اصلی صدق نمی‌کند.

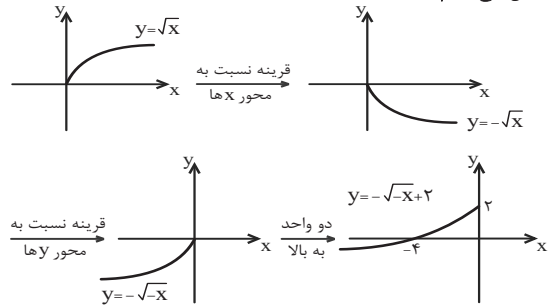
۴۹. گزینه ۳

برای به دست آوردن قرینه‌ی نمودار یک تابع نسبت به محور  $y$  ها، در معادله‌ی آن  $x$  را به  $(-x)$  تبدیل می‌کنیم و برای انتقال آن به اندازه‌ی  $a$  واحد به سمت راست ( $a > 0$ ) در معادله‌ی آن  $x$  را به  $(x-a)$  تبدیل می‌کنیم.



۴۷. گزینه ۴

برای تشکیل تابع  $g$  از روی تابع  $y = \sqrt{x}$  به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:



$$\Rightarrow g(x) = -\sqrt{-x} + 2$$

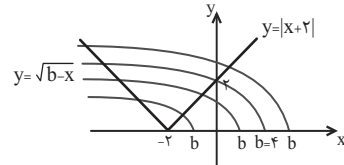
برای یافتن محل تلاقی خط  $y = -4$  با نمودار تابع  $g$ ، معادله  $g(x) = -4$  را حل می‌کنیم:

$$g(x) = -4 \Rightarrow -\sqrt{-x} + 2 = -4 \Rightarrow \sqrt{-x} = 6$$

$$\Rightarrow -x = 6^2 \Rightarrow x = -36$$

۴۸. گزینه ۱

نمودار دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.

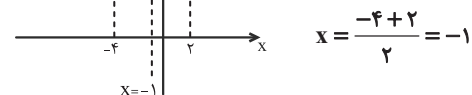


همانطور که مشاهده می‌شود برای آنکه نمودار تابع  $y = |x+2|$  به ازای  $x$  های بزرگتر از صفر بالای نمودار تابع  $y = \sqrt{b-x}$  قرار گیرد باید  $b$  مقداری مثبت و حداکثر برابر با ۴ باشد. در این صورت تابع  $y = |x+2|$  در بازه  $(0, b)$  بالای نمودار تابع  $y = \sqrt{b-x}$  قرار خواهد گرفت، پس  $a = b$ .

۴۹. گزینه ۲

$$f(x) = \sqrt{|x-2| + |x+4|}, \quad D_f = \mathbb{R}$$

عبارت زیر رادیکال همواره مثبت است و خط تقارن آن با توجه به نمودار آن، وسط ریشه‌های عبارت‌های داخل قدرمطلق است، یعنی خط:



با جذرگرفتن از این عبارت همواره مثبت، خط تقارن آن تغییری نمی‌کند، پس تابع  $f$  نسبت به خط  $x = -1$  متقارن است.

۵۰. گزینه ۳

اگر  $x = a$  خط تقارن یک تابع باشد، این خط در وسط هر دو نقطه‌ای هم‌عرض قرار می‌گیرد. با جایگذاری  $x = 1$  و  $x = 3$  در  $f(2-x) = f(2+x)$  خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x = 1 \Rightarrow f(1) = f(3) \Rightarrow \text{نقطه‌ی وسط} = \frac{1+3}{2} = 2 \\ x = 3 \Rightarrow f(-1) = f(5) \Rightarrow \text{نقطه‌ی وسط} = \frac{-1+5}{2} = 2 \end{cases}$$

بنابراین  $x = 2$  محور تقارن تابع  $f(x)$  است.

۵۱. گزینه ۴

وقتی نمودار نسبت به محور  $y$  ها تقارن دارد باید در آن  $f(\alpha) = f(-\alpha)$ ، یعنی با تبدیل  $x$  به  $-x$  نباید ضابطه‌ی تابع تغییر کند.

