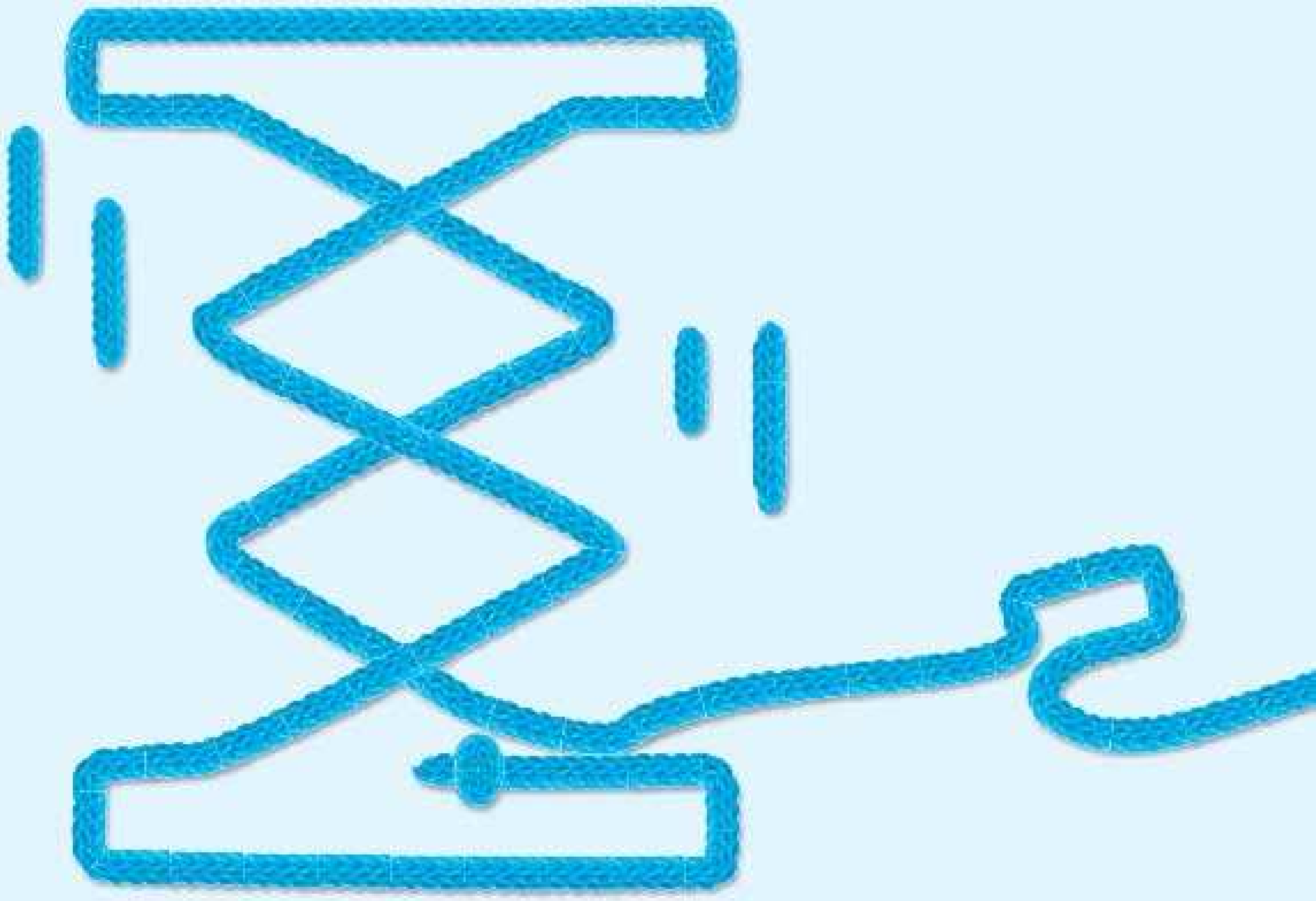
فصل ۹

کاربـرد مشتـق

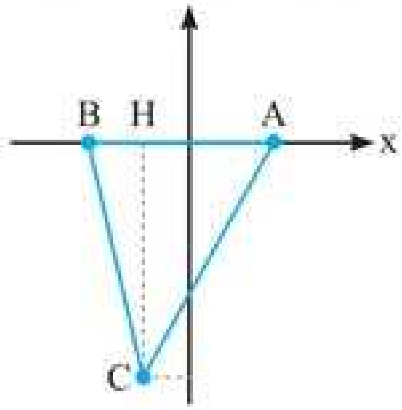
رسیدیم به آخر کتاب حسابان، کاربرد مشتق.

به نظر من این فصل هویت دانش‌آموز ریاضی است. درست است که پایان کتاب حسابان هستیم، اما یقین داشته باشید پایان کتاب حسابان، شروع رشته‌های فنی و مهندسی در دانشگاه است، پس سعی کنید این فصل را عمیق بخوانید که هم در کنکور و هم در دانشگاه موفق شوید. اگر فرمول‌های مشتق و مبحث تعیین علامت و معادله را قبلاً خوب آموخته باشید، در این فصل به مشکل نخواهید خورد.



$$f'(x)=\begin{cases}-۲(x-۱)(x+۲)-(x-۱)^۲ & ; \quad -۲<x\le ۱\\ ۲(x-۱)(x+۲)+(x-۱)^۲ & ; \quad x>۱ \vee x<-۲\end{cases}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow (x-۱)(۲x+۴+x-۱)=(x-۱)(۳x+۳)=۰\Rightarrow x=۱,\ x=-۱$$



نقاط بحرانی این تابع عبارتند از $A(۱,۰)$، $B(-۲,۰)$ و $C(-۱,-۴)$.

حال با رسم شکل مثلث مساحت آن را به‌دست می‌آوریم.

$$S=\frac{۱}{۲}|CH||AB|=\frac{۱}{۲}\times ۴\times ۳=۶$$

۱۵. گزینهٔ «۳»

البته واضح است که $x=۰$ نقطهٔ بحرانی تابع $y=|x|(x^۲-۱)$ است زیرا $y'(۰)$ وجود ندارد اما برای حل کامل و پیدا کردن سایر نقاط بحرانی، تابع را به صورت دوضابطه‌ای تبدیل می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}x(x^۲-۱) & ; \ x\ge ۰\\ -x(x^۲-۱) & ; \ x<۰\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}x^۳-x & ; \ x\ge ۰\\ x-x^۳ & ; \ x<۰\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}۳x^۲-۱ & ; \ x>۰\\ ۱-۳x^۲ & ; \ x<۰\end{cases}$$

$x=۰$ بحرانی است زیرا $f'_+(۰)=-۱$ ، $f'_-(۰)=۱$ حال به سراغ ریشهٔ مشتق می‌رویم.

$$y'=۰\Rightarrow ۳x^۲-۱=۰\Rightarrow x=\pm\frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

پس این تابع سه نقطهٔ بحرانی دارد.

۱۶. گزینهٔ «۳»

$f(x)$ در $x=۰$ (نقطهٔ مرزی) پیوسته است. ضابطه‌ها هم چند جمله‌ای هستند، پس:

$$f'(x)=\begin{cases}۳ & ; \ -۲\le x<۰\\ ۲x-۱ & ; \ ۰<x\le ۱\end{cases}$$

f در $x=۰$ پیوسته است اما $f'(۰)$ وجود ندارد زیرا $f'_+(۰)=-۱$ و $f'_-(۰)=۳$ است در نتیجه $x=۰$ نقطه بحرانی است. حال ریشهٔ مشتق را حساب می‌کنیم:

$$۲x-۱=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$$

ضمناً نقاط ابتدا و انتها نیز بحرانی‌اند.

در نتیجه مجموعهٔ نقاط بحرانی $\{-۲,۰,\frac{۱}{۲},۱\}$ است.

۱۷. گزینهٔ «۴»

$$f(x)=\sqrt[۳]{x^۳-۳x^۲+۴}\ ،\ x\in(-۱,۲)$$

برای محاسبهٔ نقاط بحرانی، ریشه‌های زیر رادیکال و ریشه‌های مشتق زیر رادیکال را حساب می‌کنیم:

$$P(x)=x^۳-۳x^۲+۴=۰\Rightarrow (x+۱)(x^۲-۴x+۴)=۰\Rightarrow (x+۱)(x-۲)^۲=۰\Rightarrow\begin{cases}x=-۱\\ x=۲\end{cases}$$

$$P'(x)=۳x^۲-۶x=۰\Rightarrow x=۰,۲$$

اما دامنهٔ تابع، $(-۱,۲)$ است، پس تنها نقطهٔ بحرانی این تابع $x=۰$ است.

رابطهٔ نمودارهای f و f'

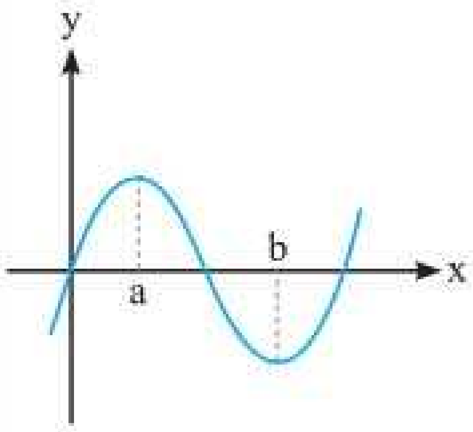
۱ در هر بازه از دامنه که $f'>0$ است، f صعودی اکید است و نمودار f' بالای محور x ها خواهد بود.

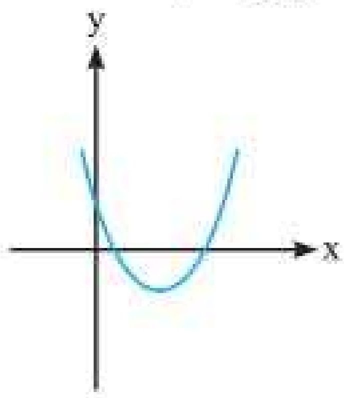
۲ در هر بازه از دامنه که $f'<0$ است، f نزولی اکید است و نمودار f' پایین محور x ها خواهد بود.

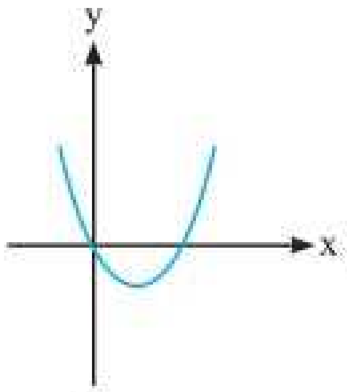
۳ اگر $f'(a)=0$ باشد، آن‌گاه مماس بر f در $x=a$ افقی است. این موضوع بدین معنی است که نمودار $y=f'(x)$ از نقطهٔ $(a,0)$ عبور می‌کند.

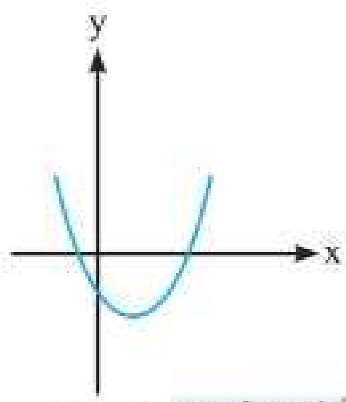
۴ اگر به ازای همهٔ x های بازهٔ $I\ (I\subseteq D_f)$، $f'(x)=0$ باشد، آن‌گاه f در بازهٔ I ثابت است، یعنی نمودار f' روی I منطبق بر محور x ها است.

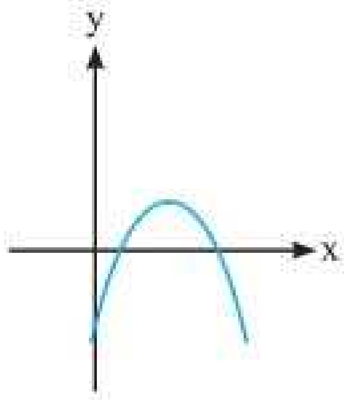
تست **اگر نمودار $f(x)$ به صورت مقابل باشد، نمودار f' چگونه می‌تواند باشد؟**



۱) 

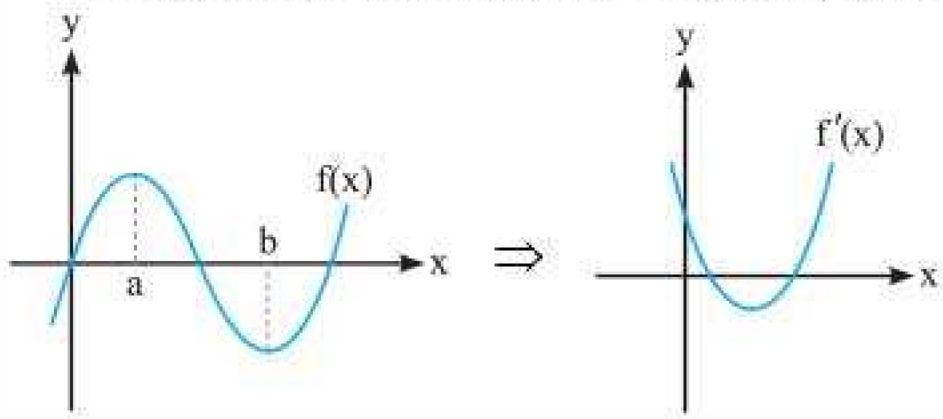
۲) 

۳) 

۴) 

پاسخ گزینهٔ «۱» تابع f در فاصلهٔ $(-\infty,a)$ صعودی اکید $(a>0)$، در فاصلهٔ (a,b) نزولی اکید، در فاصلهٔ $(b,+\infty)$ صعودی اکید است و هم‌چنین در دو نقطهٔ a و b مشتق صفر است. پس:

از چپ به راست، نمودار f' ابتدا باید بالای محور x، سپس پایین محور x ها و در نهایت مجدداً بالای محور x ها باشد و در نقطه با طول‌های مثبت محور x ها را قطع کند، پس گزینهٔ «۱» صحیح است.



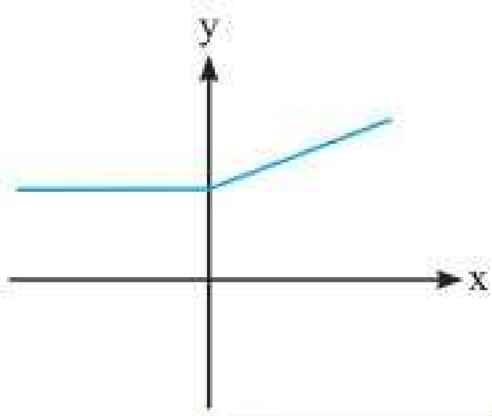
توابع صعودی و نزولی

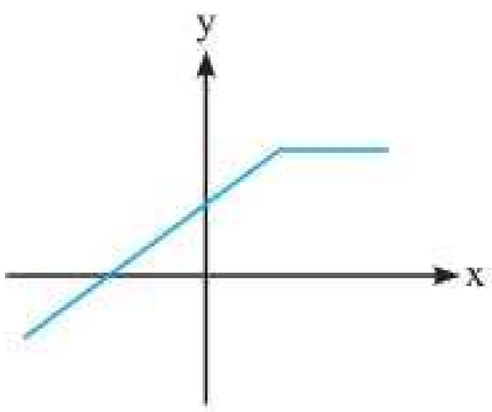
تا این‌جا در مورد توابع صعودی اکید، نزولی اکید و توابع ثابت صحبت کردیم. حال می‌خواهیم بررسی کنیم که چه تابعی صعودی و یا نزولی است.

