

به نام خداوند خورشید و ماه |
که دل را به نامش خرد داد راه |

تمرین تنوری

ریاضی هشتم

دوره اول متوسطه

حامد فرضعلی بیک

کتاب‌های کار پیشرفته (تمرین تنوری)



مهروماه

فهرست

- ۷ فصل اول: عددهای صحیح و گویا 
- ۲۹ فصل دوم: عددهای اول 
- ۵۱ فصل سوم: چندضلعی‌ها 
- ۸۱ فصل چهارم: جبر و معادله 
- ۱۱۷ فصل پنجم: بردار و مختصات 
- ۱۴۷ فصل ششم: مثلث 
- ۱۷۳ فصل هفتم: توان و جذر 
- ۲۰۹ فصل هشتم: آمار و احتمال 
- ۲۳۱ فصل نهم: دایره‌ها 

مقدمهٔ مدیر گروه

«ترکوندن» فعلیه که قدیما برای بادکنک، زیاد استفاده می‌شد علی‌الخصوص به یاری یه سوزن ته‌گرد بعد از خروج مهمونا از یه تولد پر جنب‌وجوش! اما امروز چیزی که زیاد می‌شنویم، کاربرد غریب این فعل برای درس خونای حرفه‌ایه! ما تو مهروماه به شما ترکاننده‌های حرفه‌ای اندیشیدیم و مصمم شدیم کتاب‌هایی رو مخصوص شما به زیور طبع بیاریم. چونان که پیتزاهای مخصوص را پیتزا تنوری نامند و قیمتی دو چندان بر آن نهند، ما نیز این سری از کتاب‌ها رو **تمرین‌های تنوری** نامیدیم و اونا رو لؤلؤهایی گرانبهاتر از جان می‌دونیم.

این کتاب، یه کتاب **کار پیشرفته** است که تمرین‌های طبقه‌بندی‌شده، هدفدار و منظم در اون به بهترین شکل چیده شده. معمولاً کتاب‌های کار پاسخ‌ندارن اما با توجه به شرایط خاص این کتاب به خواست بنده و شاید برای اولین بار از تکنیک **Hint** تو کتاب‌های کمک‌آموزشی استفاده کردیم و نکات و پیش‌نیازهایی رو که برای رسیدن به جواب لازمه، در اون آوردیم. به این ترتیب تو ذهنتون **جرقه** رو زدیم و رسیدن به پاسخ را به خود شما واگذار کردیم. در واقع **Hint** یه جرقه است که تلاش مؤثری رو انجام میده تا حل مسئله به درستی انجام و به یادگیری منجر بشه و همچنان سعی داره که خودتون به پاسخ برسید. استاد فرضعلی بیگ، مؤلف این کتاب، از اون آدم‌هاییه که کلاس از تیپ و گفتارش متصاعد میشه؛ او یه مهندس شش‌دانگ (که تو دانشگاه شریف درس خونده)، یه استقلال‌لوی شش‌لول‌بند و یه معلم شش‌سیلندر باتجربه است.

در سوم دبیرستان، اولین مقاله ورزشیش رو در *ابرار ورزشی* چاپ کرده، وارد هیئت تحریریهٔ این روزنامه شده و چند سال بعد هم، سردبیر *البرز ورزشی* شده. از سال ۸۷ تاکنون در *مجلهٔ دنیای ورزش قلم می‌زنه* و یه صفحهٔ ثابت به نام «پرسه در هیاهو» در این مجله داره که می‌تونین دوشنبه‌ها در کیوسک‌های روزنامه‌فروشی، نگاهی بهش بندازین. (ما ریاضی‌دانا اینیم دیگه!) مهندس فرضعلی بیگ، شغل مادر عزیزشونو که به رحمت خدا رفتند، برگزیده؛ بنابراین یه معلم معلم‌زاده است و در این موضوع، من و ایشون هم افتخاریم.

امید داریم کتابی که ایشون با همکاری تنی چند از همراهان همیشگی مهروماه به ثمر رسوندند، موردپسند استادان بزرگوار ریاضی کشور و دانش‌آموزان کوشای ایران‌زمین واقع بشه.

یا علی - بهنام بناپور



این اثر رو هدیه می‌کنم به روح پاک مادرم که همیشه آرزو داشت یکی از بچه‌هاش مثل خودش معلم باشه.



مقدمه مؤلف

به نام اویی که فقط به پیغامش برای کل زندگی و کم نیاوردن کافیه.

﴿ ید الله فوق ایدیهم... ﴾

خوشحالی یعنی بتونی کاری انجام بدی که بابتش خدا رو شاکر باشی و این یعنی نهایت خوشبختی. خوشحالی یعنی بتونی سرت رو بالا بگیری و بگی خدایا ممنونم که این موقعیت رو پیش روم گذاشتی. ممنونم که کمک کردی تا از کارم حس خوبی بگیرم. البته زندگی دلایل زیادی برای شکرگزاری و خوشحال بودن داره اما بعضی اوقات به صورت خاص اتفاقاتی میفته که واقعاً دلنشینه.

یکی از بزرگ‌ترین خوشحالی‌های زندگی‌م توی این سی و چند سال این بوده که الان بنشینم و اینارو روی کاغذ بیارم. از صمیم قلب خوشحالم که این کتاب به سرانجام رسیده و یکی از آرزوهایم برآورده شده. چند وقتی که یاد گرفتم موقعیت‌های نقد رو دریابم و ازشون به بهترین شکل ممکن لذت ببرم؛ درست مثل همین لحظه که واقعاً حس خوبی دارم.

دوست دارم این حس رو با خیلی‌ها تقسیم کنم از جمله همسر نازنینم که همیشه کنارم بوده و همراهم. این شادی رو تقسیم می‌کنم با پدرم که برای بزرگ شدن و شکل گرفتن من خیلی زحمت کشید. این کتاب و حس بی‌نظیرم رو تقدیم می‌کنم به خدایی که بدون او هیچم و با او همه‌چی. دوست دارم از استاد بهنام بناپور هم تشکر کنم، همچنین از همه عوامل انتشارات مهروماه به خصوص سرکار خانم قراچلو.