راه حل اول: ابتدا تابع چند جمله‌ای را مرتب کرده، سپس ضرایب جملات با درجه‌ی فرد آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم. زیرا در آنها با تبدیل  $x$  به  $-x$  ضابطه‌ی تابع تغییر می‌کند.

$$\begin{aligned} y &= x^6 + 3x^3 + A(x+1)^3 + Bx \\ &= x^6 + 3x^3 + Ax^3 + 3Ax^2 + 3Ax + A + Bx \\ \Rightarrow y &= x^6 + (A+3)x^3 + 3Ax^2 + (3A+B)x + A \\ \Rightarrow \begin{cases} A+3=0 \Rightarrow A=-3 \\ 3A+B=0 \xrightarrow{A=-3} B=9 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A+B=6$$

راه حل دوم: از آن‌جا که  $f(\alpha) = f(-\alpha)$ ، پس:

$$f(1) = f(-1) \Rightarrow 4A+B = -3 \quad (I)$$

$$f(2) = f(-2) \Rightarrow 7A+B = -12 \quad (II)$$

از حل دستگاه بالا،  $A = -3$  و  $B = 9$  و در نتیجه  $A+B = 6$ .

۵۲. گزینه ۲

$$f(x) + g(x) = 2^x \quad (1)$$

تابع  $f$  نسبت به محور  $y$  ها متقارن است، پس:  $f(-x) = f(x)$  و تابع  $g$  نسبت به مبدأ مختصات متقارن است، پس:  $g(-x) = -g(x)$  در رابطه‌ی (۱) با تبدیل  $x$  به  $-x$  داریم:

$$f(-x) + g(-x) = 2^{-x} \xrightarrow{g(-x) = -g(x)} \frac{f(-x) = f(x)}{g(-x) = -g(x)}$$

$$f(x) - g(x) = 2^{-x} \quad (2)$$

طرفین رابطه‌ی (۲) را از طرفین رابطه‌ی (۱) کم می‌کنیم:

$$f(x) + g(x) - (f(x) - g(x)) = 2^x - 2^{-x}$$

$$\Rightarrow 2g(x) = 2^x - 2^{-x} \Rightarrow g(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2}$$

$$\Rightarrow g(2) = \frac{2^2 - 2^{-2}}{2} = \frac{4 - \frac{1}{4}}{2} = \frac{15}{8}$$

راهبرد حل تیب (۳)

الف- برای رسم نمودار تابع  $y = |f(x)|$ ، ابتدا نمودار تابع  $y = f(x)$  را رسم می‌کنیم، قسمت‌هایی را که نمودار تابع  $f$  زیر محور  $x$  هاست نسبت به محور  $x$  ها قرینه کرده و قسمت پایین محور  $x$  ها را حذف می‌کنیم.

ب- برای رسم نمودار تابع  $y = f(|x|)$  ابتدا نمودار تابع  $y = f(x)$  را رسم می‌کنیم، قسمت سمت چپ محور  $y$  ها را حذف کرده (در صورت وجود) سپس قرینه‌ی قسمت سمت راست محور  $y$  ها را نسبت به محور  $y$  ها رسم می‌کنیم.

۵۳. گزینه ۱

ابتدا تابع  $y = \frac{|x|}{x} f(x)$  را به صورت دوضابطه‌ای نوشته و سپس نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$$y = \frac{|x|}{x} f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x} f(x) = f(x) & , x > 0 \\ \frac{-x}{x} f(x) = -f(x) & , x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = \frac{1}{5}(x^2 - 4) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{5}(x^2 - 4) = x + 2$$

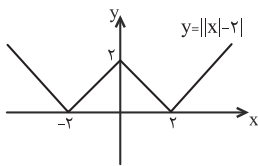
$$\Rightarrow \frac{1}{5}(x+2)(x-2) = x+2 \Rightarrow \frac{1}{5}(x-2) = 1$$

$$\Rightarrow x-2=5 \Rightarrow x=7$$

بنابراین:  $x_1 = -2$  و  $x_2 = 7$ ، در نتیجه:  $x_1 x_2 = -14$ .