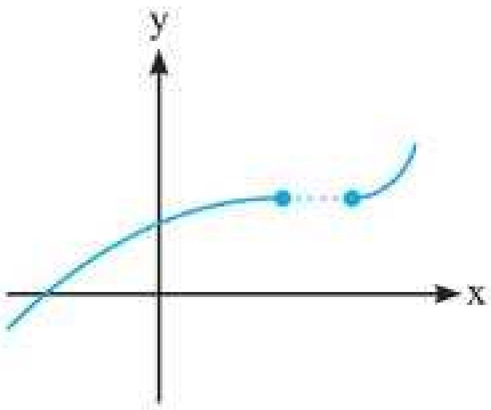
توابع صعودی

اگر برای هر x_2 و x_1 از دامنهٔ f داشته باشیم: $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \ge f(x_1)$

آن‌گاه گوییم f صعودی است، مانند شکل‌های زیر:



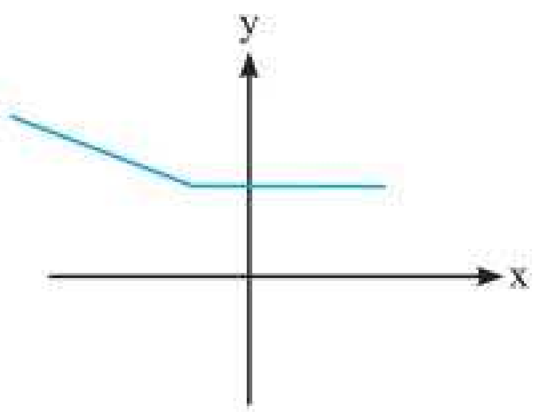


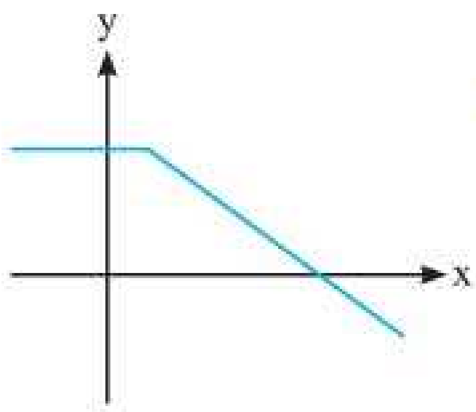


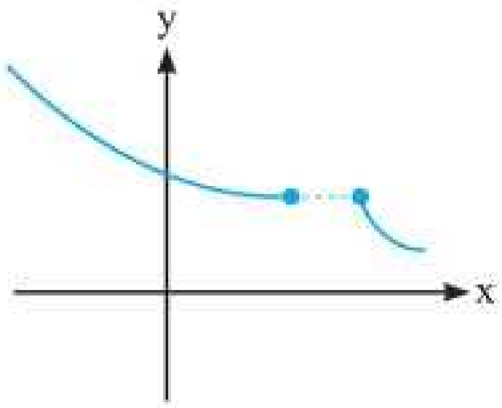
توابع نزولی

اگر برای هر x_1, x_2 از دامنهٔ f داشته باشیم: $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \le f(x_1)$

آن‌گاه گوییم f نزولی است. مانند شکل‌های زیر:



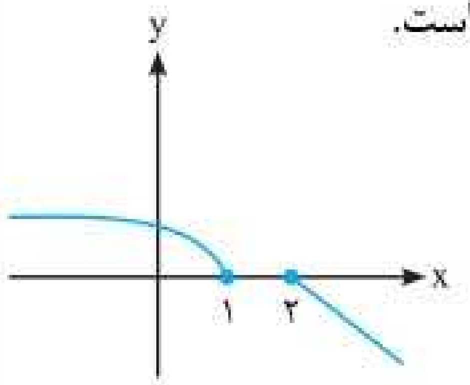




تست در مورد تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x} & ; \quad x\le 1\\ 2-x & ; \quad x\ge 2\end{cases}$، کدام گزینهٔ زیر کاملاً صحیح است؟

۱) تابع f نزولی است.
۲) تابع f صعودی اکید است.
۳) تابع f نزولی اکید است.
۴) تابع f صعودی است.

پاسخ گزینهٔ «۱» تابع را رسم می‌کنیم:



تابع در حال نزول است. فقط در نقطهٔ $x_1=1$ و $x_2=2$ عرض ثابت دارد و تغییر نکرده است، پس دقت کنید که تابع نزولی اکید نیست، فقط نزولی است.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

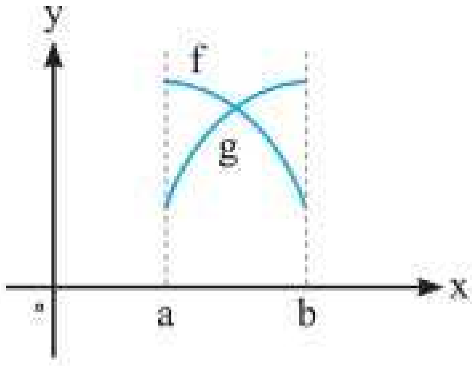
۱. تابع $f(x)=x^4-4x+1$ در فاصلهٔ $(-\infty, a]$ نزولی اکید است. حداکثر مقدار a چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲. کدام یک از توابع هموگرافیک زیر در بازهٔ $(0,+\infty)$ صعودی اکید است؟

۱) $y=\frac{2x-4}{x-1}$ ۲) $y=\frac{2x+4}{x-1}$ ۳) $y=\frac{2x-4}{x+1}$ ۴) $y=\frac{2x+21}{x+10}$

۳. نمودارهای دو تابع مشتق‌پذیر $\mathbf{f}$ و $\mathbf{g}$ به صورت روبه‌رو در بازهٔ $[a,b]$ می‌باشند. تابع $\frac{f}{g}$ از نظر یکنوایی در این بازه چه وضعی دارد؟

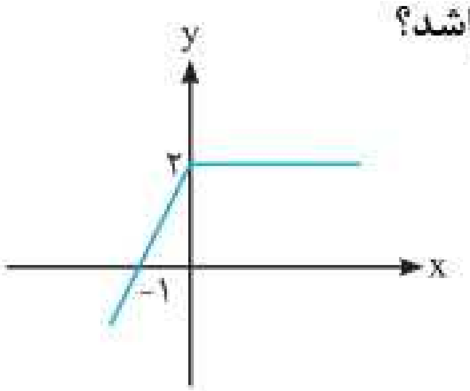


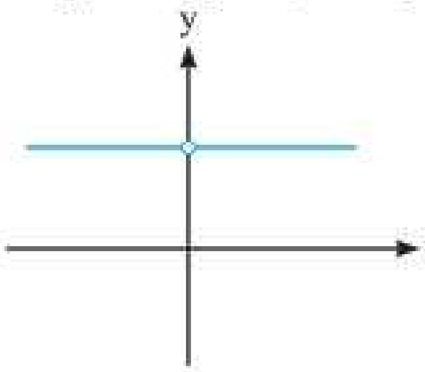
۱) نزولی اکید
۲) صعودی اکید
۳) ابتدا صعودی و سپس نزولی
۴) ابتدا نزولی و سپس صعودی

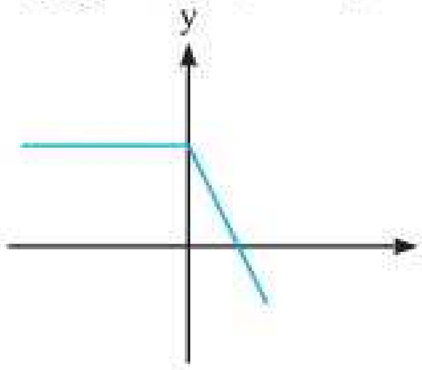
۴. اگر $f(x)$ تابع دلخواه غیرثابت باشد، کدام یک از توابع زیر حتماً غیریکنوا است؟

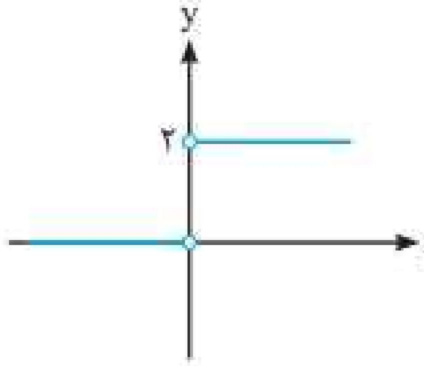
۱) $|f(x)|$ ۲) $f^2(x)$ ۳) $\frac{1}{4+f^2(x)}$ ۴) $f(|x|)$

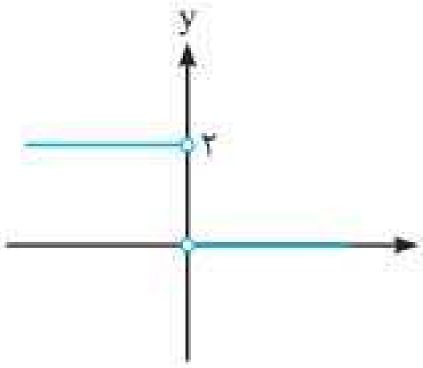
۵. نمودار $f(x)$ به صورت مقابل است. نمودار f' به کدام صورت می‌تواند باشد؟



۱)


۲)


۳)


۴)


۶. مجموعهٔ مقادیری از اعداد حقیقی که در آن تابع $f(x)=3\sqrt[3]{x}+|x|$ صعودی باشند، کدام است؟ (خارج ریاضی ۱۴۰۰)

۱) $[-1,\infty)$ ۲) $(-\infty,\infty)$ ۳) $[-1,0)\cup(0,\infty)$ ۴) $[-3\sqrt{3},0]$

۷. تعداد بازه‌هایی که تابع $f(x)=\frac{x^4-3}{x^2-2}\,;\,x\in(-2,2)$، در آن‌ها اکیداً نزولی باشد، کدام است؟ (خارج ریاضی ۱۴۰۰)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۸. کدام عبارت، برای تابع $f(x)=2\sqrt{x}-\frac{3}{2\sqrt[3]{x^2-1}}$، درست است؟ (سراسری ریاضی ۱۴۰۰)

۱) تابع f در بازهٔ $(0,1)\cup(1,\infty)$ صعودی است.
۲) تابع f در بازه‌های $(1,\infty)$ و $(0,1)$ صعودی است.
۳) تابع f در بازهٔ $(1,\infty)$ صعودی و در بازهٔ $(0,1)$ نزولی است.
۴) تابع f در بازهٔ $(1,\infty)$ نزولی و در بازهٔ $(0,1)$ صعودی است.

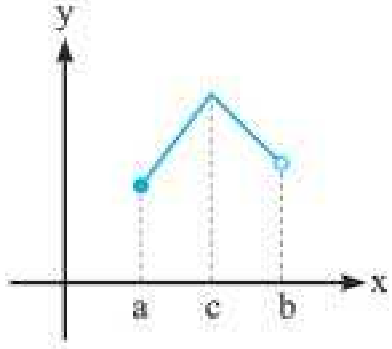
۹. بازه‌هایی که تابع $f(x)=\frac{x^4}{x^3-8}$ در آن‌ها اکیداً نزولی است را درنظر بگیرید. مینیمم طول این بازه‌ها، کدام است؟ (سراسری ریاضی ۱۴۰۰)

۱) 2 ۲) $\sqrt[3]{4}-1$ ۳) $2\sqrt[3]{4}$ ۴) $2(\sqrt[3]{4}-1)$

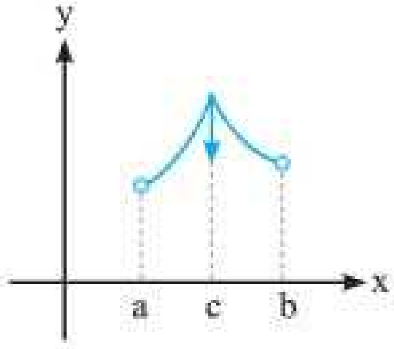
۲ نقطهٔ بحرانی

نقطهٔ $c \in D_f$ را نقطهٔ بحرانی تابع f می‌نامیم، هرگاه $f'(c)=0$ یا $f'(c)$ موجود نباشد. در اشکال زیر نمونه‌هایی از نقاط بحرانی مشخص شده است.

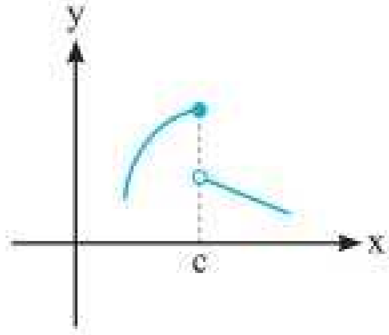
تذکر: نقاط انتهایی و ابتدایی بازهٔ $[a,b]$ عضو نقاط بحرانی هستند.



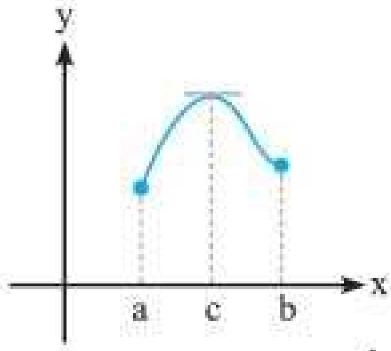
$f'(c)$ وجود ندارد، c و a بحرانی هستند.



$f'(c)$ وجود ندارد، c بحرانی است.



f در c ناپیوسته است، پس در c بحرانی است

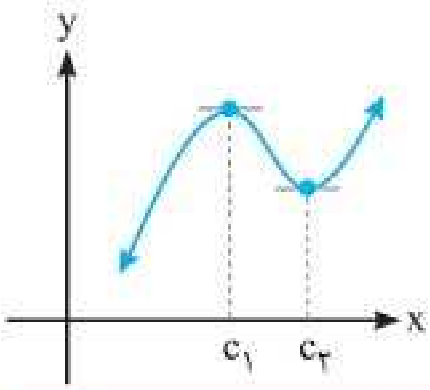


$f'(c)=0$ ، c ، a و b بحرانی هستند.

نقاط بحرانی توابع چندجمله‌ای

تابع چند جمله‌ای $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$ را در نظر بگیرید. این تابع با دامنهٔ $\mathbb{R}$ پیوسته و در همهٔ نقاط $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است پس نقاط بحرانی آن فقط در ریشه‌های مشتق رخ می‌دهد. مانند نمونهٔ مقابل:

c_1 و c_2 بحرانی‌اند چون: $f'(c_1)=f'(c_2)=0$



تست اگر نقطهٔ $A(-1,2)$ نقطهٔ بحرانی تابع $f(x)=x^4+ax+b$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{bh}$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۵ ۳) ۱/۶ ۴) ۶/۱

پاسخ گزینهٔ «۳» چون تابع چندجمله‌ای است پس مقدار مشتق در نقطهٔ بحرانی صفر است.

$$f'(x)=4x^3+a \Rightarrow f'(-1)=-4+a=0 \Rightarrow a=4 \quad , \quad f(-1)=2 \Rightarrow 1-4+b=2 \Rightarrow b=5$$

خواستهٔ مسئله $\dfrac{f'(1)}{5}$ است، پس: $f'(x)=4x^3+4 \Rightarrow f'(1)=8 \Rightarrow \dfrac{f'(1)}{5}=\dfrac{8}{5}=1/6$

نقطه بحرانی تابع $f(x)=x^4-4x+1$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ گزینهٔ «۱» $f'(x)=4x^3-4=0 \Rightarrow \quad x=1$

نقاط بحرانی توابع گویا

نقاط بحرانی تابع گویای $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$، ریشه‌های $f'(x)=0$ هستند.

نقاط بحرانی توابع ثابت

همهٔ نقاط دامنه تابع ثابت $y=c$ بحرانی هستند.

نقاط بحرانی توابع قدرمطلقی

اگر تابع $g(x)$ مشتق‌پذیر باشد، نقاط بحرانی تابع $f(x)=|p(x)|$ ریشه‌های دو معادلهٔ $p(x)=0$ و $p'(x)=0$ می‌باشند.

تست **نقاط بحرانی تابع $y=|x^2+4x+3|$ کدام است؟**

۱) $\{1,-1,2\}$ ۲) $\{-1,-2,3\}$ ۳) $\{-1,-2,-3\}$ ۴) $\{3,2,1\}$

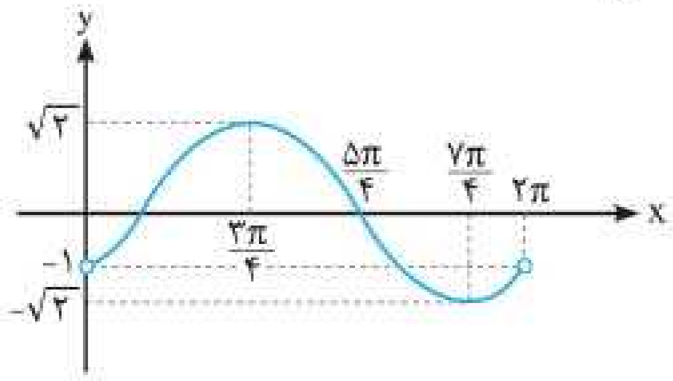
پاسخ گزینهٔ «۳»

$$\begin{cases} x^2+4x+3=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-3 \end{cases} \Rightarrow \text{نقاط بحرانی}=\{-1,-2,-3\} \\ 2x+4=0 \Rightarrow x=-2 \end{cases}$$

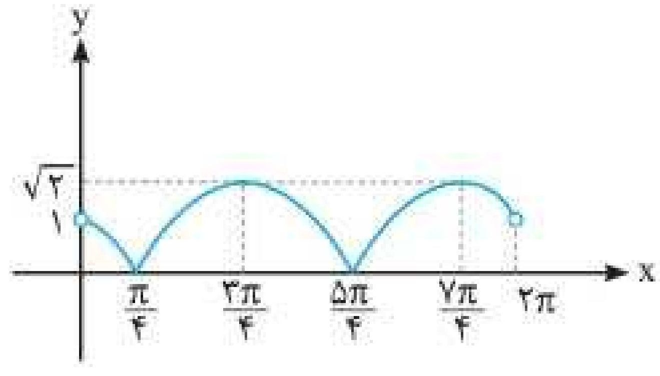
تعداد نقاط بحرانی تابع $f(x)=|\sin x-\cos x|$ در فاصلهٔ $(0,2\pi)$ چندتاست؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۲

پاسخ گزینهٔ «۳» روش اول: از رابطهٔ مثلثاتی $\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{2}\sin(\alpha-\frac{\pi}{4})$ استفاده می‌کنیم و $f(x)$ را ساده می‌کنیم و سپس آن را رسم می‌کنیم. $f(x)=|\sin x-\cos x|=\sqrt{2}\,|\sin(x-\frac{\pi}{4})|$



$y=\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})$



$y=\sqrt{2}\,|\sin(x-\frac{\pi}{4})|$

با توجه به نمودار، تابع $y=\sqrt{2}\,|\sin(x-\frac{\pi}{4})|$ چهار نقطهٔ بحرانی دارد. نقاط $x=\frac{\pi}{4}$ و $x=\frac{5\pi}{4}$ نقاط گوشه‌ای هستند و در $x=\frac{3\pi}{4}$ و $x=\frac{7\pi}{4}$ مشتق برابر صفر است.

روش دوم:

$$f(x)=\sin x-\cos x=0 \Rightarrow \sin x=\cos x \Rightarrow \tan x=1 \xrightarrow{x\in(0,2\pi)} x=\frac{\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4}$$

$$f'(x)=\cos x+\sin x=0 \Rightarrow \tan x=-1 \xrightarrow{x\in(0,2\pi)} x=\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$$

نقاط بحرانی توابع رادیکالی

تابع $y=\sqrt[n]{P(x)}$ را در نظر بگیرید، هدف محاسبهٔ نقطهٔ بحرانی است.

مشتق این تابع $y'=\dfrac{P'(x)}{n\sqrt[n]{P(x)^{n-1}}}$ است. اگر $y'=0$ باشد، آن‌گاه $P'(x)=0$ و اگر y' موجود نباشد، $P(x)=0$ است.

بنابراین نقاط بحرانی تابع $(n\in\mathbb{N})$ ، $y=\sqrt[n]{P(x)}$ از حل معادلات $\begin{cases}P(x)=0\\P'(x)=0\end{cases}$ حاصل می‌شود، به شرطی که ریشه‌های به‌دست آمده نقاطی از دامنه باشند.

تست تابع $y=\sqrt[5]{x(x-1)^2}$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ گزینهٔ «۳» با توجه به نکات گفته شده، چون زیر رادیکال $P(x)=x(x-1)^2$ است و $D_f=\mathbb{R}$ برای محاسبهٔ نقاط بحرانی $P=0$ و $P'=0$ را حل می‌کنیم:

$$P(x)=x(x-1)^2=0\Rightarrow x=0\ ,\ x=1$$

$$P'(x)=(x-1)^2+2x(x-1)=0\Rightarrow(x-1)(x-1+2x)=0\Rightarrow x=1,x=\frac{1}{3}$$

پس مجموعه نقاط بحرانی $\{0,1,\frac{1}{3}\}$ می باشد.

نقاط بحرانی توابع چندضابطه‌ای

برای یافتن نقاط بحرانی توابع چندضابطه‌ای، تک‌تک ضابطه‌ها را بررسی و نقاط بحرانی آن‌ها را به‌دست می‌آوریم و ضمناً در نقاط مرزی (جداکنندهٔ ضابطه‌ها) بحرانی‌ها را بررسی می‌کنیم.

تست تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}x^2-x & ; -1\le x<1\\ x^3 & ; 1\le x<2\\ 5x-2 & ; 2\le x<3\\ x^2-x+7 & ; x\ge 3\end{cases}$ چند نقطهٔ بحرانی مشتق ناپذیر دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ گزینهٔ «۲» ابتدا پیوستگی این تابع را در نقاط مرزی بررسی می‌کنیم.

$f(1)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=1$ ، $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=1-1=0\Rightarrow$ f در $x=1$ پیوسته نیست.

$f(2)=\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=5\times2-2=8$ ، $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=8\Rightarrow$ f در $x=2$ پیوسته است.

$$\left.\begin{matrix}f(3)=\lim\limits_{x\to3^+}f(x)=9-3+7=13\\ \lim\limits_{x\to3^-}f(x)=5\times3-2=13\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$ f در $x=3$ پیوسته است.

مشتق تابع عبارت است از:

$$f'(x)=\begin{cases}2x-1 & ; -1<x<1\\ 3x^2 & ; 1\le x<2\\ 5 & ; 2\le x<3\\ 2x-1 & ; x\ge3\end{cases}$$

مقدار تابع f' در نقطهٔ مرزی $x=۲$ وجود ندارد زیرا: $f'_+(۲)=۵$ ، $f'_-(۲)=۱۲$

f' در $x=۳$ وجود دارد و مقدار آن $f'(۳)\neq ۰$ زیرا: $f'_+(۳)=۵$ ، $f'_-(۳)=۵$

اما ریشهٔ مشتق: $f'=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$

توجه کنید که f' در $x=-۱$ نیز وجود ندارد پس در مجموع این تابع در نقاط $\{-۱,۱,۲,\frac{۱}{۲}\}$ بحرانی است و در ۳ نقطه از آنها مشتق ناپذیر است.

نقاط بحرانی توابع براکتی

تابع $[P(x)]$ در تمام نقاط دامنهٔ خود بحرانی است.

نقاط بحرانی توابع ترکیبی

در توابع ترکیبی ابتدا دامنه را تعیین می‌کنیم، سپس مشتق تابع را حساب می‌کنیم و با توجه به نوع تابع نقاطی که مشتق صفر باشد و یا وجود نداشته باشد را به‌دست می‌آوریم.

تست مجموعه طول نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x-۲|\sqrt[۳]{x^۲}$ کدام است؟ (ریاضی ۸۵)

۱) $\{۰,\frac{۴}{۵},۲\}$ ۲) $\{۰,\frac{۲}{۳},۲\}$ ۳) $\{۰,۱\}$ ۴) $\{\frac{۲}{۳},۲\}$

پاسخ گزینهٔ «۱» $x=۲$ و $x=۰$ نقاط بحرانی تابع $f(x)=|x-۲|\sqrt[۳]{x^۲}$ هستند، زیرا $f'(۲)$ و $f'(۰)$ وجود ندارد. ریشهٔ مشتق نیز نقطهٔ بحرانی است:

$$f(x)=\begin{cases}(x-۲)\sqrt[۳]{x^۲} & ;\ x\geq ۲\\ (۲-x)\sqrt[۳]{x^۲} & ;\ x<۲\end{cases}$$

چون ضابطه‌ها قرینهٔ یکدیگر هستند پس کافی است که مشتق یکی از ضابطه‌ها را حساب کنیم و ریشهٔ آن را به‌دست آوریم.

$$y=(x-۲)\sqrt[۳]{x^۲}\Rightarrow y'=\sqrt[۳]{x^۲}+\frac{۲(x-۲)}{۳\sqrt[۳]{x}}=\frac{۵x-۴}{۳\sqrt[۳]{x}}=۰\Rightarrow x=\frac{۴}{۵}$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱۰. تابع $f(x)=-۲x^۳+۳x^۲$ در فاصلهٔ $[-\frac{۱}{۲},۲]$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

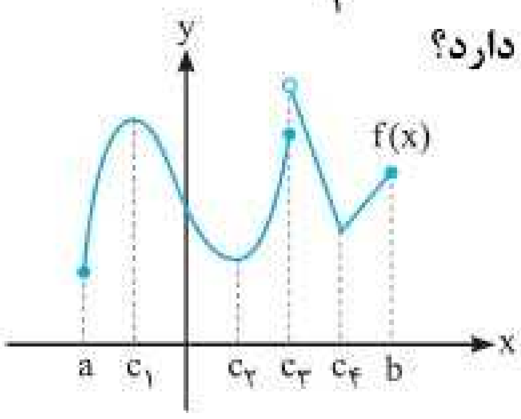
۱) ۴ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۲

۱۱. اگر تابع $y=x^۳+x^۲+ax+b$ دو نقطهٔ بحرانی داشته باشد، حدود a کدام است؟

۱) $a>\frac{۱}{۳}$ ۲) $a>۱$ ۳) $a<۰$ ۴) $a<\frac{۱}{۳}$

۱۲. اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد، این تابع چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

۱) ۵
۲) ۷
۳) ۴
۴) ۶



۱۳. نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^2(x-2)^2$ سه رأس یک مثلث‌اند، نوع این مثلث کدام است؟ (تجربی ۸۵)

۱) متساوی‌الاضلاع
۲) فقط متساوی‌الساقین
۳) فقط قائم‌الزاویه
۴) قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین

۱۴. نقاط بحرانی بر روی نمودار تابع $f(x)=(x-1)|x^2+x-2|$ سه رأس مثلثی هستند، مساحت این مثلث کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۲)

۱) ۴ ۲) ۴/۵ ۳) ۶ ۴) ۸

۱۵. تابع $y=|x|(x^2-1)$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۶. تعداد نقاط بحرانی تابع $f(x)=\begin{cases}3x & ; \ -2\le x\le 0\\ x^2-x & ; \ 0<x\le 1\end{cases}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) صفر

۱۷. تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x^2+4}$ روی بازهٔ $(-1,2)$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

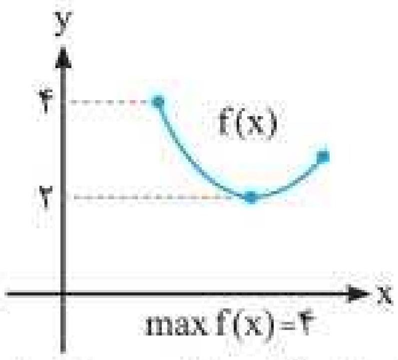
۱) ۳ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) ۱

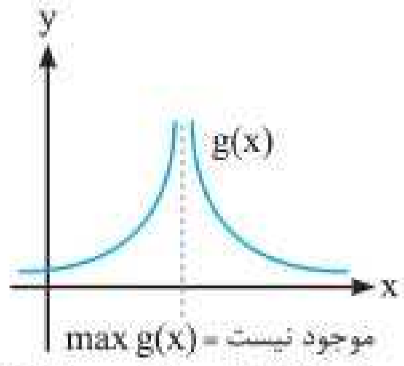
۳ اکسترمم‌های مطلق

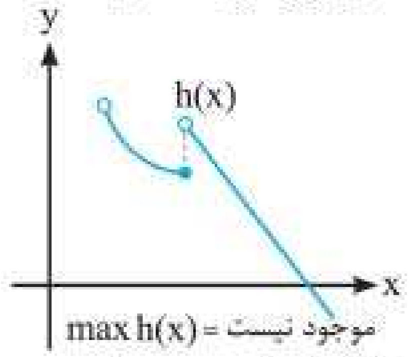
فرض کنید D دامنهٔ تابع f و نقطهٔ c عضو دامنه باشد، می‌گوییم:

الف) مقدار $f(c)$ ماکزیمم (ماکزیمم سراسری یا مطلق) تابع f روی D است، به شرطی که به ازای هر x عضو D داشته باشیم: $f(x)\le f(c)$

به عبارت ساده‌تر عرض بالاترین نقطه در نمودار f، در صورت وجود، ماکزیمم تابع f است. به نمونه‌های زیر توجه کنید:

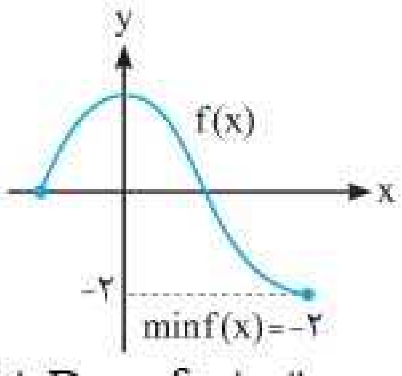


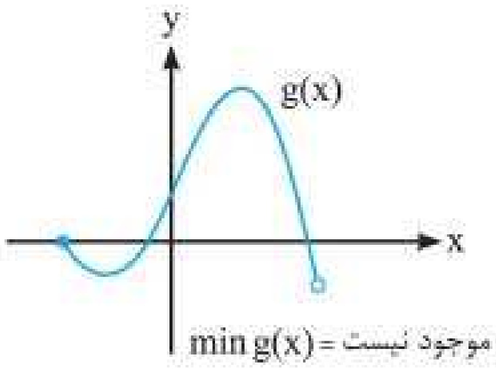


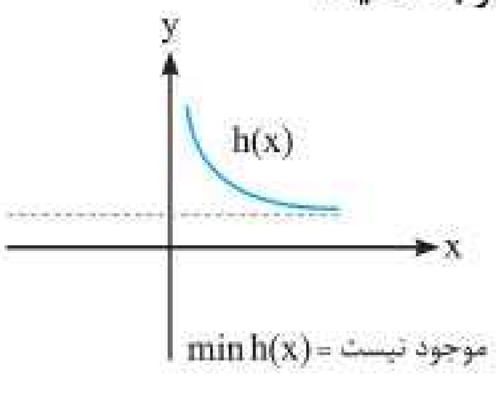


ب) $f(c)$ مقدار مینیمم (مینیمم سراسری یا مطلق) تابع f روی D است، به شرطی که به ازای هر x عضو D داشته باشیم: $f(x)\ge f(c)$

به عبارت دیگر عرض پایین‌ترین نقطه در نمودار f، در صورت وجود، مینیمم تابع f است. به نمونه‌های زیر توجه کنید:



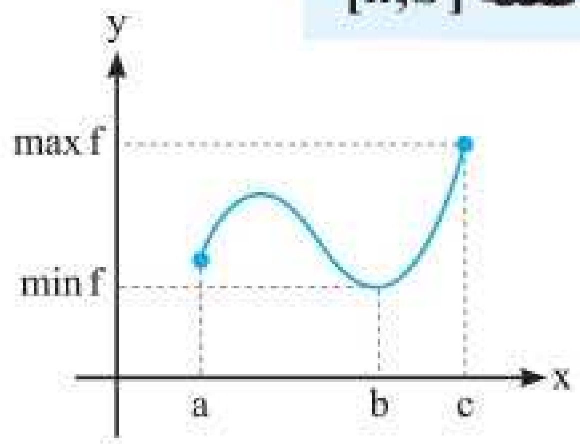




پ) $f(c)$ مقدار اکسترمم مطلق تابع f روی D است به شرطی که ماکزیمم مطلق یا مینیمم مطلق تابع f روی D باشد.

نکته: یکی از روش‌های یافتن اکسترمم‌های سراسری (مطلق) رسم تابع است.

اکسترمم‌های مطلق تابع پیوسته $f(x)$ در فاصلهٔ $[a,b]$



نمودار تابع پیوسته $y=f(x)$ در فاصلهٔ $[a,b]$ را در شکل روبه‌رو ببینید.

ماکزیمم مطلق تابع در نقطهٔ انتهایی راست c اتفاق افتاده است و مینیمم مطلق این تابع در نقطهٔ بحرانی b رخ داده است.

قضیه

اگر تابع f در بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد، آن‌گاه تابع f در این بازه هم max و هم min مطلق دارد.

اگر تابع f روی بازهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد، آن‌گاه برای یافتن اکسترمم‌های مطلق تابع در این بازه ابتدا نقاط بحرانی تابع را حساب می‌کنیم بزرگ‌ترین عدد به‌دست آمده max و کوچک‌ترین آن min مطلق تابع f می‌باشد.

تست بیش‌ترین مقدار تابع $f(x)=۲x^۳-۳x^۲+۲$ در فاصلهٔ $[-۲,۱]$ و کم‌ترین مقدار تابع $g(x)=\frac{۱}{۳}x^۳-x^۲$ در فاصلهٔ $[۰,۱]$ به‌ترتیب از راست به چپ کدام است؟

۱) $۲, -\frac{۲}{۳}$ ۲) $۲, -۳$ ۳) -۲۶، صفر ۴) $۱, -\frac{۴}{۳}$

پاسخ گزینهٔ «۱»

$$f(x)=۲x^۳-۳x^۲+۲ \Rightarrow f'(x)=۶x^۲-۶x=۰ \Rightarrow x=۰\,,۱$$

$$\begin{array}{c|ccc} x & -۲ & ۰ & ۱ \\ \hline f(x) & -۲۶ & ۲ & ۱ \end{array} \Rightarrow \max f(x)=۲$$

$$g(x)=\frac{۱}{۳}x^۳-x^۲ \Rightarrow g'(x)=x^۲-۲x=۰ \Rightarrow x=۰\,,۲$$

$$\begin{array}{c|cc} x & ۰ & ۱ \\ \hline g(x) & ۰ & -\frac{۲}{۳} \end{array} \Rightarrow \min g(x)=-\frac{۲}{۳}$$

اکسترمم‌های مطلق توابع چندجمله‌ای

تابع چندجمله‌ای $f(x)=a_۰+a_۱x+a_۲x^۲+...+a_nx^n\,,a_n\neq۰$ را در نظر بگیرید. در مورد اکسترمم‌های مطلق این تابع در حالت‌های مختلف n بحث می‌کنیم:

الف) اگر n زوج و $a_n>۰$ باشد آن‌گاه $f(x)$ مینیمم مطلق دارد و ماکزیمم مطلق ندارد.

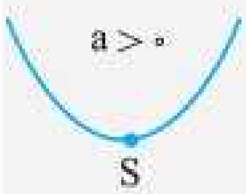
ب) اگر n زوج و $a_n<۰$ باشد آن‌گاه $f(x)$ ماکزیمم مطلق دارد و مینیمم مطلق ندارد.

پ) اگر n فرد باشد آن‌گاه تابع $f(x)$ ماکزیمم و مینیمم مطلق ندارد.

نکته: حالت خاص نکات بالا برای $n=۲$ به صورت تابع درجهٔ دوم $y=ax^۲+bx+c$ خواهد بود.

$$\max y=f(-\frac{b}{۲a})=-\frac{\Delta}{۴a}$$

$$\min y=f(-\frac{b}{۲a})=-\frac{\Delta}{۴a}$$



اکسترمم‌های مطلق توابع مثلثاتی

در بسیاری از توابع مثلثاتی سینوسی و کسینوسی می‌توانیم برد توابع را به کمک روابط مثلثاتی به‌دست آوریم. مهم‌ترین روابط به شرح زیر هستند:

۱) $-1\le \sin^{2n-1}\alpha \le 1$

۲) $-1\le \cos^{2n-1}\alpha \le 1$

۳) $0\le \sin^{2n}\alpha \le 1$

۴) $0\le \cos^{2n}\alpha \le 1$

۵) $0\le |\sin\alpha| \le 1$

۶) $0\le |\cos\alpha| \le 1$

۷) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$

۸) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-\frac{3}{4}\sin^2 2\alpha$

۹) $-\sqrt{a^2+b^2}\le a\sin\alpha+b\cos\alpha\le\sqrt{a^2+b^2}$

۱۰) $-(|a|+|b|)\le a\sin x+b\cos y\le(|a|+|b|)$

۱۱) $2^{1-n}\le \sin^{2n}\alpha+\cos^{2n}\alpha\le 1,(n\ge 2,n\in\mathbb{N})$

۱۲) $-1\le \sin^{2n+1}\alpha+\cos^{2n+1}\alpha\le 1\ ,(n\in\mathbb{N})$

تست برد تابع $y=\sin^4 x+2$ کدام است؟

۱) $[1,4]$ ۲) $[2,3]$ ۳) $[0,2]$ ۴) $[1,3]$

پاسخ گزینهٔ «۲»

$$0\le \sin^4 x\le 1\xrightarrow{+2}2\le y\le 3\Rightarrow R=[2,3]$$

برد تابع $y=\frac{4}{|\cos x|+3}$ کدام است؟

۱) $[0,\frac{4}{3}]$ ۲) $[1,\frac{4}{5}]$ ۳) $[1,\frac{4}{3}]$ ۴) $[1,2]$

پاسخ گزینهٔ «۳»

$$0\le|\cos x|\le 1\xrightarrow{+3}3\le|\cos x|+3\le 4\xrightarrow{\text{عکس}}\frac{1}{4}\le\frac{1}{|\cos x|+3}\le\frac{1}{3}\xrightarrow{\times 4}1\le y\le\frac{4}{3}$$

محاسبهٔ برد تابع $y=a\sin^2 x+b\sin x+c$

برای محاسبهٔ برد تابع $y=a\sin^2 x+b\sin x+c$ روی دامنهٔ خود کافی است به جای $\sin x$ سه عدد ۱ و ۱- و $-\frac{b}{2a}$ (به شرطی که $|-\frac{b}{2a}|<1$ باشد) قرار دهیم. بیش‌ترین مقدار به‌دست آمده max مطلق و کمترین آن min مطلق است. توجه داشته باشید که در مورد تابع $y=a\cos^2 x+b\cos x+c$ نیز به همین صورت عمل می‌کنیم.

تست برد تابع $y=3\cos^2 x-2\cos x+\frac{1}{3}$ کدام است؟

۱) $[1,5]$ ۲) $[0,\frac{16}{3}]$ ۳) $[1,\frac{16}{5}]$ ۴) $[-1,\frac{16}{3}]$

پاسخ گزینهٔ «۲»

$$\left.\begin{array}{l}\cos x=1\Rightarrow y=3-2+\frac{1}{3}=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}\\ \cos x=-1\Rightarrow y=3+2+\frac{1}{3}=5+\frac{1}{3}=\frac{16}{3}\\ \cos x=-\frac{b}{2a}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\Rightarrow y=3\times\frac{1}{9}-2\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=0\end{array}\right\}\Rightarrow 0\le y\le\frac{16}{3}$$

محاسبه برد تابع پیوسته

برای محاسبه برد تابع پیوسته $f(x)$، ابتدا دامنه آن را بدست می‌آوریم. سپس در دامنه به‌دست آمده اکسترمم‌های مطلق را حساب می‌کنیم.

تست برد تابع $f(x)=2x\sqrt{1-x^2}$ کدام است؟

۱) $[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}]$ ۲) $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ ۳) $[-2,2]$ ۴) $[-1,1]$

پاسخ گزینهٔ «۴» برای محاسبهٔ برد توابع همواره ابتدا دامنهٔ آنها را به‌دست می‌آوریم و سپس مانند سایر مسائل اکسترمم‌های مطلق (سراسری) را در بازهٔ دامنه، محاسبه می‌کنیم و به کمک آن برد را به‌دست می‌آوریم.

$$1-x^2\ge 0\Rightarrow x^2\le 1\Rightarrow -1\le x\le 1\Rightarrow D_f=[-1,1]$$

$$f(x)=2x\sqrt{1-x^2}\Rightarrow f'(x)=2(\sqrt{1-x^2}-\frac{2x^2}{2\sqrt{1-x^2}})=2(\frac{1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}})$$

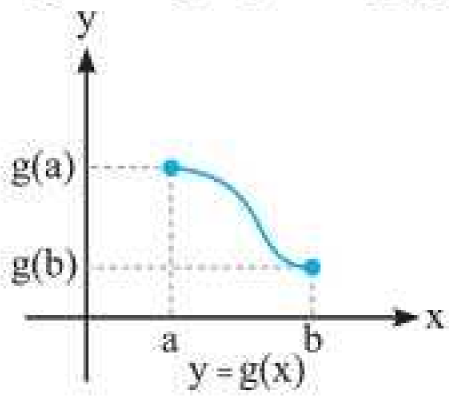
$$f'(x)=0\Rightarrow 1-2x^2=0\Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

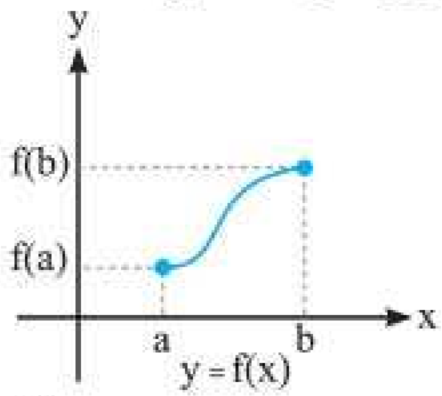
$$f(\frac{1}{\sqrt{2}})=2\times\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}}=1\ ,\ f(\frac{-1}{\sqrt{2}})=2\times\frac{-1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}}=-1$$

$$f(1)=0\ ,\ f(-1)=0\Rightarrow R_f=[-1,1]$$

برد توابع یکنوای پیوسته

به نمودارهای زیر توجه کنید. تابع $f(x)$ در فاصلهٔ $[a,b]$ صعودی اکید و تابع $g(x)$ در فاصلهٔ $[a,b]$ نزولی اکید هستند. ضمنا هر دو پیوسته‌اند. برد تابع f به‌صورت $[f(a),f(b)]$ و برد تابع g به‌صورت $[g(b),g(a)]$ است.





اگر تابع $y=f(x)$ در فاصلهٔ $[a,b]$ پیوسته و صعودی اکید و یا نزولی اکید باشد، آن‌گاه برد تابع در حالت صعودی $[f(a),f(b)]$ و در حالت نزولی $[f(b),f(a)]$ خواهد بود.

تست برد تابع $f(x)=x^5+5x$ در فاصله‌ی $[-1,0]$ کدام است؟

۱) $[-6,0]$ ۲) $[0,6]$ ۳) $[-6,6]$ ۴) $[0,7]$

پاسخ گزینهٔ «۱» $f'(x)=5x^4+5>0\Rightarrow$ صعودی اکید $\Rightarrow R_f=[f(-1),f(0)]=[-6,0]$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱۸. مجموع بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ در فاصله $[1,3]$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{4}{3}$

۱۹. قدرمطلق تفاضل بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار تابع $f(x)=\begin{cases}|\sin x| & ; 0\le x\le \pi\\ 2 & ; x>\pi\end{cases}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۲۰. مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-15x$، در بازهٔ $[-4,3]$، کدام است؟

۱) ۱۸- و ۲۴ ۲) ۴۵- و ۲۷ ۳) ۳۶- و ۲۷ ۴) ۲۷- و ۳۶ (تجربی ۹۵)

۲۱. ماکزیمم مطلق تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{1}{x^4-4x^3+4x^2+5}$ کدام است؟ (ریاضی ۸۵)

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{5}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۲۲. فاصلهٔ نقطهٔ مینیمم مطلق تابع $f(x)=\frac{x^2+2x}{(x-1)^2}$، از خط مجانب قائم آن کدام است؟ (ریاضی ۹۸)

۱) ۱ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

۲۳. فرض کنید $f(x)=\begin{cases}-1 & x<-1\\ x & -1\le x\le 1\\ 1 & x>1\end{cases}$ و $g(x)=1-x^2$. ماکزیمم مقدار تابع $gof-fog$، کدام است؟ (خارج ریاضی ۱۴۰۰)

۱) ۱- ۲) صفر ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

۴ بهینه‌سازی

فرآیند حل مسائل بهینه‌سازی به شرح زیر است:

۱. درصورت امکان شکلی برای مسئله رسم می‌کنیم و ابعاد آن را نام‌گذاری می‌کنیم.
۲. پارامتری که می‌خواهیم کم‌ترین یا بیش‌ترین شود را شناسایی می‌کنیم وبرای آن فرمولی می‌نویسیم.
۳. تعداد متغیرها در پارامتر فوق را با استفاده از فرمول‌های ریاضی و اطلاعات مسئله به یک متغیر می‌رسانیم.
۴. اکسترمم‌های مطلق را محاسبه می‌کنیم.

تست کوتاه‌ترین فاصله‌ی مبدأ مختصات از نقاط منحنی به معادله‌ی $y=\frac{2}{x^2}$ کدام است؟ (ریاضی ۸۸)

۱) ۱ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) ۲

پاسخ گزینهٔ «۲»

$$M(x,\frac{2}{x^2})\Rightarrow |OM|=f(x)=\sqrt{x^2+\frac{4}{x^4}}\ ,\ g(x)=x^2+\frac{4}{x^4}$$

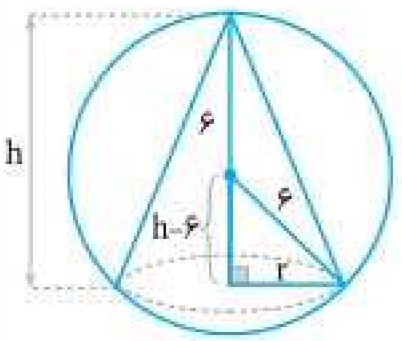
$$g'(x)=۲x+\frac{۰-۴x^۳\times ۴}{x^۸}=۲x-\frac{۱۶}{x^۵}=۰\Rightarrow x^۶=۸$$

$$\Rightarrow x^۲=۲\Rightarrow g(x)=۲+\frac{۴}{۲^۲}=۳\Rightarrow \min|OM|=\sqrt{۳}$$

حجم بزرگ‌ترین مخروطی که در دایره‌ای به شعاع ۶ محاط می‌شود، چقدر است؟

۱) $\frac{۲۵۶\pi}{\sqrt{۳}}$ ۲) $\frac{۲۵۶\pi}{۳\sqrt{۳}}$ ۳) $\frac{۲۵۶\pi}{۳}$ ۴) $\frac{۲۵۶\pi}{۹}$

پاسخ گزینهٔ «۳»



$$V_{\text{مخروط}}=\frac{۱}{۳}\pi r^۲h$$

$$(h-۶)^۲+r^۲=۳۶\Rightarrow h^۲-۱۲h+۳۶+r^۲=۳۶\Rightarrow r^۲=۱۲h-h^۲$$

$$V=\frac{\pi}{۳}h(۱۲h-h^۲)\Rightarrow V=\frac{\pi}{۳}(۱۲h^۲-h^۳)$$

$$V'=\frac{\pi}{۳}(۲۴h-۳h^۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}h=۰ \text{ غ‌ق‌ق}\\ h=۸\end{cases}$$

$$V=\frac{\pi h^۲}{۳}(۱۲-h)\Rightarrow V_{max}=\frac{۶۴\pi}{۳}\times ۴=\frac{۲۵۶\pi}{۳}$$

نکات بهینه‌سازی

۱ اگر مجموع دو عدد مثبت، ثابت باشد، حاصلضرب آن‌ها زمانی ماکزیمم است که آن دو عدد برابر باشند.

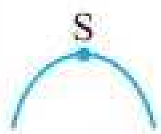
تست بیشترین مقدار حاصل ضرب دو عدد مثبت که مجموع آن‌ها برابر ۱۰ باشد، چقدر است؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۴ ۳) ۲۵ ۴) ۴۰

پاسخ گزینهٔ «۳»

$$\text{روش اول:}\begin{cases}x+y=۱۰\Rightarrow y=۱۰-x\\ A=xy=x(۱۰-x)=۱۰x-x^۲\Rightarrow A'=۱۰-۲x=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۵\\y=۵\end{cases}\Rightarrow Max(xy)=۵\times۵=۲۵\end{cases}$$

$$\text{روش دوم}\Rightarrow\begin{cases}x+y=۱۰\\ xy=Max\end{cases}\Rightarrow x=y=۵$$



$$\max(xy)=۲۵$$

تذکر اگر $x+y+z=A$ مقدار ثابتی باشد، آن‌گاه حاصل‌ضرب xyz وقتی ماکزیمم است که $x=y=z=\frac{A}{۳}$ یعنی:

$$\max(xyz)=(\frac{A}{۳})^۳$$

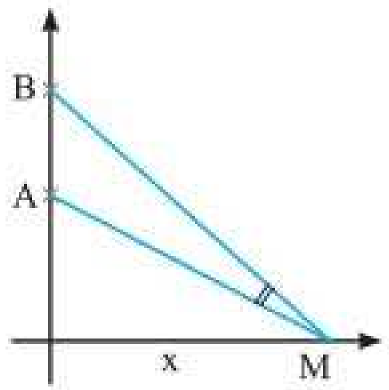
۲ اگر حاصل‌ضرب دو متغیر مثبت y و x برابر مقدار ثابت A باشد، آن‌گاه جمع آنها وقتی min است که: $x = y = \sqrt{A} \Rightarrow \min(x+y) = ۲\sqrt{A}$

به همین ترتیب، برای n متغیر مثبت $x_۱ , x_۲ , \dots , x_n$ نیز نتیجهٔ فوق برقرار است:

$x_۱x_۲\dots\dots x_n = A > ۰ \Rightarrow \min(x_۱ + x_۲ + \dots + x_n) = n\sqrt[n]{A}$ (به شرطی که همهٔ x_iها مثبت باشند)

۳ اگر مجموع دو عدد مثبت x و y مقدار ثابت k باشد، زمانی $x^n y^m$ ماکزیمم است که: $\frac{x}{n} = \frac{y}{m}$

۴ اگر $x + y = k$، زمانی $x^n + y^n$ ماکزیمم است که $x = y = \frac{k}{۲}$ باشد.



۵ با توجه به شکل مقابل، نقاط $A(۰,a)$ و $B(۰,b)$ روی محور yها ثابت و نقطهٔ $M(x,۰)$ روی محور xها متغیر است. اگر زاویهٔ AMB (زاویه دید) حداکثر شود آن‌گاه $x = \sqrt{ab}$. یعنی x واسطهٔ هندسی b و a است.

