خلاصه درس

فصل اول: آشنایی با نظریهٔ اعداد

درس ۱: استدلال ریاضی

مهم‌ترین موضوع در ریاضیات اثبات درستی یک مطلب است. در این درس می‌خواهیم انواع استدلال در ریاضی را مورد بررسی و مطالعه قرار دهیم. فقط توجه کنید که در ریاضیات، درستی یک مطلب با بررسی چند مثال اثبات نمی‌شود.

مثال نقض: مثالی است که نشان می‌دهد یک حکم و نتیجه‌گیری کلی نادرست است.

تمرین: آیا برای هر دو عدد حقیقی a و b رابطهٔ $|a+b|=|a|+|b|$ برقرار است؟

پاسخ خیر، زیرا برای $a=4$ و $b=-6$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l}|a+b|=|4+(-6)|=|-2|=2\\ |a|+|b|=|4|+|-6|=4+6=10\end{array}\right\}\Rightarrow 2\neq 10\Rightarrow |a+b|\neq|a|+|b|$$

اثبات مستقیم: اثبات درستی یک مطلب براساس تعاریف، اصول و قضایایی که از قبل درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم، اثبات مستقیم نام دارد.

تمرین: ثابت کنید حاصل جمع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.

پاسخ می‌دانید فرم کلی اعداد فرد به‌صورت $2k+1$ $(k\in\mathbb{Z})$ است، پس برای دو عدد فرد $a=2k+1$ و $b=2k'+1$ داریم:

$$a+b=2k+1+2k'+1=2k+2k'+2=2(k+k'+1)$$

چون k و k′ اعداد صحیحی هستند، پس $k+k'+1$ نیز عدد صحیحی مانند k″ است: $k+k'+1=k''\Rightarrow a+b=2k''$

بنابراین $a+b$ عددی زوج است.

■ اثبات با در نظرگرفتن تمام حالات

بعضی مواقع برای اثبات درستی یک مطلب، باید تمام حالات ممکن در مسئله را در نظر گرفته و در هر حالت درستی آن مطلب را اثبات نماییم.

تمرین: برای هر عدد صحیح n، ثابت کنید n^2+5n+6 عددی زوج است.

پاسخ برحسب این‌که n زوج یا فرد باشد دو حالت زیر را داریم:

(حالت ۱) $n=2k+1\Rightarrow n^2+5n+6=(2k+1)^2+5(2k+1)+6$

$$=4k^2+4k+1+10k+5+6=4k^2+14k+12=2(\underbrace{2k^2+7k+6}_{q})=2q$$

(حالت ۲) $n=2k\Rightarrow n^2+5n+6=(2k)^2+5(2k)+6$

$$=4k^2+10k+6=2(\underbrace{2k^2+5k+3}_{q'})=2q'$$

بنابراین n^2+5n+6 همواره عددی زوج است.

■ اثبات غیرمستقیم (برهان خلف)

در این روش مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

1. فرض می‌کنیم حکم نادرست باشد که به این فرض، فرض خلف می‌گویند.
2. با استفاده از قوانین منطق گزاره‌ها و یک سری از استدلال‌های درست، به نتیجه یا نتایجی غیرممکن و یا متضاد با فرض مسئله می‌رسیم.
3. با توجه به تناقض ایجادشده معلوم می‌شود که فرض خلف نادرست است، بنابراین حکم باید برقرار باشد.

تمرین: اگر $n\in\mathbb{Z}$ و n^2 عددی فرد باشد. آن‌گاه ثابت کنید n نیز فرد است.

پاسخ فرض می‌کنیم n فرد نباشد، پس n عددی زوج است (فرض خلف):

$$n=2k, k\in\mathbb{Z}\Rightarrow n^2=4k^2=2(\underbrace{2k^2}_{q})=2q$$

پس n^2 زوج است و این نتیجه خلاف فرض مسئله است زیرا n^2 عددی فرد است، پس باید n عددی فرد باشد.

تمرین: اگر $\sqrt{3}$ عددی گنگ باشد. آن‌گاه ثابت کنید $2\sqrt{2}-\sqrt{3}$ عددی گنگ است.

