

۴۵۱. گزینه ۱

$$(3t-2)^2 = 4 \xrightarrow{\text{از دو طرف جذرگیری}} \begin{cases} 3t-2 = \sqrt{4} \Rightarrow 3t-2=2 \\ \text{یا} \\ 3t-2 = -\sqrt{4} \Rightarrow 3t-2=-2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{+2} \begin{cases} 3t=4 \\ \text{یا} \\ 3t=0 \end{cases} \xrightarrow{+2} \begin{cases} t = \frac{4}{3} \\ \text{یا} \\ t=0 \end{cases} \Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها} = \frac{4}{3} + 0 = \frac{4}{3}$$

زنگی:

$$(3t-2)^2 = 4 \xrightarrow{\text{ساده‌کن}} 9t^2 - 12t = 0$$

$$\xrightarrow{\text{جمع ریشه‌ها}} \frac{b}{a} = \frac{-12}{9} = \frac{4}{3}$$

۴۵۲. گزینه ۲ معادله‌ی $3x^2 + 7x = 0$ فاقد عدد ثابت است ($c=0$)، بنابراین روش فاکتورگیری را به یاد می‌آوریم و-

$$3x^2 + 7x = 0 \xrightarrow{\text{فاکتوراز x}} x(3x+7) = 0 \xrightarrow{\text{ویژگی حاصل‌ضرب صفر}}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ \text{یا} \\ 3x+7=0 \Rightarrow x = \frac{-7}{3} \end{cases} \Rightarrow \text{اختلاف دو ریشه} = \left| 0 - \left(\frac{-7}{3}\right) \right| = \frac{7}{3}$$

زنگی:

$$3x^2 + 7x = 0 \xrightarrow{\text{اختلاف ریشه‌ها}} \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{49 - 4(3)(0)}}{3} = \frac{7}{3}$$

۴۵۳. گزینه ۳ می‌دانیم که مهم‌ترین ویژگی ریشه یا جواب یک معادله این است که در معادله صدق می‌کند؛ بنابراین اگر $x = p$ ریشه‌ی معادله‌ی $3x^2 + 3x - 1 = 0$ باشد، می‌توان نوشت:

$$3x^2 + 3x - 1 = 0 \xrightarrow{x=p} 3p^2 + 3p - 1 = 0 \Rightarrow 3p^2 + 3p = 1$$

اکنون برای محاسبه‌ی مقدار عبارت $3p^2 + 3p + 4$ کافی است به جای $3p^2 + 3p$ با توجه به 1 ، مقدار آن را قرار دهیم:

۴۵۴. گزینه ۲ در عبارت درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c$ ، اگر $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ باشد، آن‌گاه عبارت قابل تجزیه نبوده و معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ نیز فاقد ریشه خواهد بود. در **گزینه‌ی «۲»** داریم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4(4)(8) = 100 - 128 = -28 < 0$$

در نتیجه عبارت تجزیه‌ناپذیر است.

بررسی سایر گزینه‌ها و نیز حل معادله‌ی مربوطه به عهده‌ی خودتون!

۴۵۵. گزینه ۴ چون ضریب x^2 برابر یک است، کافی است به دو طرف، $\left(\frac{x}{2}\right)^2$ را اضافه کنیم؛ یعنی کافی است به دو طرف، عدد یک را اضافه کنیم:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \left(\frac{2}{2}\right)^2 = 1$$

۴۵۶. گزینه ۱ معادله را از روش کلی حل می‌کنیم:

$$\frac{t^2}{3} - \frac{t}{2} - \frac{3}{2} = 0 \xrightarrow{\times 6} 2t^2 - 3t - 9 = 0 \quad \Delta = (-3)^2 - 4(2)(-9) = 9 + 72 = 81$$

$$(a=2, b=-3, c=-9) \quad \Delta = 81$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{81}}{4} \rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{3+9}{4} = \frac{12}{4} = 3 \\ \text{یا} \\ t_2 = \frac{3-9}{4} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

زنگی: این جوری فرض کن: $b=3$

$$1 - 4a^2 - b^2 - 4ab = -4a^2 - 12a - 8$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور}} -4(a^2 + 3a + 2) = -4(a+2)(a+1)$$

اگر $b=3$ را در گزینه‌ها هم بگذارید، تنها **گزینه‌ی «۲»** عامل این عبارت می‌شود:

$$1 + 2a + b = 2a + 4 = 2(a+2)$$

۴۴۹. گزینه ۳ با توجه به اتحادهای کمکی مکعب، داریم:

$$x^3 - y^3 = (x-y)^3 + 3xy(x-y) \quad \frac{x^3 - y^3 = 70}{x-y = 5\sqrt{2}} \rightarrow$$

$$70 = (5\sqrt{2})^3 + 3xy(5\sqrt{2}) \Rightarrow 70 = 125 \times 2 + 15\sqrt{2}xy$$

$$\Rightarrow 15\sqrt{2}xy = 70 - 250 = -180 \Rightarrow xy = \frac{-180}{15\sqrt{2}} = \frac{-12}{\sqrt{2}} \Rightarrow xy = \frac{-12}{\sqrt{2}}$$

با توجه به اتحاد کمکی مربع کامل، داریم:

$$(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$$

$$\Rightarrow (x+y)^2 - (5\sqrt{2})^2 = 4\left(\frac{-12}{\sqrt{2}}\right)$$

$$(x+y)^2 - 25 \times \sqrt{2} = \frac{-48}{\sqrt{2}} \xrightarrow{\text{مخرج طرف راست را گویا کن}}$$

$$(x+y)^2 - 25\sqrt{2} = \frac{-48\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} \Rightarrow (x+y)^2 - 25\sqrt{2} = \frac{-48\sqrt{2}}{2}$$

$$(x+y)^2 = 25\sqrt{2} - 24\sqrt{2} = \sqrt{2} \Rightarrow x+y = \pm\sqrt{\sqrt{2}}$$

$$\xrightarrow{\text{رادیکال‌های تودرتو}} x+y = \pm\sqrt[6]{2} = \pm\sqrt[3]{2}$$

که در بین گزینه‌ها مقدار مثبت آن آمده است.

۴۵۰. گزینه ۴ همه‌ی عبارت‌ها را در ابتدا تجزیه می‌کنیم. دلتای عبارت $x^2 - 2x + 2$ منفی است، در نتیجه تجزیه نمی‌شود؛ ولی برای سایر عبارت‌ها داریم:

$$x^2 - 6x^2 + 12x - 8 = (x-2)^2 \quad 1$$

$$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \quad 2$$

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) \quad 3$$

اگر حاصل عبارت را با A نمایش دهیم، داریم:

$$A = \frac{(x-2)^2}{x^2 - 2x + 2} \times \left(\frac{x}{(x-2)^2} - \frac{1}{(x-2)(x-1)} \right)$$

$$\xrightarrow{\text{بین عبارت‌های داخل پرانتز مخرج مشترک بگیر}} A = \frac{(x-2)^2}{x^2 - 2x + 2} \times \frac{x(x-1) - 1(x-2)}{(x-2)^2(x-1)}$$

$$= \frac{(x-2)^2}{x^2 - 2x + 2} \times \frac{x^2 - x - x + 2}{(x-2)^2(x-1)}$$

$$= \frac{(x-2)^2}{x^2 - 2x + 2} \times \frac{x^2 - 2x + 2}{(x-2)^2(x-1)} \xrightarrow{\text{ساده‌کن}} A = \frac{x-2}{x-1}$$

زنگی: فرض کن $x = -1$:

$$A = \frac{-1 - 6 - 12 - 8}{1 + 2 + 2} \times \left(\frac{-1}{1 + 4 + 4} - \frac{1}{1 + 3 + 2} \right)$$

$$= \frac{-27}{5} \times \left(\frac{-1}{9} - \frac{1}{6} \right) = \frac{-27}{5} \times \frac{-2-3}{18} = \left(\frac{-27}{5} \right) \left(\frac{-5}{18} \right) = \frac{27}{18} = \frac{3}{2}$$

گزینه‌های «۱» و «۲» به ازای $x = -1$ تعریف نشده هستند، در **گزینه‌ی «۲»** هم داریم:

$$x-2 = (-1) - 2 = -3 \neq \frac{3}{2}$$

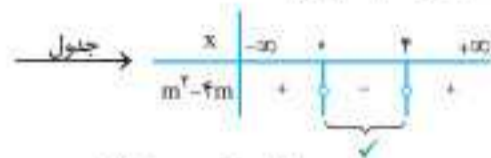


۴۶۱. گزینه ۲) معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ با شرط $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ فاقد

ریشه‌ی حقیقی است: $mx^2 + mx + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = m^2 - 4m < 0$ ($a=m, b=m, c=1$)

حل نامعادله $\rightarrow m^2 - 4m = 0 \xrightarrow{\text{فکتورگیری}} m(m-4) = 0$

ویرگی حاصل ضرب صفر $\rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ \text{یا} \\ m - 4 = 0 \Rightarrow m = 4 \end{cases}$



هدف اینکه $m^2 - 4m < 0$ باشد $\rightarrow 0 < m < 4$ حدود m

حالا به نظر شما برای کدام مقادیر m ، عبارت $mx^2 + mx + 1$ همواره مثبت می‌شه؟!



در معادله $m = -1 \rightarrow -x^2 - x + 1 = 0$

دو ریشه‌ی حقیقی دارد $\Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4(-1)(1) = 5 > 0$

پس گزینه‌های «۱» و «۴» که $m = -1$ را قبول دارند غلط هستند!

در معادله $m = 5 \rightarrow 5x^2 + 5x + 1 = 0$

دو ریشه‌ی حقیقی دارد $\Rightarrow \Delta = 5^2 - 4(5)(1) = 5 > 0$

پس گزینه‌ی «۲» هم غلطه!

۴۶۲. گزینه ۳) Δ را محاسبه کرده و بعد گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$ax^2 + x + 2 = 0 \xrightarrow{a=1, b=1, c=2} \Delta = 1^2 - 4(a)(2) = 1 - 8a$
 $\Delta = b^2 - 4ac$

گزینه‌ی «۱»: $a = \frac{1}{8} \xrightarrow{\text{در } \Delta \text{ بذار}} \Delta = 1 - 8\left(\frac{1}{8}\right) = 0$

* ریشه‌ی حقیقی ندارد. $\Delta < 0$

گزینه‌ی «۲»: $a = \frac{1}{12} \xrightarrow{\text{در } \Delta \text{ بذار}} \Delta = 1 - 8\left(\frac{1}{12}\right) = \frac{2}{3} > 0$

* ریشه‌ی مضاعف ندارد. $\Delta = 0$

گزینه‌ی «۳»: $a = \frac{1}{6} \xrightarrow{\text{در } \Delta \text{ بذار}} \Delta = 1 - 8\left(\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{3} < 0$

✓ ریشه‌ی حقیقی ندارد. $\Delta < 0$

درباره‌ی گزینه‌ی «۴»: اگر a عددی متفی باشد، $1 - 8a$ مثبت شده و $1 - 8a > 0$ هم قطعاً مثبت خواهد بود، بنابراین همواره دو ریشه‌ی حقیقی خواهیم داشت. *

۴۶۳. گزینه ۲) ریشه‌ی معادله در معادله صدق می‌کند: پس:

$2\alpha^2 - \alpha - 2 = 0 \Rightarrow 2\alpha^2 = \alpha + 2$

حالا با توجه به رابطه‌ی $2\alpha^2 = \alpha + 2$ کافی است در عبارت $\frac{f\alpha^2}{2\alpha^2 + \alpha + 2}$ به جای $\alpha + 2$ معادل آن $(2\alpha^2)$ را قرار دهیم:

حاصل عبارت $= \frac{f\alpha^2}{2\alpha^2 + (2\alpha^2)} = \frac{f\alpha^2}{4\alpha^2} = 1$

۴۶۴. گزینه ۴) می‌دانیم اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، آن‌گاه معادله به صورت $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$ قابل تجزیه خواهد بود به طوری که $\alpha = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ و $\beta = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ ($\Delta = b^2 - 4ac$)

برای حل این تست ابتدا ریشه‌های معادله‌ی $b^2 + \sqrt{2}b - 4 = 0$ را از روش Δ به دست می‌آوریم:

$\Delta = (\sqrt{2})^2 - 4(1)(-4) = 2 + 16 = 18 \rightarrow b = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{18}}{2} \rightarrow \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$



$\frac{x^2}{3} - \frac{x}{2} - \frac{3}{2} = 0 \xrightarrow{\times 6} 2x^2 - 3x - 9 = 0$

گزینه‌ای درست است که ضرب ریشه‌هایش $-\frac{9}{2}$ و جمع آن‌ها $\frac{3}{2}$ باشد...

۴۵۷. گزینه ۳) $x = -1 \Rightarrow a + c = b \Rightarrow (3m + 1) + (2 - 5m) = -5$

ساده‌کن $\rightarrow -2m + 3 = -5 \xrightarrow{\text{حل کن}} -2m = -8 \Rightarrow m = 4$

۲) $x = -1$ ریشه‌ی دیگر $\rightarrow x = -\frac{c}{a} = -\frac{2 - 5m}{3m + 1} \xrightarrow{m=4} x = -\frac{2 - 20}{12 + 1} = \frac{18}{13}$

$x = -\frac{2 - 20}{12 + 1} = \frac{18}{13} \Rightarrow m + \text{ریشه‌ی دیگر} = 4 + \frac{18}{13} = \frac{52 + 18}{13} = \frac{70}{13}$

۴۵۸. گزینه ۳) داشتن دو ریشه‌ی مساوی در یک معادله‌ی درجه‌ی دوم به معنای داشتن ریشه‌ی تکراری یا مضاعف بوده و شرطش این است که دلتای آن معادله صفر شود.

$x(2x - 5) = a \xrightarrow{\text{ساده و مرتب کن}} 2x^2 - 5x = a \Rightarrow 2x^2 - 5x - a = 0$

$\Rightarrow \Delta = (-5)^2 - 4(2)(-a) = 0 \Rightarrow 25 + 8a = 0 \Rightarrow 8a = -25 \Rightarrow a = -\frac{25}{8}$

در معادله $2x^2 - 5x + \frac{25}{8} = 0$ فرمول ریشه‌ی مضاعف $x = \frac{-(-5)}{2(2)} = \frac{5}{4}$ قرار بده $x = x_s = \frac{-b}{2a}$

این جوری هم ببین: تست فقط مقدار ریشه‌ی مضاعف رو خواسته و ما می‌دانیم که در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ مقدار ریشه‌ی مضاعف از دستور

$x(2x - 5) = a \Rightarrow 2x^2 - 5x - a = 0$ $x = x_s = \frac{-b}{2a}$ به دست می‌آید: $x = x_s = \frac{-(-5)}{2(2)} = \frac{5}{4}$ (ریشه‌ی مضاعف معادله) بدون توجه به مقدار a

۴۵۹. گزینه ۱) اگر سن برادر کوچک‌تر را x و سن برادر بزرگ‌تر را y فرض کنیم، بر اساس گفته‌های سؤال داریم:

۱) برادر بزرگ‌تر ۴ سال از برادر کوچک‌تر، بزرگ‌تره: یعنی: $y = x + 4$ یا $y - x = 4$

۲) ۴ سال دیگر، سن برادر کوچک‌تر $x + 4$ سال و سن برادر بزرگ‌تر $y + 4$ سال می‌شود: در نتیجه: $(x + 4)(y + 4) = 60$

به جای $x + 4$ قرار بده y $y(y + 4) = 60$
 $\xrightarrow{\text{مرتب کن}} y^2 + 4y - 60 = 0$ ($a=1, b=4, c=-60$)

حل از $\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4(1)(-60) = 16 + 240 = 256$

$\Rightarrow y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{256}}{2}$

دو حالت دارد $\sqrt{256} = 16$ $\begin{cases} y = \frac{-4 + 16}{2} = \frac{12}{2} = 6 \checkmark \Rightarrow y = 6, x = 2 \\ \text{یا} \\ y = \frac{-4 - 16}{2} = \frac{-20}{2} = -10 \times \text{ (سن منفی بی معناست)} \end{cases}$

بنابراین هم‌اکنون برادر بزرگ‌تر ۶ سال و برادر کوچک‌تر ۲ سال دارد.

۴۶۰. گزینه ۳) آن دو عدد طبیعی فرد متوالی را $2n - 1$ و $2n + 1$ در نظر می‌گیریم: پس: $(2n - 1)^2 + (2n + 1)^2 = 290$

اتحادها بویازکن $\rightarrow (4n^2 - 4n + 1) + (4n^2 + 4n + 1) = 290$

ساده‌کن $\rightarrow 8n^2 + 2 = 290 \xrightarrow{-2} 8n^2 = 288$

$\xrightarrow{+8} n^2 = 36 \xrightarrow{\text{جذریگیر}} n = \pm 6 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n = 6$

$\Rightarrow \begin{cases} \text{عدد فرد اول} = 2(6) - 1 = 11 \\ \text{عدد فرد بعدی} = 2(6) + 1 = 13 \end{cases}$

\Rightarrow حاصل ضرب این دو عدد $= 11 \times 13 = 143$

$\Rightarrow (m-5)(m-2) < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 2 < m < 5$ **۲**

$\xrightarrow{1 \cap 2} 2 < m < 5$

۴۶۹. **گزینه ۳** مقدار $\Delta = b^2 - 4ac$ را برای تک‌تک گزینه‌ها حساب می‌کنیم و گزینه‌ای را که در آن مقدار Δ به ازای مقادیر مختلف m مثبت می‌شود، به عنوان گزینه‌ی درست انتخاب می‌کنیم:

«۱» گزینه‌ی $\Delta = (-m)^2 - 4(1)(1+m^2) = m^2 - 4 - 4m^2 = -4 - 3m^2 < 0$ * (حتماً قابل تجزیه نیست!)

«۲» گزینه‌ی $\Delta = (-1)^2 - 4(m^2+2)(2) = 1 - 12m^2 - 24 = -12m^2 - 23 < 0$ * (حتماً قابل تجزیه نیست!)

«۳» گزینه‌ی $\Delta = (2)^2 - 4(-2)(m^2+2) = 9 + 8m^2 + 16 = 8m^2 + 25 > 0$ ✓ (این عبارت حتماً قابل تجزیه است!)
 m هرچی باشه این عبارت مثبت

«۴» گزینه‌ی $\Delta = (-3)^2 - 4(m+1)(m) = 9 - 4m^2 - 4m = -4m^2 - 4m + 9$ *
 (این عبارت نیز به ازای همگی مقادیر m همواره مثبت نیست!)

زنگی: a و c مختلف‌العلامت به معنای $\Delta > 0$ است ($ac < 0$): در این تست شرط $ac < 0$ فقط در **گزینه ۳** برقراره:

✓ $ac = -2(m^2+2) < 0$
 $\frac{a=-2}{c=m^2+2}$ **گزینه ۳**
 همواره

۴۷۰. **گزینه ۱** در معادله‌ی داده‌شده، داریم:

$\begin{cases} a=1 \\ b=-1-\sqrt{3} \\ c=\sqrt{3} \end{cases} \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=\sqrt{3} \end{cases}$

بنابراین: $|\frac{\sqrt{1-\sqrt{3}}}{\text{منفی}}| + \sqrt{1} + \sqrt{\sqrt{3}}$

$= (\sqrt{\sqrt{3}} - 1) + \sqrt{\sqrt{3}} + 1 = 2\sqrt{\sqrt{3}} = 2\sqrt[4]{3}$

۴۷۱. **گزینه ۳** هدف تست، حل معادله‌ی $124 = 0.06s^2 - 0.2s + 120$ یا $0.06s^2 - 0.2s - 4 = 0$ است. اگر طرفین را در ۱۰۰۰ ضرب کنیم، به معادله‌ی سراسرتر زیر می‌رسیم:

$6s^2 - 20s - 4000 = 0 \xrightarrow{+2} 3s^2 - 10s - 2000 = 0$
 ($a=3, b=-10, c=-2000$)

از Δ بریز: $s = \frac{10 \pm \sqrt{24100}}{6}$
 $\Delta = (-10)^2 - 4(3)(-2000) = 24100$

$\sqrt{24100} = 10\sqrt{241} \approx 10(15.5) = 155$
 $s = \frac{10 \pm 155}{6}$

$\Rightarrow s = \frac{165}{6} = 27.5$ ✓, $s = \frac{-145}{6} < 0$ *
 یعنی سن فرد موردنظر با فشار خون ۱۲۴ mmHg، برابر ۲۷/۵ است.

۴۷۲. **گزینه ۴** $x^2 + bx = -c \Rightarrow x^2 + bx + (\frac{b}{2})^2 = (\frac{b}{2})^2 - c$

$x^2 + 3x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 + 3x = 2 \Rightarrow x^2 + 3x + \frac{9}{4} = \frac{9}{4} + 2$
 $\Rightarrow (x + \frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4} + 2$

این معادله را با معادله‌ی $(x+a)^2 = b+2$ مقایسه می‌کنیم:
 $\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = (\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4} \end{cases} \Rightarrow a+b = \frac{3}{2} + \frac{9}{4} = \frac{6+9}{4}$
 $= \frac{15}{4} = \frac{16-1}{4} = \frac{16}{4} - \frac{1}{4} = 4 - 0.25 = 3.75$

$b = \frac{-\sqrt{2} \pm 3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow b = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ یا $b = \frac{-4\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2}$

$\Rightarrow b^2 + \sqrt{2}b - 4 = (b - \sqrt{2})(b + 2\sqrt{2})$

این رابطه را با تجزیه‌ی داده‌شده در صورت سؤال $((b-r)(b+s))$ مقایسه می‌کنیم:

$\begin{cases} r = \sqrt{2} \\ s = 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{r}{s} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$

زنگی: $b^2 + \sqrt{2}b - 4 = (b - \sqrt{2})(b + 2\sqrt{2})$ **مقایسه با فرض**

$(b - \sqrt{2})(b + 2\sqrt{2}) = (b - r)(b + s) \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{2} \\ s = 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{r}{s} = \frac{1}{2}$

۴۶۵. **گزینه ۱**

$S^2 - 3S = 3 \xrightarrow{+(\frac{b}{2a})^2 = (\frac{-3}{2})^2} S^2 - 3S + \frac{9}{4} = 3 + \frac{9}{4} \Rightarrow (S - \frac{3}{2})^2 = \frac{21}{4}$

در این مرحله باید از دو طرف جذر بگیریم، پس باید از عدد $\frac{21}{4}$ جذر گرفته شود.

۴۶۶. **گزینه ۳**

نکته: هرگاه دو معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ و $a'x^2 + b'x + c' = 0$ دارای یک ریشه‌ی مشترک باشند، این ریشه از حذف x^2 بین دو معادله به دست می‌آید.

$\begin{cases} x^2 + 6x + m = 0 \\ x^2 + 2x - 3m = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{حذف } x^2} \begin{cases} 6x + m = 0 \\ 2x - 3m = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -m$

ریشه‌ی به دست آمده، ریشه‌ی مشترک دو معادله است که در هر دو صدق می‌کند:
 بنابراین داریم: $x^2 + 6x + m = 0 \xrightarrow{x=-m} m^2 - 6m + m = 0$

$\Rightarrow m^2 - 5m = 0 \Rightarrow m = 0, 5$

طبق فرض تست $m = 0$ قابل قبول نیست. با جای گذاری $m = 5$ در دو معادله داریم:

$\begin{cases} x^2 + 6x + 5 = 0 \Rightarrow (x+1)(x+5) = 0 \Rightarrow x = -1, -5 \\ x^2 + 2x - 15 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+5) = 0 \Rightarrow x = 3, -5 \end{cases}$

اختلاف ریشه‌های غیرمشترک برابر است با: $3 - (-1) = 4$

۴۶۷. **گزینه ۴** شرط وجود دو ریشه‌ی حقیقی متمایز آن است که $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ پس:

$x^2 - 3x - m + 9 = 0 \Rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4(1)(-m+9) > 0$
 ($a=1, b=-3, c=-m+9$)

$\Rightarrow 9 + 4m - 36 > 0 \Rightarrow 4m > 27 \xrightarrow{+4} m > \frac{27}{4}$

$\frac{27}{4} = \frac{28-1}{4} = \frac{28}{4} - \frac{1}{4}$
 $\frac{28}{4} = 7$ کوچکترین عدد صحیح $m > 6.75 \Rightarrow m > 7$

۴۶۸. **گزینه ۲**

$y = (1-m)x^2 + 2(m-3)x - 1$

شکل مناسب رسم کن سهمی پایین محور x هاست

شرط‌ها رو بنویس $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$

$a = 1 - m < 0 \Rightarrow m > 1$ **۱**

$\Delta = (2(m-3))^2 - 4(1-m)(-1) < 0$

$\Rightarrow \Delta = 4(m^2 - 6m + 9) + 4(1-m) < 0 \xrightarrow{+4}$

$m^2 - 6m + 9 + 1 - m < 0 \Rightarrow m^2 - 7m + 10 < 0$



۴۷۵. **گزینه ۱** اگر عدد ۱۵ را به صورت مجموع دو عدد x و $15-x$ بنویسیم، داریم:

$$x(15-x) = 52/25 \Rightarrow 15x - x^2 = 52/25 \Rightarrow x^2 - 15x + 52/25 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 9/5)(x - 5/5) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 9/5 = 0 \\ x - 5/5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 9/5 \\ x = 5/5 \end{cases}$$

اختلاف دو عدد = $9/5 - 5/5 = 4$

۴۷۶. **گزینه ۲** در دستگاه دیدیم که برای سهمی به معادله‌ی

$$y = ax^2 + bx + c$$

اگر نقطه‌ی S رأس آن باشد، آن گاه $x_S = \frac{-b}{2a}$ و

$$y_S = \frac{-\Delta}{4a}$$

یعنی: $S(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$

در اینجا:

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2(\frac{1}{2})} = 1$$

$$y_S = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{16}{4(\frac{1}{2})} = -8$$

و $S(\frac{1}{2}, 22)$

$$(\Delta = (\frac{1}{2})^2 - 4(\frac{1}{2})(1) = \frac{1}{4} - 2 = -\frac{7}{4})$$

۴۷۷. **گزینه ۳** ابتدا معادله‌ی سهمی را به شکل استاندارد $y = 3x^2 - 2mx + 1$ نوشته، سپس مؤلفه یا مختص طول رأس S را از دستور $x_S = \frac{-b}{2a}$ به دست آورده و برابر -1 قرار می‌دهیم:

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2m)}{2(3)} = \frac{m}{3} = -1 \Rightarrow m = -3$$

۴۷۸. **گزینه ۱**

$$y = \frac{(m-2)x^2 - (4m-2)x + 3}{a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x = -\frac{-(4m-2)}{2(m-2)} = 3$$

فرض تست

$$2m = 1 \Rightarrow 4m - 2 = 6m - 12 \Rightarrow 2m = 10 \Rightarrow m = 5$$

$$y = 3x^2 - 18x + 30$$

حالا گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه ۱: $\Delta = (-18)^2 - 4(3)(30) = 324 - 360 = -36$

محور x ها را قطع نمی‌کند. $\Delta < 0$

گزینه ۲: دهانه‌ی سهمی رو به بالاست. $a = 3 > 0$

گزینه ۳: در معادله‌ی سهمی $x = 3 \Rightarrow y = 3(3)^2 - 18(3) + 30 = 3$

دهانه‌ی سهمی رو به بالاست. \Rightarrow عرض رأس = ۳

گزینه ۴: کمترین مقدار سهمی ۳ است.

گزینه ۴: در معادله‌ی سهمی $x = 2 \Rightarrow y = 3(2)^2 - 18(2) + 30 = 6$

سهمی از نقطه‌ی $(2, 6)$ می‌گذرد، نه نقطه‌ی $(2, 5)$

۴۷۹. **گزینه ۴**

$$y = kx^2 - 4x - 6$$

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2k} = \frac{2}{k}$$

طول رأس سهمی

$$y_S = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(-4)^2 - 4k(-6)}{4k}$$

عرض رأس سهمی

زنگی: $(x+a)^2 = b+2 \Rightarrow x^2 + 2ax + a^2 - b - 2 = x^2 + 2x - 2$

$$\Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1, a^2 - b - 2 = -2 \Rightarrow b = a^2 = 1$$

$$\Rightarrow a + b = 1 + 1 = 2$$

۴۷۲. **گزینه ۱** ابتدا توجه کنید که اگر $a = 0$ باشد، آن گاه معادله می‌شود

$-3x + 4 = 0$ که فقط یک ریشه دارد. پس $a = 0$ قابل قبول نیست. اکنون فرض کنید $a \neq 0$ است.

معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ با شرط $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ، همواره دو ریشه‌ی حقیقی و متمایز دارد. $\Delta = (-3)^2 - 4(a)(a+4) > 0$

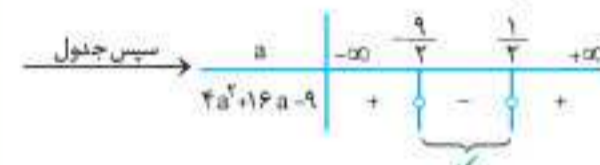
$$9 - 4a^2 - 16a > 0 \xrightarrow{\times(-1)} 4a^2 + 16a - 9 < 0$$

$$\xrightarrow{\text{حل نامعادله}} 4a^2 + 16a - 9 < 0$$

$$\Delta = (16)^2 - 4(4)(-9) = 400$$

$$a = \frac{-16 \pm \sqrt{400}}{2(4)} = \frac{-16 \pm 20}{8}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \\ a = \frac{-36}{8} = -\frac{9}{2} \end{cases}$$



$$\frac{4a^2 + 16a - 9}{\text{منفی شده جواب}} < 0 \Rightarrow -\frac{9}{2} < a < \frac{1}{2}$$

چون $a = 0$ قابل قبول نیست، پس مجموعه‌ی مقادیر a می‌شود: $(-\frac{9}{2}, \frac{1}{2}) - \{0\}$

زنگی: $a = 1 \Rightarrow x^2 - 3x + 5 = 0$

$$\Delta = (-3)^2 - 4(1)(5) = -11 < 0$$

پس گزینه‌هایی که $a = 1$ را قبول دارند غلط هستند! **گزینه‌های «۲» و «۴» حذف شدن.**

در معادله $a = -3 \Rightarrow -3x^2 - 3x + 1 = 0$

حذف گزینه‌ی «۲» \Rightarrow دو ریشه‌ی حقیقی دارد $\Delta > 0$

۴۷۴. **گزینه ۲** اگر سن فعلی معلم را x سال فرض کنیم، سن او بعد از ۴ سال

برابر $x + 4$ و مربع سن ایشان در ۲۶ سال قبل برابر $(x - 26)^2$ خواهد بود. حالا بنا به گفته‌ی معلم سعید داریم:

$$(x - 26)^2 = x + 4 \xrightarrow{\text{انحاد رویاکن}} x^2 - 52x + 676 = x + 4$$

$$\xrightarrow{\text{مرتب‌کن}} x^2 - 53x + 672 = 0$$

$(a=1, b=-53, c=672)$

$$x = \frac{53 \pm \sqrt{121}}{2} = \frac{53 \pm 11}{2}$$

$(\Delta = (-53)^2 - 4(1)(672) = 121)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{53 + 11}{2} = \frac{64}{2} = 32 \checkmark \\ x = \frac{53 - 11}{2} = \frac{42}{2} = 21 \times \end{cases}$$

غلت مورد قبول نبودن سن $x = 21$ سال برای معلم رو حتماً می‌دونی دیگه؟! آره دیگه. اگه معلم ۲۱ سالش باشه، اون وقت چطور ۲۶ سال قبل...

زنگی: $f(x) = ax^2 + \lambda x + c = a(x-2)^2 = ax^2 - 4ax + 4a$

مقایسه $\rightarrow \lambda = -4a \Rightarrow a = -2, c = 4a \Rightarrow c = -8$

۴۸۴. گزینه ۲ این بار به جای این که مقدار تابع را به ازای

حساب کنیم و برابر ۱۸۰ قرار دهیم، از همان ابتدا $x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-20}{2a} = \frac{-10}{a}$

مستقیماً از رابطه‌ی $y_{max} = \frac{-\Delta}{4a} = 180$ استفاده می‌کنیم (چرا؟):

$\frac{-(400 + 480a)}{4a} = 180 \Rightarrow -400 - 480a = 720a$

$\Rightarrow -400 = 1200a \Rightarrow a = \frac{-1}{3}$

۴۸۵. گزینه ۱ سهمی دارای \min است، از این رو دهانه‌ی سهمی رو به بالاست و در نتیجه $m > 0$.

فرض تست $\rightarrow \min = 2 \Rightarrow \frac{-\Delta}{4a} = 2$

$\Rightarrow \frac{-(-12)^2 - 4 \times m(\Delta m - 1)}{4m} = 2 \Rightarrow \frac{\Delta m^2 - m - 36}{m} = 2$

$\Rightarrow \Delta m^2 - m - 36 = 2m \Rightarrow \Delta m^2 - 3m - 36 = 0$

$\xrightarrow{\times 5} (\Delta m)^2 - 3(\Delta m) - 36 \times 5 = 0$

اتحاد جمله مشترک $\rightarrow (\Delta m - 15)(\Delta m + 12) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} \Delta m = 15 \Rightarrow m = 3 \\ \Delta m = -12 \Rightarrow m = -\frac{12}{\Delta} \xrightarrow{m > 0} m = 3 \end{cases}$

محور تقارن سهمی $\rightarrow x = -\frac{b}{2a} = \frac{12}{2 \times 3} = 2$

۴۸۶. گزینه ۱ عبارت درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c$ با شرط $\Delta < 0$ و $a > 0$

همواره مثبت و با شرط $\Delta < 0$ و $a < 0$ همواره منفی است. $A = x^2 + 3x + k$ ($a=1, b=3, c=k$)

(این شرط بدیهه‌ای است) $\begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta = (3)^2 - 4(1)(k) < 0 \Rightarrow 9 - 4k < 0 \\ \xrightarrow{+4k} 9 < 4k \xrightarrow{+4} k > \frac{9}{4} \end{cases}$

اشتراک $a = 1 > 0$ و $k > \frac{9}{4}$ همان $k > \frac{9}{4}$ است.

زنگی: همواره مثبت است، پس به ازای $x=0$ هم مثبت است:

$0 + 0 + k > 0 \Rightarrow k > 0$

فقط گزینه‌ی «۱» این شرط را دارد.

۴۸۷. گزینه ۳ برای تعیین وضعیت علامت عبارت درجه‌ی دوم، علامت

ضرب x^2 و دلتای $(\Delta = b^2 - 4ac)$ عبارت را بررسی می‌کنیم:

$A = -3x^2 + \sqrt{2}x + \sqrt{2} - \sqrt{3}$

($a = -3, b = \sqrt{2}, c = \sqrt{2} - \sqrt{3}$)

$\Rightarrow \begin{cases} a = -3 < 0 \text{ (ضرب } x^2 \text{ منفیه)} \\ \text{و} \end{cases}$

$\Delta = (\sqrt{2})^2 - 4(-3)(\sqrt{2} - \sqrt{3}) = 2 + 12\sqrt{2} - 12\sqrt{3} < 0$

بنابراین در عبارت داده‌شده، $a < 0$ و $\Delta < 0$ بوده و در نتیجه عبارت همواره منفی است. حالا به نظر شما، درباره‌ی وجود یا عدم وجود ریشه‌های حقیقی معادله‌ی

$-3x^2 + \sqrt{2}x + \sqrt{2} - \sqrt{3} = 0$ چه می‌توان گفت؟!

$= -\frac{16 + 24k}{4k} = -\frac{4 + 6k}{k}$

مختصات رأس $\rightarrow S(\frac{2}{k}, -\frac{4+6k}{k})$

طبق فرض تست نقطه‌ی S روی خط $y = -4x - 4$ قرار دارد، بنابراین:

$-\frac{4+6k}{k} = -4 \times \frac{2}{k} - 4 \xrightarrow{\times(-k)} 4+6k = 8+4k \Rightarrow 2k = 4 \Rightarrow k = 2$

$\rightarrow y_S = -\frac{4+6 \times 2}{2} = -8$

۴۸۰. گزینه ۱ در گزینه‌ی «۱» با این که مختصات رأس سهمی به درستی بیان شده،

یک ایراد اساسی وجود دارد و آن این است که علی‌رغم منفی بودن ضریب x^2 در سهمی به معادله‌ی $y = -(x+1)^2 - 3$ دهانه‌ی سهمی رو به بالاست (در صورتی که باید رو

به پایین باز می‌شد!) یادمان هست که در سهمی به معادله‌ی $y = a(x-h)^2 + k$ مختصات رأس سهمی به صورت $S(h, k)$ است. در سایر گزینه‌ها، هم مختصات رأس سهمی و هم دهانه‌ی سهمی (با توجه به علامت a) به درستی بیان و رسم شده است.

همان طور که می‌دانید در سهمی‌هایی به فرم کلی $y = ax^2 + c$ (که فاقد x هستن) رأس سهمی به مختصات $S(0, c)$ روی محور y ها قرار دارد. (گزینه‌ی «۲» این گونه است.)

و در سهمی‌هایی به فرم کلی $y = ax^2 + bx + c$ طول رأس S از دستور $x_S = \frac{-b}{2a}$

یا به دست آوردن $\frac{-\Delta}{4a}$ حاصل می‌شود. (گزینه‌های «۲» و «۴» از این دسته‌اند.)

۴۸۱. گزینه ۲ درباره‌ی سهمی به معادله‌ی $y = 2x^2 - 8x + 1$ داریم:

$\begin{cases} x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{8}{2(2)} = 2 \\ y_S = y(2) = 2(2)^2 - 8(2) + 1 = -7 \end{cases} \Rightarrow S(2, -7)$

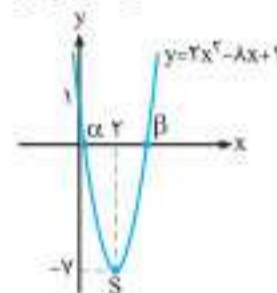
$y = 2x^2 - 8x + 1$

دهانه‌ی سهمی رو به بالا باز می‌شود. $\Rightarrow a = 2 > 0$

(۰ و ۱) محل تلاقی نمودار با محور y ها $\Rightarrow y(0) = 1$

با همین مشخصات روشن است که سهمی هرگز وارد ناحیه‌ی سوم نمی‌شود.

ببین:



۴۸۲. گزینه ۳ شرط این که سهمی بالای محور x ها و مماس بر آن قرار

گیرد، این است که: $a > 0, \Delta = 0$

$\begin{cases} m - 2 > 0 \Rightarrow m > 2 \\ \text{و} \\ \Delta = (-3)^2 - 4(m-2)(m+2) = 0 \Rightarrow 9 - 4m^2 + 16 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow 4m^2 = 25 \Rightarrow m^2 = \frac{25}{4}$

$\xrightarrow{\text{جنر بگیر}} m = \pm \frac{5}{2}$

$\Rightarrow m = \frac{5}{2}$ مورد قبول

۴۸۳. گزینه ۲ از شکل پیداست که سهمی به معادله‌ی $y = ax^2 + 8x + c$

در نقطه‌ای به طول ۲ بر محور x ها مماس است؛ بنابراین:

$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-8}{2a} = 2 \Rightarrow 4a = -8 \xrightarrow{+4} a = -2$

$\Delta = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow (8)^2 - 4(-2)(c) = 0 \Rightarrow 64 + 8c = 0$

$\Rightarrow 8c = -64 \xrightarrow{+8} c = -8$



طبق فرض تست، مختصات رأس سهمی هر تابع، در تابع دیگر صدق می‌کند، پس:

$$S_1\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}a+2\right) \xrightarrow{\text{در سهمی دوم}} \frac{1}{4}a+2 = 2b\left(\frac{1}{4}\right)^2 - b\left(\frac{1}{4}\right) - 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}a+2 = \frac{1}{4}b - \frac{1}{4}b - 1 \Rightarrow \frac{1}{4}a = -3 \Rightarrow a = -12$$

$$S_2\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}b-1\right) \xrightarrow{\text{در سهمی اول}} -\frac{1}{4}b-1 = 12\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 12\left(\frac{1}{4}\right) + 2$$

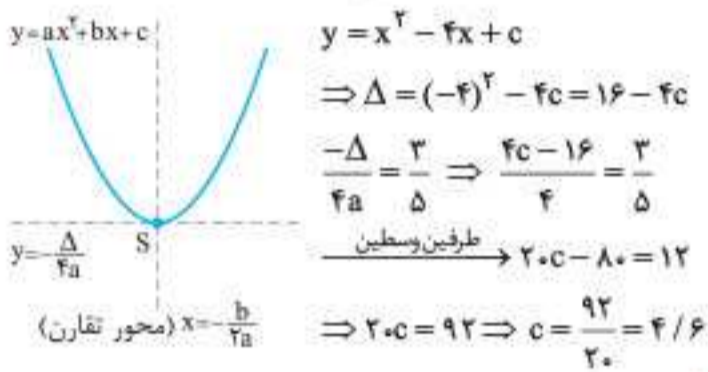
$$\Rightarrow -\frac{1}{4}b-1 = \frac{3}{4} - 3 + 2 \Rightarrow -\frac{1}{4}b = \frac{3}{4} \Rightarrow b = -6$$

$$\Rightarrow b-a = -6 - (-12) = 6$$

۴۹۲. **گزینه ۳** اگر نمودار تابع را که یک سهمی است با محور تقارنش در ذهنتان تجسم کنید، متوجه می‌شوید خط افقی ای که با محور تقارن سهمی

روی نمودار تابع تلاقی می‌کند، همان خط $y = y_S = \frac{-\Delta}{4a}$ است.

نگاه کن:



۴۹۳. **گزینه ۴** شکل داده شده یک سهمی با رأس $S(1, -2)$ را نشان می‌دهد که از نقطه‌ی $A(-1, 0)$ نیز می‌گذرد. حالا باید ببینیم این دو ویژگی در معادله‌ی کدام سهمی صدق می‌کند:

* **گزینه‌ی ۱:** $y = x^2 - x - 3 \Rightarrow x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2} \neq 1$

* **گزینه‌ی ۲:** $y = 2x^2 + x - 1 \Rightarrow x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2(2)} = \frac{-1}{4} \neq 1$

* **گزینه‌ی ۳:** $y = \frac{-1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2} \Rightarrow x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2(-\frac{1}{2})} = 1$

$\Rightarrow y_S = \frac{-1}{2}(1)^2 + 1 + \frac{3}{2} = 2 \neq -2$

پس حتماً **گزینه‌ی ۴** مورد نظر است. **نگاه کن:**

* **گزینه‌ی ۴:** $y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} \Rightarrow x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2(\frac{1}{2})} = 1$

$\Rightarrow y_S = \frac{1}{2}(1)^2 - 1 - \frac{3}{2} = -2$ ✓

$A(-1, 0): 0 = \frac{1}{2}(-1)^2 - (-1) - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} + 1 - \frac{3}{2} = 0$ ✓

۴۹۴. **گزینه ۲** شکل به ما می‌گوید که نمودار تابع (سهمی) از مبدأ عبور می‌کند. پس باید مختصات $O(0, 0)$ در ضابطه‌ی تابع صدق کند:

$$0 = 0 + 0 + a^2 - 2 \Rightarrow a^2 = 2 \xrightarrow{\text{جذر بگیر}} a = \pm\sqrt{2}$$

ضرب x نیز داده دهانه‌ی سهمی روبه بالا است. $\Rightarrow a = \sqrt{2}$

حالا به نظر شما سهمی علاوه بر مبدأ در چه نقطه‌ای محور طول‌ها را قطع کرده است؟

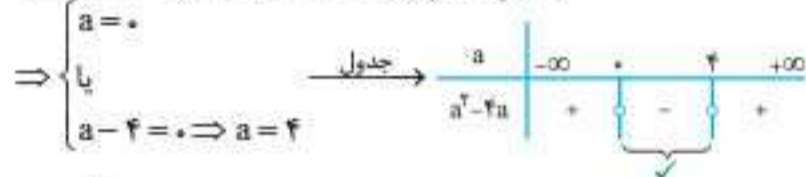
۴۹۵. **گزینه ۱** سهمی داده شده، از مبدأ مختصات می‌گذرد، **ببین:**

$$y = ax^2 + (3+2a)x = x(ax+3+2a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{3+2a}{a} \end{cases}$$

۴۸۸. **گزینه ۳** بنا به ویژگی حاصل ضرب صفر (اگر $AB = 0$ ، آن‌گاه $B = 0$ یا $A = 0$)، معادله‌ی $y = 0$ حتماً یک ریشه‌ی $x = 1$ را دارد (نمودار تابع حتماً در یک نقطه به طول $x = 1$ محور x ها را قطع می‌کند): بنابراین برای این که معادله ریشه‌ی دیگری نداشته باشد (و به تبع آن نمودار تابع نیز محور x ها را در نقطه‌ی دیگری قطع نکند)، باید عامل درجه‌ی دوم معادله‌ی $y = 0$ فاقد ریشه باشد و این هم زمانی اتفاق می‌افتد که Δ آن متفی شود یا این که $x = 1$ ریشه‌ی مضاعف آن باشد:

$$\Delta = (-a)^2 - 4(1)(a) < 0 \Rightarrow a^2 - 4a < 0$$

$$\xrightarrow{\text{حل نامعادله}} a^2 - 4a = 0 \Rightarrow a(a-4) = 0$$



(غیرممکن) $x = 1 \Rightarrow 1 - a + a = 0$ ریشه‌ی مضاعف معادله‌ی $x^2 - ax + a = 0$ است. $\Rightarrow a$ مجموعه‌ی مقادیر $a = (0, 4)$

زنگی: با تابع چاق و لاغر مواجهیم و قرار است تابع، محور x ها را فقط

در یک نقطه قطع کند، بنابراین باید Δ عامل درجه‌ی دوم (چاق) را منفی کنیم:

$$\Delta = (-a)^2 - 4(1)(a) < 0 \Rightarrow a^2 - 4a < 0 \Rightarrow 0 < a < 4$$

راستی $x = 1$ نمی‌تواند ریشه‌ی معادله‌ی $x^2 - ax + a = 0$ باشد!

۴۸۹. **گزینه ۲** در این تست، نقاط $(-2, 5)$ و $(0, 5)$ با عرض‌های یکسان روی

سهمی قرار دارند پس: $x_S = \frac{0-2}{2} \Rightarrow x_S = -1$ معادله‌ی خط تقارن سهمی

این جور هم ببین: اگر نمودار به سهمی در نقاطی به طول α و β محور

طول‌ها رو قطع کرده باشه، محور تقارن سهمی (همان خط به معادله‌ی

$x = x_S = \frac{-b}{2a}$ به صورت $x = \frac{\alpha + \beta}{2}$ خواهد بود. زیرا وقتی سهمی در نقاطی

به طول α و β محور x ها رو قطع می‌کنه، به این معناست که دو نقطه با

عرض‌های صفر به صورت $(\alpha, 0)$ و $(\beta, 0)$ روی سهمی قرار دارن. گرفتید؟! **گزینه ۳**

۴۹۰. محل تلاقی سهمی با محور y ها همان b است:

$$S(-1, -4) \Rightarrow \begin{cases} x_S = \frac{-b}{2a} = -1 \Rightarrow \frac{-a}{2(2)} = -1 \Rightarrow a = 6 \\ y_S = \frac{-\Delta}{4a} = -4 \Rightarrow \frac{\Delta}{4(2)} = 4 \Rightarrow \Delta = 48 \\ \Rightarrow (6)^2 - 12b = 48 \Rightarrow 36 - 12b = 48 \\ \Rightarrow -12b = 12 \Rightarrow b = -1 \text{ (عرض از مبدأ)} \end{cases}$$

زنگی:

$$x_S = \frac{-b}{2a} = -1 \Rightarrow \frac{-a}{2(2)} = -1 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow y = 3x^2 + 6x + b$$

رأس سهمی یکی از نقاط خود سهمی بوده و مختصاتش در معادله‌ی آن صدق می‌کند: $-4 = 3(-1)^2 + 6(-1) + b \Rightarrow -4 = -3 + b \Rightarrow b = -1$

۴۹۱. **گزینه ۲** در سهمی اول داریم:

$$y_1 = -ax^2 + ax + 2 \xrightarrow{\text{طول رأس سهمی اول}} x = \frac{-a}{2(-a)} = \frac{1}{2}$$

$$y_1 = -a\left(\frac{1}{2}\right)^2 + a\left(\frac{1}{2}\right) + 2 = \frac{1}{4}a + 2 \Rightarrow S_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}a + 2\right)$$

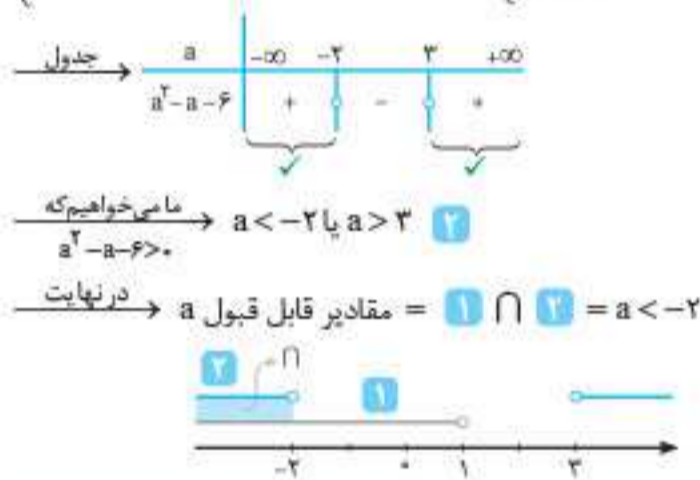
و برای سهمی دوم:

$$y_2 = 2bx^2 - bx - 1 \xrightarrow{\text{طول رأس سهمی دوم}} x = \frac{-(-b)}{2(2b)} = \frac{1}{4}$$

$$y_2 = 2b\left(\frac{1}{4}\right)^2 - b\left(\frac{1}{4}\right) - 1 = -\frac{1}{8}b - 1 \Rightarrow S_2\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}b - 1\right)$$

۴۹۹. **گزینه ۲** همواره بالای محور x ها بودن نمودار تابع درجه‌ی دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ به معنای همواره مثبت بودن عبارت درجه‌ی دوم بوده و شرطش این است که $a > 0$ و $\Delta < 0$ باشد پس:

$$\begin{cases} 1 - a > 0 \xrightarrow{+a} a < 1 & \text{①} \\ \Delta < 0 \Rightarrow (2\sqrt{6})^2 - 4(1-a)(-a) < 0 \\ \xrightarrow{\text{ساده کن}} 24 + 4a - 4a^2 < 0 \xrightarrow{+4} 6 + a - a^2 < 0 \\ \xrightarrow{\text{همه رو بر سمت راست}} a^2 - a - 6 > 0 \\ \xrightarrow{\text{حل نامعادله}} a^2 - a - 6 = 0 \\ \xrightarrow{\text{تجزیه کن}} (a-3)(a+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ \text{یا} \\ a = -2 \end{cases} \end{cases}$$



زرنگی: باید $1 - a > 0$ باشد پس $a < 1$ و بنابراین **گزینه‌ی «۲»** حذف می‌شود. از طرفی به ازای $a = 0$ ضابطه‌ی تابع برابر است با: $y = x^2 + 2\sqrt{6}x$ که نمودار تابع در دو نقطه محور x ها را قطع می‌کند: بنابراین **گزینه‌های «۱»** و **«۴»** حذف می‌شوند.

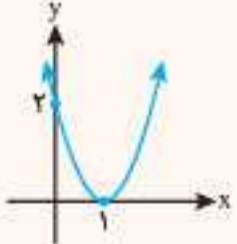
۵۰۰. **گزینه ۴** حل تست را با باز کردن اتحادها (به منظور تبدیل معادله‌ی سهمی به فرم شناخته‌شده‌ی $y = ax^2 + bx + c$) آغاز می‌کنیم:

$$y = (x+2)^2 + (x-4)^2 - 18 = x^2 + 4x + 4 + x^2 - 8x + 16 - 18 = 2x^2 - 4x + 2$$

$$\begin{cases} x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2(2)} = 1 \\ y_s = y(1) = 2(1)^2 - 4(1) + 2 = 0 \end{cases}$$

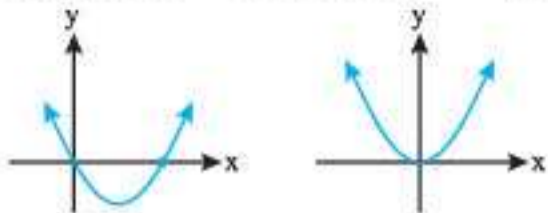
نقطه‌ای روی قسمت مثبت محور x ها است. $S(1, 0) \Rightarrow$ سهمی به معادله‌ی $y = 2x^2 - 4x + 2$ به دلیل مثبت بودن ضریب x^2 ($a = 2 > 0$) رو به بالا باز شده: بنابراین نقطه‌ی $S(1, 0)$ به منزله‌ی پایین‌ترین نقطه‌ی سهمی (یا همان مینیمم سهمی) خواهد بود.

زرنگی: $y = 2x^2 - 4x + 2 = 2(x^2 - 2x + 1) = 2(x-1)^2$ که نمودارش را بلدییم:



۵۰۱. **گزینه ۲** مطابق شکل‌های زیر برای این که نمودار تابع درجه‌ی دوم، دقیقاً از سه ناحیه‌ی مختصاتی عبور کند، باید دور ریشه‌ی هم‌علامت داشته باشد یا یکی از ریشه‌های آن برابر صفر باشد: بنابراین باید ضرب ریشه‌های آن، بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد.

برای این که سهمی داده‌شده از ربع سوم عبور نکند، باید به یکی از دو حالت زیر باشد:



با توجه به شکل‌های رسم‌شده، ضریب x^2 باید مثبت و ریشه‌ی دوم معادله‌ی $y = 0$ باید نامنفی باشد: بنابراین داریم:

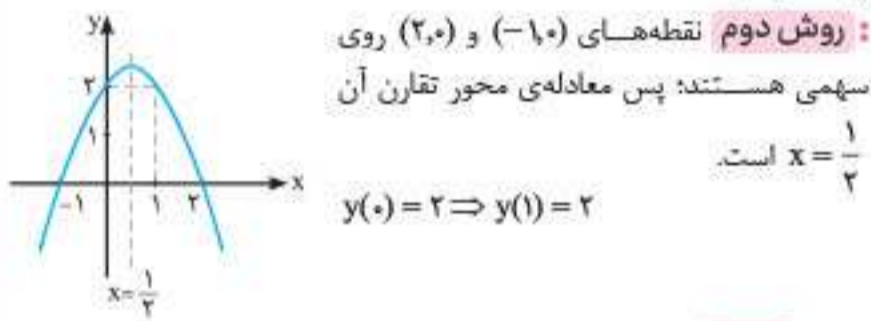
$$\begin{cases} a > 0 & \text{①} \\ -\frac{2+2a}{a} > 0 \xrightarrow{\text{①}} 2+2a < 0 \Rightarrow a < -\frac{3}{2} & \text{②} \end{cases} \Rightarrow \text{①} \cap \text{②} = \emptyset$$

پس به ازای هیچ مقداری از a ، نمودار سهمی داده‌شده نمی‌تواند از ربع سوم عبور نکند.

۴۹۶. **گزینه ۴** - روش اول چون سهمی محور x ها را در دو نقطه به طول‌های -1 و 2 قطع کرده‌است، پس می‌توان معادله‌ی آن را به صورت $y = a(x+1)(x-2)$ در نظر گرفت. از طرف دیگر نقطه‌ی $(0, 2)$ روی سهمی است پس:

$$2 = a(0+1)(0-2) \Rightarrow a = -1$$

بنابراین معادله‌ی سهمی $y = -(x+1)(x-2)$ است و ... از بین گزینه‌ها فقط نقطه‌ی $(1, 2)$ روی آن قرار دارد. (سایر گزینه‌ها رو خودتون چک کنید!)



۴۹۷. **گزینه ۱**

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow \begin{cases} A(-2, 5) \in f \Rightarrow a(-2)^2 + b(-2) + c = 5 \\ B(0, 5) \in f \Rightarrow a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = 5 \Rightarrow c = 5 \\ C(1, 11) \in f \Rightarrow a + b + c = 11 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4a - 2b + 5 = 5 \\ a + b + 5 = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2a \\ a + 2a = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \end{cases}$$

$\Rightarrow f(x) = 2x^2 + 4x + 5 \Rightarrow f(-1) = 2 - 4 + 5 = 3$ پس این سهمی از نقطه‌ی $(-1, 3)$ می‌گذرد.

۴۹۸. **گزینه ۱** ابتدا ضابطه‌ی تابع داده‌شده را با باز کردن اتحادها ساده می‌کنیم تا به فرمی شناخته‌شده برسیم:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - (x-1)^2 + (x+2)^2 + m \\ &= x^2 - (x^2 - 2x + 1) + (x^2 + 4x + 4) + m \\ &= x^2 - x^2 + 2x - 1 + x^2 + 4x + 4 + m \Rightarrow f(x) = x^2 + 6x + 3 + m \end{aligned}$$

حال به‌خوبی می‌دانیم که سهمی به معادله‌ی $y = x^2 + 6x + 3 + m$ به دلیل $a = 1 > 0$ دارای کمترین مقدار بوده و این کمترین مقدار به ازای $x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2} = -3$ رخ می‌دهد:

$$y_{\min} = y(-3) = (-3)^2 + 6(-3) + 3 + m = 9 - 18 + 3 + m = -6 + m = 7 \Rightarrow m = 13$$

(البته از دستور $y_{\min} = y_s = \frac{-\Delta}{4a}$ هم می‌تونستیم بریم که احتمالاً طولانی‌تر بود!)



$$\Rightarrow \begin{cases} b = -6 \xrightarrow{\text{در این صورت}} S\left(\frac{b}{4}, \frac{b^2}{4} - 3\right) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \checkmark \\ \text{یا} \\ b = 4 \xrightarrow{\text{در این صورت}} S\left(\frac{b}{4}, \frac{b^2}{4} - 3\right) = \left(\frac{1}{2}, -1\right) \times \\ \text{ناحیه ۲} \end{cases}$$

نقاط روی خط $y = -x$ اگر در ناحیه دوم باشند، دارای طول منفی و عرض مثبتند.

زنگی: رأس سهمی در ناحیه دوم است پس طول منفی دارد:

$$y = -2x^2 + bx - 3 \xrightarrow{\text{طول رأس}} -\frac{b}{2a} = \frac{-b}{-4} < 0$$

یعنی b منفی است! هر گزینه‌ای که $b > 0$ دارد حذف می‌شود: یعنی همه به جز گزینه‌ی «۲»!

۵.۵ (گزینه ۳): می‌دانیم شرط آن که خطی بر نمودار تابعی مماس باشد آن است که معادله‌ی تلاقی آن‌ها دارای ریشه‌ی مضاعف باشد، پس:

$$\begin{cases} y = 2x^2 + (2m-1)x + m + \frac{4}{3} \xrightarrow{\text{تلاقی}} \\ y = -x \end{cases}$$

$$2x^2 + (2m-1)x + m + \frac{4}{3} = -x \xrightarrow{\text{ساده کن}}$$

$$2x^2 + 2mx + m + \frac{4}{3} = 0 \xrightarrow{\text{شرط ریشه‌ی مضاعف}} \Delta = 0$$

$$\Rightarrow 4m^2 - 4 \times 2 \left(m + \frac{4}{3}\right) = 0 \xrightarrow{+4} m^2 - 2m - 4 = 0$$

$$\Rightarrow (m-4)(m+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = -1 \end{cases}$$

چون در ربع دوم هستیم، ریشه باید منفی باشد: پس $x = \frac{-b}{2a} < 0$ است: در نتیجه:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2m}{6} > 0 \Rightarrow m = 4$$

$$y = 2x^2 + (2m-1)x + m + \frac{4}{3} \xrightarrow{m=4} y = 2x^2 + 7x + 16$$

$$x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-7}{2 \times 2} = \frac{-7}{4}$$

۵.۶ (گزینه ۴)

راهنما: در سهمی‌هایی به معادله‌ی $y = a(x-h)^2 + k$ ، ریشه‌ی پیرانتز (یعنی $x = h$) همان محور تقارن سهمی است و سهمی در نقطه‌ای به عرض $y = ah^2 + k$ محور y ‌ها را قطع می‌کند.

در این سؤال با توجه به سهمی، خط $x = 2$ محور تقارن آن بوده و $y(0) = -1$ است، بنابراین:

$$y = -2(x+2m-5)^2 + m + 2n$$

$$\begin{cases} \text{ریشه‌ی پیرانتز} = x + 2m - 5 = 0 \Rightarrow x = -2m + 5 = 2 \Rightarrow m = 1 \\ y(0) = -2(-2)^2 + m + 2n = -1 \Rightarrow -8 + 1 + 2n = -1 \\ \Rightarrow 2n = 6 \Rightarrow n = 3 \end{cases}$$

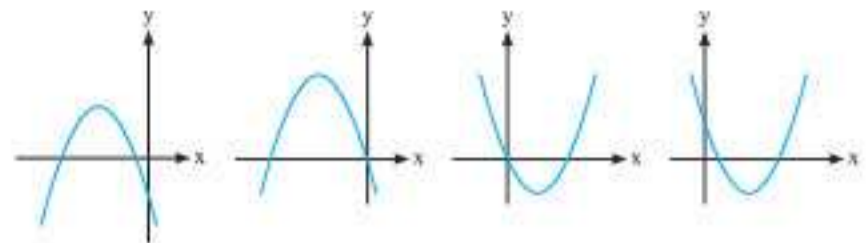
حال با توجه به مقادیر m و n داریم:

$$y = mx^2 + nx + 1 = x^2 + 3x + 1$$

$$\begin{cases} x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-3}{2(1)} = \frac{-3}{2} \\ y_s = y\left(\frac{-3}{2}\right) = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 1 = \frac{-9}{4} + 1 = \frac{-5}{4} \end{cases} \Rightarrow S\left(\frac{-3}{2}, \frac{-5}{4}\right)$$

۵.۷ (گزینه ۴): خط موردنظر را به صورت $y = mx + h$ در نظر می‌گیریم. با توجه به فرضیات تست داریم:

$$h = -1 \Rightarrow y = mx - 1 \xrightarrow{\text{خط (1,0)}} 0 = m \times 1 - 1 \Rightarrow m = 1$$



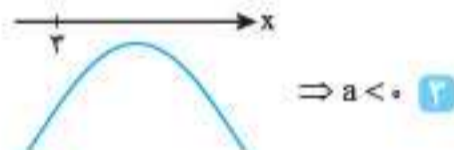
$$\begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow (m+4)^2 - 4m(2-m) > 0 \\ \Rightarrow m^2 + 8m + 16 - 8m + 4m^2 > 0 \\ \Rightarrow 5m^2 + 16 > 0 \text{ همواره درست است} \\ P \geq 0 \Rightarrow \frac{2-m}{m} \geq 0 \Rightarrow 0 < m \leq 2 \end{cases}$$

۵.۲ (گزینه ۳)

$$\frac{b^2}{4} < ac \Rightarrow b^2 < 4ac \Rightarrow b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow \Delta < 0 \quad 1$$

$$b + \frac{c}{3} < -3a \Rightarrow 3b + c < -9a \Rightarrow \frac{9a + 3b + c}{f(3)} < 0 \Rightarrow f(3) < 0 \quad 2$$

با توجه به ۱ و ۲ نتیجه می‌گیریم که نمودار تابع f باید زیر محور x ‌ها باشد، به این صورت:



بنابراین:

$$f(0) < 0 \Rightarrow c < 0 \quad 1$$

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \rightarrow ac > 0$$

زنگی:

$$b = 0 \xrightarrow{\text{در شرطها}} 0 < ac, \frac{c}{3} < -3a$$

در این دو فرض $a = -1$ و $c = -3$ صدق می‌کند، **ببین:**
 $ac = (-1)(-3) > 0, \frac{c}{3} < -3a \Rightarrow \frac{-3}{3} < -3(-1) \Rightarrow -1 < 3 \checkmark$
 با توجه به این اعداد فقط **گزینه ۲** با اعداد $a = -1, b = 0, c = -3$ هماهنگه!

۵.۲ (گزینه ۴): وقتی خطی یک سهمی را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند، یعنی محور تقارن آن است:

$$y = (m-2)x^2 - 3x + m^2 + 1$$

$$\xrightarrow{\text{محور تقارن}} x = x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{3}{2(m-2)} = \frac{2}{3}$$

$$4(m-2) = 9 \xrightarrow{+4} m-2 = \frac{9}{4} \xrightarrow{+2} m = \frac{9}{4} + 2 = \frac{17}{4}$$

از معادله‌ی سهمی $y = (m-2)x^2 - 3x + m^2 + 1$ پیدا است که محل تلاقی سهمی با محور y ‌ها، $c = m^2 + 1$ است: $c = m^2 + 1 = \left(\frac{17}{4}\right)^2 + 1 = \frac{289}{16} + 1 = \frac{305}{16}$

۵.۴ (گزینه ۲): مختصات رأس سهمی را به دست آورده و در معادله‌ی خط $y = -x$ صدق می‌دهیم:

$$y = -2x^2 + bx - 3 \xrightarrow{\text{طول}} x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-b}{2(-2)} = \frac{b}{4}$$

$$\xrightarrow{\text{در معادله‌ی سهمی قرار بده}} y_s = y\left(\frac{b}{4}\right) = -2\left(\frac{b}{4}\right)^2 + b\left(\frac{b}{4}\right) - 3$$

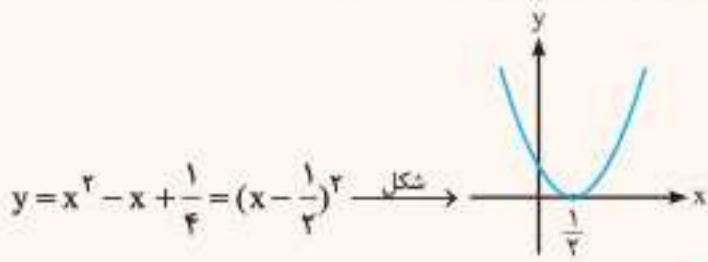
$$= -2 \times \frac{b^2}{16} + \frac{b^2}{4} - 3 = -\frac{b^2}{8} + \frac{b^2}{4} - 3 = \frac{b^2}{8} - 3$$

حالا باید رابطه‌ی $y = -x$ یا $y + x = 0$ را با مختصات $S\left(\frac{b}{4}, \frac{b^2}{8} - 3\right)$ برقرار کنیم:

$$\frac{b^2}{8} - 3 + \frac{b}{4} = 0 \xrightarrow{\times 8} b^2 + 2b - 24 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{تجزیه کن}} (b+6)(b-4) = 0 \Rightarrow b+6=0 \text{ یا } b-4=0$$

زنگی: این جوړی فرض کن: $m = 0$



۵۱۰. گزینه ۲ ضابطه‌ی سهمی با رأس (m, h) عبارت است از:

$$y = a(x - m)^2 + h$$

در نتیجه ضابطه‌ی سهمی مورد سؤال $y = a(x + 1)^2 + 9$ است.

چون سهمی از نقطه‌ی $(3, 1)$ عبور می‌کند، پس این نقطه در ضابطه‌ی آن صدق می‌کند، پس داریم:

$$1 = a(3 + 1)^2 + 9 \Rightarrow -8 = 16a \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

ضابطه‌ی سهمی $y = -\frac{1}{2}(x + 1)^2 + 9$ و نقطه‌ی $(5, -9)$ در آن صدق می‌کند.

۵۱۱. گزینه ۱ رأس سهمی به معادله‌ی $y = ax^2 + bx + c$ زمانی روی محور y ها

واقع می‌شود که $b = 0$ باشد زیرا وقتی $x_S = -\frac{b}{2a} = 0$ می‌شود که $b = 0$ شده باشد؛ پس:

$$y = -3x^2 + (2m - 1)x + 5 \xrightarrow{b=0} 2m - 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y = -3x^2 + 5$$

حالا باید سهمی به معادله‌ی $y = -3x^2 + 5$ را با خط به معادله‌ی $y - 2 = 0$

یا همان $y = 2$ تلاقی دهیم:

$$\begin{cases} y = -3x^2 + 5 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow -3x^2 + 5 = 2 \Rightarrow -3x^2 = -3$$

$$\xrightarrow{+(-2)} x^2 = 1 \xrightarrow{\text{جذریگیر}} x = \pm 1$$

۵۱۲. گزینه ۴ برای محاسبه‌ی مساحت مثلث موردنظر، ابتدا باید قاعده و سپس

ارتفاع آن را به دست آوریم. قاعده همان فاصله‌ی بین دو ریشه و ارتفاع هم قدر مطلق عرض رأس سهمی است. مجموع ضرایب معادله‌ی $2x^2 - mx + m - 2 = 0$ برابر صفر است، پس ریشه‌های آن عبارت‌اند از:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{c}{a} = \frac{m-2}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{قاعده‌ی مثلث} = |x_2 - x_1| = \left| \frac{m-4}{2} \right|$$

$$\text{عرض رأس سهمی} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(-m)^2 - 4 \times 2(m-2)}{4 \times 2}$$

$$= -\frac{m^2 - 8m + 16}{8} = \frac{(m-4)^2}{-8}$$

$$\text{ارتفاع} = \left| \frac{(m-4)^2}{-8} \right| = \frac{(m-4)^2}{8}$$

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2} \times \frac{(m-4)^2}{8} \times \frac{|m-4|}{2} = \frac{|m-4|^3}{32} = 2 \Rightarrow |m-4|^3 = 64$$

$$\Rightarrow |m-4| = 4 \Rightarrow m-4 = \pm 4 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 8 \end{cases} \xrightarrow{m > 0} m = 8$$

۵۱۳. گزینه ۴ تست تلاش می‌کند بگوید تابع درجه‌ی دوم $y = ax^2 - x + \frac{1}{4}$

حداقل مقداری برابر $\frac{1}{4}$ دارد: زیرا $y \geq \frac{1}{4}$ به معنای $y_{\min} = \frac{1}{4}$ است.

بنابراین اولاً باید $a > 0$ باشد تا تابع بتواند دارای حداقل مقدار شود (حذف

گزینه‌های «۱» و «۲»، ثانیاً باید این مقدار حداقل (یعنی $\frac{1}{4}$) برابر $\frac{-\Delta}{4a}$ باشد:

$$\Delta = (-1)^2 - 4(a)\left(\frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow y = x - 1 \xrightarrow{\text{تلاقی با سهمی}} x - 1 = -x^2 + 2x + 1$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ و } 2 \xrightarrow{\text{در خط}} \begin{cases} A(-1, -2) \\ B(2, 1) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{مسطب پاره خط } AB} M = \frac{A+B}{2} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$y = -x^2 + 2x + 1 \Rightarrow x_S = \frac{-2}{2(-1)} = 1 \Rightarrow y_S = -1 + 2 + 1 = 2 \Rightarrow S(1, 2)$$

$$\Rightarrow MS = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(2 + \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{26}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{26}$$

۵۰۸. گزینه ۳ معادله‌ی محور تقارن هر سهمی، خط $x = -\frac{b}{2a}$ است؛ پس:

$$\begin{cases} y = x^2 + ax - 2 \xrightarrow{\text{محور تقارن}} x = \frac{-a}{2 \times 1} = -\frac{a}{2} \\ y = -x^2 - 2x + b \xrightarrow{\text{محور تقارن}} x = \frac{-(-2)}{2(-1)} = -1 \end{cases}$$

$$\text{طبق فرض تست، معادله‌ی این دو خط یکسان است، بنابراین داریم:}$$

$$-\frac{a}{2} = -1 \Rightarrow a = 2$$

از طرفی از فرض دوم سؤال متوجه می‌شویم که این دو سهمی در دو نقطه، مشترک هستند که عرض این دو نقطه برابر و برابر ۱ است، پس برای سهمی اول داریم:

$$\xrightarrow{y=1} y = x^2 + 2x - 2 = 1 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

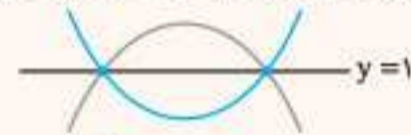
$$\Rightarrow (x-1)(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases} \xrightarrow{\text{نقاط تلاقی}} \begin{cases} A(1, 1) \\ B(-3, 1) \end{cases}$$

این دو نقطه باید در معادله‌ی سهمی دوم هم صدق کنند، بنابراین داریم:

$$y = -x^2 - 2x + b \xrightarrow{A(1,1)} 1 = -1 - 2 + b \Rightarrow b = 4$$

$$\Rightarrow a \times b = (2)(4) = 8$$

زنگی: یکی از سهمی‌ها رو به بالا و دیگری رو به پایین است:



$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-a}{2} = \frac{-(-2)}{2(-1)} \Rightarrow a = 2$$

$y = 1$ در هر دو سهمی صدق می‌کند:

$$\xrightarrow{a=2} \begin{cases} y = x^2 + 2x - 2 = 1 \\ y = -x^2 - 2x + b = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع کن}} b - 2 = 2 \Rightarrow b = 4$$

$$\Rightarrow a \times b = 8$$

۵۰۹. گزینه ۳ می‌دانیم که سهمی به معادله‌ی $y = ax^2 + bx + c$ با شرط

$\Delta = 0$ و $x_S = \frac{-b}{2a} > 0$ در نقطه‌ای به طول مثبت و با شرط $\Delta = 0$

در نقطه‌ای به طول منفی بر محور طول‌ها مماس می‌شود.

همچنین این سهمی با شرط $\Delta < 0$ و $a < 0$ همواره پایین‌تر از محور طول‌ها و

با شرط $\Delta < 0$ و $a > 0$ همواره بالاتر از محور طول‌ها قرار می‌گیرد. (شاید دیگه

نیازی به گفتن نباشه که با شرط $\Delta > 0$ سهمی محور طول‌ها را در دو نقطه قطع

کرده و از اون عبور می‌کنه) حال باید ببینیم سهمی داده‌شده کدام شرط را دارد:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2m^2 + 1)^2 - 4(1)(m^2 + m^2 + \frac{1}{4})$$

$$= 4m^4 + 4m^2 + 1 - 4m^2 - 4m^2 - 1 = 0$$

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{2m^2 + 1}{2} > 0$$

می‌بینیم که شرط $\Delta = 0$ و $x_S > 0$ برقرار بوده و **گزینه‌ی «۲»** درست است.



$$y = f(2x-1) = (2x-1)^2 + 2(2x-1) + 4$$

ساده کن $\Rightarrow y = 4x^2 - 4x + 1 + 4x - 2 + 4 \Rightarrow y = 4x^2 + 3$

$$\Rightarrow x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2(4)} = 0, y_s = y(0) = 4(0)^2 + 3 = 3 \Rightarrow S(0, 3)$$

زنگی:

$$S(-1, 3) \xrightarrow[\text{یک واحد به راست}]{x \rightarrow (x-1)} S_1(0, 3) \xrightarrow[\text{طول ها بر 2 تقسیم می شوند}]{x \rightarrow 2x} S_2(0, 3)$$

پس مختصات رأس سهمی تابع $f(2x-1)$ به صورت $(0, 3)$ خواهد بود.

۵۱۷ گزینه ۲ همه‌ی گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

با کمی دقت به شکل متوجه می‌شویم که:

الف سهمی رو به بالاست، پس $a > 0$ است.

ب سهمی محور y ها را زیر محور x ها قطع کرده است، پس $c < 0$ است.

پ طول رأس سهمی منفی است، پس:

$$\frac{-b}{2a} < 0 \Rightarrow a > 0 \Rightarrow b > 0$$

در نتیجه داریم:

گزینه ۱ حذف می‌شود. $a > 0, b > 0, c < 0 \Rightarrow abc < 0$

از روی نمودار تابع، کاملاً مشخص است که تابع f دارای دو صفر مختلف‌العلامت است که قدرمطلق ریشه‌ی منفی از ریشه‌ی مثبت بزرگ‌تر است: پس:

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta < 0 \\ P = \alpha\beta < 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2PS < 0$$

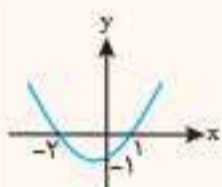
گزینه ۲ درست است.

$\Delta > 0 \Rightarrow b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow b^2 > 4ac$

گزینه ۳ حذف می‌شود. $\frac{b^2}{4} > ac$

می‌دانیم که رأس سهمی، در وسط صفرهای تابع قرار دارد: بنابراین:

$$\begin{cases} x_s = \frac{\alpha + \beta}{2} \\ y_s = \frac{-\Delta}{4a} \end{cases} \Rightarrow f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \frac{-\Delta}{4a} \Rightarrow \text{گزینه ۴ حذف می‌شود}$$



زنگی: این جوری فرض کن:

$$\alpha = 1, \beta = -2 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 1 - 4 = -3 < 0 \quad \checkmark$$

$$\text{معادله سهمی} \rightarrow y = a(x-1)(x+2)$$

$$\text{صدق} \rightarrow y = \frac{1}{3}(x-1)(x+2) \Rightarrow a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{3}, c = -1$$

این هم برای بررسی بقیه‌ی گزینه‌ها!!

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{S}{P} \quad \text{گزینه ۲}$$

برای معادله‌ی $2x^2 - 9x - 1 = 0$ داریم:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{9}{2} \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{\frac{9}{2}}{-\frac{1}{2}} = -9$$

۵۱۹ گزینه ۴ در معادله‌ی داده‌شده داریم:

$$2x^2 - 4x - 2 = 0 \xrightarrow{a=2, b=-4, c=-2} \begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{4}{2} \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{2}{2} \end{cases}$$

$$\frac{-\Delta}{4a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{a-1}}{2a} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین کن}} \frac{1}{3}a - 2 = 4a$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}a - 4a = 2 \Rightarrow \frac{4}{3}a = 2 \xrightarrow{\times \frac{3}{4}} a = 2 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$$

۵۱۴ گزینه ۴ نقطه‌ی مشترک نداشتن بین سهمی و خط به معنای عدم وجود ریشه در معادله‌ی تلاقی آن دو است:

$$\begin{cases} y = (2x+1)(x+8) \\ y = mx \end{cases} \xrightarrow{\text{معادله‌ی تلاقی}} (2x+1)(x+8) = mx$$

$$\text{ساده و مرتب کن} \rightarrow 2x^2 + 17x + 8 - mx = 0 \Rightarrow 2x^2 + (17-m)x + 8 = 0$$

$$\text{حالا باید این معادله رو منفی کنیم} \rightarrow \Delta = (17-m)^2 - 4(2)(8) < 0$$

$$\Rightarrow (17-m)^2 - 64 < 0 \xrightarrow{\text{حل نامعادله}} (17-m)^2 < 64$$

$$\text{چتر بگیر} \rightarrow |17-m| < 8 \Rightarrow -8 < 17-m < 8$$

$$\xrightarrow{\times (-1)} -17 > -m > -9 \xrightarrow{\times (-1)} 9 < m < 25$$

۵۱۵ گزینه ۲ معادله‌ی $ax^2 - (a+2)x = 0$ دو ریشه به صورت $x_1 = 0$ و

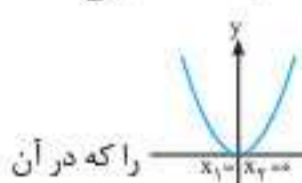
$x_2 = \frac{a+2}{a}$ دارد. حال با اندکی تجسس نموداری درمی‌یابیم برای این که

سهمی نتواند وارد ناحیه‌ی سوم شود، باید به شکل x باشد. یعنی

اولاً دهانه‌ی سهمی باید رو به بالا باشد ($a > 0$)، ثانیاً ریشه‌ی $x_2 = \frac{a+2}{a}$ معادله‌ی مربوطه مثبت باشد:

$$x_2 = \frac{a+2}{a} > 0 \xrightarrow{\text{با توجه به این که } a > 0} a+2 > 0 \Rightarrow a > -2$$

$$\text{با اعمال شرط } a > 0 \rightarrow \text{حدود } a > 0$$



کمی اضافه‌تر: اگر می‌خواهید بدانید چرا حالت x را که در آن

نیز سهمی وارد ناحیه‌ی سوم نشده است، در نظر نگرفتیم، باید بگوییم که این حالت برای سهمی به معادله‌ی $y = ax^2 - (a+2)x$ غیرممکن است: زیرا این

حالت زمانی رخ می‌دهد که $x_2 = \frac{a+2}{a} = 0$ شود و آن نیز به معنای $a = -2$

بوده و در این حالت ضریب x^2 منفی شده و سهمی به شکل $y = -2x^2$ تبدیل می‌شود.



زنگی: این جوری فرض کن: $a = -2$



پس گزینه‌های «۱»، «۲» و «۴» حذف می‌شود.

۵۱۶ گزینه ۴ مختصات رأس نمودار تابع در ضابطه‌ی آن صدق می‌کند:

$$\text{بنابراین: } f(x) = x^2 + 2x - c \xrightarrow{f(-1)=3} 3 = (-1)^2 + 2(-1) - c$$

$$\Rightarrow 3 = -1 - c \Rightarrow c = -4$$

حالا باید با توجه به ضابطه‌ی تابع $f(x) = x^2 + 2x + 4$ ، ضابطه‌ی تابع $y = f(2x-1)$ را (با جایگزین کردن $(2x-1)$ به جای x ها) به دست آورده و

بعد مختصات رأس نمودار آن را به دست آوریم:

۵۲۴. **گزینه ۱** از ویژگی «حاصل ضرب صفر» ($AB=0 \Rightarrow A=0$ یا $B=0$) استفاده کرده و داریم:

$$(2x+1)(3x^2-7x+1)=0 \Rightarrow 2x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$$
 (یک‌ریشه)

$$3x^2-7x+1=0 \xrightarrow{\text{بفرض حل}} P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{1}{3}$$
 یا
 (تضمین وجود دو ریشه $\Delta = 49 - 12 > 0 \Rightarrow$)

$$\Rightarrow \text{حاصل ضرب سه ریشه} = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{6}$$

 به نظر شما مجموع ریشه‌های معادله چقدر است؟

۵۲۵. **گزینه ۴** با توجه به رابطه‌ی بین ریشه‌های α و β ، داریم:

$$x^2 + 2(a+1)x + 2a - 1 = 0 \xrightarrow{\text{رابطه‌ی ریشه‌ها}} \begin{cases} S = \alpha + \beta = -2(a+1) \\ P = \alpha\beta = 2a - 1 \end{cases}$$

$$\alpha, a, \beta \xrightarrow{\text{شرط تشکیل دنباله‌ی هندسی}} a^2 = \alpha\beta \Rightarrow a^2 = 2a - 1$$

$$\Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow (a-1)^2 = 0 \Rightarrow a = 1$$

۵۲۶. **گزینه ۴** هدف سؤال، محاسبه‌ی مقدار $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ است.

$$2x^2 - (m+1)x + \frac{1}{8} = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{m+1}{2} \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{1}{16} \end{cases}$$

$$\text{حالا: } \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{S + 2\sqrt{P}}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲ برسیم}} \sqrt{\frac{m+1}{2} + \frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow \frac{m+1}{2} + \frac{1}{2} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{m+1}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow m+1=7 \Rightarrow m=6$$

۵۲۷. **گزینه ۲**

راهبرد: هرگاه در معادله‌ی درجه‌ی دو، دلتای معادله، مربع کامل باشد یا به عبارتی دارای جذر کامل باشد، لازم نیست از رابطه‌ی بین ریشه‌ها استفاده شود. در این حالت ریشه‌های معادله را حساب کرده، سپس خواسته‌ی سؤال را محاسبه کنید.

$$\text{الان در چنین وضعی هستیم: } \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = \frac{-c}{a} = 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{با شرط } \alpha < \beta} \alpha + c = b$$

$$\Rightarrow 5\alpha^2 + 7\beta^2 = 5(-1)^2 + 7(2)^2 = 5 + 28 = 33$$

۵۲۸. **گزینه ۳** ریشه‌های معادله را α و β می‌نامیم و داریم:

$$\alpha = \beta + 2 \xrightarrow{\text{به طرفین اضافه کن}} \alpha + \beta = 2\beta + 2$$

$$\xrightarrow{\text{از روی ضرایب معادله}} 4 = 2\beta + 2 \Rightarrow 2\beta = 2 \Rightarrow \beta = 1$$

$$\alpha + \beta = \frac{b}{a} = 4$$

$$\xrightarrow{\text{در معادله قرار بده}} 2(1)^2 - 8(1) + m = 0 \Rightarrow m = 6$$

$$|x_1 - x_2| = 2 \Rightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = 2 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \Delta = 4a^2$$

$$\Rightarrow 64 - 8m = 16 \Rightarrow 8m = 48 \Rightarrow m = 6$$

۵۲۹. **گزینه ۱** در این مسئله دلتای معادله جذر کامل دارد و ریشه‌ها به راحتی قابل محاسبه‌اند. **نگاه کنید:**

$$x^2 - 20x + 64 = 0 \xrightarrow{\text{تجزیه کن}} (x-16)(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 16 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{16} + \sqrt{4} = 4 + 2 = 6$$

$$\xrightarrow{\text{خواسته‌ی تست}} x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P = \frac{16}{9} - 2\left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{16}{9} + \frac{4}{3} = \frac{16+12}{9} = \frac{28}{9}$$

۵۳۰. **گزینه ۲** در اینجا ابتدا معادله‌ی داده‌شده را به صورت زیر مرتب می‌کنیم:

$$(3m-1)x^2 - 2x + (1-m^2) = 0$$

بنابراین:

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{2}{3m-1} = \frac{1}{4} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 3m-1=8$$

$$\Rightarrow m=3 \xrightarrow{\text{در معادله بذار}} 8x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = P = \frac{c}{a} = \frac{-8}{8} = -1$$

۵۳۱. **گزینه ۴** اولاً برای این که معادله دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز باشد، باید $\Delta > 0$ یعنی:

$$\Delta = \left(-\frac{1}{4}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{4}\right)(m) > 0 \Rightarrow \frac{1}{16} - 2m > 0 \xrightarrow{+2m} 2m < \frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow m < \frac{1}{32}$$

ثانیاً برای این که حاصل ضرب این دو ریشه برابر ۴ باشد، باید:

$$P = \frac{c}{a} = \frac{m}{\frac{1}{4}} = 4 \Rightarrow 2m = 4 \Rightarrow m = 2$$

اما می‌بینیم که این جواب در شرط $m < \frac{1}{32}$ صدق نمی‌کند: پس هیچ مقداری برای m نداریم.

زرنگی: $P = \frac{c}{a} = \frac{m}{\frac{1}{4}} = 4 \Rightarrow 2m = 4 \Rightarrow m = 2$ در معادله

$\frac{x^2}{2} - \frac{x}{4} + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = \frac{1}{16} - 4 < 0$ ریشه ندارد $m = 2$ *

۵۳۲. **گزینه ۲** طبق مطالب گفته‌شده در درسامه داریم:

$$|x' - x''| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{(-4)^2 - 4 \times 1 \times 1}}{|1|} = \sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$$

زرنگی: معادله را حل کنید:

$$x^2 - 4x + 1 = 0 \xrightarrow{\Delta=12} x = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$|x' - x''| = 2\sqrt{3}$$

۵۳۳. **گزینه ۳** شکی نیست که جواب معادله در معادله صدق می‌کند. از اینجا مقدار m به دست می‌آید:

$$-3x^2 + (m+1)x + m = 0 \xrightarrow{x=1} -3 + m + 1 + m = 0$$

$$\Rightarrow 2m = 2 \Rightarrow m = 1 \xrightarrow{\text{در معادله بذار}} -3x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر است}} \alpha = 1 \text{ و } \beta = \frac{c}{a} = \frac{1}{-3}$$

زرنگی:

$$\xrightarrow{\alpha=1} \text{مجموع ضرایب} = 0 \Rightarrow -3 + m + 1 + m = 0 \Rightarrow 2m = 2$$

$$\Rightarrow m = 1 \Rightarrow \text{ریشه‌ی دیگر} = \frac{c}{a} = \frac{m}{-3} = \frac{1}{-3}$$



۵۲۶. **گزینه ۴** با توجه به ضرایب معادله، حاصل جمع ریشه‌ها قابل محاسبه است: کار را با همین شروع می‌کنیم:

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-2}{1} \Rightarrow \alpha + \beta = -2 \Rightarrow \alpha = -\beta - 2$$

حالا در رابطه‌ی داده‌شده به جای α قرار می‌دهیم $\alpha = -\beta - 2$:

$$\alpha^2 + 2\beta^2 + 4\alpha\beta + 4 = 0 \Rightarrow (-\beta - 2)^2 + 2\beta^2 + 4(-\beta - 2)\beta + 4 = 0$$

$$\Rightarrow \beta^2 + 4\beta + 4 + 2\beta^2 - 4\beta^2 - 8\beta + 4 = 0 \Rightarrow -4\beta + 8 = 0$$

$$\Rightarrow 4\beta = 8 \Rightarrow \beta = 2 \Rightarrow \alpha = -2 - 2 = -4 \Rightarrow \alpha\beta = -8$$

۵۲۷. **گزینه ۳** برای ریشه‌های α و β ، جذر معکوس ریشه‌ها، یعنی $\sqrt{\frac{1}{\beta}} = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ و $\sqrt{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ پس:

$$\text{مجموع جذر ریشه‌ها} = A = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}}$$

با توجه به ضرایب معادله $S=4, P=2$:

$$A = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{P}}}{\sqrt{P}} = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{4+2\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{\frac{4}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

(روابط $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{S+2\sqrt{P}}$ و $|\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}| = \sqrt{S-2\sqrt{P}}$ را بین ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم به خاطر بسپارید)

۵۲۸. **گزینه ۲** با کمی توجه به رابطه‌ی داده‌شده و مقایسه‌ی آن با معادله‌ی درجه‌ی دوم درمی‌یابیم که برقراری رابطه‌ی $c+2b+4a=0$ بین ضرایب معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ به معنای این است که $x=2$ یکی از ریشه‌های آن است: زیرا با جایگزین کردن $x=2$ در معادله دقیقاً به رابطه‌ی $4a+2b+c=0$ می‌رسیم. حال اگر ریشه‌ی دیگر معادله را β بنامیم و از رابطه‌ی حاصل ضرب ریشه‌ها $(P = \alpha\beta = \frac{c}{a})$ استفاده کنیم، داریم:

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} \xrightarrow{\alpha=2} 2\beta = \frac{c}{a} \Rightarrow \beta = \frac{c}{2a}$$

زنگی: $c+2b+4a=0$ → $c=-2b-4a$ → $c=-2, b=-1, a=1$

ریشه‌ها: $x^2 - x - 2 = 0$ → $1, 2$

گزینه‌ها با اعداد انتخابی ما به ترتیب می‌شوند: $1, -1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ و 1

۵۲۹. **گزینه ۱**

$$3x^2 + (2m-1)x + 2 - m = 0$$

پس $m = \frac{1}{3}$ قابل قبول است.

$$\Delta = (2m-1)^2 - 4 \times 3(2-m) \xrightarrow{m=\frac{1}{3}} \Delta = 9 - 24 < 0$$

۵۳۰. **گزینه ۱** در معادله‌ی درجه‌ی دوم داده‌شده ضرایب a و b معلوم بوده و با توجه به رابطه‌ی حاصل جمع ریشه‌ها داریم:

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 5 \xrightarrow{\alpha=2} 2 + \beta = 5 \Rightarrow \beta = 3$$

بنابراین $\alpha = 2$ و $\beta = 3$ ریشه‌های این معادله بوده و...

$$\alpha^2 + \beta^2 = (2)^2 + (3)^2 = 4 + 9 = 13$$

همان‌طور که می‌بینید بدون توجه به مقدار m توانستیم سؤال رو حل کنیم!