تست اگر $۲x + y = ۱۲$، بیش‌ترین مقدار $xy^۲$ کدام است؟

۱) ۶۴ ۲) ۱۲۸ ۳) ۱۴۴ ۴) ۱۰۸

پاسخ گزینهٔ «۲»

$$۲x + y = ۱۲ \Rightarrow x = ۶ - \frac{۱}{۲}y$$

$$A = xy^۲ = y^۲(۶ - \frac{۱}{۲}y) = ۶y^۲ - \frac{۱}{۲}y^۳$$

$$\Rightarrow A' = ۱۲y - \frac{۳}{۲}y^۲ = ۰ \Rightarrow y = ۰ , y = ۸ \Rightarrow A_{max} = ۸^۲(۶-۴) = ۶۴ \times ۲ = ۱۲۸$$

در بین منشورهایی با قاعدهٔ مثلث متساوی الاضلاع که مجموع ارتفاع منشور و ضلع مثلث برابر ۲ است، حجم بزرگ‌ترین آنها چقدر است؟

۱) $\frac{۸\sqrt{۳}}{۲۷}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $\frac{۴\sqrt{۳}}{۲۷}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۹}$

پاسخ گزینهٔ «۱» اگر هر ضلع مثلث متساوی الاضلاع را x و ارتفاع منشور را h در نظر بگیریم، آن‌گاه داریم:

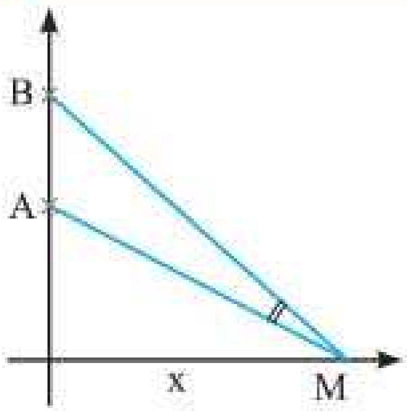
$$x + h = ۲ \Rightarrow h = ۲ - x$$

$$V(x) = \frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲h = \frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲(۲-x) \Rightarrow V(x) = \frac{\sqrt{۳}}{۴}(۲x^۲ - x^۳)$$

$$\Rightarrow V'(x) = \frac{\sqrt{۳}}{۴}(۴x - ۳x^۲) = ۰ \xrightarrow{x>۰} x = \frac{۴}{۳}$$

$$\Rightarrow V_{max} = V(\frac{۴}{۳}) = \frac{\sqrt{۳}}{۴}(\frac{۴}{۳})^۲(۲ - \frac{۴}{۳}) = \frac{\sqrt{۳} \times ۱۶}{۴ \times ۹} \times \frac{۲}{۳} = \frac{۸\sqrt{۳}}{۲۷}$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای



۲۴. دو نقطهٔ A و B به بلندی‌های ۵ و ۸ بر روی محور قائم قرار دارند. نقطهٔ M بر روی محور افقی، با کدام فاصله از پای قائم اختیار شود، تا زاویهٔ AMB بیش‌ترین مقدار ممکن باشد؟

۱) $۳\sqrt{۲}$　　۲) ۶

۳) $۲\sqrt{۱۰}$　　۴) ۷

۲۵. بیش‌ترین مساحت از زمینی را که می‌توان توسط یک طناب به طول ۸۸ متر و به شکل مستطیلی که یک طرف آن رودخانه است محصور نمود، چند متر مربع است؟ (ریاضی خارج ۹۱)

۱) ۹۵۸　　۲) ۹۶۸　　۳) ۹۷۸　　۴) ۹۸۸

۲۶. اگر $۲x+y=۱۲$ ، بیش‌ترین مقدار xy کدام است؟

۱) ۱۶　　۲) ۱۸　　۳) ۱۴　　۴) ۱۰

۲۷. نقطه ای با کدام طول بر محور x ها انتخاب شود، به طوری که تفاضل فواصل آن، از نقطه $A(۱,۵)$ و $B(۷,۲)$ بیش‌ترین مقدار را داشته باشد؟ (ریاضی۹۳)

۱) ۸　　۲) ۹　　۳) ۱۰　　۴) ۱۱

۲۸. بیش‌ترین مساحت مستطیل‌هایی که قطر آنها برابر ۳ باشد، کدام است؟

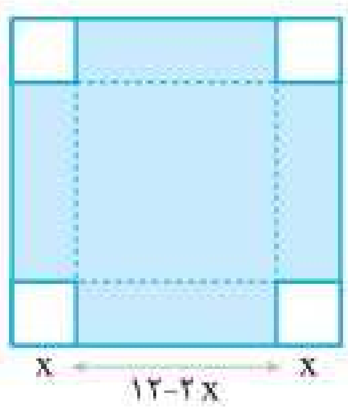
۱) $\frac{۹}{۲}$　　۲) ۹　　۳) $\frac{۹}{۴}$　　۴) $\frac{۳}{۲}$

۲۹. اگر a ، b ، c و d چهار عدد مثبت باشند، حداقل مقدار $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}$ چقدر است؟

۱) ۳　　۲) ۲　　۳) ۱　　۴) ۴

۳۰. اگر x و y دو ضلع قائم از مثلثی به طول وتر $۵\sqrt{۲}$ باشند، بیش‌ترین مقدار $۳x+۴y$ کدام است؟ (ریاضی ۹۰)

۱) $۲۵\sqrt{۲}$　　۲) ۳۶　　۳) $۲۸\sqrt{۲}$　　۴) ۴۰



۳۱. می‌خواهیم از یک قطعه ورقه فلزی مربعی شکل که طول هر ضلع آن ۱۲ واحد است. یک جعبهٔ در باز بسازیم که به گونه‌ای که از گوشه‌های آن مربع‌های کوچکی بریده و صفحه را در راستای خطوط تا کنیم (مطابق شکل). حجم بزرگ‌ترین جعبه‌ای که بدین گونه ساخته می‌شود چند واحد مکعب است؟

۱) ۱۱۲　　۲) ۱۲۸

۳) ۱۴۴　　۴) ۲۱۶

۳۲. بیشترین مساحت مستطیلی که دو ضلع آن بر روی محورهای مختصات و رأس چهارم آن، بر روی منحنی به معادلهٔ $y = \sqrt{۱۲ - x}$، در ناحیهٔ اول واقع شود، کدام است؟ (تجربی ۹۸)

۱) $۸\sqrt{۲}$ ۲) $۸\sqrt{۳}$ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

۳۳. بیشترین مساحت مستطیلی که یک ضلع آن بر قطر نیم‌دایره به شعاع ۶ واحد و دو رأس دیگر آن روی این نیم‌دایره باشد، کدام است؟ (تجربی خارج ۹۸)

۱) ۱۸ ۲) ۲۴ ۳) ۲۷ ۴) ۳۶

۳۴. از بین مثلث‌های قائم‌الزاویه با اندازهٔ وتر ۱۰ واحد، دو ضلع قائم با کدام نسبت انتخاب شود تا حجم حاصل از دوران این مثلث حول ضلع قائم، بیشترین باشد؟ (تجربی ۹۹)

۱) $\frac{۲}{۱}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۱}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۱}$

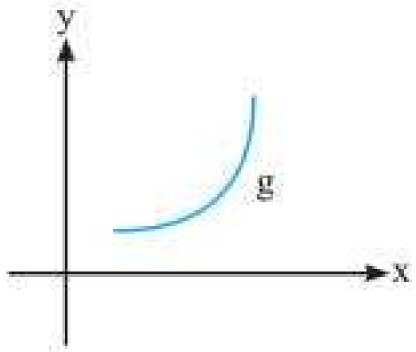
۳۵. کوتاه‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ $A(۵,۰)$ از نقاط منحنی به معادلهٔ $y = \sqrt{۲x + ۷}$، کدام است؟ (تجربی خارج ۹۹)

۱) ۴ ۲) ۴/۵ ۳) ۵ ۴) $۳\sqrt{۲}$

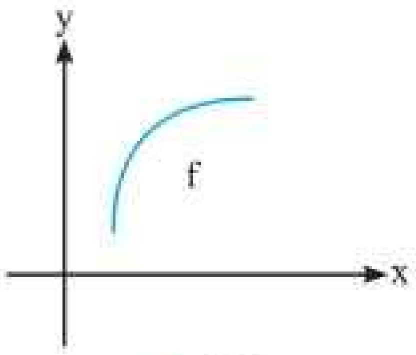
۵ جهت تقعر نمودار یک تابع

نمودار توابع ۱ و ۲ را ببینید، دو تابع f و g هر دو صعودی اکید هستند، اما با هم تفاوت دارند.

اگر کمی دقت کنید متوجه خواهید شد که نمودار تابع f زیر خط‌های مماس خود قرار دارد و نمودار تابع g بالای خط‌های مماس خود قرار دارد.



شکل ۲



شکل ۱

اگر نمودار تابع f روی بازهٔ $I \subseteq D_f$ بالای خط‌های مماس خود قرار داشته باشد، آن‌گاه تقعر تابع f رو به بالاست.

اگر نمودار تابع f روی بازهٔ $I \subseteq D_f$ زیر خط‌های مماس خود قرار داشته باشد، آن‌گاه تقعر نمودار تابع f رو به پایین است.

قضیهٔ تقعر

فرض کنید $f''(x)$ به ازای هر x از بازهٔ باز $I \subseteq D_f$ موجود باشد؛

الف) اگر به ازای هر x از I، $f''(x) > ۰$ آن‌گاه نمودار f روی بازهٔ I تقعر روبه بالا دارد.

ب) اگر به ازای هر x از I، $f''(x) < ۰$ آن‌گاه نمودار f روی بازهٔ I تقعر روبه پایین دارد.

نکته‌ها:

۱ اگر تقعر تابع f روی بازهٔ I رو به بالا باشد دو مفهوم دارد: اول اینکه f'' روی بازهٔ I مثبت است و دوم اینکه تابع f' روی بازهٔ I صعودی اکید است.

۲ اگر تقعر تابع f روی بازهٔ I رو به پایین باشد دو مفهوم دارد: اول اینکه f'' روی بازهٔ I منفی است و دوم اینکه تابع f' روی بازهٔ I نزولی اکید است.

تست تقعر تابع $y = x^4 - 2x^3$ در فاصلهٔ (a, b) رو به پایین است، حداکثر مقدار $b - a$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ گزینهٔ «۲»

$$y = x^4 - 2x^3 \Rightarrow y' = 4x^3 - 6x^2 \Rightarrow y'' = 12x^2 - 12x < 0 \Rightarrow 0 < x < 1$$
$$\Rightarrow \max(b-a) = 1 - 0 = 1$$

مجموعه طول نقاط که تقعر منحنی به معادلهٔ $y = \frac{-2}{x^2+3}$، روبه بالا باشد،به کدام صورت است؟ (سراسری ریاضی ۹۰)

۱) $|x| < 1$ ۲) $|x| < 2$ ۳) $|x| > \sqrt{2}$ ۴) $|x| > \sqrt{3}$

پاسخ گزینهٔ «۱»

$$y' = \frac{0 - 2x(-2)}{(x^2+3)^2} = 4 \times \frac{x}{(x^2+3)^2}$$

$$y'' = 4 \times \frac{1(x^2+3)^2 - 2(2x)(x^2+3)(x)}{(x^2+3)^4} = 4 \times \frac{(x^2+3)(x^2+3-4x^2)}{(x^2+3)^4} > 0$$

$$\xrightarrow{(x^2+3)(3-3x^2)>0} 3 - 3x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow |x| < 1$$

به ازای کدام مجموعه مقادیر a، تقعر منحنی به معادلهٔ $y = x^4 + ax^3 + \frac{3}{2}x^2$، همواره روبه بالاست؟ (سراسری ریاضی ۹۲)

۱) $-1 < a < 1$ ۲) $-1 < a < 2$ ۳) $-2 < a < 1$ ۴) $-2 < a < 2$

پاسخ گزینهٔ «۴»

$$y' = 4x^3 + 3ax^2 + 3x \Rightarrow y'' = 12x^2 + 6ax + 3 > 0 \Rightarrow \Delta_{y''} = 36a^2 - 144 < 0 \Rightarrow a^2 < 4 \Rightarrow -2 < a < 2$$

در تابع $f(x) = x^4 - 4x^2 + 10$ تابع f' در چه فاصله‌ای نزولی اکید است؟

۱) $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ ۲) $\left(0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ ۳) $\left(-1, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ ۴) $\left(-2, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

پاسخ گزینهٔ «۱»

$$f'(x) = 4x^3 - 8x \Rightarrow f''(x) = 12x^2 - 8 < 0 \Rightarrow x^2 < \frac{2}{3} \Rightarrow x \in \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

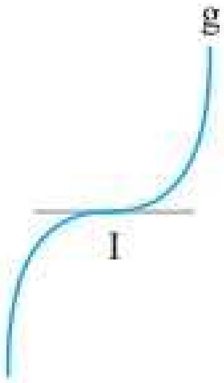
۶ نقطهٔ عطف

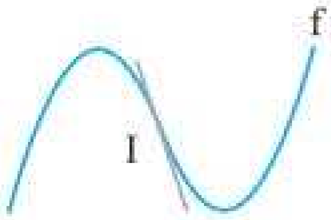
فرض کنیم تابع f در $x = c$ پیوسته باشد، در این صورت نقطهٔ $I(c, f(c))$ را نقطهٔ **عطف** تابع f گوییم به شرطی که:

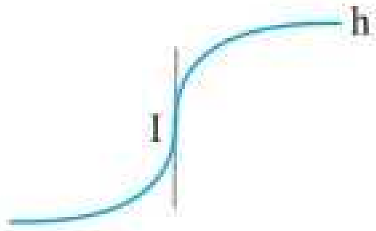
الف) نمودار f در I خط مماس داشته باشد.

ب) نمودار f در I تغییر تقعر دهد یعنی f'' در c تغییر علامت بدهد.

به نمودارهای زیر توجه کنید:







در اشکال بالا نقطهٔ I، نقطهٔ عطف توابع f ،g و h است. اما تفاوتی هم بین سه تابع دیده می‌شود.

در تابع f خط مماس در f مایل است یعنی $f'(c)$ یک عدد حقیقی غیر صفر است.

در تابع g خط مماس افقی است یعنی $g'(c) = 0$ است و در تابع h خط مماس عمودی است یعنی $h'(c) = \infty$

حال می‌توان نقطهٔ عطف را طبقه بندی کرد. این طبقه‌بندی براساس خط مماس در نقطهٔ عطف صورت می‌گیرد.

انواع نقاط عطف

اگر $I(c, f(c))$ نقطهٔ عطف تابع $y = f(x)$ باشد، آن‌گاه سه نوع نقطهٔ عطف داریم:

الف) عطف مایل: در این حالت $f'(c)$ موجود و مخالف صفر است یعنی خط مماس در c مایل است.

ب) عطف افقی: در این حالت $f'(c) = 0$ است یعنی خط مماس افقی است.

پ) عطف قائم: در این حالت $f'(c) = +\infty$ و یا $f'(c) = -\infty$ است. در این حالت مماس بر f قائم است.

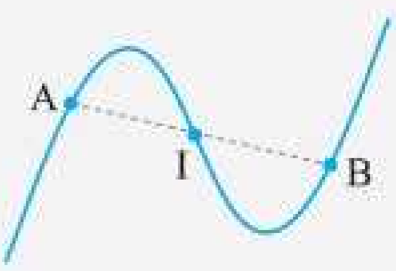
عطف قائم اغلب در توابع رادیکالی به فرم $f(x) = g(x)\sqrt[2n+1]{(x-a)^{2m+1}}$ با شرط $g(a) \neq 0$ و $m < n$ و $m, n \in \mathbb{N}$ رخ می‌دهد.

نکته‌ها:

۱ توابع درجهٔ اول و دوم نقطهٔ عطف ندارند.

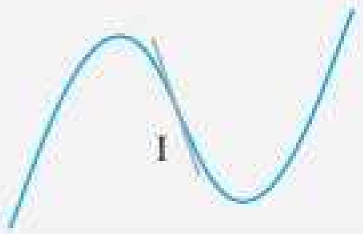
۲ تابع درجهٔ nام حداکثر $n-2$ نقطهٔ عطف دارد.

۳ تابع درجهٔ سوم $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ فقط یک نقطه عطف به طول $\frac{-b}{3a}$ (ریشهٔ f'') دارد که این نقطه، مرکز تقارن تابع درجهٔ سوم است. $|AI| = |BI|$



۴ ریشه‌های ساده و مکرر مرتبهٔ فرد برای f''، عطف برای f است.

۵ ریشه‌های مضاعف و مکرر مرتبهٔ زوج f'، عطف برای f است.



۶ اگر $I(a,b)$ نقطهٔ عطف تابع $f(x)$ باشد، در این صورت با شرط وجود $f''(a)$ داریم $f''(a)=0$ و همچنین $f(a)=b$ است.

۷ مماس در نقطهٔ عطف از منحنی عبور می‌کند.