با افتخار این کتاب رو که برای خودم خیلی ارزشمنده تقدیم می‌کنم به همه اونایی که دوستشون دارم.

بچه‌ها!

دلخور نشین این طوری صداتون می‌زنم، میدونم بزرگ شدین اما اجازه بدین با همین لفظ خطابتون کنم؛ صمیمی‌تره. هرچی باشه بهتر از «دانش‌آموزان عزیز» و همچنین واژه‌هاییه. سوالاتی که تو کتاب باهاشون برخورد می‌کنین، هم تألیفیه، هم برگرفته از آزمون‌های معتبر که سعی کردم از ساده به دشوار مرتبشون کنم چون خواستم محدود به قشر خاصی از جویندگان علم نشه! تست‌های پایان هر بخش رو بزنین و فکر نکنین کاملاً مشابه تمرینات تشریحی و تکراریه. اکثر تست‌ها مکمل سوالات تشریحی‌ان. پس هر دو رو لحاظ کنین تا بهترین برداشت رو داشته باشین.

تو قسمت پاسخ نامه سعی شده به راهنمایی کوچولو صورت بگیره تا اگه ذهنیتی نسبت به سوالی ندارین، به جرقه بخوره و باقیش رو خودتون پیش ببرین. جواب نهایی هم موجوده تا متوجه بشین درست حل کردین یا نه. دلیل اینکه به این طریق راهنمایی تون کردم اینه که دلتون قرص باشه اگر سوالی رو بلد نبودین، کمکی در راه هست اما در کل کار اصلی به عهده خودتونه. اینطوری بیشتر میچسبه، نه؟!

یادتون باشه مسائل ریاضی به فکر کردن نیاز دارن. این فرصت رو به خودتون بدین و از اول به انتهای کتاب مراجعه نکنین. به موقع نگین مؤلف زحمت کشیده و پاسخ نامه نباید بی کار بمونه! خیالتون راحت باشه که از اون قسمت هرچی کمتر استفاده بشه، خوشحال تر میشم، پس فکر منو نکنین!

مورد بعدی اینکه تمام تلاشم این بوده تا تو گزینش و چیدمان سوالات، تنوع لحاظ بشه؛ پس لطفاً از سؤال یا تستی به خاطر اینکه تکراری به نظر میرسه، نگذرین و مطمئن باشین با نمونه های قبلی به تفاوتی داره. زمانی که سوالات تشریحی رو تموم کردین و به کمک راهنمایی های صورت گرفته ای از این مرحله گذشتین، نوبت به تست های پایان هر فصل میرسه. بذارید تو قسمت تشریحی سنگ ها تو نو واکنده باشید و با آمادگی کامل سراغ سوالات چهارگزینه ای برید. اونا پاسخ تشریحی ندارن و به جورایی در حکم مسابقات رسمی ان که عیار واقعی رو مشخص می کنه. به بخش هایی تو کتاب هست مثل کسرهای مولد اعداد اعشاری، فاکتوریل، اتحادهای جبری پیشرفته و ... که تو کتاب درسی وجود ندارد اما لازم دیدم اینجا باشه. شما اونقدر «کار درست» هستین که اومدین سراغ کتاب پس حق دارین ضمن رعایت سرفصل های کتاب، بیشتر هم بدونین و یاد بگیرین.

بچه ها!

این سؤاله که باید از شما بترسه نه اینکه شما از سؤال بترسین و وحشت کنین. خودتون رو جای یه سؤال بذارین و تص ۷ور کنین یه نفر داره از بالا نگاهتون میکنه و سایه اش اجازه نفس کشیدن هم بهتون نمیده! دیدین حالا کی باید بترسه و بلرزه؟! متن های موجود تو قسمت «ایستگاه زندگی» رو بخونین و رو جملاتش تأمل کنین. اینا اصل زندگی ان و تا آخر عمر همراهمون هستن وگرنه این مسائل و تست ها با تمام سختی هایی که دارن، نهایتاً تا چند سال دیگه مهمونمون هستن و فقط یه وظیفه مقطعی دارن. من رو خوشحال می کنین اگه بشنوم و بفهمم رفتین سراغ کتاب هایی که نامشون پایین ایستگاه های زندگی اومده. بچه ها کتاب خونی رو فراموش نکنین. کتاب هایی رو که تو اوقات فراغتتون تو خونه می خونین، نه امتحان داره و استرس، نه نمره و بازخواست! پس اگه تا حالا شروع نکردین، استارت بزنین چون زندگیتون رو از این رو به اون رو می کنه. سرتون رو درد نیارم؛ یادتون باشه آدمای بزرگ، بزرگ و ویژه کار کردن و زحمت کشیدن. هیچ موفقیتی اتفاقی نیست و هیچ تلاشی بی جواب نمی مونه. خوشحال میشم نظرات ارزشمندتون رو به نشانی الکترونیکی گروه ریاضی riazi@mehromah.ir ارسال یا از طریق SMS به سامانه ۰۲۲۱۲۰۰۳۰۰۰ اعلام کنین.

مرسی که دارین رو حرفه ام فکر می کنین

مواظب خودتون باشین.

حامد فرضعلی بیک



۱۸- سه عدد گویا را طوری تعیین کنید که بین $\frac{3}{4}$ و $\frac{4}{5}$ قرار داشته باشند. آیا $\frac{19}{24}$ بین این دو کسر قرار دارد؟

۱۹- حاصل عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

الف) $\left(\frac{5}{12} - \frac{1}{18}\right) \times \frac{72}{39} =$

ب) $\frac{35}{91} \div \left(\frac{9}{52} - \frac{7}{26} + \frac{5}{39}\right) =$

پ) $(-5 - 19) \times \left(\frac{-46}{51} \div \frac{-23}{34}\right) =$

ت) $\left[\frac{-14 - (-17) - 43}{3 - (-17)}\right] \div \left[-12 \times \left(1 - \frac{7}{6}\right)\right] =$

ث) $-(-(-\frac{1}{-5})) - \left(\frac{-1}{-3}\right) =$

ج) $\frac{-30 \times 22}{11 \times (-45)} \times \frac{-27 \times 30}{18 \times (-40)} =$

در حاشیه...