پاسخ فرض می‌کنیم $2\sqrt{2}-\sqrt{3}$ عددی گویا مانند q باشد (فرض خلف) پس:

$$q=2\sqrt{2}-\sqrt{3}\Rightarrow q+\sqrt{3}=2\sqrt{2}\xrightarrow{\text{توان ۲}}(q+\sqrt{3})^2=(2\sqrt{2})^2$$

$$\Rightarrow q^2+2q\sqrt{3}+3=8\Rightarrow 2q\sqrt{3}=5-q^2\Rightarrow\sqrt{3}=\frac{5-q^2}{2q}$$

چون q عددی گویا و مخالف صفر است، پس $\frac{5-q^2}{2q}$ نیز عددی گویا است. بنابراین $\sqrt{3}$ نیز عددی گویا است و این نتیجه خلاف فرض مسئله است زیرا $\sqrt{3}$ عددی گنگ است، پس باید $2\sqrt{2}-\sqrt{3}$ عددی گنگ باشد.

■ اثبات بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز)

می‌دانیم اگر p و q دو گزارهٔ هم‌ارزش باشند، آن‌گاه گزارهٔ دو شرطی $p\Leftrightarrow q$ درست است و برعکس. بنابراین برای اثبات درستی p اگر گزاره‌های دو شرطی $p\Leftrightarrow r_1, r_1\Leftrightarrow r_2, \ldots, r_n\Leftrightarrow q$ درست باشند، آن‌گاه از درستی q می‌توان درستی p را نتیجه گرفت. این مطلب اساس اثبات بازگشتی است. یعنی برای اثبات درستی یک حکم، توسط روابط برگشت‌پذیر آن را به یک رابطهٔ درست و بدیهی می‌رسانیم.

تمرین: اگر x و y دو عدد حقیقی مخالف صفر و مختلف‌العلامت باشند، درستی رابطهٔ مقابل را ثابت کنید. $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\le -2$

پاسخ چون x و y مختلف‌العلامت هستند، پس $y.x$ عددی منفی است و داریم:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\le -2\xleftrightarrow[xy<0]{\times(xy)}xy\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\ge -2xy\Leftrightarrow x^2+y^2\ge -2xy$$

$\Leftrightarrow x^2+2xy+y^2\ge 0\Leftrightarrow (x+y)^2\ge 0$ همواره برقرار است.

تمرین: برای اعداد حقیقی x، y و z رابطهٔ زیر را ثابت کنید.

$$x^2+y^2+z^2\ge xy+xz+yz$$

پاسخ

$$x^2+y^2+z^2\ge xy+xz+yz\xleftrightarrow{\times 2}2x^2+2y^2+2z^2\ge 2xy+2xz+2yz$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2xz-2yz\ge 0$$

$$\Leftrightarrow x^2-2xy+y^2+x^2-2xz+z^2+y^2-2yz+z^2\ge 0$$

$\Leftrightarrow (x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2\ge 0$ همواره برقرار است.

درس ۲: بخش‌پذیری در اعداد صحیح

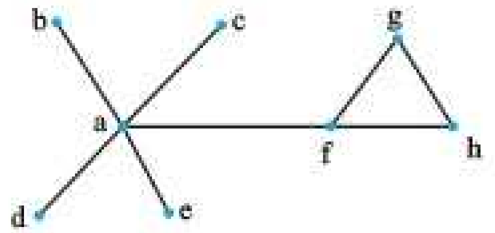
تعریف: برای اعداد صحیح a و b که $a\neq 0$، اگر عدد صحیحی مانند q وجود داشته باشد به‌طوری که $b=aq$ در این‌صورت می‌گوییم عدد b بر عدد a بخش‌پذیر است و می‌نویسیم: $a\,|\,b$

$$\boxed{b=aq\Leftrightarrow a\,|\,b}$$

تعریف، در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف G، به مجموعه یا مجموعه‌های احاطه‌گری که کمترین تعداد عضو را دارند، احاطه‌گر مینیمم می‌گوییم. تعداد اعضای چنین مجموعه‌ای را عدد احاطه‌گری گراف G می‌گوییم و آن را با نماد $\gamma(G)$ نشان می‌دهیم.

تذکر یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم گراف G را یک γ مجموعهٔ گراف G می‌گویند.