تست مجموع طول و عرض نقطهٔ عطف تابع $f(x)=-4x^3-12x^2+3$ کدام است؟

۱) -1 ۲) -5 ۳) -4 ۴) -6

پاسخ گزینهٔ «۴»

$$f(x)=-4x^3-12x^2+3 \Rightarrow x_I=-\frac{b}{3a}=\frac{12}{-12}=-1 \Rightarrow I=(-1,-5) \Rightarrow x_I+y_I=-6$$

طول نقطه‌ی عطف تابع $y=2x^3-12x^2+x$ و معادله‌ی خط مماس بر تابع در نقطه‌ی عطف کدام است؟

۱) $y=16-23x, 2$ ۲) $y=16-23x, -2$ ۳) $y=16+23x, 2$ ۴) $y=16+23x, -2$

پاسخ گزینهٔ «۱» $y'=6x^2-24x+1 \Rightarrow y''=12x-24=0 \Rightarrow x=2$

x		۲	
y''	−	۰	+

$$I\left|\begin{matrix}2\\16-48+2=-30\end{matrix}\right. \Rightarrow f'(2)=24-48+1=-23$$

معادله خط مماس در نقطهٔ عطف: $y+30=-23(x-2) \Rightarrow y=16-23x$

مرکز تقارن تابع $y=x^3-6x^2+x+10$ کدام است؟

۱) $(1,-2)$ ۲) $(2,-2)$ ۳) $(3,-1)$ ۴) $(2,-4)$

پاسخ گزینهٔ «۴» $x_I=-\frac{b}{3a}=-\frac{-6}{3\times1}=2 \quad , \quad f(2)=8-24+2+10=-4$

عطف‌های توابع چندجمله‌ای

اگر تابع $f(x)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ n باشد $(f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\dots)$، در این صورت تابع f حداکثر $n-2$ نقطهٔ عطف دارد. به نکات زیر در مورد این تابع توجه کنید:

۱ تابع درجهٔ سوم فقط یک نقطهٔ عطف دارد.

۲ تابع درجهٔ چهارم دو مجذوری $y=ax^4+bx^2+c$ با شرط $ab>0$ نقطهٔ عطف ندارد و با شرط $ab<0$ دو نقطهٔ عطف به طول‌های $\pm\sqrt{-\frac{b}{6a}}$ دارد.

تست نقاط عطف تابع $f(x)=x^4-6x^2+1$ کدام است؟

۱) ±2 ۲) ±1 ۳) ±3 ۴) ندارد

پاسخ گزینهٔ «۲» روش اول: $f'(x)=4x^3-12x \Rightarrow f''(x)=12x^2-12=0 \Rightarrow x=\pm1$

x		−۱		۱	
f''	+	۰	−	۰	+

$\Rightarrow x=\pm1$ عطف

روش دوم: طول نقاط عطف $\pm\sqrt{\frac{6}{6}}$ یعنی ±1 می‌باشد.

۳ اگر f به صورت $f(x)=(x-x_۱)(x-x_۲)...(x-x_n)$ تبدیل شود و ریشه‌ها(x_i ها) متمایز باشند آن‌گاه f دقیقاً $n-۲$ نقطهٔ عطف دارد.

تست تابع $y=(x^۲-۴)(x^۲-۶)$ چند نقطه‌ی عطف دارد؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) هیچ

پاسخ گزینهٔ «۲»

$$y=(x-۲)(x+۲)(x-\sqrt{۶})(x+\sqrt{۶})$$

$\Rightarrow$ دو عطف دارد

به ازای چه مقادیری از m تابع $y=x^۴+۴x^۳+۶mx^۲-x+۱$ نقطهٔ عطف ندارد؟

۱) $m\geq ۱$ ۲) $m>۰$ ۳) $m\leq ۱$ ۴) $m<۱$

پاسخ گزینهٔ «۱» بایستی معادلهٔ $y''=۰$ ریشهٔ حقیقی نداشته باشد و یا اینکه فقط یک ریشهٔ حقیقی داشته باشد که تغییر علامت ندهد. $y'=۴x^۳+۱۲x^۲+۱۲mx-۱\Rightarrow y''=۱۲x^۲+۲۴x+۱۲m=۰$

$\Rightarrow x^۲+۲x+m=۰\ ,\Delta\leq ۰\Rightarrow ۴-۴m\leq ۰\Rightarrow m\geq ۱$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

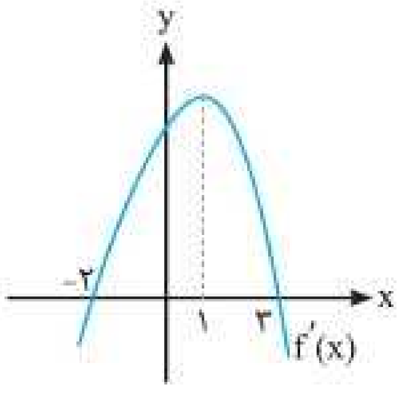
۳۶. اگر $f(x)=\dfrac{x^۲}{۱+x}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f'(۱+h)-f'(۱)}{۲h}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۱۶}$

۳۷. اگر f یک تابع درجهٔ سوم باشد به‌طوری که $f(۰)=۱۰, f'(۰)=۸, f''(۱)=۶$ و $f^{(۳)}(-۱)=۶$، حاصل $f(-۲)$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۲ ۳) ۱۰ ۴) -۶

۳۸. اگر تابع f روی $\mathbb{R}$ پیوسته و نمودار f' به صورت مقابل باشد، آن‌گاه در چه فاصله‌ای تابع f نزولی و مقعر به بالاست؟



۱) $x<۱$
۲) $x>۱$
۳) $x<-۲$
۴) $x>۳$

۳۹. هرگاه تمامی خطوط مماس رسم شده بر منحنی $f(x)=\frac{۱}{۴}x^۴-\frac{۱}{۳}(m+۱)x^۳+\frac{۳}{۲}x^۲+۱$ زیر منحنی واقع باشند، حدود m کدام است؟

۱) $-۴<m<۲$ ۲) $m>۲$ ۳) $m<۲$ ۴) $m>۲$ یا $m<-۴$

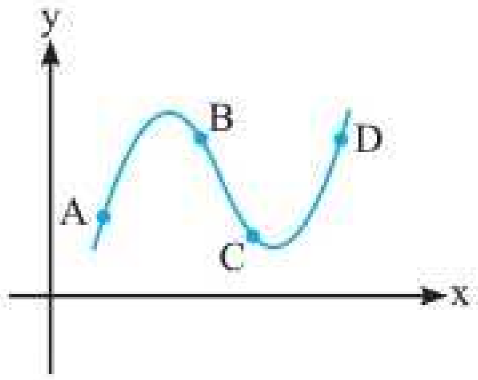
۴۰. تقعر نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\sin x+\dfrac{x^۲}{\pi}$ وقتی $۰\leq x\leq \dfrac{\pi}{۲}$ به کدام صورت است؟ (ریاضی ۹۱)

۱) رو به پایین ۲) رو به بالا
۳) ابتدا رو به پایین و سپس رو به بالا ۴) ابتدا رو به بالا و سپس رو به پایین

۴۱. نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\cos^۲ x-۲\cos x\ ;\ x\in[۰,۲\pi]$ ، در کدام بازه، نزولی و تقعر آن رو به پایین است؟ (ریاضی ۹۶)

۱) $(\frac{\pi}{۲},\frac{۲\pi}{۳})$ ۲) $(\pi,\frac{۴\pi}{۳})$ ۳) $(\frac{۲\pi}{۳},\pi)$ ۴) $(\frac{۴\pi}{۳},\frac{۳\pi}{۲})$

۴۲. تابع f مشتق پذیر از مرتبهٔ دوم و منحنی آن به‌صورت مقابل است، در کدام یک از نقاط زیر، f' منفی و صعودی است؟



۱) A
۲) B
۳) C
۴) D

۴۳. جهت تقعر تابع $f(x)=x^۴-۴x^۲+۱$ در نقاط A و B تغییر می‌کند. مجموع عرض‌های نقاط A و B کدام است؟

۱) -۱۱ ۲) ۲ ۳) -۱۳ ۴) -۱۴

۴۴. مرکز تقارن تابع $f(x)=x^۳+۳x^۲+m$ برابر $I(a+۱,a)$ است، $a+m$ کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۲ ۳) -۵ ۴) -۶

۴۵. اگر توابعی به صورت $f(x)=x^۳-(m+۲)x^۲+۳x$ ، همواره صعودی باشند، آن‌گاه مجموعه طول نقاط عطف این توابع، در کدام بازه است؟ (تجربی ۹۴)

۱) $[-۲,۰]$ ۲) $[-۲,۲]$ ۳) $[-۱,۱]$ ۴) $[۰,۱]$

۴۶. اگر توابعی به صورت $f(x)=\frac{۲}{۳}x^۳-(m-۱)x^۲+۸x$ ، دارای ماکزیمم و مینیمم با طول‌های منفی باشند. آن‌گاه مجموعه طول نقاط عطف این توابع، در کدام بازه است؟ (تجربی خارج ۹۴)

۱) $(-۵,-\frac{۱}{۲})$ ۲) $(-۴,-۱)$ ۳) $(-\infty,-۲)$ ۴) $(-\infty,-۴)$

۴۷. اگر $A(۱,-۱۱)$ نقطهٔ عطف نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^۳+ax^۲+bx$ باشد، آن‌گاه مقدار $f(-۱)$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۵)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۴۸. اگر $A(۱,-۲)$ نقطهٔ عطف منحنی به معادلهٔ $y=ax^۳+bx^۲-۳x-۱$ باشد، مقدار تابع در نقطهٔ ماکزیمم نسبی آن، کدام است؟ (تجربی خارج ۹۶)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) فاقد ماکزیمم نسبی

۴۹. در چندتا از توابع زیر $f''(a)=۰$ ولی $x=a$ نقطهٔ عطف تابع f نیست؟

الف) $y=x^۵-۳x^۲-۱$ ب) $y=(x-۱)^۴$ پ) $y=x^۳+۶x^۲$ ت) $y=x^۳\sqrt[۳]{x}$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۰. مجموعهٔ طول نقاط عطف نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}x^۳-۳x^۲ & ; \quad x\geq -۱\\ -۱۳-\frac{۹}{x} & ; \quad x<-۱\end{cases}$ کدام است؟ (ریاضی ۸۹)

۱) $\{-۱\}$ ۲) $\{۱\}$ ۳) $\{-۱,۱\}$ ۴) $\varnothing$

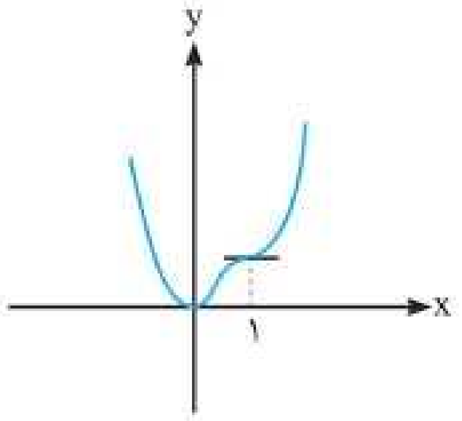
۵۱. خط راستی بر نمودار تابع $y = x^3 - 2x^2 + 3x$ مماس شده و از آن عبور می‌کند. شیب این خط، کدام است؟ (ریاضی ۹۷)

۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{5}{3}$

۵۲. خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - x$، با بیش‌ترین شیب ممکن، محور yها را با کدام عرض، قطع می‌کند؟ (ریاضی خارج ۹۷)

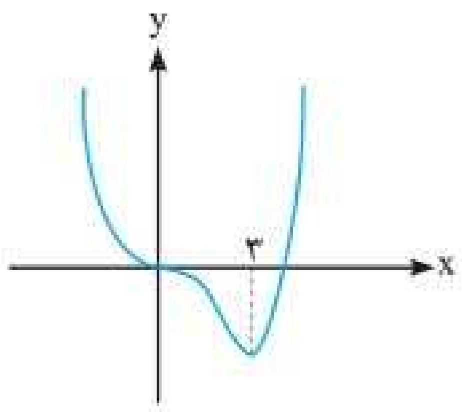
۱) $-\frac{4}{3}$ ۲) $-\frac{5}{3}$ ۳) $-\frac{7}{3}$ ۴) $-\frac{8}{3}$

۵۳. شکل روبه‌رو، نمودار تابع $f(x) = 3x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$ است. a کدام است؟ (ریاضی ۹۸)



۱) -8
۲) -7
۳) -5
۴) -4

۵۴. شکل روبه‌رو، نمودار تابع $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2$ است. $f(-2)$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۸)



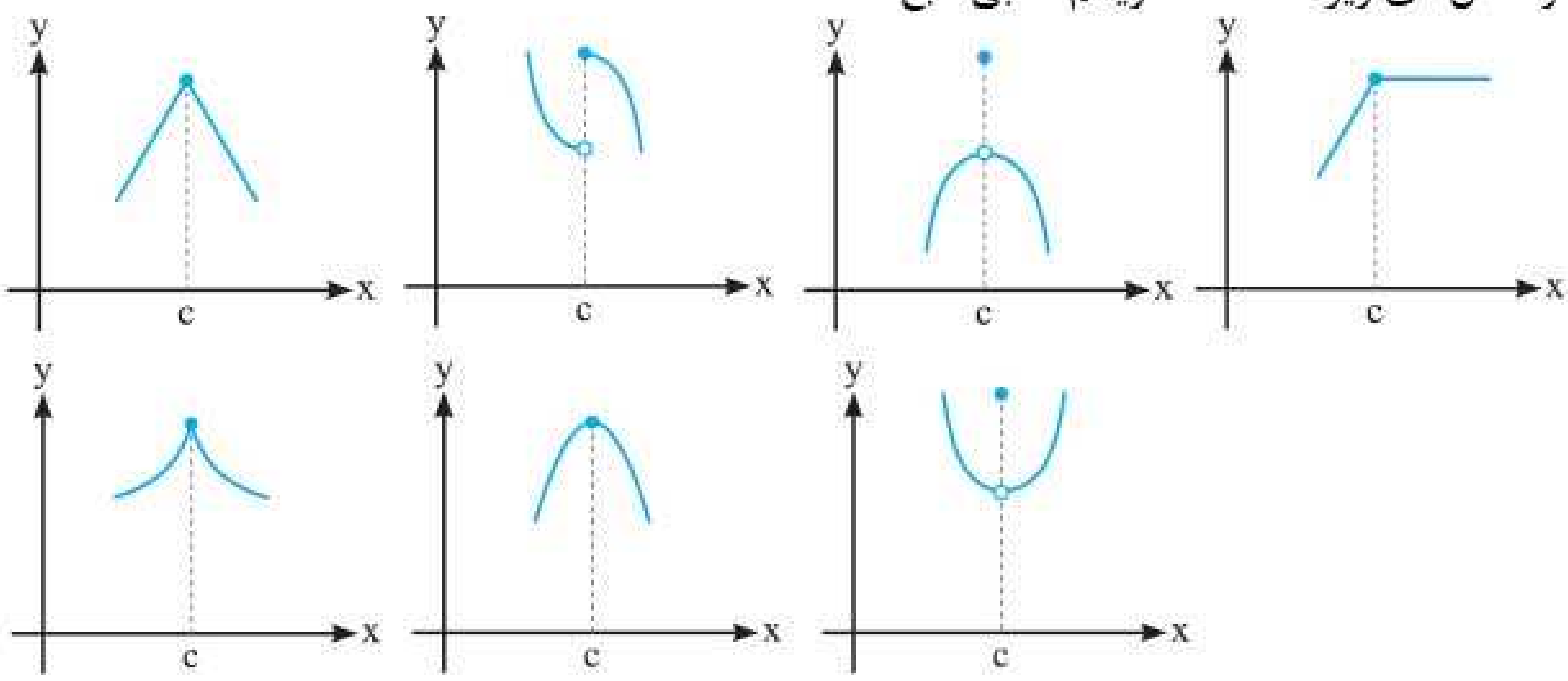
۱) ۳۲
۲) ۳۶
۳) ۴۰
۴) ۴۸

۶ اکسترمم‌های نسبی

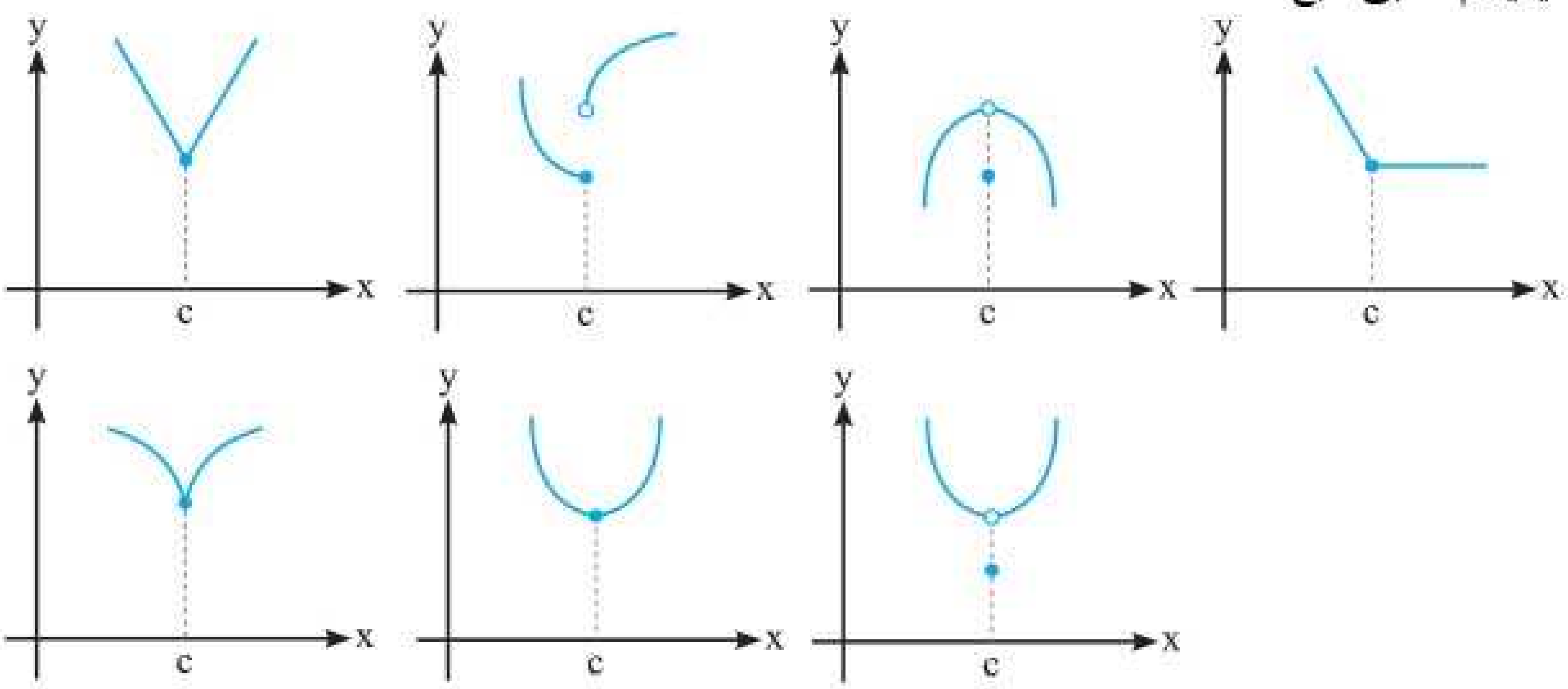
فرض کنید D دامنهٔ تابع f باشد:

الف) اگر در یک همسایگی متقارن به مرکز c، به ازای هر x از D_f داشته باشیم $f(c) \geq f(x)$ آن‌گاه گوییم $x = c$ ماکزیمم نسبی تابع f و $f(c)$، مقدار ماکزیمم نسبی تابع f است.