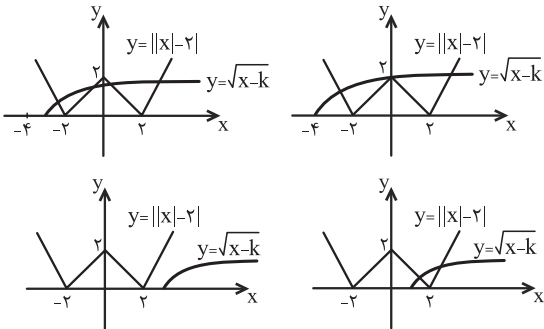
گزینه ۲. ۵۷

نمودار تابع  $y = ||x| - 2|$  به شکل زیر است:



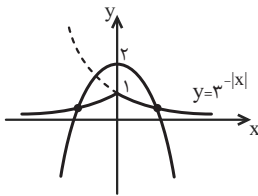
نمودار تابع  $y = \sqrt{x-k}$  همان نمودار تابع  $y = \sqrt{x}$  است که  $|k|$  واحد به چپ یا راست منتقل می‌شود.

مطابق شکل‌های زیر، با توجه به محدوده  $k$ ، نمودار تابع  $y = \sqrt{x-k}$  ممکن است نمودار تابع  $y = ||x| - 2|$  را حداکثر در چهار نقطه قطع کند. پس معادله  $||x| - 2| = \sqrt{x-k}$  چهار جواب دارد.



گزینه ۲. ۵۸

نمودار دو تابع را در یک دستگاه رسم می‌کنیم. (می‌توان ضابطه‌ی تابع  $y = 3^{-|x|}$  را به صورت  $y = (\frac{1}{3})^{|x|}$  در نظر گرفت و سپس آن را



رسم کرد). همانطور که مشاهده می‌شود دو نمودار در دو نقطه متقاطع‌اند.

گزینه ۳. ۵۹

$$y = 2|\sin x| \xrightarrow[\text{محور } x \text{ ها}]{\text{در جهت مثبت } \frac{\pi}{2}} y = 2\left|\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right|$$

$$\xrightarrow{\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x} y = 2|\cos x|$$

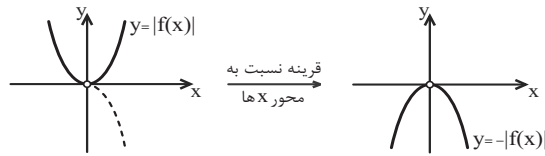
$$\xrightarrow[\text{محور } y \text{ ها}]{\text{در جهت منفی } \frac{\pi}{2}} y = 2|\cos x| - \frac{3}{2}$$

طول نقاط تقاطع منحنی با محور  $x$  ها، از حل معادله  $y = 0$  دست می‌آید، پس:

$$2|\cos x| - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow 2|\cos x| = \frac{3}{2}$$

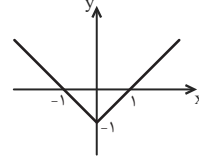
$$\xrightarrow[\text{از طرفین}]{\text{لگاریتم در پایه‌ی ۲ می‌گیریم}} |\cos x| = \log_2 \frac{3}{2}$$

با توجه به نمودار، تابع  $y = \frac{|x|}{x} f(x)$  با تابع  $|f(x)|$  برابر است که نمودار آن به صورت زیر رسم می‌شود:



گزینه ۱. ۵۴

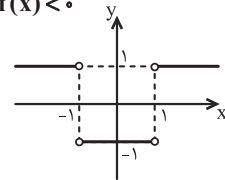
نمودار  $f(x) = |x| - 1$  به صورت زیر است.



تابع  $y = \frac{|f(x)|}{f(x)}$  را به صورت دوضابطه‌ای نوشته و رسم می‌کنیم.

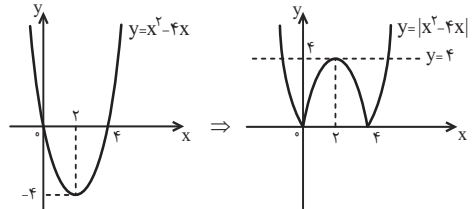
$$y = \frac{|f(x)|}{f(x)} = \begin{cases} \frac{f(x)}{f(x)} = 1 & ; f(x) > 0 \\ \frac{-f(x)}{f(x)} = -1 & ; f(x) < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = \begin{cases} 1 & ; x > 1 \text{ یا } x < -1 \\ -1 & ; -1 < x < 1 \end{cases}$$



گزینه ۲. ۵۵

ابتدا نمودار تابع  $y = x^2 - 4x$  را رسم می‌کنیم و سپس قسمت‌های منفی نمودار را نسبت به محور  $x$  ها قرینه می‌کنیم:

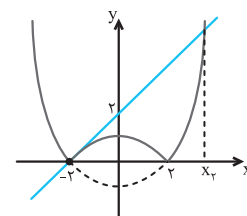


بنابراین  $k = 4$  می‌باشد.