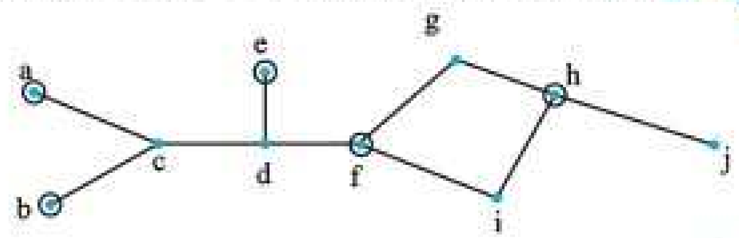
به عنوان مثال گراف زیر با کمتر از دو رأس احاطه نمی‌شود، پس داریم:



$\gamma-$ مجموعه: $\{a,f\}$ یا $\{a,h\}$ یا $\{a,g\}$، $\gamma=2$

مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال، یک مجموعهٔ احاطه‌گر را که با حذف هر کدام از رئوس آن، مجموعهٔ رئوس باقی‌مانده دیگر احاطه‌گر نباشد، یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال می‌گویند.

تمرین: برای گراف زیر یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال بنویسید.



پاسخ مجموعهٔ $\{a,b,e,f,h\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال است زیرا: با حذف a، خود رأس a احاطه نمی‌شود، با حذف b، خود رأس b احاطه نمی‌شود، با حذف e، خود رأس e احاطه نمی‌شود، با حذف f، خود رأس f احاطه نمی‌شود و با حذف h، رئوس h و j احاطه نمی‌شوند.

نکته ۱: هر مجموعهٔ احاطه‌گر غیرمینیمال را می‌توان با حذف برخی رئوس آن به یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال تبدیل کرد.

نکته ۲: هر مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال است ولی عکس آن الزاماً صحیح نیست. یعنی ممکن است یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال باشد ولی مینیمم نباشد.

تعریف، اگر x عددی حقیقی باشد، برای نمایش عدد صحیح بعد از آن از نماد $\lceil x\rceil$ استفاده می‌کنیم و آن را سقف x می‌نامیم. در حالت کلی داریم:

$$\lceil x\rceil=\begin{cases} x & x\in\mathbb{Z}\\ \text{کوچک‌ترین عدد صحیح بزرگ‌تر از } x & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

مثال ⌈۳/۲⌉=۴ ، ⌈۵⌉=۵

نکته ۱: در هر گراف، هر رأس خودش و تمام رئوس مجاورش را احاطه می‌کند.

نکته ۲: اگر در گرافی ماکزیمم درجه Δ باشد، هر رأس در بیشترین حالت می‌تواند $\Delta+1$ رأس را احاطه کند.

نتیجه اگر G یک گراف n رأسی با ماکزیمم درجهٔ Δ باشد و D یک مجموعهٔ احاطه‌گر باشد. آن‌گاه $|D|\geq\left\lceil\frac{n}{\Delta+1}\right\rceil$ و از آن‌جا که $\gamma(G)$ نیز اندازهٔ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است، پس داریم: $\gamma(G)\geq\left\lceil\frac{n}{\Delta+1}\right\rceil$.

اصطلاحاً گفته می‌شود در گراف G عدد $\left\lceil\frac{n}{\Delta+1}\right\rceil$ یک کران پایین برای عدد احاطه‌گری یعنی $\gamma(G)$ است. یعنی $\gamma(G)$ نمی‌تواند از آن کمتر باشد.

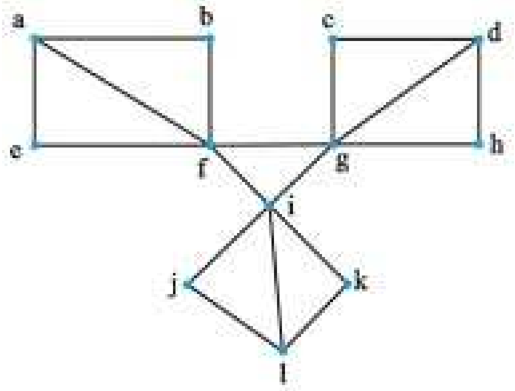
نکته ۱: در بعضی گراف‌ها عدد احاطه‌گری با $\left\lceil\frac{n}{\Delta+1}\right\rceil$ برابر است و در بعضی گراف‌ها برابر نیست.

نکته ۲: در گراف‌های P_n و C_n عدد احاطه‌گری با مقدار $\left\lceil\frac{n}{\Delta+1}\right\rceil$ برابر است و چون در این گراف‌ها $\Delta=2$ است، داریم: $\gamma=\left\lceil\frac{n}{2+1}\right\rceil=\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil$

به عنوان مثال عدد احاطه‌گری P_{13} برابر با $\left\lceil\frac{13}{3}\right\rceil=5$ است.