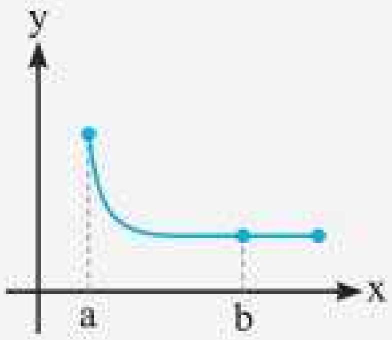
در شکل‌های زیر $x = c$ ماکزیمم نسبی تابع f است.



ب) اگر در یک همسایگی متقارن به مرکز c، به ازای هر x از D داشته باشیم $f(c) \leq f(x)$ آن‌گاه گوییم $x=c$ مینیمم نسبی تابع f و $f(c)$ مقدار مینیمم نسبی تابع f است. در شکل‌های زیر $x=c$ مینیمم نسبی تابع f است.



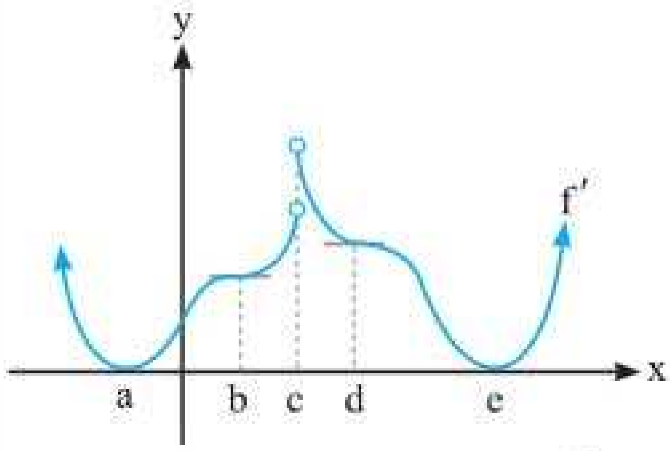
نکته‌ها:



۱ اگر $x=c$ روی خط ثابت (افقی) واقع شود (غیر از نقاط ابتدا و انتهای پاره‌خط افقی) آن‌گاه گوییم $x=c$ هم ماکزیمم و هم مینیمم نسبی است. به عنوان مثال در شکل روبه‌رو $x=b$ هم ماکزیمم و هم مینیمم نسبی است و نقطه a اکسترمم نسبی نیست.

۲ هر اکسترمم نسبی یک نقطهٔ بحرانی است.

تست نمودار تابع f' به‌صورت زیر است. کدام گزینه در مورد تابع f صحیح نیست؟



۱) سه نقطهٔ بحرانی دارد.

۲) در نقطهٔ a بحرانی است، اما اکسترمم نسبی نیست.

۳) در نقاطی به طول‌های b، d، a و e بحرانی است.

۴) مشتق f' در یک نقطه به طول منفی و سه نقطه با طول مثبت، صفر است.

پاسخ گزینهٔ «۳» چون نمودار مربوط به f' است، پس جایی که f' وجود ندارد یا صفر است. برای f بحرانی خواهد بود که این شرایط در a، c و e رخ داده است. ضمناً تابع f در نقطهٔ a بحرانی است اما اکسترمم نسبی نیست زیرا f' در اطراف آن تغییر علامت نداده است. اگر $g=f'$ فرض کنیم مماس بر نمودار g در نقاط b، d و e با طول مثبت، افقی است و در نقطهٔ a با طول منفی مماس افقی است. پس مشتق تابع f' در سه نقطه با طول مثبت و در یک نقطه با طول منفی صفر می‌شود.

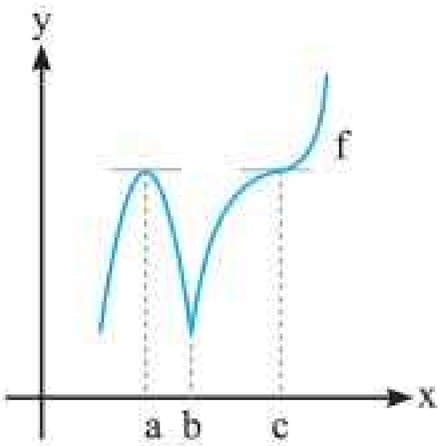
آزمون مشتق اول

فرض کنید c یک نقطهٔ بحرانی تابع f باشد که بر بازهٔ باز $I(a,b)\subseteq D_f$ شامل c پیوسته است. هرگاه f بر این بازه، به‌جز احتمالاً در c مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه:

الف) اگر به ازای تمام مقادیر x در بازهٔ (a,c)، $f'(x)>0$ و به ازای تمام مقادیر x، در بازهٔ (c,b)، $f'(x)<0$ باشد آن‌گاه $x=c$ طول ماکزیمم نسبی و $f(c)$ مقدار ماکزیمم نسبی f است.

ب) اگر به ازای تمام مقادیر x در بازهٔ (a,c)، $f'(x)<0$ و به ازای تمام xها در بازهٔ (c,b)، $f'(x)>0$ باشد آن‌گاه $x=c$ طول مینیمم نسبی و $f(c)$ مقدار مینیمم نسبی f است.

پ) اگر f' در c تغییر علامت ندهد آن‌گاه c اکسترمم نسبی f نیست.



به عنوان نمونه به نمودار روبه‌رو توجه کنید و نقطه‌های بحرانی a، b و c را در نظر بگیرید.

$x=a$ طول ماکزیمم نسبی تابع است زیرا نمودار تابع f قبل از a در حال صعود و بعد از a در حال نزول است. $x=b$ طول مینیمم نسبی f است زیرا نمودار f قبل از b در حال نزول و بعد از b در حال صعود است اما $x=c$ اکسترمم نسبی f نیست. زیرا f' در c تغییر علامت نداده است.

اگر f تابعی هموار (پیوسته) باشد برای یافتن اکسترمم‌های نسبی آن ابتدا نقاط بحرانی f را محاسبه کرده، سپس f' را تعیین علامت می‌کنیم. اگر c نقطه بحرانی مورد نظر باشد آن‌گاه برای اینکه تابع f در c اکسترمم داشته باشد دو حالت زیر رخ می‌دهد:

x		c	
f'	$+$		$-$

(ب)

x		c	
f'	$-$		$+$

(الف)

اگر حالت (الف) رخ دهد یعنی f' ابتدا منفی سپس مثبت باشد در این صورت c مینیمم نسبی است.
اگر حالت (ب) رخ دهد یعنی f' ابتدا مثبت، سپس منفی باشد در این صورت c ماکزیمم نسبی است.
ممکن است f' در c تغییر علامت ندهد.

x		c	
f'	$+$		$+$

x		c	
f'	$-$		$-$

در این حالت $x=c$ نه ماکزیمم ونه مینیمم نسبی f است.

نکته: اگر تابع f در $x=c$ اکسترمم نسبی داشته باشد به شرطی که f' در c وجود داشته باشد آن‌گاه $f'(c)=0$ است.

تست طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^۴+\frac{۴}{۳}x^۳-۴x^۲$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) صفر ۴) ۱

پاسخ گزینهٔ «۳»

$$f(x)=x^۴+\frac{۴}{۳}x^۳-۴x^۲ \Rightarrow f'(x)=۴x^۳+۴x^۲-۸x=۴x(x^۲+x-۲)=۴x(x-۱)(x+۲)$$

$$f'(x)=۰ \Rightarrow x=۰,۱,-۲$$

نقطه‌ای به طول صفر ماکزیمم نسبی تابع f است، زیرا $f'(۰)=۰$ و f' در اطراف $x=۰$ از مثبت به منفی تغییر علامت داده است.

x	$-\infty$		-۲		۰		۱		$+\infty$
f'		$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$	

تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{a}{x}+bx^۲$ درنقطه‌ی $(۱,-۲)$ دارای اکسترمم نسبی است. عدد a و نوع اکسترمم نسبی کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۹)

۱) $-\frac{۴}{۳}$، مینیمم ۲) $-\frac{۴}{۳}$، ماکسیمم ۳) $\frac{۴}{۳}$، مینیمم ۴) $\frac{۴}{۳}$، ماکسیمم

پاسخ گزینهٔ «۲»

$$f(۱)=-۲ \Rightarrow a+b=-۲$$

$$f'(x)=-\frac{a}{x^۲}+۲bx \quad , \quad f'(۱)=۰ \Rightarrow -a+۲b=۰ \Rightarrow a=۲b$$

x		۰		۱	
f'	$+$	ت.ن	$+$	۰	$-$
f	↗		↗		↘

$$\begin{cases} a=۲b \\ a+b=-۲ \end{cases} \Rightarrow b=-\frac{۲}{۳}, a=-\frac{۴}{۳} \Rightarrow f'(x)=\frac{۴}{۳x^۲}-\frac{۴x}{۳}=\frac{۴-۴x^۳}{۳x^۲}$$

با توجه به جدول تعیین علامت f' نقطه $(۱,-۲)$ طول ماکسیمم نسبی است.

اکسترمم‌های نسبی توابع چندجمله‌ای

اگر تابع f یک چندجمله‌ای از درجهٔ n باشد بدیهی است که تابع f' یک چندجمله‌ای از درجهٔ $n-۱$ است و معادلهٔ $f'(x)=۰$ حداکثر $n-۱$ ریشهٔ حقیقی دارد پس نتیجه می‌گیریم که:

الف) اگر f چندجمله‌ای از درجهٔ nام باشد آن‌گاه حداکثر $n-۱$ نقطهٔ اکسترمم نسبی دارد.

ب) ریشه‌های مضاعف و مکرر مرتبهٔ زوج تابع f'، اکسترمم نسبی تابع f نمی‌باشند بلکه این ریشه‌ها نقاط عطف تابع f می‌باشند.

پ) ریشه‌های ساده و مکرر مرتبهٔ فرد تابع f'، اکسترمم‌های نسبی تابع f می‌باشند.

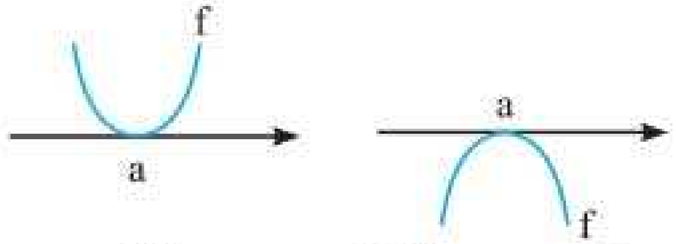
ت) اگر تابع درجهٔ nام f به صورت $y=a(x-x_۱)(x-x_۲)...(x-x_n)$ تجزیه شود و x_i ها (ریشه‌ها) متمایز باشند، تابع f دقیقاً دارای $n-۱$ نقطهٔ اکسترمم نسبی است و در صورتی که $n-۱$ زوج باشد (n فرد باشد) آن‌گاه تعداد ماکزیمم نسبی‌ها با تعداد مینیمم نسبی‌ها برابرند.

اکسترمم‌های نسبی توابع خاص

برای برخی توابع پیوستهٔ خاص می‌توان قوانینی وضع کرد که بدون مشتق‌گیری بتوانیم اکسترمم‌های نسبی را تعیین کنیم.

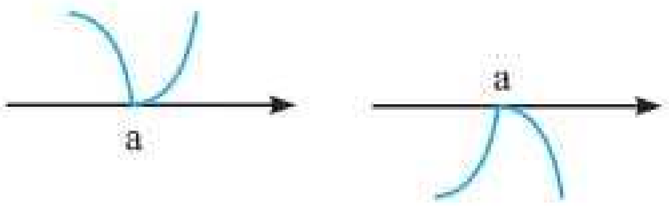
❶ اگر تابع f به صورت $f(x)=(x-a)^{2n}H(x)$, $a\in D_f , H(a)\neq 0$ باشد، آن‌گاه $x=a$ قطعاً اکسترمم نسبی تابع f است. اگر $H(a)>0$ باشد نقطهٔ $A(a,0)$ مینیمم نسبی تابع f می‌باشد و اگر $H(a)<0$ باشد آن‌گاه نقطهٔ $A(a\,,0)$ ماکزیمم نسبی تابع f است و نمودار f در همسایگی a به صورت‌های زیر است:

توجه داشته باشید که در این حالت $f'(a)=0$ است و نمودار f در اطراف $x=a$ یکی از دوحالت روبه‌رو است:



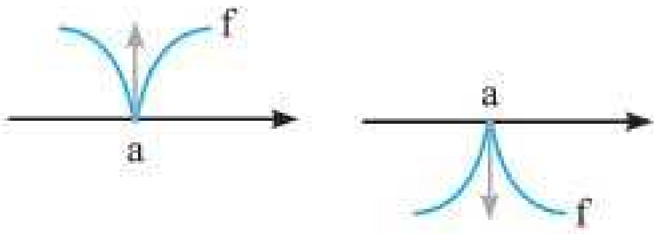
❷ اگر تابع f به صورت $f(x)=|x-a|H(x)$ ، $H(a)\neq 0$ و $a\in D_f$ باشد آن‌گاه $x=a$ قطعاً اکسترمم نسبی تابع f است.

اگر $H(a)>0$ باشد آن‌گاه $x=a$ طول مینیمم نسبی و در صورتی $H(a)<0$ باشد آن‌گاه $x=a$ طول ماکزیمم نسبی f است. ضمناً در این حالت f در نقطهٔ $x=a$ زاویه‌دار است و مشتق وجود ندارد.



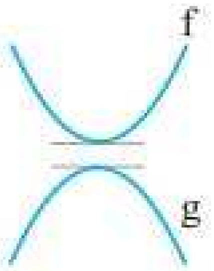
❸ اگر تابع f به صورت $f(x)=\sqrt[n]{(x-a)^m}\,H(x)$ با شرط‌های $H(a)\neq 0$ ، m زوج، n فرد و $m<n$ باشد آن‌گاه $x=a$ اکسترمم نسبی است. اگر $H(a)>0$ باشد a طول مینیمم نسبی f و اگر $H(a)<0$ باشد a طول ماکزیمم نسبی f است و a نقطهٔ بازگشتی f است.