۵۳۰. **گزینه ۴** اگر ریشه‌ها را α و β بنامیم، آن‌گاه:

$$\text{مجموع معکوس ریشه‌ها} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} = \frac{S}{P} = \frac{-b}{\frac{c}{a}} = \frac{-b}{\frac{c}{a}}$$

$$= \frac{-(\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1)}{-(\sqrt{2} + 1)} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} \times \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1}$$

$$= \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} = \frac{\sqrt{6} + 2 + \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{2} - 1}{2 - 1} = \sqrt{6} - \sqrt{3} + 1$$

۵۳۱. **گزینه ۱** معکوس بودن ریشه‌های معادله، یعنی $\alpha = \frac{1}{\beta}$ یا $\alpha\beta = 1$ است: پس:

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{3-a}{a-1} = 1 \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 3-a = a-1$$

$$\Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2$$

به دلیل وجود **گزینه‌ی «۴»**، حالا باید ببینیم که به ازای $a=2$ معادله جواب حقیقی دارد یا خیر:

$$(a-1)x^2 + 2ax + 3 - a = 0 \xrightarrow{a=2} x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 16 - 4 = 12 > 0 \checkmark$$

پس معادله دارای ریشه‌ی حقیقی بوده و $a=2$ قابل قبول است.

۵۳۲. **گزینه ۳** همان‌طور که در درسنامه گفته شد، در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$ اگر یکی از ریشه‌ها λ برابر ریشه‌ی دیگر باشد، آن‌گاه رابطه‌ی $\frac{b^2}{ac} = \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda}$ بین ضرایب معادله و عدد λ برقرار است.

بنابراین با توجه به رابطه‌ی بالا برای $\lambda=3$ داریم:

$$\frac{(-4)^2}{k(k+2)} = \frac{(3+1)^2}{3} \Rightarrow \frac{16}{k^2+2k} = \frac{16}{3} \Rightarrow k^2+2k=3$$

$$\Rightarrow k^2+2k-3=0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر}} k=1 \text{ یا } k=\frac{c}{a}=-3$$

۵۳۳. **گزینه ۴** معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$ دو ریشه‌ی مثبت دارد، هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow m^2 - 4(2)(m+6) > 0 \Rightarrow m^2 - 8m - 48 > 0 \\ \Rightarrow (m-12)(m+4) > 0 \Rightarrow m < -4 \text{ یا } m > 12 \quad 1 \\ S > 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow -\frac{m}{2} > 0 \Rightarrow m < 0 \quad 2 \\ P > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{m+6}{2} > 0 \Rightarrow m > -6 \quad 3 \end{cases}$$

اشتراک سه مجموعه جواب به دست آمده بازه‌ی $(-6, -4)$ است.

زنگی: این جوری فرض کن:

$$m = -1 \xrightarrow{\text{در معادله}} 2x^2 - x + 5 = 0$$

حذف گزینه‌های «۱» و «۲»

$$m = -3 \xrightarrow{\text{در معادله}} 2x^2 - 3x + 3 = 0$$

حذف گزینه‌ی «۳»

۵۳۴. **گزینه ۳** با توجه به ضرایب معادله، حاصل ضرب دو ریشه قابل محاسبه بوده و در نتیجه...

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-a}{3a} = \frac{-1}{3} \Rightarrow \alpha\beta = \frac{-1}{3}$$

$$\xrightarrow{\alpha=2} \frac{2}{3} \times \beta = \frac{-1}{3} \xrightarrow{\times \frac{3}{2}} \beta = \frac{-1}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{-1}{2}$$

۵۳۵. **گزینه ۳** عبارت داده‌شده برحسب ریشه‌های معادله همان اتحاد مکعب دو جمله‌ای است:

$$\alpha^2 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 = S^2 = \left(\frac{-b}{a}\right)^2$$

$$= (-3)^2 = 9$$

۲ $S = \frac{-b}{a} < 0 \Rightarrow \frac{-(a+3)}{a} < 0 \xrightarrow{\text{قرینه‌کن}} \frac{a+3}{a} > 0$

P_1 تعیین علامت $\begin{cases} a+3=0 \Rightarrow a=-3 \\ a=0 \end{cases}$

جدول تعیین علامت

می‌خواهیم $a > 0$ یا $a < -3$

در نهایت $a = \{a \mid a < -3\} = 1 \cap 2 \cap 3$

زرنگی: $a = -4 \xrightarrow{\text{در تابع}} f(x) = -4x^2 - x - 1$

ریشه ندارد $\Delta = (-1)^2 - 4(-4)(-1) = -15 < 0 \Rightarrow$

حذف گزینه‌ی «۲» \Rightarrow

$a = -\frac{1}{2} \xrightarrow{\text{در تابع}} f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - 1 \xrightarrow{\text{جمع ریشه‌ها}} s = -\frac{2}{2} = -1 < 0$

این یعنی هر دو ریشه منفی نبوده‌اند! گزینه‌هایی که $-\frac{1}{2}$ را قبول دارند غلط هستند! یعنی گزینه‌های «۲» و «۴» ...

۵۴۵ **گزینه ۱** با در نظر گرفتن شرط دو ریشه‌ی حقیقی و مثبت متمایز، داریم:

شرطها $\begin{cases} 1 \Delta > 0 \\ 2 P > 0 \\ 3 S > 0 \end{cases}$

$x^2 + (m-2)x + m+1 = 0$

۱ $\Delta = b^2 - 4ac = (m-2)^2 - 4 \times 1 \times (m+1) > 0$

اتحاد روی باز کن $m^2 - 4m + 4 - 4m - 4 > 0 \Rightarrow m^2 - 8m > 0$

$\Rightarrow m < 0$ یا $m > 8$ ۱

۲ $P = \frac{c}{a} = m+1 > 0 \Rightarrow m > -1$ ۲

۳ $S = -\frac{b}{a} = -(m-2) > 0 \Rightarrow -m+2 > 0 \Rightarrow m < 2$ ۳

جواب نهایی $= 1 \cap 2 \cap 3 = (-1, 0)$

زرنگی: با گذاشتن $m = -2$ و $m = 7$ ، $m = 9$ می‌توانید Δ را بررسی و گزینه‌های غلط را حذف کنید.

۵۴۶ **گزینه ۳** در گزینه‌ها موقعیت نمودار تابع که یک سهمی است، نسبت به محور x ها بررسی شده و می‌دانیم آنچه در این مورد اهمیت دارد، علامت Δ و علامت صفرهای تابع (نقاط تلاقی با محور طول‌ها) است: بنابراین:

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3m)^2 - 4(m^2)(-1)$

$= 9m^2 + 4m^2 = 13m^2 \xrightarrow{m \neq 0} \Delta > 0 \Rightarrow$ دو نقطه‌ی تلاقی دارد.

حاصل ضرب صفرهای تابع $P = \frac{c}{a} = \frac{-1}{m^2} < 0$

آن دو ریشه مختلف‌العلامت‌اند، پس نمودار تابع در دو طرف مبدأ، محور طول‌ها را قطع می‌کند.

۵۴۱ **گزینه ۳** اگر α و β ریشه‌های معادله باشند، آن‌گاه طبق فرض تست $\alpha = \beta^2$ بوده و با توجه به ضرایب معادله، $\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 6$ و $\alpha\beta = \frac{c}{a} = m+5$ است. ابتدا تلاش می‌کنیم به کمک روابط $\alpha + \beta = 6$ و $\alpha = \beta^2$ مقدار ریشه‌ها را یافته، سپس به کمک رابطه‌ی $\alpha\beta = m+5$ مقدار m را پیدا کنیم. **نگاه کن:**

$\begin{cases} \alpha = \beta^2 \\ \alpha + \beta = 6 \end{cases} \Rightarrow \beta^2 + \beta - 6 = 0 \xrightarrow{\text{تجزیه}} (\beta+3)(\beta-2) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} \beta+3=0 \Rightarrow \beta=-3 \\ \beta-2=0 \Rightarrow \beta=2 \end{cases} \xrightarrow{\alpha=\beta^2} \begin{cases} \alpha=9 \\ \alpha=4 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha\beta = -27 \\ \alpha\beta = 8 \end{cases} \xrightarrow{\alpha\beta=m+5} \begin{cases} m+5 = -27 \Rightarrow m = -32 \\ m+5 = 8 \Rightarrow m = 3 \end{cases}$

که فقط $m = -32$ در گزینه‌ها دیده می‌شود!

۵۴۲ **گزینه ۳** ریشه‌های معادله، α و β هستند.

طبق فرض $\alpha = 2\beta$ ۱

با توجه به رابطه‌ی بین ریشه‌ها در معادله‌ی $3x^2 - ax + 4 = 0$ داریم:

$P = \alpha\beta \xrightarrow{1} \frac{4}{3} = (2\beta)\beta \Rightarrow \beta^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow \beta = \pm \frac{2}{3}$ ۲

$S = \alpha + \beta \xrightarrow{1} \frac{a}{3} = 2\beta \xrightarrow{2} \begin{cases} \frac{a}{3} = 4(\frac{2}{3}) \\ \frac{a}{3} = 4(-\frac{2}{3}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 8 \\ a = -8 \end{cases}$

اختلاف دو مقدار به دست آمده برای a برابر است با: $8 - (-8) = 16$

۵۴۳ **گزینه ۱** فرض کنیم α و β ریشه‌های معادله باشند.

با توجه به اتحاد $(\sqrt{3}-1)^2 = 4 - 2\sqrt{3}$ ، ضرب x^2 را ساده می‌کنیم و در معادله‌ی مرتب‌شده مقدار S را پیدا می‌کنیم و...

$\sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = |\sqrt{3}-1| = \sqrt{3}-1$

مثبت

$\Rightarrow (\sqrt{3}-1)x^2 + (1-\sqrt{3})x - 17 = 0$

$\Rightarrow S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(1-\sqrt{3})}{(\sqrt{3}-1)} = \frac{(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}-1)} = 1$

$\Rightarrow \alpha + \beta = 1 \Rightarrow \alpha = -\beta + 1$ ۳

با توجه به رابطه‌ی ۳ یکی از ریشه‌ها از قرینه‌ی ریشه‌ی دیگر، ۱ واحد بیشتر است!

۵۴۴ **گزینه ۱** باید معادله‌ی $f(x) = 0$ دو ریشه‌ی منفی داشته باشد. این زمانی

محقق می‌شود که به‌طور هم‌زمان داشته باشیم:

$\Delta > 0, P > 0, S < 0$

۱ $\Delta > 0 \Rightarrow (a+3)^2 - 4a(-1) > 0 \Rightarrow a^2 + 6a + 9 + 4a > 0$

$\Rightarrow a^2 + 10a + 9 > 0$

P_1 تعیین علامت $P_1 = a^2 + 10a + 9 = (a+1)(a+9) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} a+1=0 \Rightarrow a=-1 \\ a+9=0 \Rightarrow a=-9 \end{cases}$

جدول

می‌خواهیم $a < -9$ یا $a > -1$

۲ $P = \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{-1}{a} > 0$ صورت کسر منفی برای مثبت شدن کسر باید $a < 0$



یعنی حاصل، دو برابر جذر ریشه‌ی بزرگ‌تر معادله است. حالا کافی است معادله را حل کرده و ریشه‌ی بزرگ‌تر آن را به دست آوریم:

$$\frac{\sqrt{5}x^2 - (\sqrt{5} + 2)x + \sqrt{5}}{a} = 0 \rightarrow \frac{a+b+c}{\alpha > \beta} \rightarrow \begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\alpha > \beta \rightarrow A = 2\sqrt{\alpha} = 2\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2}} = (\sqrt{2})^2 \times \frac{\sqrt{\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{2} \times \sqrt{\sqrt{5}} = \sqrt{2^2} \times \sqrt{\sqrt{5}} = \sqrt{2^2 \times \sqrt{5}}$$

۵۵۱. **گزینه ۲** ابتدا مقدار $P = x_1 x_2$ و $S = x_1 + x_2$ را به کمک ضرایب معادله به دست آورده، سپس شرط تشکیل دنباله‌ی حسابی را اعمال می‌کنیم:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = m, P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} = 2$$

$$\text{دنباله‌ی حسابی} \Rightarrow 4, m, 2 \Rightarrow 2m = 4 + 2 = 6 \Rightarrow m = 3$$

یادآوری: اگر a, b, c جملات متوالی یک دنباله‌ی حسابی باشند،

آن‌گاه رابطه‌ی $2b = a + c$ بین آن‌ها برقرار است.

۵۵۲. **گزینه ۲** اگر ریشه‌ها را α و β بگیریم، بر اساس آنچه سؤال بیان می‌کند، داریم:

$$2\alpha = \frac{\beta}{2} + 1 \rightarrow 4\alpha = \beta + 2 \rightarrow 5\alpha = (\alpha + \beta) + 2$$

$$\frac{\text{ضرایب معادله}}{\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{10}{2} = 5} \rightarrow 5\alpha = \frac{5}{2} + 2 = \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{9}{10} \text{ (یکی از ریشه‌های معادله)}$$

ریشه‌ی معادله در آن صدق می‌کند، پس:

$$4\alpha^2 - 10\alpha + 2m = 0 \rightarrow 4\left(\frac{9}{10}\right)^2 - 10\left(\frac{9}{10}\right) + 2m = 0 \Rightarrow \frac{81}{25} - 9 + 2m = 0$$

$$\Rightarrow 2m = 9 - \frac{81}{25} = \frac{144}{25} \rightarrow m = \frac{144}{25} \times \frac{2}{2} = \frac{288}{25} = 2/88$$

۵۵۳. **گزینه ۳** در چنین سؤال‌هایی با قرار دادن α و β در معادله (به‌عنوان ریشه‌های معادله) روابط را به گونه‌ای می‌سازیم که ما را به سمت جواب هدایت کند.

$$\begin{cases} \alpha^2 - 5\alpha + 2 = 0 \Rightarrow \alpha^2 + 2 = 5\alpha \\ \beta^2 - 5\beta + 2 = 0 \Rightarrow \beta^2 - 6\beta + 7 = -\beta + 5 \end{cases}$$

جای‌گذاری در ۱: $\frac{\alpha}{\alpha^2 + 2} = \frac{\alpha}{5\alpha} = \frac{1}{5}$

جای‌گذاری در ۲: $\frac{\beta - 5}{\beta^2 - 6\beta + 7} = \frac{\beta - 5}{-\beta + 5} = -1$

$$A = \frac{1}{5} - (-1) = \frac{1}{5} + 1 = \frac{6}{5}$$

۵۵۴. **گزینه ۲** با توجه به رابطه‌ی بین ریشه‌های α و β ، داریم:

$$ax^2 - 8x + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{8}{a} \\ P = \alpha\beta = \frac{4}{a} \end{cases}$$

در معادله‌ی درجه دومی با ریشه‌های $x_1 = \alpha\beta^2$ و $x_2 = \alpha^2\beta$ ، طبق فرض، مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها با هم برابر است؛ بنابراین داریم:

$$x_1 + x_2 = x_1 x_2 \Rightarrow \alpha\beta^2 + \alpha^2\beta = (\alpha\beta^2)(\alpha^2\beta)$$

$$\Rightarrow \alpha\beta(\alpha + \beta) = \alpha^2\beta^2 \xrightarrow{+ \alpha\beta} \alpha + \beta = (\alpha\beta)^2$$

$$\frac{8}{a} = \left(\frac{4}{a}\right)^2 \Rightarrow \frac{8}{a} = \frac{16}{a^2} \xrightarrow{a \neq 0} 1 = \frac{2}{a} \Rightarrow a = 2$$

$$\Rightarrow \log_{\sqrt{2}} a = \log_{\sqrt{2}} 2 = \log_{\frac{1}{2}} 2 = \frac{1}{\frac{1}{2}} \log_2 2 = 2$$



زنگی: $m = 1 \rightarrow f(x) = x^2 - 2x - 1 \Rightarrow \frac{c}{a} = -1 < 0$

یعنی معادله دو ریشه‌ی حقیقی با علامت‌های مختلف دارد یا تابع محور x ها را در دو طرف مبدأ قطع می‌کند!

۵۴۷. **گزینه ۱** اگر α و β را صفرهای تابع بنامیم، آن‌گاه با کم کردن نیم واحد از آن‌ها به اعداد $\alpha - \frac{1}{2}$ و $\beta - \frac{1}{2}$ می‌رسیم و برای حاصل ضربشان داریم:

$$\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\left(\beta - \frac{1}{2}\right) = \alpha\beta - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{4} = \alpha\beta - \frac{1}{2}(\alpha + \beta) + \frac{1}{4}$$

$$\frac{x^2 + 2x - c = 0}{(\alpha + \beta = -2)} \rightarrow \alpha\beta - \frac{1}{2}(-2) + \frac{1}{4} = \alpha\beta + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \alpha\beta + \frac{1}{2}$$

یعنی به حاصل ضرب صفرهای تابع $\frac{1}{2}$ اضافه می‌شود.