گزینه ۲. ۵۶

نمودار دو تابع  $y = x + 2$  و  $y = \frac{1}{5}|x^2 - 4|$  را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. برای رسم نمودار تابع  $y = x^2 - 4$  نمودار تابع  $y = \frac{1}{5}|x^2 - 4| = \frac{1}{5}|(x+2)(x-2)|$  را رسم کرده و سپس قسمتی از نمودار را که پایین محور  $x$  هاست نسبت به محور  $x$  ها قرینه کرده و سپس عرض نقاط را در  $\frac{1}{5}$  ضرب می‌کنیم.

همانطور که دیده می‌شود دو نمودار در نقطه‌ی  $x_1 = -2$  و در یک نقطه‌ی دیگر با طول بزرگتر از ۲ تقاطع دارند، بنابراین قدرمطلق با علامت مثبت برداشته شده و معادله‌ی تقاطع دو نمودار را حل می‌کنیم.



- نکته‌ی ۲: برای رسم نمودار تابع  $y = kf(x+a) + b$  از روی نمودار تابع  $f(x)$  به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:
  - ۱- انتقال افقی نمودار:  $f(x+a)$
  - ۲-  $k$  برابر کردن عرض نقاط:  $kf(x+a)$
  - ۳- انتقال عمودی نمودار:  $kf(x+a) + b$

۶۱. گزینه ۲

نقطه‌ی  $(x_0, y_0)$  روی تابع  $f(x)$  به نقطه‌ی  $(x_0, ky_0)$  روی تابع  $kf(x)$  تبدیل می‌شود، بنابراین:

$$A(-4, 2) \xrightarrow{af(x)} A'(-4, 2a) = (-4, -4) \\ \Rightarrow 2a = -4 \Rightarrow a = -2$$

۶۲. گزینه ۴

برای تبدیل هر نقطه روی نمودار  $f(x)$  به نقطه‌ی متناظر آن روی نمودار  $-2f(x+1) + 1$ ، به طول نقطه  $(-1)$  واحد اضافه می‌شود، عرض آن  $-2$  برابر شده و سپس یک واحد به آن اضافه می‌شود.

$$A(x_0, y_0) \xrightarrow{-2f(x+1)+1} A'(x_0 - 1, -2y_0 + 1)$$

۶۳. گزینه ۲

نمودار تابع  $g(x) = -2f(x+1)$  با انتقال نمودار تابع  $f$  یک واحد به چپ و سپس  $-2$  برابر کردن عرض نقاط به دست می‌آید. پس از طول هر نقطه یک واحد کم شده و عرض هر نقطه  $(-2)$  برابر می‌شود.

$$S(5, -2) \rightarrow S'(5-1, -2 \times (-2)) = (4, 4)$$

۶۴. گزینه ۱

انتقال افقی روی برد تابع تأثیر ندارد ولی انتقال‌های عمودی و انقباض (یا انقباض) عمودی برد تابع را تغییر می‌دهد و دقیقاً همان تغییرات روی برد اعمال می‌شود.

$$R_f = [-\sqrt{5}, 1] \Rightarrow -\sqrt{5} \leq f(x) \leq 1$$

در انتقال افقی برد تغییر نمی‌کند.

$$\rightarrow -\sqrt{5} \leq f(x+1) \leq 1$$

$$\xrightarrow{x(-\sqrt{2})} -\sqrt{2} \leq -\sqrt{2}f(x+1) \leq \sqrt{10}$$

$$\xrightarrow{-3} -\sqrt{2} - 3 \leq -\sqrt{2}f(x+1) - 3 \leq \sqrt{10} - 3$$

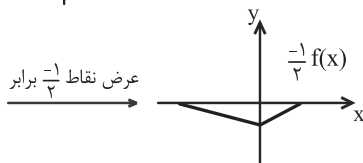
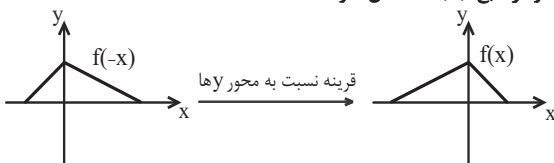
$$\Rightarrow -\sqrt{2} - 3 \leq g(x) \leq \sqrt{10} - 3$$

$$\Rightarrow R_g = [-\sqrt{2} - 3, \sqrt{10} - 3]$$

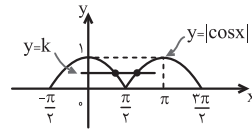
از آنجا که  $1 < \sqrt{10} - 3 < -\sqrt{2} - 3 < -5$  برد تابع  $g$  شامل پنج عدد صحیح  $-4, -3, -2, -1$  و صفر است.

