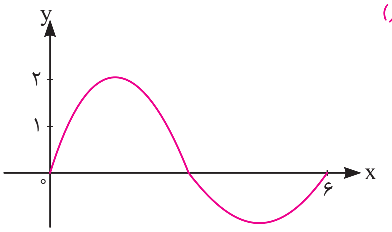
گزینه درست را انتخاب کنید.

۹. **فرض کنید تابع f به ازای هر عدد حقیقی x، نسبت به خطوط $x=1$ و $x=3$ متقارن باشد کدام عبارت زیر درست است؟** *(ریاضی ۱۴۰۰-خارج از کشور)*

۱) f تابعی غیر متناوب است.
۲) f تابعی متناوب با دورهٔ تناوب ۱ است.
۳) f تابعی متناوب با دورهٔ تناوب ۲ است.
۴) f تابعی متناوب با دورهٔ تناوب ۴ است.

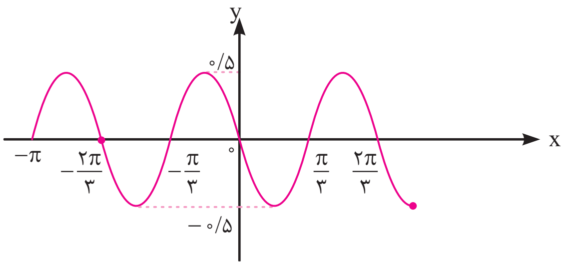
۱۰. **شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار $y=a\sin(b\pi x)$ است $a+b$ کدام است؟** *(ریاضی ۹۳-خارج از کشور)*

۱) $\frac{4}{3}$
۲) $\frac{5}{3}$
۳) $\frac{7}{3}$
۴) $\frac{8}{3}$



پاسخ کامل دهید.

۱۱. **با تعیین مقادیر مینیمم و ماکزیمم و دورهٔ تناوب تابع زیر، ضابطهٔ آن را تعیین کنید.** *(نمونه دولتی نماز ـ میاندوآب)*



۱۲. **تابعی مثلثاتی بنویسید که دارای دورهٔ تناوب و ماکزیمم و مینیمم به صورت زیر باشد:** *(دبیرستان دخترانه هدف تهران ـ دی ۱۴۰۰)*

$$T=\frac{\pi}{2} \qquad \text{Max}=4+\pi \quad , \quad \text{Min}=4-\pi$$

۱۳. **دامنهٔ تابع $y=4\tan(\frac{7x-3\pi}{2})+1$ را به دست آورید.** *(دبیرستان فرزانگان فسا ـ دی ۱۴۰۱)*

درس ۲ (معادلات مثلثاتی)

معادلهٔ مثلثاتی: معادله‌ای که در آن اطلاعاتی از نسبت های مثلثاتی یک زاویهٔ مجهول داریم یک معادلهٔ مثلثاتی نام دارد مانند معادلهٔ مثلثاتی $2\sin x-1=0$ و منظور ما از حل معادلهٔ مثلثاتی، پیدا کردن تمام زوایایی (مانند $x=\frac{\pi}{6}$ در معادلهٔ سادهٔ داده شده) است که در معادله صدق می‌کنند.

جواب‌های کلی معادلات مثلثاتی

الف) جواب‌های کلی معادلهٔ سینوسی:

اگر پس از ساده کردن معادلهٔ مثلثاتی به فرم سادهٔ $\sin \underbrace{x}_{\text{یک زاویه مجهول}} = \sin \underbrace{\alpha}_{\text{یک زاویه معلوم}}$ برسیم.

آنگاه تمام جواب‌ها از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$\boxed{\begin{aligned} x&=2k\pi+\alpha \\ x&=2k\pi+\pi-\alpha \end{aligned}} \quad (k\in\mathbb{Z})$$

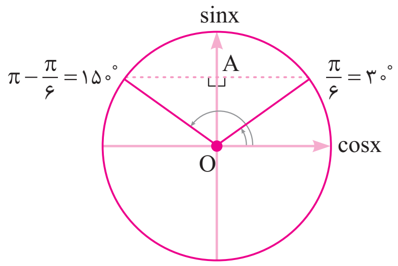
مثال ۴ *جواب‌های کلی معادلهٔ مثلثاتی $2\sin x-1=0$ را بیابید.*

پاسخ: ابتدا مانند حل معادلهٔ درجهٔ اول معمولی، عبارت شامل x را یک طرف نگاه داشته و ضرایب معلوم را به سمت دیگر منتقل می‌کنیم:

$$2\sin x=1 \rightarrow \sin x=\frac{1}{2}$$

حال مشخص می‌کنیم $\frac{1}{2}$ سینوس کدام زاویهٔ اصلی معلوم است؟ می‌دانیم $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ حال طبق روابط بالا جواب‌های کلی معادله را می‌نویسیم:

$$\sin x=\sin\frac{\pi}{6} \rightarrow \begin{cases} x=2k\pi+\frac{\pi}{6} \\ x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6} \end{cases}$$