از تقسیم صورت بر مخرج هر عدد گویا، یک عدد اعشاری به وجود می‌آید. در واقع برای هر عدد اعشاری، یک عدد گویا وجود دارد که به آن «کسر مولد» می‌گویند. مخرج کسر مولد همه عددهای اعشاری که از دبستان تا حالا با آنها سروکار داشته‌اید، فقط از عوامل اول ۲ و ۵ تشکیل شده است؛ یعنی بعد از تجزیه فقط ۲ و ۵ از آنها باقی می‌ماند. به این نوع عددهای اعشاری، عددهای اعشاری «مختوم» یا «تحقیقی» می‌گویند؛ مثل $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{74}$ و $\frac{5}{319}$.

۲۰- در هر قسمت، عدد گویای موردنظر را بیابید.

الف) معادل $\frac{2}{5}$ ، به طوری که اختلاف صورت و مخرجش برابر ۲۱ باشد.

ب) مساوی $\frac{143}{187}$ ، به طوری که مخرج آن ۶۸ باشد.

پ) برابر با $\frac{3}{7}$ ، به گونه‌ای که مجموع صورت و مخرجش ۴۰ باشد.



Hint



- ۱ الف) نادرست: صفر رو دریاب! (ب) نادرست: باز هم صفر رو دریاب!
 (پ) درست (ت) درست (ث) درست (ج) نادرست: ده عدد صحیح
- ۲ الف) دو برابر خود عدد (ب) -100 (پ) $+7$ (ت) منفی
 (ث) صفر (ج) قرینه (چ) $5 \times 5 = 25$ (د) -5
- ۳ الف) $+18$ (ب) -16 (پ) -7 (ت) -17 (ث) 22
 (ج) -2 (چ) 5 (د) 10
 (ز) -4 (ح) 83 (خ) -3
- ۴ الف) $+55$: قاعدتاً باید سعی کنی علامت هر عدد مثبت بشه؛ مثلاً برای -24 از تفریق استفاده کن تا بشه $+24$.
 (ب) -81 : برعکس بالا دیگه!

۵ یادآوری ۱۶ تعداد \times میانگین = مجموع

۶ صفر یا -1

۷ الف) 1853 : درباره دنباله‌ای از عددها که تفاضل هر دو عدد متوالی اش یکسانه، این سه فرمول یادآوری همیشه:

۱
$$1 + \left(\frac{\text{عدد اول} - \text{عدد آخر}}{\text{فاصله}} \right) = \text{تعداد}$$

۲
$$\text{مجموع} = \frac{\text{تعداد} \times (\text{عدد اول} + \text{عدد آخر})}{2}$$

۳
$$\text{عدد } n\text{ام} = \text{عدد اول} + [(n-1) \times \text{فاصله}]$$

یادآوری

- (ب) -1300 : مثل بند «الف» بهتره اول از منفی فاکتور بگیری.
- (پ) -500 : مجموع هر دو عدد متوالی برابر با -1 هستش.
- (ت) 67 : مجموع هر دو عدد متوالی -3 میشه. فقط حواست باشه اون 124 آخر تک میفته! این رو، هم از علامتش میشه فهمید، هم اگه از فرمول «تعداد» استفاده بشه.
- (ث) -54 : به این دقت کن که مجموع هر عدد و قرینه‌اش صفره...
 (ج) صفر: یکی اون وسط، کار دست بقیه میده!
- (چ) -58 : عدد اول پرانتز چپ و عدد اول پرانتز راست، عدد دوم پرانتز چپ و عدد دوم پرانتز راست، ...
- ۸ $\frac{1}{2}$: یه قسمتش شبیه بند «ث» سوال ۷ میشه و...
- ۹ 3150 : حواست باشه $B = -A$: پس $A - 2B$ برابره با...



۷- مجموع دو عدد اول ۱۱۵ است. تفاضل این دو عدد را بیابید.

۸- تفاضل مربعات دو عدد اول ۹۴۰۵ است. حاصل ضرب این دو عدد را بیابید.

۹- حاصل ضرب دو عدد اول ۴۰۳ است. مجموع این دو عدد چند است؟

۱۰- اگر بدانیم تعداد عددهای اول کوچکتر از ۱۰۷ برابر ۲۷ است، تعداد عددهای مرکب کوچکتر از ۹۶ را بیابید.

۱۱- در دنباله $۹۶ + (۸۹)!, \dots, ۱۳ + (۸۹)!, ۱۱ + (۸۹)!, ۱۰ + (۸۹)!$ ، چند عدد اول وجود دارد؟

۱۲- الف) اگر حاصل ضرب عددهای اول کوچکتر از ۱۰۰ را A بنامیم، یکان A چند است؟

ب) $A + 1$ چند شمارنده اول دورقمی دارد؟

۱۳- $z(x - y)$ یک عدد طبیعی فرد است که در آن x, y و z همگی اول اند. از بین این سه عدد، مقدار دقیق کدامیک را می توان تعیین کرد؟ درباره دو عدد دیگر چه می توان گفت؟

۱۴- عدد $(4^x + 10)^y$ به ازای چه مقادیری از x و y ، عددی اول خواهد بود؟

۱۵- x, y و z عددهای اول کوچکتر از ۵۰ هستند و $x + y = z$. چند مقدار مختلف برای z وجود دارد؟



در حاشیه...

نحس نه، Happy



عدد اول ۱۳ که بعضی‌ها اعتقاد دارن نحسه و به همین خاطر $۱۲+۱$ می‌نویسنش، یک عدد Happy است! عددی Happy هستش که وقتی مجموع مربعات رقم‌های اون رو به دست میاریم و این کار رو به صورت متوالی انجام میدیم، به ۱ می‌رسیم.

$$۱^۲ + ۳^۲ = ۱۰ \rightarrow ۱^۲ + ۰^۲ = ۱$$

بد نیست درباره عدد ۱۳ اینو بدونین که کوچک‌ترین عدد اولیه که وقتی جای رقم‌هاش رو عوض می‌کنیم، عدد جدیدی به وجود میاد که باز اوله؛ همچنین $۱۳^۲ = ۱۶۹$ و $۳۱^۲ = ۹۶۱$ ، جالب نیست؟! ۱۳ کوچک‌ترین عدد اولیه که مجموع مربعات دو عدد اول مجزاست: $۲^۲ + ۳^۲ = ۱۳$ راستی، رکورد پرواز یک جوجه ۱۳ ثانیه است! از این خواص جالب باز هم داره این عدد Happy!

۱۶- نشان دهید همه عددهای زیر مرکب‌اند.

الف) $\frac{۲۲۲...۲}{۷۵}$ رقم

ب) $۵+۸+۱۱+\dots+۶۸$

ب) $۱۳!$

ت) $۱۷!+۱۵$

ث) $۱۸^{۵۲} + ۲۲^{۲۷}$

ج) $۱۷۵^{۱۰۳} - ۱۰۵^{۹۲}$

چ) $۱۴^{۲۰} + ۲۱^۵$

۱۷- حاصل $n + ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + \dots + n$ به ازای چند عدد طبیعی سه‌رقمی، عددی مرکب است؟

در حاشیه...

هنوز هیچ فرمولی برای تولید عددهای اول کشف نشده است. ریاضی‌دانی به نام اولر، رابطه $n^۲ + n + ۴۱$ را در این باره ارائه داد؛ اما این رابطه به ازای n های مضرب ۴۱ برقرار نیست. همچنین فرمول‌های فرما $(۲^{۲^n} + ۱)$ ، لژاندار $(۲n^۲ + ۲۹)$ ، اسکوت $(n^۲ - ۷۹n + ۱۶۰۱)$ و... نیز مانند رابطه اولر به ازای برخی n ها برقرار نیست.

ب.م.م و ک.م.م



۲۵- حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید.

الف) $[(1700, 1800), 300] =$

ب) $\frac{((72, 24), 8)}{(32, 20)} =$

پ) $\frac{[13, 12]}{(133, 132)} =$

ت) $(7^2 \times 16 \times 5, 2^2 \times 7 \times 5^2) =$

ث) $[(1100, 60), 231] =$

۲۶- ب.م.م و ک.م.م دو عدد به ترتیب ۶ و ۳۷۸ است. اگر یکی از آن دو عدد ۵۴ باشد، عدد دیگر چند است؟

۲۷- هفتمین مضرب مشترک عددهای ۱۵، ۲۰ و ۲۴ را به دست آورید.

۲۸- در یک اردوی تفریحی، حاضران را به گروه‌های ۵، ۶ و ۸ نفری تقسیم کردند و هر بار، ۳ نفر اضافه ماند. حداقل تعداد افراد حاضر در این اردو را به دست آورید.



۱۳- عدد $17!$ بر کدامیک از عددهای زیر بخش پذیر نیست؟

- ۸^۲ (۱) ۷^۳ (۲) ۹^۲ (۳) ۱۰^۳ (۴)

۱۴- x و y دو عدد طبیعی اند؛ به طوری که $(4^x \times 18^y, 8^y \times 12^x) = 48$ و $x < 2y$. در این صورت حاصل $3x - 2y$ برابر است با:

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴)

۱۵- رقم یکان حاصل عبارت $3 + 15!$ کدام است؟

- ۸ (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۳ (۴)

۱۶- اگر $(n!)^2 = 16^5 \times 9^5 \times 625 \times 7^2 \times 121 \times 11$ مقدار n برابر است با:

- ۱۲ (۱) ۱۱ (۲) ۱۰ (۳) ۹ (۴)

۱۷- حاصل $\frac{(n!)^2}{(n-1)!(n+1)!}$ برابر است با:

- $\frac{n}{n+1}$ (۱) $\frac{n+1}{n}$ (۲) $\frac{n-1}{n+1}$ (۳) $\frac{1}{(n-1)(n+1)}$ (۴)

۱۸- اگر x یک عدد دورقمی بزرگتر از ۷۵ باشد؛ به طوری که $(x, y) = 6$ و $(x, z) = 8$ ، باقی مانده تقسیم x بر ۷ برابر است با:

- ۵ (۱) ۴ (۲) ۱ (۳) ۳ (۴)

۱۹- می خواهیم ۷۲ لیتر آب میوه، ۴۰ لیتر شیر و ۴۸ لیتر دوغ را در شیشه‌هایی با حجم یکسان بسته‌بندی کنیم. حداقل تعداد شیشه‌ها کدام است؟ (گنجایش شیشه‌ها بر حسب لیتر را عددی طبیعی فرض کنید.)

- ۸ (۱) ۲۴ (۲) ۲۰ (۳) ۱۲ (۴)

۲۰- در تساوی $x \times y = z$ که در آن هر سه عدد طبیعی اند، کدام گزینه درست است؟

- (۱) z عددی اول است. (۲) z حداقل ۴ شمارنده دارد.
(۳) x بر z بخش پذیر است. (۴) z فقط بر x و y بخش پذیر است.

۲۱- عددی ۳۵ مقسوم علیه دارد. کدام عبارت درباره این عدد همواره درست است؟

- (۱) مربع کامل است. (۲) مکعب کامل است.
(۳) فقط ۱ شمارنده اول دارد. (۴) ۲ مقسوم علیه اول دارد.

۲۲- مجذور عددی با ۱۳ مقسوم علیه، چند شمارنده دارد؟

- ۱۶۹ (۱) ۲۶ (۲) ۱۴۴ (۳) ۲۵ (۴)

۲۳- مکعب عددی با ۳۷ مقسوم علیه، چند شمارنده غیر اول دارد؟

- ۱۳ (۱) ۱۲ (۲) ۱۱ (۳) ۱۰ (۴)



۱۴ $x = 0$ * $y = 1$: مثل بند «ج» سؤال ۵، مقدار y مشخص میشه. x هم که...

۱۵ ۶ مقدار: دقت کن که x یا y برابر ۲ هستن!

۱۶ الف) مجموع رقم‌هاش رو به دست بیار.