۶۵. گزینه ۲

ابتدا نمودار تابع  $f(-x)$  را نسبت به محور  $y$  ها قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع  $f(x)$  حاصل شود:



از آنجا که  $0 < \frac{3}{2} < 2^0$ ، پس  $0 < \log_{\frac{3}{2}} 2 < 1$ . با فرض  $k = \log_{\frac{3}{2}} 2$ ، باید ببینیم معادله‌ی  $|\cos x| = k$  با شرط  $0 < k < 1$  در بازه‌ی  $[0, \pi]$  چند جواب دارد. نمودار زیر را ببینید:



خط  $y = k$ ;  $0 < k < 1$  نمودار  $y = |\cos x|$  را در بازه‌ی  $[0, \pi]$  در دو نقطه قطع می‌کند، پس معادله‌ی مورد نظر، دو جواب دارد.

۶۶. گزینه ۳

$f(x) = x$  تابع همانی است، پس:

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x} \xrightarrow{\text{واحد در جهت مثبت محور x ها}} g(x) = \frac{1}{x-a}$$

$$|g(x)| = \frac{1}{|x-a|} \xrightarrow{\text{واحد در جهت منفی محور y ها}} h(x) = \frac{1}{|x-a|} - 2$$

طول نقطه‌ی برخورد تابع  $h(x)$  با نمودار تابع  $\frac{1}{|f(x)|}$  برابر با  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  است، پس:

$$h\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right|} - 2 = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} - a} - 2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\left|\frac{\sqrt{2}}{2} - a\right|} = \frac{1}{\sqrt{2}} + 2 \Rightarrow \frac{1}{\left|\frac{\sqrt{2}}{2} - a\right|} = \sqrt{2} + 2$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\sqrt{2}}{2} - a\right| = \frac{1}{2 + \sqrt{2}} \quad (*)$$

با ساده‌سازی  $\frac{1}{2 + \sqrt{2}}$  داریم:

$$\frac{1}{2 + \sqrt{2}} \times \frac{2 - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4 - 2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

بنابراین در معادله‌ی (\*) خواهیم داشت:

$$\left|\frac{\sqrt{2}}{2} - a\right| = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} - a = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a = \sqrt{2} - 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} - a = -(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) \Rightarrow a = 1 \end{cases}$$

برای حل معادله‌ی  $f(x+a) = 3$  داریم:

$$x+a=3 \Rightarrow \begin{cases} x+\sqrt{2}-1=3 \Rightarrow x=4-\sqrt{2} \\ x+1=3 \Rightarrow x=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \text{ اختلاف مقادیر } = 4 - \sqrt{2} - 2 = 2 - \sqrt{2}$$

راهبرد حل تیپ (۴)

اگر نمودار تابع  $y = f(x)$  در اختیار باشد و  $k > 0$ ، آنگاه برای رسم نمودار تابع: الف)  $y = kf(x)$ ، عرض هر نقطه‌ی تابع  $f$  را  $k$  برابر می‌کنیم، یعنی اگر نقطه‌ی  $(a, b) \in f$  آنگاه نقطه‌ی  $(a, kb) \in kf$  است. در این حالت:
 

- ۱) اگر  $k > 1$  باشد، نمودار در راستای محور  $y$  ها کشیده‌تر می‌شود.
- ۲) اگر  $0 < k < 1$  باشد، نمودار در راستای محور  $y$  ها فشرده‌تر می‌شود.

 ب)  $y = -f(x)$ ، قرینه‌ی نمودار تابع  $f$  را نسبت به محور  $x$  ها رسم می‌کنیم.

• نکته‌ی ۱: اگر برد تابع  $f(x)$  برابر با  $[a, b]$  باشد، آنگاه برد تابع  $kf(x)$  برابر است با:

