به نام پروردگار مهربان

ویرایش جدید

ریاضیات تجربی کنکور

عباس اشرفی، سنور حریری

لقمه طلایی

مهروماه

مقدمه

سلام؛

من کتاب لقمهٔ طلایی ریاضی هستم!

اســـمم لقمه اســـت، چون خیلی کوچولو و جمع‌وجور هستم.

فامیلیم طلائیه، چون یه کتاب کنکوری هستم.

بـــا این جثهٔ کوچیکم، نوزده‌تا فصـــل رو تو خودم جا دادم. بعد از ایـــن مقدمه که داری می‌خونی، یـــه درس‌نامهٔ توپ، کلی نکته و چاشنی و یه عالمه تست حل‌شـــده منتظرته. اگه وقتت کمه یا می‌خوای تو راه مدرســـه یا توی مترو و... ریاضـــی رو دوره کنی، همین الان منو بخر و بـــذار تو کیفت! من برات بهترین همراهم و دیگه تا من هســـتم، نمی‌ذارم وقتت تلف بشه و هی مجبورت می‌کنم منو بخونی.

واقعاً فکرشو بکن! هرچی کتابای تست جامع کنکور، همه با هم دارن، من یکجا دارم! خلاصه اینکه من خیلی خوبم ☺

راستی تا یادم نرفته بگم من همهٔ تست‌های کنکورهای چند سال اخیر رو هم، حل‌شده دارم!

تشکر و سپاس فراوان از

بعد از این همه تعریف از خودم، نوبتی هم باشه نوبت بقیه‌اس!

- باید از آقای احمد اختیاری مدیر انتشارات که ایدهٔ تولید من رو دادن تشکر کنم.
- از آقای محمدحسین انوشه مدیر تألیف انتشارات تشکر می‌کنم که منو خیلی راهنمایی کردن، تا کامل‌تر باشم.
- از آقای گودرزی مدیر فروش که ما رو به هم رسوندن.
- آقای امیر انوشه که منو به شما معرفی کردن.
- از خانم سمیرا سیاوشی مدیر تولید و همکارانشون آقای میلاد صفایی، سیدعلی تقوی و مریم صابری که منو به این شکل در آوردن.
- از آقای محسن فرهادی مدیر هنری و همکارانشون آقای تایماز کاویانی و حسام طلایی که منو خوشگل کردن.
- از خانم کبری ملکی و راحله فریدون‌نژاد که منو ویراستاری کردن و خانم دنیا سلیمی که با نظراتشون منو همراهی کردن.

و خلاصه از همه ممنونم که منو به‌وجود آوردن!

امیدوارم زندگی پربرکتی داشته باشم و خیرم به همهٔ کنکوری‌ها برسه!

ارادتمند شما

عباس اشرفی، سنور حریری

فهرست

فصل ۳

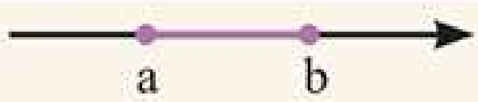
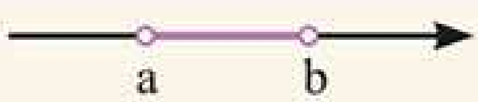
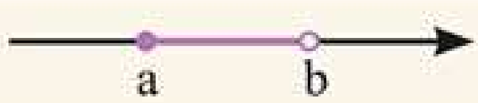
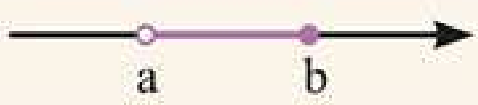
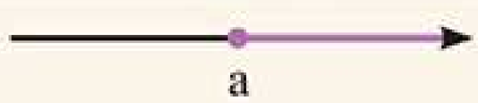
تعیین علامت و نامعادله

وعدهٔ ۱

بازه‌ها

بازه: زیرمجموعه‌هایی از $\mathbb{R}$ که یک قطعه از محور اعداد حقیقی، شامل همهٔ اعداد حقیقی بین دو عدد مشخص را نشان می‌دهند، **بازه** یا **فاصله** می‌نامیم.