ب)

$$\text{مجموع} = \frac{\text{تعداد} \times (\text{عدد اول} + \text{عدد آخر})}{2}$$

$$\text{تعداد} = \left(\frac{\text{عدد اول} - \text{عدد آخر}}{\text{فاصله}} \right) + 1$$

یادآوری

ب) چیزی نگم دیگه!

ت) تو سؤال ۱۱ به چیزایی گفتم...

ث. ج و ج) روی یکان حاصل کار کن؛ می‌دونیم یکان‌های ۰، ۱، ۵ و ۶ به هر توانی برسن. تغییر نمی‌کنن. یکان‌های ۴ و ۹ تو توان‌های زوج به نوع یکان و تو توان‌های فرد به نوع یکان دیگه دارن. درباره ۲، ۳، ۷ و ۸ باید توان رو به ۴ تقسیم کنی؛ باقی‌مانده تأثیرگذاره:

$$\begin{array}{r} 27 \quad | \quad 4 \\ - 24 \quad 6 \\ \hline 3 \end{array}$$

پس یکان 27^{27} مثل 2^2 یعنی ۸ میشه و اگه باقی‌مانده صفر بشه، توان رو ۴ در نظر می‌گیریم. مثلاً یکان 47^{20} مثل 7^4 میشه.

۱۷ ۹۰۰: به فرمول «مجموع» بند «ب» سؤال ۱۶ رجوع کن. به نظر می‌رسه همه عددهای سه‌رقمی قابل قبول باشن؛ نه؟! طبق اون فرمول،

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{هم همواره زوج و...}$$

۱۸ زحمتش رو بکش دیگه...!

۱۹ ۶۹ عدد: می‌دونیم تعداد عددهای اول کوچک‌تر از ۱۰۰، ۲۵ تا است. بین چندتاش دورقمیه... برای قسمت دوم سؤال هم باید دنبال

بزرگ‌ترین عدد اولی باشی که مضاربش خط می‌خورن. تو این مسئله، عدد ۷ موردنظره. مضاربش رو بررسی کن و... (۷۷، ۹۹).

۲۰ ۱۶۹ * ۲۸۹: معلومه که تا قبل از 13×13 و 17×17 ، مضارب ۱۳ و ۱۷ با عددهای اول دیگه خط خوردن.

۲۱ ۱۳ * ۱۶۹: $13^2 < 200$ ؛ اما $17^2 > 200$. درباره قسمت دوم هم 13×14 و 13×15 همون اول با ۲ و ۳ خط می‌خورن...

۲۲ الف) ۹۹: اول که ۱ خط می‌خوره، بعد مضارب ۲. از ۴ تا ۱۶۸ چندتاست؟ (فرمول بند «ب» سؤال ۱۶) پس باید توی مضارب غیرزوج ۳

دنبالش بگردی...

ب) ۳ بار: با ۲، ۵ و ۷؛ البته فقط همون دفعه اولش شمارش میشه.

ب) صد و چهاردهمین: تو بند «الف» فهمیدیم چندتا عدد با ۲ خط می‌خورن. تعداد مضارب غیرزوج ۳ رو هم از همون فرمول تعداد

مشخص کن. یه ۱ هم اول خط خورده بود. حالا میریم سراغ مضارب ۵ تا به ۵۵ برسیم...

۲۳ الف) ۳۵: قطعاً داریم مضارب ۵ رو خط می‌زنیم. مضارب ۲ و ۳ قبلاً خط خوردن...

ب) ۶۸: تعداد مضارب ۲: $48 = \left(\frac{98-4}{2} \right) + 1$ ؛ پس سی‌وسومین مضرب ۲، عددیه که خط می‌خوره (اول عدد ۱ خط خورده).

ب) ۱۵: با توجه به عدد ۴۸ بند «ب» و عدد ۱ که همون اول خط می‌خوره، باید دومین مضرب غیرزوج عدد ۳ رو که خط می‌خوره، پیدا کنی.



۵۲ $(xy)^2$: ۳ روز x و ۷ روز y جدا کن، بهشون توان بده و...

۱۵۵۰ ۵۳

یادآوری نصف تعداد مقسوم علیه‌ها x = حاصل ضرب مقسوم علیه‌های x

یادآوری

۳ * ۳۶۰ ۵۴

یادآوری مجموع مقسوم علیه‌های x = $\frac{\text{مجموع معکوس مقسوم علیه‌های } x}{x}$

یادآوری

پاسخ‌نامه کلیدی
پرسش‌های چهارگزینه‌ای



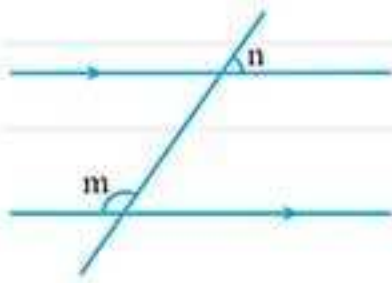
- ۱ ۱ ۲ ۳ ۴
- ۲ ۱ ۲ ۳ ۴
- ۳ ۱ ۲ ۳ ۴
- ۴ ۱ ۲ ۳ ۴
- ۵ ۱ ۲ ۳ ۴
- ۶ ۱ ۲ ۳ ۴
- ۷ ۱ ۲ ۳ ۴
- ۸ ۱ ۲ ۳ ۴
- ۹ ۱ ۲ ۳ ۴
- ۱۰ ۱ ۲ ۳ ۴

- ۱۱ ۱ ۲ ۳ ۴
- ۱۲ ۱ ۲ ۳ ۴
- ۱۳ ۱ ۲ ۳ ۴
- ۱۴ ۱ ۲ ۳ ۴
- ۱۵ ۱ ۲ ۳ ۴
- ۱۶ ۱ ۲ ۳ ۴
- ۱۷ ۱ ۲ ۳ ۴
- ۱۸ ۱ ۲ ۳ ۴
- ۱۹ ۱ ۲ ۳ ۴
- ۲۰ ۱ ۲ ۳ ۴