نکته ۳: اگر برای گراف G یک مجموعهٔ احاطه‌گر m عضوی وجود داشته باشد، آن‌گاه می‌توان نتیجه گرفت که: $\gamma(G)\leq m$

تمرین: عدد احاطه‌گری گراف زیر را بیابید.



(G)

پاسخ

$$n=12,\Delta=5\Rightarrow\gamma(G)\geq\left\lceil\frac{12}{5+1}\right\rceil\Rightarrow\gamma(G)\geq 2\ (1)$$

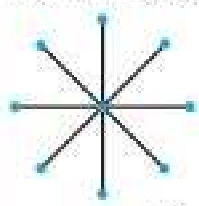
از بین رئوس a، b، f و e حداقل یک رأس، از بین رئوس c، d، h و g حداقل یک رأس و از بین رئوس i، k، ℓ و j نیز حداقل یک رأس برای احاطه‌کردن کل گراف باید انتخاب کنیم، پس: $\gamma(G)\geq 3\ (1)$

$$\text{مجموعهٔ احاطه‌گر}=\{f,d,\ell\}\Rightarrow\gamma(G)\leq 3\xrightarrow{(1)}\gamma(G)=3$$

نکته: در گرافی با $\gamma=1$ کمترین تعداد یال‌ها زمانی اتفاق می‌افتد که یک رأس به تمام رئوس دیگر متصل شده باشد. و بیشترین تعداد یال‌ها زمانی اتفاق می افتد که گراف به‌صورت گراف کامل باشد.

تمرین: در گرافی از مرتبه ۹ و $\gamma=1$، کمترین و بیشترین تعداد یال‌ها را بیابید.

پاسخ برای داشتن کمترین تعداد یال‌ها باید گراف را به‌صورت زیر در نظر بگیریم:



$$\Rightarrow q_{min}=8$$

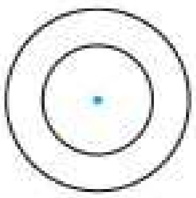
بیشترین تعداد یال‌ها زمانی اتفاق می‌افتد که گراف کامل باشد. پس:

$$K_9\Rightarrow q_{max}=\binom{9}{2}=\frac{9\times 8}{2}=36$$

تمرین: الف) یک گراف ۹ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که یک مجموعهٔ احاطه‌گر یکتا با اندازهٔ ۲ داشته باشد.

ب) یک گراف ۹ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعهٔ احاطه‌گر با اندازهٔ ۲ داشته باشد.

درس: ریاضیات گسسته	رشته: ریاضی فیزیک	مدت امتحان: ۱۰۰ دقیقه	تاریخ:

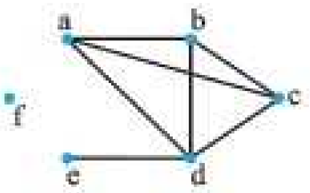
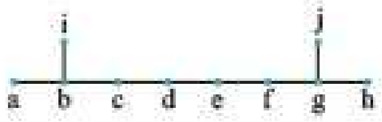
ردیف	سؤالات	نمره
	فصل اول	
۱	**جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.** **الف) اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۵ برابر ۳ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $a^{۴}$ بر ۵ برابر .... است.** **ب) باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد ۲۷۵۶۷۸ بر ۱۱ برابر .... است.**	۰/۵
۲	**اگر $n\in\mathbb{N}$، $n^{۳}$ عددی فرد باشد، آن‌گاه ثابت کنید n نیز عددی فرد است.**	۱
۳	**اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $b\|a+۴$، آن‌گاه باقی‌ماندهٔ تقسیم $۲a^{۲}-b^{۲}+۳۰$ بر ۸ را بیابید.** پرتکرار	۱/۵
۴	**برای هر دو عدد حقیقی مثبت x و y نامساوی زیر را به روش اثبات بازگشتی ثابت کنید.** پرتکرار $\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}\geq\frac{۴}{x+y}$	۱/۲۵
۵	**اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha-\beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha+۲\beta$ گنگ است.**	۱
۶	**اگر $n\in\mathbb{Z}$ و $n\|۳k+۷$ و $n\|۵k+۱۰$، آن‌گاه n را بیابید.** پرتکرار	۱/۵
۷	**بزرگ‌ترین عدد طبیعی را بیابید که در تقسیم بر عدد ۷۵، باقی‌ماندهٔ تقسیم از چهار برابر مربع خارج قسمت یک واحد بیشتر باشد؟**	۱/۲۵
۸	**اگر $a\|b$ و $c\|d$، آن‌گاه ثابت کنید $a.c\|b.d$.**	۱
۹	**اگر دو عدد $۳a-۱$ و $۴a+۳$ رقم یکان برابر داشته باشند، رقم یکان عدد $۹a-۶$ را بیابید.**	۱
۱۰	**اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد، ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح a یا $a+۲$ یا $a+۴$ بر ۳ بخش‌پذیر است.**	۱/۵
۱۱	**تیراندازی به سمت یک هدف شامل دو دایرهٔ هم‌مرکز تیراندازی می‌کند. اگر به دایرهٔ کوچک‌تر بزند، ۷ امتیاز و اگر به دایرهٔ بزرگ‌تر بزند، ۴ امتیاز می‌گیرد. اگر تمام تیرهای او به هدف برخورد کند، به چند طریق می‌تواند امتیاز ۵۹ را کسب کرده باشد.** 	۱/۵
۱۲	**ثابت کنید تفاضل مکعب‌های دو عدد صحیح متوالی عددی فرد است.**	۱
۱۳	**حاصل $(۴m+۱\,,\,۴m+۳)$ را بیابید.**	۱
	فصل دوم	
۱۴	**جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.** **الف) مجموع درجات رئوس گراف کامل از مرتبهٔ ۴ برابر .... است.** **ب) در گراف تهی مجموعهٔ همسایگی باز هر رأس .... است.**	۰/۵
۱۵	**یک گراف ۴ رأسی غیرتهی $k-$ منتظم رسم کنید که:** **الف) k بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.** **ب) k کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.**	۱

امتحان ۱۲

مهروماه

سؤالات امتحانی دانش‌آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور نوبت دوم

درس: ریاضیات گسسته	رشته: ریاضی فیزیک	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	تاریخ امتحان: دی ۱۴۰۰