زنگی: $c = -2 \Rightarrow f(x) = x^2 + 2x + 2 = (x+1)(x+2)$

صفرهای تابع حاصل ضرب -2 ، -1 ، 2 \rightarrow اختلاف $\frac{15}{4} - 2 = \frac{7}{4}$

حاصل ضرب $\frac{15}{4}$ \rightarrow اختلاف $\frac{15}{4} - 2 = \frac{7}{4}$

۵۴۸. **گزینه ۴** با توجه به فرض تست، ریشه‌های معادله را $(\alpha - 1)^2$ و $(\alpha + 1)^2$ در نظر بگیریم. با توجه به جمع ریشه‌ها داریم:

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{-290}{1} = 290 \Rightarrow (\alpha - 1)^2 + (\alpha + 1)^2 = 290$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 + \alpha^2 + 2\alpha + 1 = 290 \Rightarrow 2\alpha^2 + 2 = 290 \Rightarrow \alpha^2 = 144$$

$$\xrightarrow{\alpha \in \mathbb{N}} \alpha = 12$$

پس ریشه‌های معادله 11^2 و 13^2 هستند. با توجه به ضریب ریشه‌ها داریم:

$$P = \frac{c}{a} \Rightarrow m^2 = 11^2 \times 13^2 \Rightarrow m = 11 \times 13 = 143$$

۵۴۹. **گزینه ۱** با توجه به ضرایب معادله‌ی $x^2 + bx + b = 0$ داریم:

$$S = -\frac{b}{a} = -b, P = \frac{c}{a} = b$$

حالا سعی می‌کنیم رابطه‌ی داده‌شده را بر حسب S و P بنویسیم...

$$\frac{2}{\alpha} + \frac{3}{\beta} = 1 \xrightarrow{\text{مخرج مشترک بگیر}} \frac{2\beta + 3\alpha}{\alpha\beta} = 1 \xrightarrow{\text{در صورت کسر S رو بساز}} \frac{2\beta + 3\alpha}{\alpha\beta} = 1$$

$$\frac{(2\beta + 3\alpha) + \alpha}{\alpha\beta} = 1 \Rightarrow \frac{2(\alpha + \beta) + \alpha}{\alpha\beta} = 1 \xrightarrow{\alpha + \beta = S = -b} \frac{-2b + \alpha}{b} = 1$$

$$\xrightarrow{\text{یک ریشه‌ی معادله}} \frac{x+b}{(b \neq 0)} \rightarrow -2b + \alpha = b \xrightarrow{+2b} \alpha = 3b$$

$$\xrightarrow{\text{در معادله قرار بده}} (3b)^2 + b(3b) + b = 0 \Rightarrow 9b^2 + 3b^2 + b = 0$$

$$\Rightarrow 12b^2 + b = 0 \xrightarrow{\text{فاکتور بگیر}} b(12b + 1) = 0$$

$$\Rightarrow b = 0 \text{ (چرا؟)} \times \text{ یا } 12b + 1 = 0 \Rightarrow b = \frac{-1}{12} \checkmark$$

۵۵۰. **گزینه ۴** برای حل این تست، به جای این‌که حاصل $(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})$ و

$$|\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}|$$
 را به‌طور جداگانه از روابط $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{S + 2\sqrt{P}}$ و

$$|\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}| = \sqrt{S - 2\sqrt{P}}$$
 محاسبه کرده و جمع کنیم، فرض می‌کنیم α

ریشه‌ی بزرگ‌تر معادله‌ی $2x^2 - (\sqrt{5} + 2)x + \sqrt{5} = 0$ باشد ($\alpha > \beta$) و

در نتیجه $(\sqrt{\alpha} > \sqrt{\beta})$ داریم:

$$A = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + |\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}| = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} = 2\sqrt{\alpha}$$

۵۵۹. **گزینه ۱** با توجه به رابطه‌ی بین ریشه‌های α و β در معادله‌ی

داده‌شده، داریم:

$$x^2 + 6x + a = 0 \xrightarrow{\text{رابطه‌ی ریشه‌ها}} \begin{cases} S = \alpha + \beta = -6 \\ P = \alpha\beta = a \\ \beta = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 + \sqrt{36 - 4a}}{2 \times 1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{-6 + \sqrt{4(9-a)}}{2} = \frac{-6 + 2\sqrt{9-a}}{2} = -3 + \sqrt{9-a}$$

$$\xrightarrow{\text{فرض تست}} 3\alpha^2 + 2\beta^2 = 12\sqrt{2} + 85 \Rightarrow 3\alpha^2 + 2\beta^2 - \beta^2 = 12\sqrt{2} + 85$$

$$\Rightarrow 3(\alpha^2 + \beta^2) - \beta^2 = 12\sqrt{2} + 85$$

$$\Rightarrow 3(S^2 - 2P) - (-3 + \sqrt{9-a})^2 = 12\sqrt{2} + 85$$

$$\Rightarrow 3(36 - 2a) - (9 + 9 - a - 6\sqrt{9-a}) = 12\sqrt{2} + 85$$

$$\Rightarrow 108 - 6a - 18 + a + 6\sqrt{9-a} = 12\sqrt{2} + 85$$

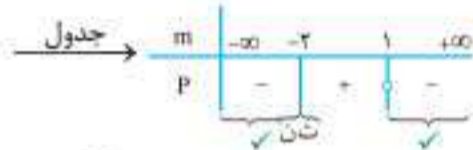
$$\Rightarrow 90 - 5a + 6\sqrt{9-a} = 12\sqrt{2} + 85 \Rightarrow 5a - 6\sqrt{9-a} + 12\sqrt{2} - 5 = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{5a - 5}_{\text{گویا}} = \underbrace{6\sqrt{9-a} - 12\sqrt{2}}_{\text{تنگ}} \Rightarrow 5a - 5 = 0 \Rightarrow a = 1$$

۵۶۰. **گزینه ۱** وقتی نمودار یک سهمی محور x ها را در هر دو طرف مبدأ قطع می‌کند، معادله‌ی مربوطه دو ریشه دارد: یکی مثبت و دیگری منفی و این یعنی حاصل ضرب ریشه‌ها باید منفی باشد:

$$P = \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{1-m}{m+2} < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت P}} \begin{cases} 1-m > 0 \\ m+2 < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m < 1 \text{ (ریشه‌ی صورت)} \\ m < -2 \text{ (ریشه‌ی مخرج)} \end{cases}$$



می‌خواهیم $\{m \mid m < -2 \text{ یا } m < 1\}$ مجموعه‌ی مقادیر مورد قبول m باشد $P < 0$.

زنگی $m = 0 \xrightarrow{\text{در معادله}} 2x^2 + 3x + 1 = 0 \xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} x = -1, -\frac{1}{2}$
حذف **گزینه‌ی «۲»** \rightarrow دوریشه‌ی منفی

$m = 2 \xrightarrow{\text{در معادله}} 4x^2 + 3x - 1 = 0 \Rightarrow \frac{c}{a} = -\frac{1}{4} < 0$
حذف **گزینه‌ی «۳»** \rightarrow دوریشه‌ی مختلف‌العلامت

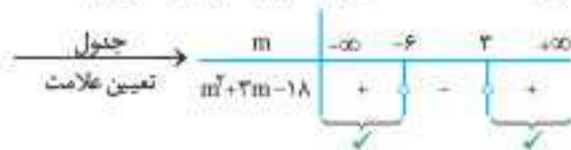
$m = -3 \xrightarrow{\text{در معادله}} -x^2 + 3x + 4 = 0 \Rightarrow \frac{c}{a} = -4 < 0$
حذف **گزینه‌ی «۴»** \rightarrow دوریشه‌ی مختلف‌العلامت

۵۶۱. **گزینه ۴** شرط داشتن دو ریشه‌ی حقیقی منفی متمایز در معادله‌ی $S < 0, P > 0, \Delta > 0$ درجه‌ی دوم عبارت است از:

$$\Delta = (-2m)^2 - 4(m-6)(-3) = 4m^2 + 12m - 72 > 0$$

بنابراین:

$$\xrightarrow{+4} \Delta = m^2 + 3m - 18 > 0 \xrightarrow{\text{تجزیه کن}} (m+6)(m-3) > 0$$



$$\Rightarrow m < -6 \text{ یا } m > 3$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{-3}{m-6} > 0 \Rightarrow m-6 < 0 \Rightarrow m < 6$$

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{2m}{m-6} < 0$$

۵۵۵. **گزینه ۴** اگر رابطه‌ی داده‌شده را به صورت $2a + b + 12 = 0$ بنویسیم و

با معادله‌ی داده‌شده مقایسه کنیم، متوجه می‌شویم که یکی از ریشه‌ها $x_1 = -2$ است: **ببینید:**

$$2(-2)^2 - a(-2) + b = 0 \Rightarrow 12 + 2a + b = 0$$

بنابراین داریم:

$$2x^2 - ax + b = 0 \Rightarrow P = x_1 x_2 = \frac{b}{2} \xrightarrow{x_1 = -2} -2x_2 = \frac{b}{2} \Rightarrow x_2 = -\frac{b}{4}$$

زنگی $2a + b = -12 \xrightarrow{\text{عددهای اختیاری}} a = 0, b = -12$
 $\xrightarrow{\text{در معادله}} 2x^2 - 12 = 0 \xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} -2, 2$
 $b = -12$ در گزینه‌ها به ترتیب می‌دهد: ۱۲، ۶، ۴ و ۲.

۵۵۶. **گزینه ۲** معادله‌ی داده‌شده در صورت تست را در نظر می‌گیریم:

$$x^2 - (a^2 + b^2 - 12)x + (a + b - 1) = 0 \xrightarrow{\text{فرض}} \begin{cases} x_1 = a \in \mathbb{N} \\ x_2 = b \in \mathbb{N} \end{cases}$$

رابطه‌ی بین ریشه‌ها:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 \Rightarrow \frac{a^2 + b^2 - 12}{1} = a + b \quad (1) \\ P = x_1 x_2 \Rightarrow \frac{a + b - 1}{1} = ab \Rightarrow ab = a + b - 1 \quad (2) \end{cases}$$

از رابطه‌ی (۱) داریم:

$$a + b = a^2 + b^2 - 12 \xrightarrow{a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab} a + b = (a+b)^2 - 2ab - 12$$

$$a + b = (a+b)^2 - 2ab - 12 \xrightarrow{(2)} a + b = (a+b)^2 - 2(a+b-1) - 12$$

$$a + b = (a+b)^2 - 2(a+b-1) - 12 \xrightarrow{\frac{a+b=1}{t \in \mathbb{N}}} t = t^2 - 2t + 2 - 12$$

$$\Rightarrow t^2 - 2t - 10 = 0 \Rightarrow (t-5)(t+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 5 \\ t = -2 \text{ غرق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow t = a + b = 5$$

۵۵۷. **گزینه ۴** ابتدا توجه کنید که $S = \alpha + \beta = 2$ و $P = \alpha\beta = \frac{3}{4}$ حالا تلاش

می‌کنیم عبارت $\alpha^4 + \beta^4$ را به کمک اتحاد $\alpha^4 + \beta^4 = (\alpha + \beta)^4 - 2\alpha\beta(\alpha + \beta)^2 + 2\alpha^2\beta^2$ بر حسب S و P بنویسیم و...

$$\alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2)^2 + (\beta^2)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2$$

$$\begin{matrix} \downarrow & & \downarrow \\ A & & B \\ \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \end{matrix}$$

$$= ((\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta)^2 - 2(\alpha\beta)^2 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2$$

$$= (4 - \frac{3}{2})^2 - 2(\frac{9}{16}) = \frac{25}{4} - \frac{9}{8} = \frac{50 - 9}{8} = \frac{41}{8}$$

زنگی $\Delta = 4 - 3 = 1$ است، پس:

$$x^2 - 2x + \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm 1}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha^4 + \beta^4 = (\frac{3}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2 = \frac{9}{4} + \frac{1}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

۵۵۸. **گزینه ۱** ریشه‌ی معادله است و در آن صدق می‌کند:

$$\alpha^2 - 2\alpha - 4 = 0 \Rightarrow \alpha^2 - 4 = 2\alpha$$

حالا با توجه به رابطه‌ی حاصل عبارت موردنظر را به دست می‌آوریم:

$$(\alpha^2 - 4)^2 + 4\beta^2 = (2\alpha)^2 + 4\beta^2 = 4\alpha^2 + 4\beta^2 = 4(\alpha^2 + \beta^2)$$

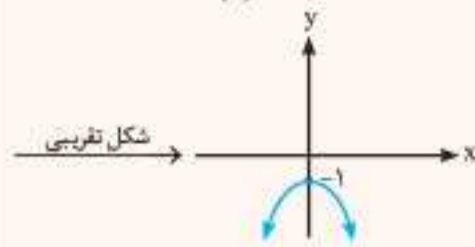
$$= 4((\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta) = 4(2^2 - 2(-4)) = 4(4 + 8) = 48$$

مقادیر $\alpha + \beta$ و $\alpha\beta$ را از روی ضرایب معادله محاسبه کرده‌ایم:

$$x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(-2)}{1} = 2, P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-4}{1} = -4$$

زنگی: این جوری فرض کن: $f(x) = -3x^2 - 1$ در تابع $a = 0$



می بینید که سهمی از ناحیه‌ی اول نمی‌گذرد! پس هر گزینه‌ای که $a = 0$ را قبول ندارد، حذف می‌شود: یعنی گزینه‌های «۲»، «۳» و «۴»!

۵۶۲. گزینه ۲

$$\begin{cases} \alpha = 1 - \sqrt{2} \\ \beta = 1 + \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = (1 - \sqrt{2}) + (1 + \sqrt{2}) = 2 \\ P = \alpha\beta = (1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) = 1^2 - (\sqrt{2})^2 = 1 - 2 = -1 \end{cases}$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$$

کمی اضافه‌تر: اگر معادله‌ی $x^2 - 2x - 1 = 0$ در گزینه‌ها وجود نداشته باشد، به جای آن می‌توان هر مضربی از معادله را به عنوان معادله‌ی مورد نظر معرفی کرد. برای مثال به جای همین معادله‌ی $x^2 - 2x - 1 = 0$ می‌توان هر یک از معادله‌های $-2x^2 + 4x + 2 = 0$ (برابر آن) یا $\frac{x^2}{3} - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = 0$ (برابر آن) را معرفی کرد.

۵۶۴. گزینه ۱ معادله‌ی درجه‌ی دومی با $S = -1/5$ و $P = -7$ تشکیل می‌دهیم و آن را حل می‌کنیم: $x^2 + 1/5x - 7 = 0 \Rightarrow x^2 + 1/5x - 7 = 0$

$$\begin{aligned} &\xrightarrow{\text{ابتدا در ۵ ضرب}} 5x^2 + x - 35 = 0 \\ &\xrightarrow{\text{می‌کنیم تا ساده تر بشه}} 5x^2 + x - 35 = 0 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\text{از } \Delta \text{ برو}} x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 700}}{10} = \frac{-1 \pm 27}{10}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{-1 + 27}{10} = \frac{26}{10} = \frac{13}{5} \\ \beta = \frac{-1 - 27}{10} = \frac{-28}{10} = \frac{-14}{5} \end{cases}$$

۵۶۵. گزینه ۲ با توجه به فرض سؤال $S = 2\sqrt{3}$ و $P = -1$ از طرفی معادله‌ی مورد نظر به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ است: پس:

$$x^2 - 2\sqrt{3}x - 1 = 0 \xrightarrow{\times \sqrt{3}} \sqrt{3}x^2 - 6x - \sqrt{3} = 0 \quad \checkmark$$

(این تو گزینه‌ها نیست!)

۵۶۶. گزینه ۲ ریشه‌های معادله با ضرایب معلوم $3x^2 + 7x + 1 = 0$ را α و β و ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + ax + b = 0$ را x_1 و x_2 می‌نامیم. بر اساس گفته‌ی تست $x_1 = \alpha + 1$ و $x_2 = \beta + 1$ است. از طرفی با توجه به ضرایب معادله‌ی $3x^2 + 7x + 1 = 0$ ، $\alpha + \beta = \frac{-7}{3}$ و $\alpha\beta = \frac{1}{3}$ است. اکنون توجه کنید که:

$$P = x_1x_2 = (\alpha + 1)(\beta + 1) = \alpha\beta + \alpha + \beta + 1 = \frac{1}{3} - \frac{7}{3} + 1 = -1$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} x^2 + ax + b = 0 \\ p = b \end{matrix}} b = -1$$

۵۶۷. گزینه ۴ جواب‌های معادله‌ی $x^2 - bx - 2c = 0$ را α و β در نظر می‌گیریم: برای جواب‌های معادله‌ی مطلوب (که آن‌ها را x_1 و x_2 فرض کرده‌ایم) داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} S = x_1 + x_2 = -2\alpha - 2\beta = -2(\alpha + \beta) \xrightarrow{\alpha + \beta = b} S = -2b \\ P = x_1x_2 = (-2\alpha)(-2\beta) = 4\alpha\beta \xrightarrow{\alpha\beta = -2c} P = -8c \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x^2 - Sx + P = 0} x^2 + 2bx - 8c = 0$$

جدول		m	$-\infty$	0	6	$+\infty$	
تعیین علامت		$2m$	-	+	+	+	$0 < m < 6$
		$m-6$	-	-	-	+	
		$\frac{2m}{m-6}$	+	-	+	+	

جواب نهایی = $1 \cap 2 \cap 3 \Rightarrow 3 < m < 6$



زنگی: به ازای $m = 6$ ضریب x^2 صفر می‌شود، پس گزینه‌ی «۲» غلط!

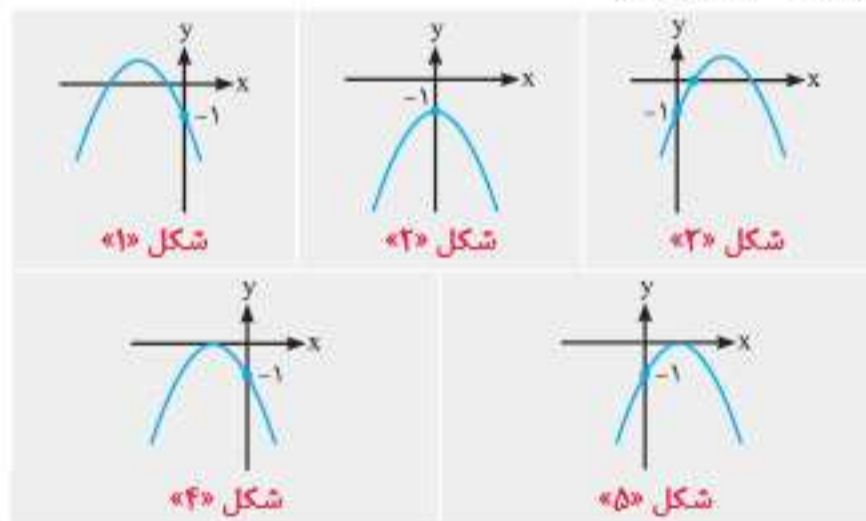
$$m = 2 \xrightarrow{\text{در معادله}} -4x^2 - 4x - 3 = 0$$

حذف گزینه‌ی «۲» ریشه ندارد $\Delta = (-4)^2 - 4(-4)(-3) = -32 < 0$

$$m = -7 \xrightarrow{\text{در معادله}} -13x^2 + 14x - 3 = 0$$

حذف گزینه‌ی «۱» دو ریشه‌ی منفی ندارد $\frac{b}{a} = \frac{14}{-13} > 0$

۵۶۲. گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که به ازای $a = 3$ ضابطه‌ی تابع می‌شود $f(x) = 3x - 1$ و نمودار تابع f از ناحیه‌ی اول می‌گذرد. فرض کنید $a \neq 3$. می‌دانیم اگر ضریب x^2 بزرگ‌تر از صفر باشد، نمودار تابع درجه‌ی دوم حتماً از ناحیه‌ی اول می‌گذرد. پس حتماً باید: $a - 3 < 0 \Rightarrow a < 3$ با شرط $a < 3$ ، یکی از شکل‌های زیر را می‌توانیم در نظر بگیریم. البته توجه داشته باشید که $f(0) = -1$ است، یعنی نمودار تابع محور y را در نقطه‌ای به عرض -1 قطع می‌کند.