توضیحات مهم: برای فهمیدن چرایی روابط کلی باید از دایرهٔ مثلثاتی کمک بگیریم:

اینکه در جواب‌های کلی هم $\frac{\pi}{6}$ داریم و هم $\pi-\frac{\pi}{6}$ به خاطر آن است که در یک دایرهٔ مثلثاتی (در بازهٔ $(0, 2\pi)$) همواره در دو نقطه، سینوس، مقداری بین ۱- و ۱ پیدا می‌کند (یکی در خود $\hat{\alpha}$ دیگری در $\pi-\hat{\alpha}$)

در مثال فوق، $\sin 30^\circ = \sin 150^\circ = OA$ است.

اما علت آوردن $2k\pi$ (مضرب زوج π) قبل از $\frac{\pi}{6}$ یا $\pi-\frac{\pi}{6}$، آن است که ما دنبال یافتن تمام جواب‌ها هستیم و همان‌طور که می‌دانید مثلاً زاویهٔ $390^\circ=(360^\circ+30^\circ)$ نیز با زاویهٔ 30° هم‌انتهاست و سینوس‌اش برابر $\frac{1}{2}$ می‌باشد.

حالت خاص معادلهٔ سینوسی: اگر سینوسِ x برابر با صفر باشد حالت خلاصه‌تری برای جواب کلی معادله موجود است به صورت زیر:

$\boxed{\sin x = 0 \rightarrow x = k\pi}$ $(k\in\mathbb{Z})$

زیرا همان‌طور که می‌دانید سینوس مضرب‌های صحیح π، برابر صفر می‌شود.

ب) جواب های کلی معادلهٔ کسینوسی

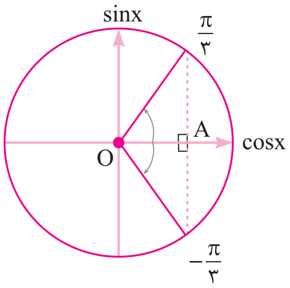
اگر پس از ساده کردن معادلهٔ مثلثاتی به فرم سادهٔ $\cos x = \cos\alpha$ برسیم آنگاه تمام جواب‌ها از روابط زیر پیدا می‌شوند:

$\boxed{\cos x = \cos\alpha \rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha}$ $(k\in\mathbb{Z})$

مثال ۵ *معادلهٔ مثلثاتی $2\cos x - 1 = 0$ را حل کرده جواب‌های کلی را مشخص کنید.*

پاسخ:

$$2\cos x = 1 \rightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \rightarrow \boxed{x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}}$$



باز هم با توجه به دایرهٔ مثلثاتی معلوم می‌شود که مقدار کسینوس α، همواره در دو نقطه، از دایرهٔ مثلثاتی مقداری بین ۱- و ۱+ پیدا می‌کند در این مثال هر دوی $\cos\frac{\pi}{3}$ و $\cos(-\frac{\pi}{3})$ برابر با $OA=\frac{1}{2}$ هستند. (فلسفهٔ وجود $2k\pi$ هم که مانند ماجرای سینوس است.)

حالت خاص معادلهٔ کسینوسی: اگر $\cos x = 0$ باشد به جای جواب‌های کلی از رابطهٔ زیر برای یافتن جواب‌ها استفاده می‌کنیم.

$\boxed{\cos x = 0 \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}}$ $(k\in\mathbb{Z})$

زیرا همان طور که می‌دانید کسینوس مضرب‌های فرد $\frac{\pi}{2}$ برابر صفر می‌شود.

پ) جواب‌های کلی معادلهٔ تانژانتی یا کتانژانتی: اگر پس از ساده کردن معادله مثلثاتی به یکی از فرم‌های سادهٔ $\tan x = \tan\alpha$ یا $\cot x = \cot\alpha$ برسیم، تمام جواب‌های معادله از رابطهٔ زیر پیدا می‌شوند:

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l}\tan x = \tan\alpha \\ \text{یا} \\ \cot x = \cot\alpha\end{array}\right. \Rightarrow x = k\pi + \alpha} \qquad k\in\mathbb{Z}$$