ردیف	سؤالات	نمره
۱	عبارت مناسب را از داخل پرانتز انتخاب کنید. الف) حاصل ضرب هر عدد گویا ناصفر در یک عدد گنگ، عددی (گنگ،گویا) است. پرتکرار ب) اگر برای دو عدد صحیح a و b داشته باشم $a\|b$، برای هر $m \in \mathbb{Z}$ داریم: $(a\|mb, ma\|b)$. پ) اگر $a\|b$ آن‌گاه ب.م.م دو عدد a و b برابر با $(a, \|a\|)$ است. پرتکرار ت) اگر $ac \overset{m}{\equiv} bc$ و $(c,m)=d$ آن‌گاه رابطهٔ $(a \overset{m}{\equiv} b, a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b)$ برقرار خواهد بود.	۱
۲	اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha+\beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha-\beta$ گنگ است. پرتکرار	۱/۵
۳	ثابت کنید باقی‌ماندهٔ تقسیم مربع هر عدد فرد بر ۸، برابر یک است. پرتکرار	۱/۵
۴	اگر در تقسیم، مقسوم و مقسوم علیه، هر دو بر عدد صحیح n بخش‌پذیر باشند، ثابت کنید باقی‌ماندهٔ تقسیم نیز همواره بر n بخش‌پذیر است.	۱/۲۵
۵	معادلهٔ سیالهٔ ۶x + ۷y = ۱۸۵ را حل کرده و جواب عمومی آن را بنویسید. پرتکرار	۱/۷۵
۶	با توجه به گراف G (شکل مقابل) به سؤالات زیر پاسخ دهید. پرتکرار الف) مقدار $q-\Delta(G)$ را بیابید. ب) یک دور به طول ۴ مشخص کنید. پ) با ذکر دلیل مشخص کنید گراف مکمل G چند یال دارد؟ 	۲
۷	درست یا نادرست بودن جملات زیر را مشخص کنید. الف) هر مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال، یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم است. پرتکرار ب) اگر G یک گراف n رأسی با ماکزیمم درجهٔ Δ باشد، آن‌گاه $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil > \gamma(G)$. پ) در گراف P_n عدد احاطه‌گری برابر با $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ است. پرتکرار ت) ⌈۳/۴۸⌉=۴ پرتکرار	۱
۸	عدد احاطه‌گری گراف G (شکل مقابل) را با ارائه راه حل تعیین کنید. پرتکرار 	۱/۵
۹	گراف C_{10} را رسم کنید. پرتکرار الف) یک $\gamma-$ مجموعه از آن را مشخص کنید. ب) یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال ۵ عضوی از آن را تعیین نمایید.	۱/۵
۱۰	می‌خواهیم با حروف «ش»، «الف» و «ت» و ۵ عدد ۱، ۳، ۵، ۷، ۹ یک رمز شامل ۸ کاراکتر تشکیل دهیم، مطلوب است تعداد کل رمزهایی که در هر یک از آن‌ها حروف کنار هم باشند. پرتکرار	۰/۵
۱۱	با حروف کلمه جیرجیرک چند کلمه ۷ حرفی می‌توان نوشت؟ پرتکرار	۱
۱۲	به چند طریق می‌توان از بین ۶ نوع گل متفاوت، ۱۰ شاخه گل انتخاب کرد به‌طوری که از گل نوع سوم حداقل ۴ شاخه و از نوع ششم بیش از ۲ شاخه انتخاب کنیم؟ پرتکرار	۱/۷۵
۱۳	در مربع لاتین A (شکل مقابل) جای سطر اول و سوم را با هم جابه‌جا کنید تا مربع لاتین B ایجاد شود. سپس با ذکر دلیل بررسی کنید آیا A و B دو مربع لاتین متعامد هستند؟ پرتکرار $A=\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline ۲ & ۳ & ۱ \\ \hline ۳ & ۱ & ۲ \\ \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline\end{array}$	۱/۲۵
۱۴	از بین اعداد طبیعی ۱ تا ۳۰۰، (۱≤n≤۳۰۰) چند عدد وجود دارد که بر ۴ بخش‌پذیر است ولی بر ۵ بخش‌پذیر نیست؟ پرتکرار	۱/۵
۱۵	ثابت کنید در بین هر سه عدد طبیعی، حداقل دو عدد طبیعی وجود دارد که مجموعشان عددی زوج است؟	۱
	جمع نمره	۲۰

طبق اصل لانهٔ کبوتری، حداقل یک مربع شامل دست کم ۲ نقطه وجود دارد. حال برای ۲ نقطه داخل یک مربع داریم: (۰/۲۵)

$BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ = ۲^۲ + ۲^۲ = ۸ \Rightarrow BC = \sqrt{۸}$ (۰/۲۵)

فاصلهٔ ۲ نقطه داخل یک مربع $< BC = \sqrt{۸}$ (۰/۲۵)

(فصل ۳ / اصل لانهٔ کبوتری)

امتحان ۷ - خرداد ماه ۱۳۹۹ (نوبت دوم)

۱ الف) نادرست (فصل ۱/ مثال نقض) (۰/۲۵) مثال نقض زیر را در نظر بگیرید.

$a = ۲+\sqrt{۳}\ ,\ b = ۴-\sqrt{۳} \Rightarrow a+b = ۲+\sqrt{۳}+۴-\sqrt{۳} = ۶ \in Q$ (۰/۵)

ب) درست (فصل ۱ / اثبات مستقیم) (۰/۲۵)

$a = ۲k+۱ \Rightarrow a^۲-۱ = (۲k+۱)^۲-۱$ (۰/۲۵) $= ۴k^۲+۴k+۱-۱ = ۴k^۲+۴k$

$\Rightarrow a^۲-۱ = ۴k(k+۱)$ (۰/۲۵)

ضرب دو عدد صحیح متوالی، مضرب ۲ است، پس:

$k(k+۱) = ۲q \Rightarrow a^۲-۱ = ۴\times ۲q = ۸q$ (۰/۲۵)

۲ طبق رابطهٔ تقسیم داریم:

$a = ۴q+۳$ (۰/۲۵) $\rightarrow ۲a+۳ = ۲(۴q+۳)+۳ = ۸q+۶+۳ = ۸q+۹$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow ۲a+۳ = ۸q+۸+۱ = ۸(\underbrace{q+۱}_{q'})+۱$ (۰/۲۵) $= ۸q'+۱$ (۰/۲۵)