بازه‌ها را می‌توان به‌صورت زیر خلاصه کرد: $(a < b)$

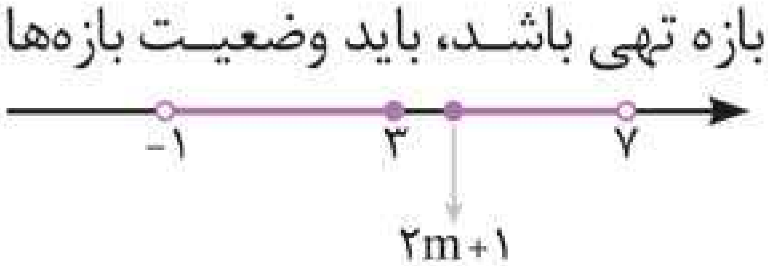
نمایش روی محور اعداد حقیقی	بازه	نمایش مجموعه‌ای
	$[a\,,b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$
	$(a\,,b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
	$[a\,,b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$
	$(a\,,b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$
	$[a\,,+\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \ge a\}$
	$(a\,,+\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$
	$(-\infty\,,a]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \le a\}$
	$(-\infty\,,a)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

تست: m باید عضو کدام بازه باشد تا اشتراک دو بازهٔ $[۳,۱-)$ و $(۷,۱ + ۲m]$ تهی شود؟

۱) $[۱,+\infty)$ ۲) $(۱,+\infty)$ ۳) $(۱,۳)$ ۴) $(-\infty,۱]$

پاسخ گزینهٔ «۳»

اگر بخواهیم اشتراک این دو بازه تهی باشد، باید وضعیت بازه‌ها به‌صورت مقابل باشد:



$۱ + ۲m$ باید بیشتر از ۳ باشد؛ بنابراین:

$۲m+۱>۳ \Rightarrow ۲m>۲ \Rightarrow m>۱$ ①

همچنین برای این‌که $(۷,۱ + ۲m]$ به‌صورت بازه باقی بماند، باید $۱ + ۲m$ کمتر از ۷ باشد؛ بنابراین:

$۲m+۱<۷ \Rightarrow ۲m<۶ \Rightarrow m<۳$ ②

از رابطه‌های ① و ② نتیجه می‌گیریم: $۱<m<۳$

تست: اگر n عددی طبیعی و A_n بازهٔ $((-۱)^n n , ۲n)$ باشد، آن‌گاه حاصل $(A_۲ \cup A_۴) \cap (A_۳ - A_۱)$ کدام است؟

۱) $(۱,۶)$ ۲) $(۲,۶)-\{۴\}$

۳) $(۲,۸)-\{۴\}$ ۴) $(۲,۸)$

پاسخ گزینهٔ «۲»

هر یک از مجموعه‌های $A_۱$ ، $A_۲$ ، $A_۳$ و $A_۴$ را به‌دست می‌آوریم:

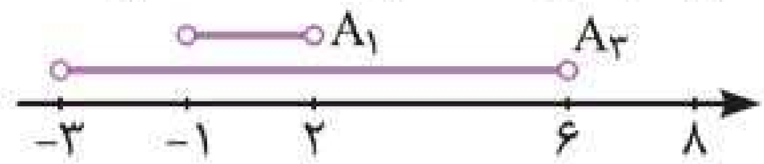
$$A_۱ = ((-۱)^۱ \, ۱ , ۲(۱)) = (-۱,۲)$$

$$A_۲ = ((-۱)^۲ \, ۲ , ۲(۲)) = (۲,۴)$$

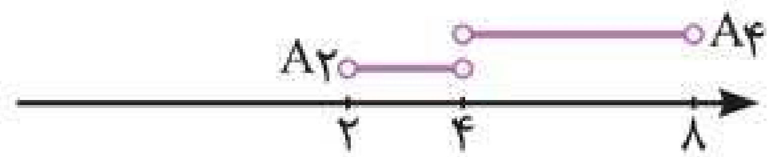
$$A_۳ = ((-۱)^۳ \, ۳ , ۲(۳)) = (-۳,۶)$$

$$A_۴ = ((-۱)^۴ \, ۴ , ۲(۴)) = (۴,۸)$$

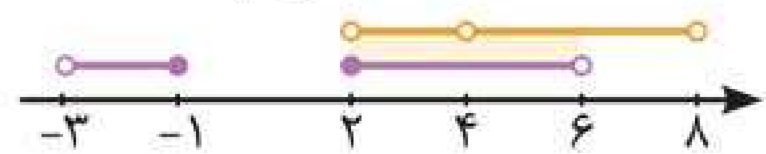
بازه‌های به‌دست آمده را روی محور اعداد حقیقی نمایش می‌دهیم و حاصل مجموعهٔ خواسته‌شده را محاسبه می‌کنیم:



$$A_{۳} - A_{۱} = (-۳,-۱] \cup [۲,۶)$$



$$A_{۲} \cup A_{۴} = (۲,۸) - \{۴\}$$



$$(A_{۳} - A_{۱}) \cap (A_{۲} \cup A_{۴}) = (۲,۶) - \{۴\}$$

وعدهٔ ۲

تعیین علامت

۱. تعیین علامت چندجمله‌ای‌های درجهٔ اول: برای تعیین علامت چندجمله‌ای‌های درجهٔ اول به فرم $y = ax + b \ (a \neq ۰)$، ابتدا ریشهٔ چندجمله‌ای را به‌دست می‌آوریم؛ سپس با توجه به جدول زیر عبارت را تعیین علامت می‌کنیم:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
y=ax+b		مخالف علامت a	۰	موافق علامت a	

فصل ۴

توان‌های گویا (ریشه و رادیکال)

وعدهٔ ۱

معرفی ریشهٔ n ام

اگر $n \geq ۲$ یک عدد طبیعی باشد، b را یک **ریشهٔ** nاُم عدد a می‌نامیم، هرگاه $b^n = a$. برای نمونه ۳ ریشهٔ پنجم ۲۴۳ و $+\sqrt{۲}$ و $-\sqrt{۲}$ ریشه‌های دهم ۳۲ هستند.

ریشهٔ دوم: اگر a عددی **نامنفی** باشد، ریشهٔ دوم آن مقداری است که در صورت به توان ۲ رساندن، برابر a شود. برای نمونه ۲− و ۲ ریشه‌های دوم عدد ۴ هستند. **هر عدد حقیقی مثبت** a، **دو ریشهٔ دوم** $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$ دارد.

ریشهٔ سوم: برای هر عدد حقیقی a، ریشهٔ سوم a مقداری است که در صورت به توان ۳ رساندن، برابر a شود. برای نمونه $-\frac{۱}{۲}$ ریشهٔ سوم $-\frac{۱}{۸}$ است. **هر عدد حقیقی فقط یک ریشهٔ سوم** دارد.

چاشنی: ریشه‌های مرتبهٔ زوج عدد مثبت a برابر، $\sqrt[۲n]{a}$ و $-\sqrt[۲n]{a}$ هستند؛ ولی ریشهٔ مرتبهٔ فرد عدد a فقط $\sqrt[۲n+۱]{a}$ است.

تذکر: اعداد منفی ریشهٔ مرتبهٔ زوج ندارند.

تست: کدام گزینه درست نیست؟

۱) ریشه‌های دوم عدد ۲۵ برابر با ۵ و ۵− است.

۲) عدد ۱۲۵− فقط یک ریشهٔ سوم دارد.

۳) ریشهٔ پنجم عدد $۴\sqrt{۲}$ برابر با $\sqrt{۲}$ است.

۴) ریشهٔ نهم عدد ۱۲۸ برابر با ۲ است.

پاسخ **گزینهٔ «۴»**

با توجه به تعریف ریشهٔ n اُم، گزینه‌های ۱، ۲ و ۳ درست‌اند؛ اما گزینهٔ ۴ نادرست است؛ زیرا: $۲^{۹} = ۵۱۲ \neq ۱۲۸$

چاشنی: به ازای هر عدد طبیعی $n \geq ۲$ ، n داریم:

n فرد	$\sqrt[n]{a^n} = a$	$(\sqrt[n]{a})^n = a$
n زوج	$\sqrt[n]{a^n} = \lvert a \rvert$	$\begin{cases} a \geq ۰ \Rightarrow (\sqrt[n]{a})^n = a \\ a < ۰ \Rightarrow (\sqrt[n]{a})^n = \text{تعریف نشده} \end{cases}$

تست: کدام گزینه نادرست است؟

۱) $\sqrt[۵]{-۳۲} = -۲$

۲) $\sqrt[۴]{۱۶} = \pm ۲$

۳) $\sqrt[۴]{(-۳)^{۴}} = ۳$

۴) $-\sqrt{۴۹} = -۷$

پاسخ **گزینهٔ «۲»**

با توجه به چاشنی گفته‌شده گزینه‌های ۱، ۳ و ۴ درست‌اند و گزینهٔ ۲ نادرست است، زیرا: $\sqrt[۴]{۱۶} = ۲$

فصل ۷
قدر مطلق

وعدهٔ ۱
تعریف قدرمطلق

$|x|$ همان فاصلهٔ x از مبدأ، روی محور اعداد حقیقی است. برای مثال $|-5| = |5| = 5$، زیرا فاصلهٔ هر دو عدد ۵ و ۵− از مبدأ برابر ۵ است.

حال به تعریف ریاضی قدرمطلق می‌پردازیم: $|x| = \begin{cases} x & ; \quad x \geq 0 \\ -x & ; \quad x < 0 \end{cases}$

به زبان خودمانی، اگر **عبارت داخل** قدرمطلق **نامنفی** باشد، حاصل قدرمطلق برابر با **خود عبارت** است و اگر عبارت داخل قدرمطلق مقداری **منفی** باشد، حاصل آن برابر با **قرینهٔ عبارت داخل** قدرمطلق است.

تست: حاصل $A = |2\sqrt{3} - 2| + |3 - \sqrt{7}| - |\sqrt{7} - 2\sqrt{3}|$ **کدام است؟**

۱) $4\sqrt{3}$ ۲) ۵ ۳) ۱ ۴) $2\sqrt{7}$

پاسخ **گزینهٔ «۳»**

علامت عبارت‌های داخل تک‌تک قدرمطلق‌ها را مشخص می‌کنیم:

$$|\underbrace{2\sqrt{3} - 2}_{\text{مثبت}}| = 2\sqrt{3} - 2$$

$$|\underbrace{3 - \sqrt{7}}_{\text{مثبت}}| = 3 - \sqrt{7}$$

$$|\underbrace{\sqrt{7} - 2\sqrt{3}}_{\text{منفی}}| = -(\sqrt{7} - 2\sqrt{3}) = -\sqrt{7} + 2\sqrt{3}$$

فصل ۱۳
حد و پیوستگی

وعدهٔ ۱
همسایگی

همسایگی: هر **بازهٔ باز شامل** عدد حقیقی x_0 را یک همسایگی x_0 می‌نامیم؛ به عبارت دیگر اگر $x_0 \in (a\,,b)$ باشد، آن‌گاه بازهٔ $(a\,,b)$ یک همسایگی x_0 است؛ برای نمونهٔ بازهٔ $(-۱\,,۰)$ یک همسایگی $-\frac{۱}{۳}$ است.

همسایگی محذوف: اگر بازهٔ $(a\,,b)$ یک همسایگی عدد حقیقی x_0 باشد، آن‌گاه مجموعهٔ **$(a\,,b)-\{x_0\}$** یک **همسایگی محذوف** x_0 نامیده می‌شود؛ برای نمونه مجموعهٔ $(\frac{۲}{۳}\,,\frac{۴}{۳})-\{۱\}$ یک همسایگی محذوف ۱ است.

همسایگی چپ و راست: اگر r عددی مثبت باشد، آن‌گاه **$(x_0\,,x_0+r)$** یک **همسایگی راست** x_0 و **$(x_0-r\,,x_0)$** یک **همسایگی چپ** x_0 نامیده می‌شود؛ برای نمونه بازهٔ $(۲/۵\,,۳)$ یک همسایگی راست $۲/۵$ و بازهٔ $(-۳\,,-۱)$ یک همسایگی چپ -۱ است.

وعدهٔ ۲
حد تابع در یک نقطه

فرض کنیم تابع f در بازه‌ای مانند (a,b) شامل نقطهٔ x_0 (به‌جز احتمالاً در خود x_0) تعریف شده باشد. حد تابع f در x_0

برابر عدد ℓ است، هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازهٔ دلخواه بتوان به ℓ نزدیک کرد، به شرط آن‌که x (از دو طرف راست و چپ) به اندازهٔ کافی به x_0 نزدیک شود. در این‌صورت می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$$

چاشنی: حد تابع در یک نقطه به مقدار تابع در آن نقطه ربطی **ندارد**؛ برای پیدا کردن حد تابع در یک نقطه باید رفتار تابع را در **نزدیکی** آن نقطه (چه از سمت چپ و چه از سمت راست) بررسی کرد.

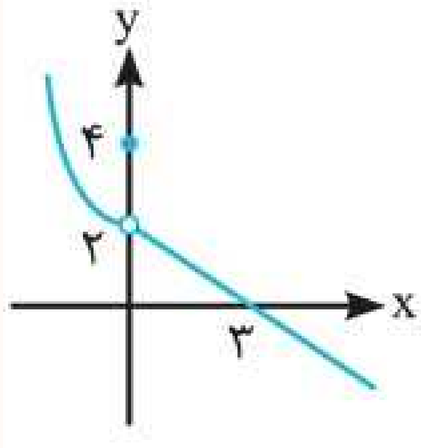
به‌طور کلی اگر دربارهٔ تابعی مانند f داشته باشیم $\lim_{x\to a} f(x)=\ell$، آن‌گاه دربارهٔ $f(a)$ یکی از حالت‌های زیر را داریم:

الف $f(a)$ موجود نیست.