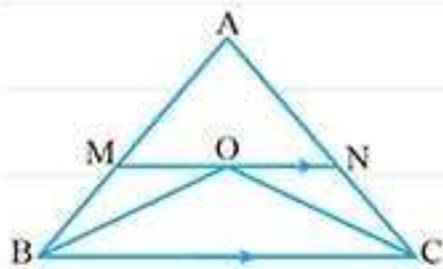
- ۲۱ ۱ ۲ ۳ ۴
- ۲۲ ۱ ۲ ۳ ۴
- ۲۳ ۱ ۲ ۳ ۴
- ۲۴ ۱ ۲ ۳ ۴
- ۲۵ ۱ ۲ ۳ ۴
- ۲۶ ۱ ۲ ۳ ۴
- ۲۷ ۱ ۲ ۳ ۴
- ۲۸ ۱ ۲ ۳ ۴
- ۲۹ ۱ ۲ ۳ ۴
- ۳۰ ۱ ۲ ۳ ۴



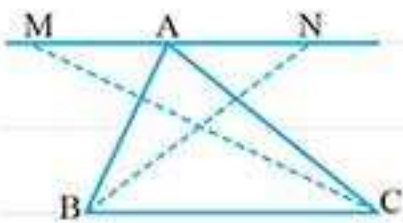
۱۵- در شکل روبه‌رو، $m = 3n$. اندازه هر یک از این زاویه‌ها را به دست آورید.



۱۶- در شکل زیر \overline{BO} و \overline{CO} نیمسازند و $\overline{AB} = 8$ ، $\overline{AC} = 10$ و $\overline{BC} = 11$. محیط مثلث AMN را به دست آورید.



۱۷- در شکل زیر، $\overline{AB} = 3$ ، $\overline{AC} = 4$ و $\overline{BC} = 6$. نیمسازهای داخلی رأس‌های B و C را رسم می‌کنیم تا خطی را که از A موازی BC رسم شده است، در M و N قطع کند. طول پاره خط MN را به دست آورید.



در حاشیه...

هندسه اقلیدسی



به مجموعه عبارات‌های هندسی می‌گویند که به بررسی مواردی مثل نقطه و خط می‌پردازد و بر پایه‌هایی که اقلیدس (ریاضی‌دان یونانی) در کتاب اصول خود ارائه داده، بنا شده است. این قضیه‌های هندسی را عمدتاً یونانیان باستان کشف کرده‌اند و اقلیدس اسکندرانی گردآوری کرده است. بخش بزرگی از آن، همان است که در دوره متوسطه اول و دوم تدریس می‌کنند. تا قرن نوزدهم میلادی، هر وقت از هندسه صحبت می‌کردند، منظور هندسه اقلیدسی بود ولی بعد از آن، هندسه نااقلیدسی (هذلولی و بیضوی) را نیز مطرح کردند. هندسه نااقلیدسی را بعدها گوس و ریمان گسترش دادند؛ هندسه‌ای که در نظریه نسبیت عام انیشتین به کار رفته است.

چهارضلعی‌ها



۱۸- درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

الف) مربع نوعی مستطیل و مستطیل نوعی متوازی‌الاضلاع است.

ب) متوازی‌الاضلاعی که قطرهایش برابرند، لوزی است.

پ) لوزی نوعی مستطیل است.

ت) در مستطیل، قطرهای عمودمنصف یکدیگرند.

ث) در متوازی‌الاضلاع زاویه‌های مقابل مکمل‌اند.

ج) مستطیل دو محور تقارن دارد که همان قطرهایش هستند.

چ) هر چهارضلعی که قطرهایش بر هم عمودند، لوزی است.

ح) هر چهارضلعی که قطرهایش برابر باشند، مستطیل است.

خ) هر چهارضلعی که ضلع‌هایش برابر باشند، مربع است.

د) در دوزنقه متساوی‌الساقین، زاویه‌های مجاور به قاعده مکمل‌اند.

ذ) اگر وسط ضلع‌های یک لوزی را به‌طور متوالی به هم وصل کنیم، مستطیل به‌وجود می‌آید.

ر) لوزی که یک قطر آن با ضلعش برابر باشد، مربع است.

ز) هر چهارضلعی که چهار زاویه برابر دارد، مستطیل است.

۱۹- جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

الف) هر چهارضلعی که فقط دو ضلع موازی دارد، است.

ب) متوازی‌الاضلاعی که زاویه قائمه دارد، است.

پ) در و قطرهای عمودمنصف یکدیگرند.

ت) محل برخورد قطرهای متوازی‌الاضلاع، آن است.

ث) اگر وسط ضلع‌های مربع را به‌طور متوالی به هم وصل کنیم، به‌وجود می‌آید.

ج) طبق قضیه موازی و مورب، دو زاویه مجاور به در دوزنقه مکمل‌اند.

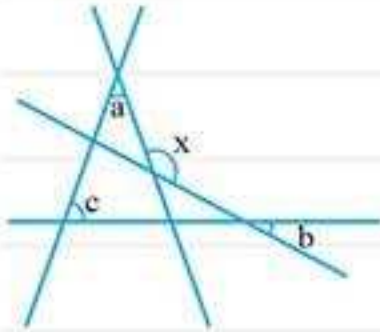
چ) از برخورد نیمسازهای داخلی یک متوازی‌الاضلاع، پدید می‌آید.

ح) مستطیلی که قطرهایش بر هم عمودند، است.



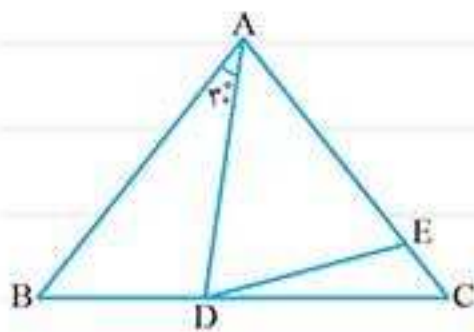


۴۷- در شکل مقابل، اندازه زاویه x با اندازه سه زاویه دیگر چه رابطه‌ای دارد؟



۴۸- یکی از زاویه‌های مثلث متساوی‌الساقین، 110° درجه است. نیمساز خارجی یکی از زاویه‌های پای ساق، امتداد ضلع مقابل را با چه زاویه‌ای قطع می‌کند؟

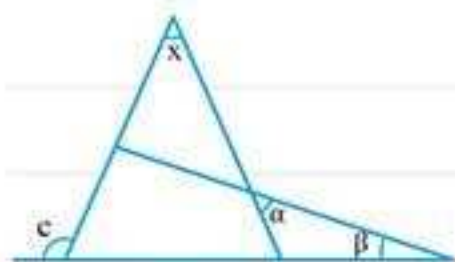
۴۹- در شکل زیر، $\overline{AB} = \overline{AC}$ و $\overline{AD} = \overline{AE}$ ؛ اندازه زاویه $\angle EDC$ را به دست آورید.