ضمناً در این حالت $f'(a)=+\infty$ یا $f'(a)=-\infty$ است و نمودار f در اطراف $x=a$ به یکی از صورت‌های مقابل است:



$H(a)>0$ **$H(a)<0$**

آزمون مشتق دوم

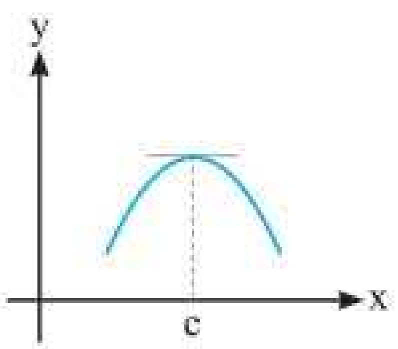


گاهی اوقات تعیین علامت مشتق کمی دشوار می‌شود. به نمودارهای f و g توجه کنید فرض کنیم که نقاط ماکزیمم و مینیمم مشخص شده در شکل به طول a باشد. چون مماس در هر دو افقی است پس به راحتی می‌توان گفت که $f'(a)=g'(a)=0$ است. اما تفاوت این دو نمودار در چیست؟ آیا در تقعر آنهاست؟ تابع f مقعر رو به بالا و تابع g مقعر رو به پایین است. یعنی $f''(a)>0 , g''(a)<0$ است. به آزمون مشتق دوم توجه کنید:

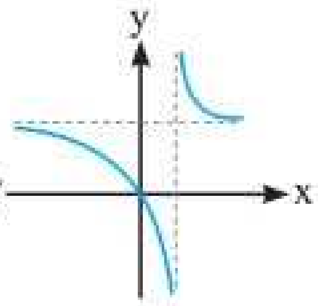
آزمون مشتق دوم برای تعیین اکسترمم‌های نسبی

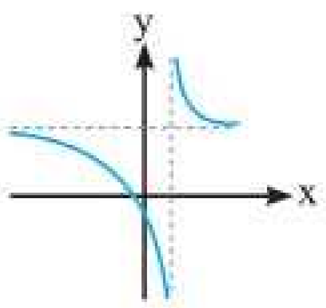
فرض کنید که $f'(c)=0$ باشد و $f''(c)$ همواره روی بازهٔ $I\subseteq D_f$ که شامل c است وجود داشته باشد. در این‌صورت:

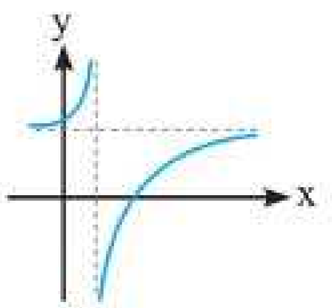
الف) اگر $f''(c)<0$ باشد، آن‌گاه نقطهٔ $(c,f(c))$ نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f است.

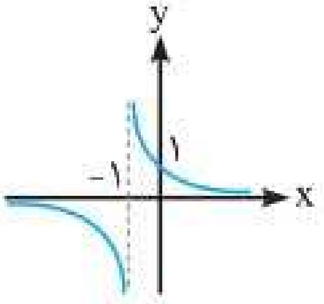


۸۰. نمودار تابع $y=\frac{2x+1}{x-1}$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۸۱. خط به معادلهٔ $y=x+4$، محور تقارن منحنی تابع $y=\frac{(2a-1)x+3}{2x+a}$ است. عرض از مبدأ محور تقارن دیگر آن، کدام است؟ (ریاضی ۸۹)

۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

۸۲. اگر تابع $y=\frac{2ax-b}{ax+2+b}$، تابع ثابت باشد، مقدار b کدام است؟ $(a\neq 0)$

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{-4}{3}$ ۴) $\frac{-3}{4}$

۸۳. منحنی به معادلهٔ $y=\frac{x+1}{1-2x}$، محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع می‌کند. فاصلهٔ مرکز تقارن این منحنی از وتر AB کدام است؟ (ریاضی خارج ۸۹)

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{5}$ ۴) $2\sqrt{2}$

۸۴. مجموعهٔ $A=\{[\frac{2x+1}{2x-5}]: x\in\mathbb{N}\}$ چند عضو دارد؟

۱) دو ۲) چهار ۳) بی‌شمار ۴) شش

پاسخ‌نامه تشریحی

۱. گزینهٔ «۱»

$$f(x)=x^4-4x+1\Rightarrow f'(x)=4x^3-4\leq 0\Rightarrow x^3\leq 1\Rightarrow x\leq 1\Rightarrow x\in(-\infty,1]\Rightarrow \max a=1$$

۲. گزینهٔ «۳»

بررسی تک‌تک گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: تابع $y=\frac{2x-4}{x-1}$ در فاصلهٔ $(0,+\infty)$ صعودی اکید نیست، زیرا با اینکه $y'=\frac{2}{(x-1)^2}>0$ اما چون در فاصلهٔ $(0,+\infty)$، $x=1$ قرار دارد، تابع نمی‌تواند صعودی اکید باشد.

گزینهٔ «۲»: دقیقاً مانند گزینهٔ «۱» استدلال می‌شود.

گزینهٔ «۳»: تابع $y=\frac{2x-4}{x+1}$ در فاصلهٔ $(0,+\infty)$ صعودی اکید است، چون $y'=\frac{6}{(x+1)^2}>0$ و مجانب قائم $x=-1$ در فاصلهٔ $(0,\infty)$ قرار ندارد.

گزینهٔ «۴»: تابع $y=\frac{2x+21}{x+10}$ در فاصلهٔ $(0,\infty)$ نزولی اکید است چون $y'=\frac{-1}{(x+10)^2}<0$ و همچنین $x=-10$ در فاصلهٔ $(0,\infty)$ قرار ندارد.

۳. گزینهٔ «۱»

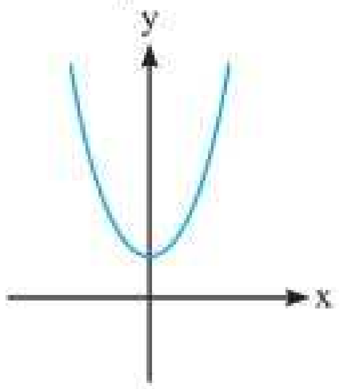
با توجه به نمودار در فاصلهٔ $[a,b]$ تابع f نزولی اکید و تابع g صعودی اکید است، پس برای هر x از بازهٔ $[a,b]$ داریم: $g'(x)>0$ و $f'(x)<0$

حال برای بررسی یکنوایی $y=\frac{f}{g}$ مشتق آن را حساب می‌کنیم. $y=\frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow y=\frac{f'g-g'f}{g^2}$

دو تابع f و g بالای محور xها هستند و در نتیجه هر دو مثبت‌اند و طبق مطالب بالا $f'<0$ و $g'>0$ است.

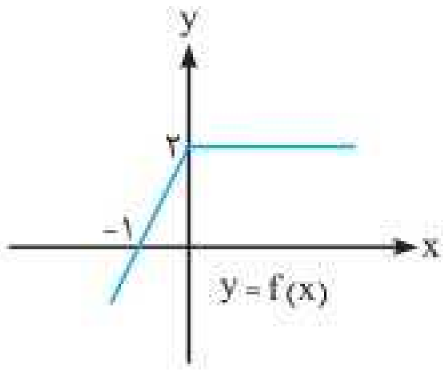
پس $\frac{f}{g}$ نزولی اکید است. $y'=\frac{\overbrace{f'g}^{-}-\overbrace{g'f}^{+}}{\underbrace{g^2}_{+}}<0 \Rightarrow$ نزولی اکید است y'

۴. گزینهٔ «۴»



تابع $f(|x|)$ نسبت به محور yها متقارن است و اگر برای xهای منفی نزولی است، آن‌گاه باید برای xهای مثبت صعودی باشند. مانند شکل مقابل:

۵. گزینهٔ «۴»



نمودار تابع $y=f(x)$ از دو نیم خط تشکیل شده است که شیب آن‌ها به ترتیب $\frac{2-0}{0-(-1)}=2$ و صفر هستند. البته می‌توانیم ضابطهٔ $f(x)$ را هم بنویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}2x+2 & ; \quad x\leq 0\\ 2 & ; \quad x>0\end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases}2 & ; \quad x<0\\ 0 & ; \quad x>0\end{cases}$$

با توجه به ضابطه f'، «۴» صحیح است.

۶. گزینهٔ «۱»

اگر $x\geq 0$ باشد: $f(x)=3\sqrt[3]{x}+x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+1\geq 0 \Rightarrow x\neq 0$ ①

اگر $x<0$ باشد: $f(x)=3\sqrt[3]{x}-x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-1\geq 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\geq 1 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2}\leq 1$

$\Rightarrow x^2\leq 1 \Rightarrow -1\leq x\leq 1 \xrightarrow{\cap(x<0)} -1\leq x<0$ ②

اجتماع جواب‌های به‌دست آمده $[-1,0)\cup(0,+\infty)$ است، اما جواب درست $[-1,+\infty)$ است، زیرا $x=0$ در دامنهٔ تابع قرار دارد.

۷. گزینهٔ «۳»

$$f(x)=\frac{x^4-3}{x^2-2} \Rightarrow f'(x)=\frac{4x^3(x^2-2)-2x(x^4-3)}{(x^2-2)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{2x(2x^4-4x^2-x^4+3)}{(x^2-2)^2}=\frac{2x(x^4-4x^2+3)}{(x^2-2)^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{2x(x^2-1)(x^2-3)}{(x^2-2)^2}$$

x	-2		$-\sqrt{3}$		$-\sqrt{2}$		-1		0		1		$\sqrt{2}$		$\sqrt{3}$		2
f'		−	۰	+	ت ن	+	۰	−	۰	+	۰	−	ت ن	−	۰	+	

در چهار بازه تابع اکیداً نزولی است.

۸. گزینهٔ «۲»

$$f'(x)=\frac{۱}{\sqrt{x}}+\frac{x}{\sqrt[۳]{(x^۲-۱)^۴}}$$

f' برای $x>۰$ و $x\neq ۱$ مثبت است. پس در بازه‌های $(۰,۱)$ و $(۱,+\infty)$ صعودی اکید است.

۹. گزینهٔ «۴»

$$f(x)=\frac{x^۴}{x^۳-۸}\Rightarrow f'(x)=\frac{۴x^۳(x^۳-۸)-۳x^۲x^۴}{(x^۳-۸)^۲}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{x^۳(۴x^۳-۳۲-۳x^۳)}{(x^۳-۸)^۲}=\frac{x^۳(x^۳-۳۲)}{(x^۳-۸)^۲}$$

x	$-\infty$		۰		۲		$\sqrt[۳]{۳۲}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	۰	−	ت ن	−	۰	+	

تابع در بازه‌های $[۰,۲)$ و $(۲,\sqrt[۳]{۳۲}]$ نزولی اکیداند. طول بازه‌های را حساب می‌کنیم: $۲-۰=۲$

$$\sqrt[۳]{۳۲}-۲=\sqrt[۳]{۸\times۴}-۲=۲(\sqrt[۳]{۴}-۱)\simeq ۱/۱۷$$

۱۰. گزینهٔ «۱»

$$f(x)=-۲x^۳+۳x^۲\Rightarrow f'(x)=-۶x^۲+۶x=۰\Rightarrow ۶x(-x+۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\x=۱\end{cases}$$

پس این تابع چهار نقطهٔ بحرانی به طول‌های ۱ و ۰ و $-\frac{۱}{۲}$ و ۲ دارد.

۱۱. گزینهٔ «۴»

معنی این سؤال این است که معادلهٔ $f'(x)=۰$ دو ریشه داشته باشد، پس باید:

$$y'=۳x^۲+۲x+a=۰\ ،\ \Delta>۰\Rightarrow ۴-۱۲a>۰\Rightarrow a<\frac{۱}{۳}$$

۱۲. گزینهٔ «۴»

این تابع ۶ نقطهٔ بحرانی دارد. $c_۱$ و $c_۲$ بحرانی‌اند چون $f'(c_۱)=f'(c_۲)=۰$ همچنین f در $c_۳$ ناپیوسته و در نتیجه $f'(c_۳)$ موجود نیست پس $c_۳$ نیز بحرانی است. ضمناً $c_۴$ نیز بحرانی است چون f در $c_۴$ گوشه دارد.
همچنین نقاط a و b نیز نقاط ابتدایی و انتهایی هستند و بحرانی محسوب می‌شوند.

۱۳. گزینهٔ «۴»

چون تابع $f(x)=x^۲(x-۲)^۲$ چندجمله‌ای است پس کافی است که ریشه‌های مشتق را حساب کنیم.

$$f(x)=x^۲(x-۲)^۲$$

$$\Rightarrow f'(x)=۲x(x-۲)^۲+۲x^۲(x-۲)=۰\Rightarrow ۲x(x-۲)(x-۲+x)=۰\Rightarrow x=۰,x=۱,x=۲$$

پس این تابع سه نقطهٔ بحرانی دارد. $A=(۰,۰)\ ،\ B=(۱,۱)\ ،\ C(۲,۰)$

$$|AB|=\sqrt{۱+۱}=\sqrt{۲}\ ،\ |AC|=\sqrt{۴+۰}=۲\ ،\ |BC|=\sqrt{۱+۱}=\sqrt{۲}$$

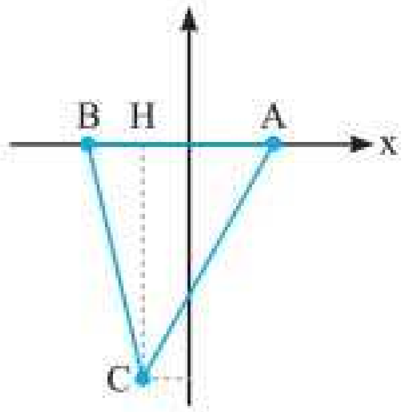
این مثلث متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه است زیرا: $|AB|=|BC|\ ,\ |AC|^۲=|AB|^۲+|BC|^۲$

۱۴. گزینهٔ «۳»

$$f(x)=(x-۱)|x^۲+x-۲|=(x-۱)|(x-۱)(x+۲)|=\begin{cases}-(x-۱)^۲(x+۲) & ;\ -۲\leq x\leq ۱\\(x-۱)^۲(x+۲) & ;\ x>۱ \text{ یا } x<-۲\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}-2(x-1)(x+2)-(x-1)^2 & ; \quad -2<x\le 1\\ 2(x-1)(x+2)+(x-1)^2 & ; \quad x>1 \ \vee \ x<-2\end{cases}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow (x-1)(2x+4+x-1)=(x-1)(3x+3)=0 \Rightarrow x=1,\ x=-1$$



نقاط بحرانی این تابع عبارتند از $A(1,0)$، $B(-2,0)$ و $C(-1,-4)$.

حال با رسم شکل مثلث مساحت آن را به‌دست می‌آوریم.

$$S=\frac{1}{2}|CH||AB|=\frac{1}{2}\times 4\times 3=6$$

۱۵. گزینهٔ «۳»

البته واضح است که $x=0$ نقطهٔ بحرانی تابع $y=|x|(x^2-1)$ است زیرا $y'(0)$ وجود ندارد اما برای حل کامل و پیدا کردن سایر نقاط بحرانی، تابع را به صورت دوضابطه‌ای تبدیل می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}x(x^2-1) & ; \ x\ge 0\\ -x(x^2-1) & ; \ x<0\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}x^3-x & ; \ x\ge 0\\ x-x^3 & ; \ x<0\end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases}3x^2-1 & ; \ x>0\\ 1-3x^2 & ; \ x<0\end{cases}$$

$x=0$ بحرانی است زیرا $f'_+(0)=-1$ ، $f'_-(0)=1$ حال به سراغ ریشهٔ مشتق می‌رویم.

$$y'=0 \Rightarrow 3x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

پس این تابع سه نقطهٔ بحرانی دارد.

۱۶. گزینهٔ «۳»

$f(x)$ در $x=0$ (نقطهٔ مرزی) پیوسته است. ضابطه‌ها هم چند جمله‌ای هستند، پس:

$$f'(x)=\begin{cases}3 & ; \ -2\le x<0\\ 2x-1 & ; \ 0<x\le 1\end{cases}$$

f در $x=0$ پیوسته است اما $f'(0)$ وجود ندارد زیرا $f'_+(0)=-1$ و $f'_-(0)=3$ است در نتیجه $x=0$ نقطه بحرانی است. حال ریشهٔ مشتق را حساب می‌کنیم: $2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

ضمناً نقاط ابتدا و انتها نیز بحرانی‌اند.

در نتیجه مجموعهٔ نقاط بحرانی $\{-2,0,\frac{1}{2},1\}$ است.

۱۷. گزینهٔ «۴»

$$f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x^2+4}\ ،\ x\in(-1,2)$$

برای محاسبهٔ نقاط بحرانی، ریشه‌های زیر رادیکال و ریشه‌های مشتق زیر رادیکال را حساب می‌کنیم:

$$P(x)=x^3-3x^2+4=0 \Rightarrow (x+1)(x^2-4x+4)=0 \Rightarrow (x+1)(x-2)^2=0 \Rightarrow \begin{cases}x=-1\\ x=2\end{cases}$$

$$P'(x)=3x^2-6x=0 \Rightarrow x=0,2$$

اما دامنهٔ تابع، $(-1,2)$ است، پس تنها نقطهٔ بحرانی این تابع $x=0$ است.