مثال ۶ *معادلهٔ مقابل را حل کنید.* $\tan 3x = \tan \pi x$ *(تمرین کتاب درسی)*

پاسخ: در این مثال باید کمان یکی از تانژانت‌ها را مجهول و دیگری را معلوم فرض کنیم سپس از جواب کلی استفاده نماییم:

$$3x = k\pi + \pi x \Rightarrow 3x - \pi x = k\pi \Rightarrow x(3-\pi) = k\pi \rightarrow x = \frac{k\pi}{3-\pi}$$

حالت خاص معادلهٔ تانژانتی یا کتانژانتی: از آنجا که $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ و $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ است حالت‌های خاص $\tan x = 0$ و $\cot x = 0$ در واقع همان حالت‌های خاص $\sin x = 0$ و $\cos x = 0$ هستند یعنی داریم:

$\boxed{\tan x = 0 \rightarrow x = k\pi}$ $\boxed{\cot x = 0 \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}}$

مثال ۷ *معادلهٔ مقابل را حل کنید.* $\tan(2x-1) = 0$ *(تمرین کتاب درسی)*

پاسخ:

$$\rightarrow 2x - 1 = k\pi \rightarrow 2x = k\pi + 1 \rightarrow x = \frac{k\pi+1}{2}$$

همسان‌سازی: اگر در معادلهٔ مثلثاتی هم نسبت مثلثاتی سینوس و هم نسبت مثلثاتی کسینوس موجود باشند بایستی با استفاده از اتحادها و روابط مثلثاتی که در سال‌های قبل آموختیم آن‌ها را همسان کنیم. (یکی را به دیگری تبدیل کنیم) سپس معادله را حل کنیم.

در این‌گونه موارد یا از روابط $\boxed{\sin^2 x = 1-\cos^2 x}$ و $\boxed{\cos^2 x = 1-\sin^2 x}$ و $\boxed{\tan x = \frac{1}{\cot x}}$ و $\boxed{\cot x = \frac{1}{\tan x}}$ استفاده می‌کنیم.
یا روابط 2α را به کار می‌بریم:

$$\boxed{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1\\ \cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha\end{array}}$$

گاهی نیز ناچاریم از روابط متمم استفاده کنیم:

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \cos\alpha\\ \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \sin\alpha\end{array}}$$

و
⋮

مثال ۸ معادلات زیر را حل کنید. *(تمرین کتاب درسی)*

الف) $\cos 2x - \sin x + 1 = 1$ ب) $\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$ پ) $\sin x - \cos 2x = 0$

پاسخ: الف)

$$1-2\sin^2 x - \sin x + 1 = 1 \to 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\xrightarrow{\sin x = t} 2t^2 + t - 1 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} t=-1 \to \sin x = -1 \\ t = -\frac{c}{a} = \frac{1}{2} \to \sin x = \frac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \text{ یا } x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}\ ,\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}\end{cases}$$

ب)

$$1-\sin^2 x - \sin x = \frac{1}{4} \to \sin^2 x + \sin x - \frac{3}{4} = 0 \xrightarrow{\times 4} 4\sin^2 x + 4\sin x - 3 = 0 \xrightarrow{\sin x = t} 4t^2 + 4t - 3 = 0$$

$$\to (2t+3)(2t-1) = 0 \begin{cases} t = -\frac{3}{2} \to \sin x = -\frac{3}{2} \text{ غیرقابل قبول} \\ \qquad -1 \le \sin x \le 1 \quad \text{زیرا} \\ t = \frac{1}{2} \to \sin x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}\end{cases}$$

$$\to x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}\ ,\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$$

پ)

$$\sin x = \cos 2x \to \cos \underbrace{2x}_{\text{مجهول}} = \cos\underbrace{(\frac{\pi}{2} - x)}_{\text{معلوم}}$$

$$2x = 2k\pi \pm (\frac{\pi}{2} - x)\begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \to x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}\end{cases}$$

۲ سؤالات امتحانی درس دوم

کدام‌یک از عبارات زیر درست و کدام نادرست است؟

۱۴.	مقدار عددی عبارت $\cos^2 15 - \sin^2 15$ برابر $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است. *(دبیرستان نمونه دولتی نماز ـ میاندوآب دی ۱۴۰۱)*	درست ☐ نادرست ☐
۱۵.	در بازهٔ $(0, 2\pi)$ مقدار سینوس همواره در ۲ نقطه ۱ یا ۱- می‌گردد.	درست ☐ نادرست ☐
۱۶.	معادلهٔ مثلثاتی $\cos x + 1 = 0$ در بازهٔ $(0, 2\pi)$ دو جواب متمایز دارد.	درست ☐ نادرست ☐
۱۷.	بی‌شمار مثلث با اضلاع ۲ و ۶ واحد می‌توان رسم کرد که مساحت آن‌ها ۳ سانتی‌مترمربع باشد.	درست ☐ نادرست ☐