ایستگاه زندگی

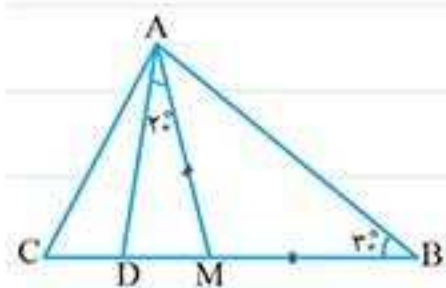
اگر صبح‌های زیادی
را با احساس غم یا خشم
و درماندگی از خواب بیدار می‌شوید، احتمالاً
شما خیلی خودتان را دوست ندارید. بهترین احساسی که
می‌توانید داشته باشید، احساس «من خوبم، تو خوبی» است. این
بدان معناست که شما خود و دیگران را دوست دارید؛ یعنی شما
احساس‌های خوب خود را برای عشق ورزیدن به دیگران، انجام دادن
کارها و لذت بردن از وقتتان استفاده می‌کنید. منظور این نیست که
شما دنیا را زیبا و بی‌عیب و نقص می‌بینید؛ می‌دانید هر روز مشکلات
زیادی وجود دارد اما هنوز از زندگی کردن لذت می‌برید.

تحلیل رفتار متقابل در زندگی روزانه، آدلید بری



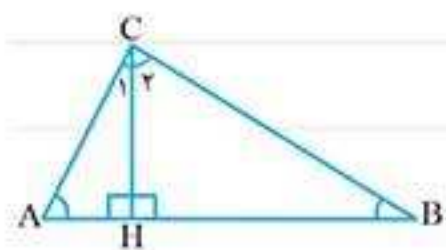
۱۷- در شکل روبه‌رو، \hat{x} برابر است با:

- (۱) $c + \alpha + \beta$
 (۲) $c - \alpha + \beta$
 (۳) $c + \alpha - \beta$
 (۴) $c - \alpha - \beta$



۱۸- در شکل روبه‌رو، \overline{AD} نیمساز است. اندازه زاویه C برابر است با:

- (۱) 3°
 (۲) 4°
 (۳) 5°
 (۴) 2°

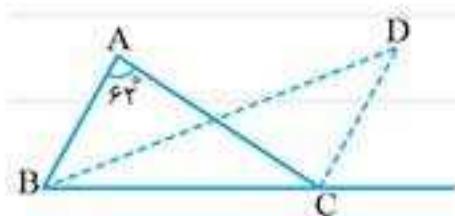


۱۹- در شکل مقابل، \overline{CH} ارتفاع وارد بر \overline{AB} است. کدامیک از روابط زیر درست است؟

- (۱) $\hat{C}_1 - \hat{C}_2 = \hat{B} - \hat{A}$
 (۲) $\hat{C}_1 + \hat{C}_2 = \hat{A} + \hat{B}$
 (۳) $\hat{C}_1 + \hat{C}_2 = \hat{A} - \hat{B}$
 (۴) $\hat{C}_1 - \hat{C}_2 = \hat{A} + \hat{B}$

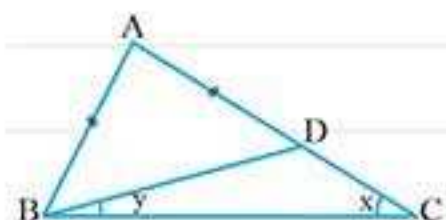
۲۰- در شکل مقابل، \overline{BD} و \overline{CD} نیمساز زاویه‌های داخلی و خارجی مثلث‌اند. اندازه زاویه D کدام است؟

- (۱) 3°
 (۲) 31°
 (۳) 28°
 (۴) 62°



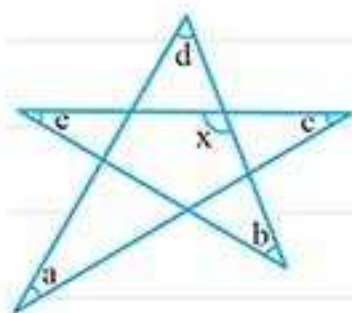
۲۱- در شکل روبه‌رو داریم: $\hat{ABC} = \hat{x} + 3^\circ$; اندازه زاویه \hat{y} کدام است؟

- (۱) 1°
 (۲) 15°
 (۳) 2°
 (۴) 25°



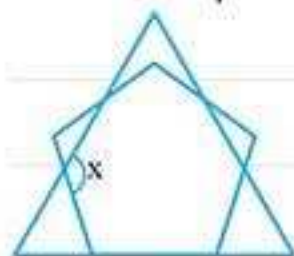
۲۲- در شکل روبه‌رو، اندازه زاویه x چقدر است؟

- (۱) $\hat{a} + \hat{d} + \hat{c}$
 (۲) $\hat{b} + \hat{e}$
 (۳) $\hat{a} + \hat{b}$
 (۴) $\hat{c} + \hat{d}$



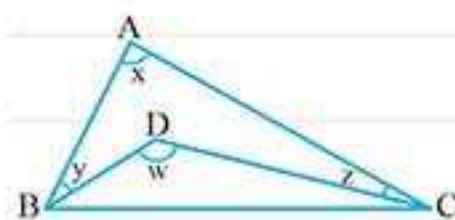
۲۳- در شکل مقابل، یک پنج‌ضلعی منتظم و یک مثلث متساوی‌الاضلاع مشاهده می‌شود. اندازه زاویه x برابر است با:

- (۱) ۱۲۴
 (۲) ۱۲۸
 (۳) ۱۳۶
 (۴) ۱۳۲



۲۴- در شکل مقابل، D نقطه دلخواهی داخل مثلث ABC است. اندازه زاویه x برابر است با:

- (۱) $180^\circ - (\hat{w} + \hat{y} + \hat{z})$
 (۲) $\hat{w} - 2\hat{y} - 2\hat{z}$
 (۳) $\hat{w} - \hat{y} - \hat{z}$
 (۴) $2\hat{w} - \hat{y} - \hat{z}$

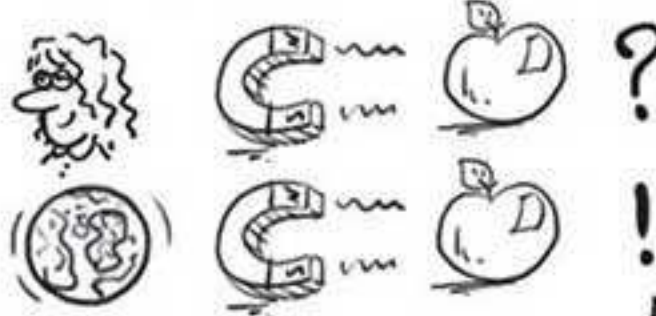


فصل ۴

جبر و معادله



به چیزی هست که همه چیزو
به سمت خودش جذب می‌کنه...



نیوتون، بزرگ‌مرد تاریخ علم، در کتاب درسی که در زمینه جبر نوشته است،
می‌گوید: «برای اینکه به سؤالات مربوط به عددها و یا نسبت‌ها جواب دهیم، باید مسئله را از
زبان مادری به زبان جبری برگردانیم.»



- ۲۸ از توضیح بند «ژ» سؤال ۲ استفاده کن (برای حل بند «الف» تا «پ»).
- برای بند «ت» هم با انتقال b به ابتدا یا انتهای a ، روش متوازی الاضلاع یا مثلثی رو انتخاب کن.
«ث» و «ج» هم که روش متوازی الاضلاع هستن.
- ۲۹ بله، چون از $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ نتیجه میشه $\vec{a} = \vec{c} + \vec{b}$. شکل هم روش مثلثی برای جمع دو بردار b و c هستش.
در حالت کلی، برای رسم $\vec{a} - \vec{b}$ ، اون رو به $\vec{a} + (-\vec{b})$ تبدیل می‌کنیم؛ یعنی قرینه بردار b رو رسم می‌کنیم، بعد با روش مثلثی یا متوازی الاضلاع، مجموع \vec{a} و $-\vec{b}$ رو می‌کشیم.
- ۳۰ روش متوازی الاضلاع * $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$
- ۳۱ روش مثلثی * $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC} = \begin{bmatrix} -6 \\ -2 \end{bmatrix}$
- ۳۲ روش مثلثی * $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}$
- ۳۳ بردارها رو طوری انتقال بده که یا هم ابتدا بشن یا انتهای یکی، ابتدای اون یکی باشه (رسم بردار هم‌سنگ)؛ بعد $2\vec{a}$ ، $-2\vec{b}$ و $-\vec{c}$ رو رسم کن و...
- ۳۴ نیازی به جابه‌جایی دو بردار نیست. فقط $-2\vec{a}$ و... رو رسم کن؛ از روش متوازی الاضلاع به بردار c و f می‌رسی.
- ۳۵ $\vec{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$
- ۳۶ $\overline{CD} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$
- ۳۷ مجموع \vec{b} و \vec{c} رو به روش مثلثی به دست بیار و مجموع \vec{c} و \vec{d} رو هم به همین ترتیب. حالا از خواص شش ضلعی استفاده کن و...
- ۳۸ به روش متوازی الاضلاع، به رابطه جمع برداری بنویس.
- ۳۹ از خاصیت $-\overline{CB} = \overline{BC}$ استفاده کن و...
- ۴۰ مثل سؤال ۳۹ از خاصیتی که گفتیم استفاده کن. خواص مستطیل رو هم از یاد نبر!
- ۴۱ از نقطه C موازی دو راستای داده شده رسم کن تا اونا رو قطع کنه...
- ۴۲ rd
- ۴۳ $\overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD}$ و $\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC}$ ؛ از خواص متوازی الاضلاع هم استفاده کن و...
- ۴۴ چون \vec{a} و \vec{b} هم‌اندازه هستن، تو حالت هم‌ابتدا بودن (روش متوازی الاضلاع) لوزی تشکیل میشه که قطرهای اون $\vec{a} + \vec{b}$ و $\vec{a} - \vec{b}$ هستن؛ پس...
- ۴۵ با توجه به توضیح سؤال ۴۴ و فصل ۳ (قطر لوزی اگه با ضلع اون برابر باشه...) می‌تونن به زاویه بین \vec{a} و \vec{b} تو هر حالت بررسی.
- ۴۶ الف) $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ ب) $\vec{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ پ) $\vec{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ ت) $\vec{d} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$
- ۴۷ الف) $\vec{v}i - \vec{j}$ ب) $-0.7\vec{i} - 0.3\vec{j}$ پ) $-\frac{1}{2}\vec{i}$ ت) $-\vec{j}$
الف) $\vec{v}i - \vec{j}$ ب) $-0.7\vec{i} - 0.3\vec{j}$ پ) $-\frac{1}{2}\vec{i}$ ت) $-\vec{j}$
الف) $\vec{v}i - \vec{j}$ ب) $-0.7\vec{i} - 0.3\vec{j}$ پ) $-\frac{1}{2}\vec{i}$ ت) $-\vec{j}$
الف) $\vec{v}i - \vec{j}$ ب) $-0.7\vec{i} - 0.3\vec{j}$ پ) $-\frac{1}{2}\vec{i}$ ت) $-\vec{j}$
الف) $\vec{v}i - \vec{j}$ ب) $-0.7\vec{i} - 0.3\vec{j}$ پ) $-\frac{1}{2}\vec{i}$ ت) $-\vec{j}$
الف) $\vec{v}i - \vec{j}$ ب) $-0.7\vec{i} - 0.3\vec{j}$ پ) $-\frac{1}{2}\vec{i}$ ت) $-\vec{j}$