از این ۵ شکل، فقط **شکل ۲** مدنظر ما نیست، پس شرایط **شکل ۲** را محاسبه کرده و آن را از شرط $a < 3$ کم می‌کنیم (اصل متمم). اما مشاهده می‌کنیم که در **شکل ۲** نمودار تابع در دو نقطه با طول‌های مثبت محور x را قطع کرده است، یعنی شرایط **شکل ۲** به صورت مقابل است: $\Delta > 0, P > 0, S > 0$ و اما حل این سه نامعادله:

$$\Delta > 0 \Rightarrow a^2 - 4(a-3)(-1) > 0 \Rightarrow a^2 + 4a - 12 > 0 \Rightarrow (a+6)(a-2) > 0$$

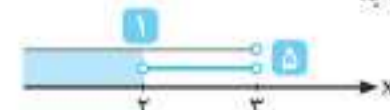
$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} a < -6 \text{ یا } a > 2$$

$$P > 0 \Rightarrow \frac{-1}{a-3} > 0 \Rightarrow a-3 < 0 \Rightarrow a < 3$$

$$S > 0 \Rightarrow \frac{-a}{a-3} > 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 0 < a < 3$$

$$\Rightarrow 2 < a < 3$$

حالا برای پیدا کردن جواب نهایی مسئله باید **۵** را از **۱** کم کنیم، پس جواب نهایی مسئله برابر است با:



$$\Delta x^2 + 2x - 2 = 0 \xrightarrow{\text{ریشه‌ها هستن}} \begin{cases} \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-2}{5} \\ \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-2}{5} \end{cases}$$

سپس ریشه‌های معادله‌ی $4x^2 - kx + 25 = 0$ را $x_1 = \frac{1}{\alpha^2}$ و $x_2 = \frac{1}{\beta^2}$ فرض می‌کنیم:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{\beta^2 + \alpha^2}{\alpha^2\beta^2} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{-2}{5}\right)^2 - 2\left(\frac{-2}{5}\right)}{\left(\frac{-2}{5}\right)^2} = \frac{\frac{4}{25} + \frac{4}{5}}{\frac{4}{25}} = \frac{29}{4}$$

از طرفی: $S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{k}{4}$

$\frac{k}{4} = \frac{29}{4} \Rightarrow k = 29$ ✓

بنابراین:

زنگی: $\Delta x^2 + 2x - 2 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \alpha = -1 \text{ یا } \beta = \frac{2}{5}$

یکی از ریشه‌های معادله‌ی $4x^2 - kx + 25 = 0$ ، $\frac{1}{\alpha^2}$ است:

$x_1 = \frac{1}{\alpha^2} = 1 \xrightarrow{\text{در معادله قراریده}} 4 - k + 25 = 0 \Rightarrow k = 29$ ✓

گزینه ۱ $x^2 - x - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = S = 1 \\ x_1x_2 = P = -4 \end{cases}$

اگر ریشه‌های معادله‌ی جدید را α و β بنامیم، طبق فرض داریم:

$$\begin{cases} \alpha = x_1^2 + \frac{1}{x_2} \\ \beta = x_2^2 + \frac{1}{x_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \\ P = \alpha\beta = \left(x_1^2 + \frac{1}{x_2}\right)\left(x_2^2 + \frac{1}{x_1}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S = \left(x_1^2 + x_2^2\right) + \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = (S^2 - 2PS) + \frac{S}{P} \\ = (1 - 2(-4)(1)) + \frac{1}{-4} \\ P = x_1^2x_2^2 + \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} + \frac{1}{x_1x_2} = P^2 + S^2 - 2P + 1 \\ = (-4)^2 + 1 - 2(-4) + \frac{1}{-4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S = \frac{51}{4} \\ P = \frac{-221}{4} \end{cases} \xrightarrow{\text{معادله‌ی جدید}} x^2 - \frac{51}{4}x - \frac{221}{4} = 0$$

$\Rightarrow 4x^2 - 51x - 221 = 0$

گزینه ۲ ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 3\sqrt{2}x + 4 = 0$ را α و β و

ریشه‌های معادله‌ی مطلوب را x_1 و x_2 فرض می‌کنیم. در این صورت بر اساس گفته‌ی سؤال، $x_1 = \alpha^2$ و $x_2 = \beta^2$ بوده و با توجه به این‌که

$S = x_1 + x_2 = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (3\sqrt{2})^2 - 2(4) = 18 - 8 = 10$

$P = x_1x_2 = \alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2 = (4)^2 = 16 \Rightarrow x^2 - 10x + 16 = 0$

گزینه ۳ ابتدا معادله‌ی $x(\Delta x + 2) = 2$ را مرتب می‌کنیم و با توجه به

ضرایب آن مقادیر $\alpha + \beta$ و $\alpha\beta$ را به دست می‌آوریم:



زنگی: $b=c=1 \xrightarrow{\text{در معادله}} x^2 - x = 2 \xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} -1, 2 \xrightarrow{\text{برای کین } (-2)} 2, -4$

$\xrightarrow{\text{معادله بنویس}} x^2 + 2x - 8 = 0 \xrightarrow{b=c=1} x^2 + 2bx - 8c = 0 \checkmark$

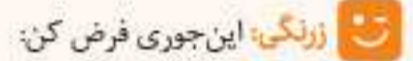
گزینه ۴ ابتدا مقادیر S و P را به دست می‌آوریم:

$S = \alpha + \beta = (\sqrt{a} - \sqrt{a+1}) + (\sqrt{a} + \sqrt{a+1}) = 2\sqrt{a}$

$P = \alpha\beta = (\sqrt{a} - \sqrt{a+1})(\sqrt{a} + \sqrt{a+1}) = (a) - (a+1) = -1$

$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 2\sqrt{ax} - 1 = 0$

بنابراین:



زنگی: این جوری فرض کن: $a=1 \xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} 1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2} \Rightarrow P = -1, S = 2$

$\xrightarrow{\text{معادله}} x^2 - 2x - 1 = 0 \xrightarrow{\text{مطابقت با گزینه‌ها}} x^2 - 2\sqrt{ax} - 1 = 0 \checkmark$

گزینه ۳ اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 4x + 1 = 0$ باشند،

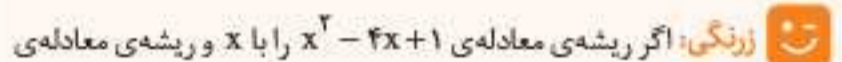
آن‌گاه داریم: $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = 4 \\ P = x_1x_2 = 1 \end{cases}$

همچنین اگر ریشه‌های معادله‌ی خواسته شده را α و β بنامیم، طبق فرض تست داریم:

$$\begin{cases} \alpha = -3x_1 + 2 \\ \beta = -3x_2 + 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S' = \alpha + \beta = -3(x_1 + x_2) + 4 = -3(4) + 4 = -8 \\ P' = \alpha\beta = (-3x_1 + 2)(-3x_2 + 2) = 9x_1x_2 - 6(x_1 + x_2) + 4 \\ = 9 - 24 + 4 = -11 \end{cases}$$

$\xrightarrow{\text{معادله‌ی جدید}} x^2 - S'x + P' = 0 \xrightarrow{S'=-8, P'=-11} x^2 + 8x - 11 = 0$



زنگی: اگر ریشه‌ی معادله‌ی $x^2 - 4x + 1 = 0$ را با x و ریشه‌ی معادله‌ی

خواسته شده را با X نمایش دهیم، داریم:

$X = 2(-x) + 2 \Rightarrow 2x = 2 - X \Rightarrow x = \frac{2-X}{2}$

$\xrightarrow{\text{قرار دهنده در معادله}} \left(\frac{2-X}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{2-X}{2}\right) + 1 = 0 \Rightarrow \frac{4-4X+X^2}{4} - \frac{8-4X}{2} + 1 = 0$

$\xrightarrow{\times 4} 4 - 4X + X^2 - 16 + 8X + 4 = 0 \Rightarrow X^2 + 4X - 8 = 0$

گزینه ۳ با توجه به ضرایب معادله‌ی $2x^2 - 3x - 4 = 0$ ، $\alpha + \beta = \frac{3}{2}$ و

$\alpha\beta = -2$ است و برای S و P معادله‌ی جدید داریم:

$S = \left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) + \left(\frac{1}{\beta} + 1\right) = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + 2 = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} + 2 = \frac{\frac{3}{2}}{-2} + 2 = \frac{-3}{4} + 2 = \frac{5}{4}$

$P = \left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) = \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + 1 = \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + 1$

$= \frac{1}{-2} + \frac{\frac{3}{2}}{-2} + 1 = \frac{-1}{2} - \frac{3}{4} + 1 = \frac{-2-3+4}{4} = \frac{-1}{4}$

حالا معادله‌ی جدید را به شکل $x^2 - Sx + P = 0$ تشکیل می‌دهیم:

$x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{1}{4} = 0 \xrightarrow{\times 4} 4x^2 - 5x - 1 = 0$

گزینه ۳ ابتدا معادله‌ی $x(\Delta x + 2) = 2$ را مرتب می‌کنیم و با توجه به

ضرایب آن مقادیر $\alpha + \beta$ و $\alpha\beta$ را به دست می‌آوریم:



$\Rightarrow (x+1)^2 = \frac{125}{x^2} \Rightarrow \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x^2}{125}$
 پس اگر ریشه‌های معادله‌ی خواسته‌شده را $X = \frac{1}{(x+1)^2}$ و ریشه‌های معادله‌ی داده‌شده را x بنامیم داریم:

$S' = X_1 + X_2 = \frac{x_1^2}{125} + \frac{x_2^2}{125}$
 $= \frac{x_1^2 + x_2^2}{125} = \frac{S^2 - 2PS}{125} = \frac{(-1)^2 - 2(-5)(-1)}{125} = \frac{-16}{125}$
 $P' = X_1 \cdot X_2 = \frac{x_1^2}{125} \cdot \frac{x_2^2}{125}$
 $= \frac{P^2}{125 \times 125} = \frac{(-5)^2}{125 \times 125} = \frac{-1}{125}$ معادله‌ی جدید $X^2 - S'X + P' = 0$
 $\Rightarrow X^2 + \frac{16}{125}X - \frac{1}{125} = 0 \Rightarrow 125X^2 + 16X - 1 = 0$

۵۷۸. گزینه ۳ با توجه به داده‌های سؤال، مستطیل زیر را رسم می‌کنیم:



S مستطیل $= (4m+3) \times m = 45 \xrightarrow{\text{مرتب کن}} 4m^2 + 3m - 45 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4(4)(-45)$

دو ریشه داریم: $\Rightarrow 729 > 0$

$m = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + \sqrt{729}}{8} = \frac{-3 + 27}{8} = \frac{24}{8} = 3$ طول $= 4a + 3 = 4(3) + 3 = 15$ عرض $= 3$
 \Rightarrow یا $m = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - \sqrt{729}}{8} = \frac{-3 - 27}{8} = \frac{-30}{8} < 0$ *

بنابراین: قطر $= \sqrt{3^2 + 15^2} = \sqrt{234}$

۵۷۹. گزینه ۴ همان‌طور که گفتیم در یک لیگ با n تیم، که هر تیم با دیگر تیم‌های لیگ فقط یک بازی انجام می‌دهد، تعداد کل بازی‌های انجام‌شده

از رابطه‌ی $N = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n = \frac{n(n-1)}{2}$ به دست می‌آید.

در اینجا داریم:

$\frac{n(n-1)}{2} = 105 \Rightarrow n(n-1) = 2 \times 105 \Rightarrow n^2 - n - 210 = 0$

$\Rightarrow (n-15)(n+14) = 0 \Rightarrow n = 15$

۵۸۰. گزینه ۱ با توجه به شکل، طول قاب مستطیل شکل برابر $2x + 15$ و عرض آن $2x + 10$ است: داریم:

$(2x)^2 + (15+10)(2x) + 15 \times 10 = 300$ اتحاد جمله‌ی مشترک

$\xrightarrow{\text{مرتب کن}} 4x^2 + 50x - 150 = 0 \xrightarrow{+2} 2x^2 + 25x - 75 = 0$ ($a=2, b=25, c=-75$)

$\Delta = (25)^2 - 4(2)(-75) = 625 + 600 = 1225$

$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{1225} = 35 \Rightarrow x = \frac{-25 \pm 35}{4}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \checkmark \\ x = \frac{-60}{4} < 0 \end{cases} \Rightarrow$ ابعاد قاب $= (2x+10) \times (2x+15)$

$\xrightarrow{x=\frac{5}{2}} (2 \times \frac{5}{2} + 10) \times (2 \times \frac{5}{2} + 15) = 15 \times 20$

۵۷۴. گزینه ۱ می‌دانیم که منظور از صفرهای تابع $f(x) = x - 3\sqrt{x} + 2$ ریشه‌های معادله‌ی $x - 3\sqrt{x} + 2 = 0$ است. از طرفی این معادله با تغییر متغیر $\sqrt{x} = t$ (که معادل $x = t^2$ است) به معادله‌ی درجه‌ی دوم $t^2 - 3t + 2 = 0$ تبدیل می‌شود و داریم:

$t^2 - 3t + 2 = 0 \xrightarrow{\text{ضرایب صفر مجموع}} \begin{cases} t=1 \\ \text{یا} \\ t=2 \end{cases} \xrightarrow{x=t^2} \begin{cases} x=1^2=1=\alpha \\ \text{یا} \\ x=2^2=4=\beta \end{cases}$

بنابراین دنبال معادله‌ای هستیم که ریشه‌های آن $\frac{1}{\alpha} + 1 = \frac{1}{1} + 1 = 2$ و

$\frac{1}{\beta} + 1 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$ هستند. برای این منظور مقادیر $S = 2 + \frac{5}{4} = \frac{13}{4}$ و $P = 2 \times \frac{5}{4} = \frac{5}{2}$

را محاسبه می‌کنیم و معادله را به شکل $x^2 - Sx + P = 0$ تشکیل می‌دهیم:

$x^2 - Sx + P = 0 \xrightarrow{S=\frac{13}{4}, P=\frac{5}{2}} x^2 - \frac{13}{4}x + \frac{5}{2} = 0 \xrightarrow{\times 4} 4x^2 - 13x + 10 = 0$

۵۷۵. گزینه ۳ اگر ریشه‌های معادله‌ی $ax^2 - mx - 8 = 0$ را x_1 و x_2 و ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - x - 2 = 0$ را α و β بنامیم، بر اساس فرض تست و رابطه‌ی مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها می‌توان نوشت:

$ax^2 - mx - 8 = 0 \xrightarrow{\text{ریشه‌ها } x_1, x_2} \begin{cases} x_1 = \alpha^2 \\ x_2 = \beta^2 \end{cases}$

$\Rightarrow x_1 + x_2 = \alpha^2 + \beta^2 = \frac{m}{a}, \quad x_1 x_2 = \alpha^2 \beta^2 = -1$

$2x^2 - x - 2 = 0 \xrightarrow{\text{ریشه‌ها } \alpha, \beta} \begin{cases} \alpha\beta = \frac{-2}{2} = -1 \\ \alpha + \beta = \frac{-(-1)}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$

حال اگر طرفین رابطه‌ی $\alpha + \beta = \frac{1}{2}$ را به توان ۲ برسانیم، خواهیم داشت:

$\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\frac{m}{a}} + 3 \alpha\beta \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{m}{a} - \frac{3}{2} = \frac{1}{8}$

$\Rightarrow \frac{m}{a} = \frac{3}{2} + \frac{1}{8} = \frac{13}{8} \xrightarrow{\times 8} m = 13$

۵۷۶. گزینه ۱ سؤال را از منظر دیگری حل می‌کنیم. ریشه‌های معادله‌ی

$4x^2 - 7x + 3 = 0$ (به دلیل صفر شدن مجموع ضرایب) برابر $x_1 = 1$ و $x_2 = \frac{3}{4}$

بوده و در نتیجه ریشه‌های معادله‌ی $3x^2 + ax + b = 0$ به صورت $\alpha = \frac{2}{x_1}$ و

$\beta = \frac{2}{x_2} = \frac{8}{3}$ هستند. حال اگر مجموع این دو ریشه را برابر رابطه‌ی مجموع دو ریشه با توجه به ضرایب معادله‌ی $3x^2 + ax + b = 0$ قرار دهیم، مقدار a به دست می‌آید:

$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} \Rightarrow 2 + \frac{8}{3} = \frac{-a}{3} \Rightarrow \frac{14}{3} = \frac{-a}{3} \Rightarrow a = -14$

برای به دست آوردن مقدار b نیز می‌توانیم از حاصل ضرب ریشه‌ها کمک بگیریم:

$\alpha\beta = \frac{c}{a} \Rightarrow 2 \times \frac{8}{3} = \frac{b}{3} \Rightarrow b = 16$

۵۷۷. گزینه ۱

$x = 5 - x^2 \Rightarrow x^2 + x - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = S = -1 \\ x_1 x_2 = P = -5 \end{cases}$

$x = 5 - x^2 \Rightarrow x^2 + x = 5 \Rightarrow x(x+1) = 5 \Rightarrow x+1 = \frac{5}{x}$