پس باقی‌مانده برابر $r=۱$ است. (۰/۲۵) (فصل ۱ / قضیهٔ تقسیم)

۳

$\left.\begin{matrix} n|۹k+۷ \\ n|۷k+۶ \end{matrix}\right\} \Rightarrow n|۷(۹k+۷)-۹(۷k+۶)$ (۰/۵)

$\Rightarrow n|۶۳k+۴۹-۶۳k-۵۴ \Rightarrow n|-۵$ (۰/۲۵)

$\xrightarrow{n\in \mathbb{N}} n=۱$ یا $n=۵$ (۰/۲۵)

(فصل ۱ / بخش‌پذیری)

۴

$۷^۲ \overset{۱۵}{\equiv} ۴۹ \Rightarrow ۷^۲ \overset{۱۵}{\equiv} ۴۹-۳\times ۱۵$ (۰/۲۵) $\Rightarrow ۷^۲ \overset{۱۵}{\equiv} ۴$ (۰/۲۵)

$(۷^۲)^۲ \overset{۱۵}{\equiv} ۴^۲ \Rightarrow ۷^۴ \overset{۱۵}{\equiv} ۱۶$ (۰/۲۵) $\Rightarrow ۷^۴ \overset{۱۵}{\equiv} ۱۶-۱۵ \overset{۱۵}{\equiv} ۱$ (۰/۲۵)

$(۷^۴)^۷ \overset{۱۵}{\equiv} ۱^۷ \Rightarrow ۷^{۲۸} \overset{۱۵}{\equiv} ۱$ (۰/۲۵) $\xrightarrow{\times ۷^۲} ۷^{۳۰} \overset{۱۵}{\equiv} ۷^۲ \overset{۱۵}{\equiv} ۴$ (۰/۲۵)

باقی مانده برابر ۴ است. (فصل ۱ / باقی‌ماندهٔ اعداد)

۵

$۵x \overset{۱۱}{\equiv} ۲ \Rightarrow ۵x \overset{۱۱}{\equiv} ۲+۳\times ۱۱$ (۰/۲۵) $\Rightarrow ۵x \overset{۱۱}{\equiv} ۳۵$ (۰/۲۵)

$(۵,۱۱)=۱$ (۰/۲۵) $\Rightarrow x \overset{۱۱}{\equiv} ۷ \Rightarrow x = ۱۱k+۷$ (۰/۵)

(فصل ۱ / معادلهٔ همنهشتی)

۶ الف) دو برابر (فصل ۲ / مجموع درجات رئوس) (۰/۲۵)

ب) k (فصل ۲ / گراف k منتظم) (۰/۲۵)

پ) مینیمم (فصل ۲ / مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم) (۰/۲۵)

ت) مینیمال (فصل ۲ / مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال) (۰/۲۵)

۷ الف) $N_G[a] = \{a,b,d,e\}$ (۰/۵)

ب) دور به طول ۴: adeba (۰/۲۵)

پ) مسیر به طول ۳: aebc (۰/۲۵)

مسیر به طول ۴: adebc (۰/۲۵)

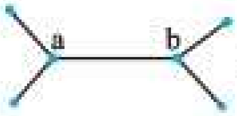
(فصل ۲ / مفاهیم گراف)

۸ $deg_G(v)+deg_{\bar{G}}(v) = p-۱$ (۰/۲۵) $\Rightarrow ۹+۱۲ = p-۱$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow p = ۲۲$ (۰/۲۵)

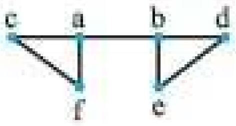
(فصل ۲ / مکمل گراف)

۹ الف) گراف زیر ۶ رأسی و فقط یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم ۲ عضوی دارد.



مجموعهٔ یکتا $\gamma = \{a,b\}$ (۰/۲۵)

ب) گراف زیر بیش از یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم ۲ عضوی دارد.