ب $f(a)$ موجود است؛ ولی $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$

پ $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

تست: **نمودار تابع f به‌صورت زیر است. حاصل $\lim_{x\to 0} f(x) + f(0)$ کدام است؟**



۱) ۵

۲) ۶

۳) ۴

۴) ۷

پاسخ **گزینهٔ «۲»**

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 2\ ,\ f(0) = 4 \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) + f(0) = 6$$

پیوست
سؤالات کنکور ۹۸

کنکور سراسری ۹۸

۱. اگر $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ باشد، حاصل $\sqrt{1+\tan^2 x}\,(2\sin^2\frac{\pi}{4} - \sin^2 x)$ ، کدام است؟

۱) $\sin x$ ۲) $\cos x$ ۳) $-\sin x$ ۴) $-\cos x$

۲. سرعت یک قایق موتوری، در آب راکد ۱۰۰ متر در دقیقه است. این قایق فاصلهٔ ۱۲۰۰ متری در رودخانه را رفته و برگشته است. اختلاف زمان رفت و برگشت ۵ دقیقه است. سرعت آب رودخانه، چند متر در دقیقه است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۲۰ ۴) ۲۵

۳. مجموعه جواب نامعادلهٔ $3 > \frac{2x-3}{x+1} > 1$ ، به کدام صورت است؟

۱) $\mathbb{R} - [-6, 4]$ ۲) $\mathbb{R} - [-4, 6]$

۳) $x > 4$ ۴) $x < -6$

۴. گل‌فروشی از ۸ نوع گل مختلف، به‌چند طریق، می‌تواند دسته‌گل‌های متمایز درست کند، به‌طوری که در هر دسته ۴ یا ۵ یا ۶ شاخه مختلف، موجود باشد؟

۱) ۱۲۶ ۲) ۱۴۰ ۳) ۱۵۴ ۴) ۱۶۸

۵. اگر $3a + \sqrt{2a^2 + 4a} = 2$ باشد، عدد $\frac{a+1}{a}$ ، کدام است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۲/۵ ۳) ۳/۵ ۴) ۴/۵

پاسخ‌نامهٔ کنکور ۹۸

۱. گزینهٔ «۴»

x در ربع سوم قرار دارد، پس: $\cos x < ۰$

$$\sqrt{۱+\tan^۲ x} = \sqrt{\frac{۱}{\cos^۲ x}} = \frac{۱}{|\cos x|} = \frac{۱}{-\cos x}$$

$$۲\sin^۲ \frac{\pi}{۴} - \sin^۲ x = ۲(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲ - \sin^۲ x = ۱ - \sin^۲ x = \cos^۲ x$$

حاصل عبارت به صورت مقابل است: $\frac{۱}{-\cos x}.\cos^۲ x = -\cos x$

۲. گزینهٔ «۳»

سرعت آب در رودخانه را V در نظر می‌گیریم:

$$\frac{۱۲۰۰}{۱۰۰-V} - \frac{۱۲۰۰}{۱۰۰+V} = ۵ \Rightarrow \frac{۲V}{۱۰۰۰۰-V^۲} = \frac{۱}{۲۴۰}$$

$$\Rightarrow V^۲ - ۴۸۰V - ۱۰۰۰۰ = ۰$$

$$\Rightarrow (V+۵۰۰)(V-۲۰) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} V = ۲۰ \\ V = -۵۰۰ \text{ غیرقابل قبول} \end{cases}$$

۳. گزینهٔ «۱»

$$۱ < \frac{۲x-۳}{x+۱} < ۳ \xrightarrow{-۲} -۱ < \frac{۲x-۳}{x+۱} - ۲ < ۱$$

$$\Rightarrow -۱ < \frac{-۵}{x+۱} < ۱ \Rightarrow \left|\frac{-۵}{x+۱}\right| < ۱ \Rightarrow |x+۱| > ۵$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+۱ > ۵ \\ x+۱ < -۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > ۴ \\ x < -۶ \end{cases} \Rightarrow \mathbb{R} - [-۶,۴]$$