(۰/۲۵) مجموعه‌ها $\gamma = \{a,d\}$ یا $\{b,f\}$ یا $\{c,e\}$ (۰/۲۵)

(فصل ۲ / احاطه‌گری)

۱۰ در گراف موردنظر داریم:

$n=۱۰, \Delta=۳ \Rightarrow \gamma \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+۱} \right\rceil$ (۰/۲۵) $\Rightarrow \gamma \geq \left\lceil \frac{۱۰}{۳+۱} \right\rceil \Rightarrow \gamma \geq ۳$ (۰/۲۵)

از طرفی مجموعهٔ $\{g,h,d\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر برای گراف است. (۰/۲۵)

پس داریم:

$\gamma \leq ۳$ (۰/۲۵) $\xrightarrow{\gamma \geq ۳} \gamma = ۳$ (۰/۲۵)

(فصل ۲ / عدد احاطه‌گری)

۱۱ با توجه به این‌که دو تا رقم ۱ و سه تا رقم ۲ داریم، پس:

$\frac{۷!}{۲!\times ۳!}$ (۰/۵) $= \frac{۷\times ۶\times ۵\times ۴\times ۳!}{۲\times ۱\times ۳!} = ۴۲۰$ (۰/۲۵)

(فصل ۳ / جایگشت‌های باتکرار)

۱۲ اگر تعداد شاخه‌های گل نوع iام را با x_i نشان دهیم، داریم:

$x_۱+x_۲+x_۳+x_۴+x_۵ = ۱۱, x_۲ \geq ۲, x_۵ > ۳$ (۰/۲۵)

$x_۲ \geq ۲ \rightarrow x_۲-۲ \geq ۰, y_۲ = x_۲-۲ \rightarrow x_۲ = y_۲+۲, y_۲ \geq ۰$ (۰/۲۵)

$x_۵ > ۳ \rightarrow x_۵ \geq ۴ \rightarrow x_۵-۴ \geq ۰, y_۵ = x_۵-۴ \rightarrow x_۵ = y_۵+۴, y_۵ \geq ۰$ (۰/۲۵)

$x_۱+y_۲+۲+x_۳+x_۴+y_۵+۴ = ۱۱ \Rightarrow x_۱+y_۲+x_۳+x_۴+y_۵ = ۵$ (۰/۲۵)

$n=۵, k=۵ \Rightarrow$ تعداد جواب‌ها $= \binom{n+k-۱}{k-۱} = \binom{۹}{۴}$ (۰/۲۵)

(فصل ۳ / شمارش)

۱۳ جایگشت مقابل را در نظر می‌گیریم: (۱)

۴	۳	۲	۱
۲	۱	۴	۳
۱	۲	۳	۴
۳	۴	۱	۲

$\Rightarrow$

$۱ \rightarrow ۳$

$۲ \rightarrow ۴$

$۳ \rightarrow ۱$

$۴ \rightarrow ۲$

(فصل ۳ / مربع لاتین)

۱۴ الف)

۳۲	۲۱	۱۳
۱۱	۳۳	۲۲
۲۳	۱۲	۳۱

(۰/۵) متعامدند زیرا عدد تکراری وجود ندارد.

ب)

۱۳	۲۱	۳۲
۳۲	۱۳	۲۱
۲۱	۳۲	۱۳

(۰/۵) متعامد نیستند، زیرا عدد تکراری در مربع حاصل وجود دارد. (فصل ۳ / مربع‌های لاتین متعامد)

۱۵ تعداد حالت‌های ممکن برای انجام این کار معادل است با تعداد تابع‌های یک‌به‌یک از مجموعهٔ ۴ عضوی به مجموعه‌ای ۸ عضوی، پس: (۰/۲۵)

$(۸)_۴ = \frac{۸!}{(۸-۴)!}$ (۰/۵) $= \frac{۸!}{۴!} = \frac{۸\times ۷\times ۶\times ۵\times ۴!}{۴!} = ۱۶۸۰$ (۰/۲۵)

(فصل ۳ / تابع یک‌به‌یک)

۱۶ $S = \{۱,۲,\dots,۱۰۰\}$

مجموعهٔ اعضایی از S که بر ۶ بخش‌پذیرند $= A \Rightarrow |A| = [\frac{۱۰۰}{۶}] = ۱۶$ (۰/۲۵)

مجموعهٔ اعضایی از S که بر ۱۰ بخش‌پذیرند $= B \Rightarrow |B| = [\frac{۱۰۰}{۱۰}] = ۱۰$ (۰/۲۵)

مجموعهٔ اعضایی از S که بر ۳۰ بخش‌پذیرند $= A\cap B \Rightarrow |A\cap B| = [\frac{۱۰۰}{۳۰}] = ۳$ (۰/۲۵)