راهنمای استفاده از کتاب

برای کسب بهترین نتیجه در امتحانات مدرسه و کنکور گام‌های زیر را به ترتیب برای هر فصل طی کنید.

گام اول: فیلم آموزشی

۱. هر فصل به تعدادی جلسه تقسیم شده است.
۲. برای استفاده از فیلم‌های آموزشی هر جلسه QR-Codeهای صفحه بعد را اسکن کنید.
۳. در هر جلسه مطالب کتاب درسی درس به درس تدریس شده است.
۴. تمرین‌ها و فعالیت‌های کتاب درسی به صورت کامل تدریس شده است.

گام دوم: درسنامه آموزشی

۱. هر فصل به تعدادی قسمت تقسیم شده است.
۲. در هر قسمت آموزش کاملی به همراه مثال و تست ارائه شده است.
۳. سطح تست‌ها عموماً کمی بالاتر از مثال‌ها است. اگر دانش‌آموز وقت کافی ندارد یا می‌خواهد فقط در سطح امتحانات مدرسه درس بخواند، می‌تواند بدون این‌که مطلبی را از دست دهد از تست‌ها عبور کند.
۴. قسمت‌هایی تحت عنوان ویژهٔ علاقمندان آورده شده است که ویژهٔ آمادگی برای آزمون‌های تستی و کنکور است و مطالعهٔ آن‌ها برای امتحانات مدارس ضروری نیست.

گام سوم: پرسش‌های تشریحی

۱. هر فصل به تعدادی قسمت (دقیقاً منطبق بر قسمت‌بندی گام دوم) تقسیم شده است.
۲. سؤالات از ساده به دشوار و موضوعی مرتب شده‌اند.
۳. سؤالات دارای پاسخ تشریحی هستند.

گام چهارم: پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱. هر فصل به تعدادی قسمت (دقیقاً منطبق بر قسمت‌بندی گام دوم و سوم) تقسیم شده است.
۲. هر قسمت نیز دارای ریزطبقه‌بندی است.
۳. تست‌ها از ساده به دشوار و موضوعی مرتب شده‌اند.
۴. تمامی تست‌های کنکور داخل و خارج از کشور قابل استفاده و منطبق بر کتاب درسی جدید آورده شده است.
۵. تست‌های واجب با علامت ستاره (☆ و ★) مشخص شده‌اند که از میان آن‌ها تست‌های دارای علامت ★ برای مرور و جمع‌بندی هستند.
۶. تست‌ها دارای پاسخ تشریحی هستند.

به جای آن‌که چندین کتاب بخوانید، کتاب‌های گاج را چندین بار بخوانید

FILM

درسنامه آموزشی

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

فصل اوّل: آشنایی با مبانی ریاضیات

فصل دوم: احتمال

فصل سوم: آمار توصیفی

فصل چهارم: آمار استنباطی

پرسش‌های تشریحی

فصل اوّل: آشنایی با مبانی ریاضیات

فصل دوم: احتمال

فصل سوم: آمار توصیفی

فصل چهارم: آمار استنباطی

فصل ۲

قسمت سوم
احتمال شرطی

احتمال شرطی (کاهش فضای نمونه)

در بعضی مواقع ممکن است به ما اطلاعاتی بدهند که این اطلاعات در احتمال وقوع پیشامد مورد نظر ما مؤثر باشد.

به عنوان مثال، در پرتاب یک تاس احتمال وقوع عدد ۲ برابر $\frac{۱}{۶}$ است. اما اگر بدانیم عدد رو شده عددی اول است، در واقع عدد ظاهرشده یکی از اعداد ۲ یا ۳ یا ۵ (۳ حالت) می‌باشد، در این صورت احتمال وقوع عدد ۲ برابر $\frac{۱}{۳}$ خواهد بود. پس گاهی اوقات وقوع یک پیشامد بر احتمال وقوع پیشامد دیگر تأثیر می‌گذارد.

احتمال شرطی: کاهش فضای نمونه

در حالتی‌که فضای احتمال، هم‌شانس است شرطی کردن یک پیشامد نسبت به پیشامد B مثل این است که فضای نمونه، یعنی S را کنار گذاشته و B را فضای نمونه در نظر بگیریم. احتمال روی این فضای نمونه نیز هم‌شانس است. به این رویکرد «کاهش فضای نمونه» گفته می‌شود.

محاسبهٔ احتمال شرطی در فضاهای نمونه‌ای هم‌شانس

در محاسبهٔ احتمال شرطی، همهٔ حالت‌های ممکن برابر همهٔ حالت‌هایی است که در آن‌ها B رخ داده است. در واقع B فضای نمونه‌ای جدید ما خواهد بود و تمام حالت‌های مطلوب، همهٔ حالت‌هایی از B است که در A باشند.

در فضای نمونه‌ای هم‌شانس داریم:

$$P(A\,|\,B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$$

در حل مسائل احتمال شرطی، پیشامد B (پیشامدی که می‌دانیم رخ داده است) را به عنوان فضای نمونه‌ای جدید در نظر می‌گیریم و اعضای پیشامد A را در فضای نمونه‌ای جدید مشخص می‌کنیم (در واقع $A\cap B$) و سپس احتمال را در فضای نمونه‌ای جدید به‌دست می‌آوریم.

مثال **در پرتاب دو تاس با هم، اگر مجموع دو عدد رو شده کم‌تر از ۶ باشد، احتمال آن‌که هر دو عدد رو شده زوج باشد را به‌دست آورید.**

پاسخ: فضای نمونه‌ای پرتاب دو تاس (بدون هیچ شرطی)، $۶\times۶=۳۶$ عضو به‌صورت زیر دارد:

$$S=\{(۱،۱)،(۱،۲)،\ldots،(۱،۶)،\ldots،(۶،۱)،\ldots،(۶،۶)\}$$

طبق فرض، مجموع دو عدد رو شده کم‌تر از ۶ است، پس همهٔ حالت‌های ممکن، تمام زوج‌مرتب‌هایی از S است که مجموع آن‌ها کم‌تر از ۶ باشد، داریم:

$$B=\{(۱،۱)،(۱،۲)،(۱،۳)،(۱،۴)،(۲،۱)،(۲،۲)،(۲،۳)،(۳،۱)،(۳،۲)،(۴،۱)\}\Rightarrow n(B)=۱۰$$

حالت‌های مطلوب، همهٔ حالت‌هایی از B (فضای نمونه‌ای جدید) است که هر دو عدد رو شده زوج باشند. اگر A پیشامد مطلوب باشد، آن‌گاه:

$$A\cap B=\{(۲،۲)\}\Rightarrow n(A\cap B)=۱\Rightarrow P(A\,|\,B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{۱}{۱۰}$$

تذکر مهم در حل مثال قبل، نیازی به نوشتن فضای نمونه‌ای S نداریم، اما باید از روی S، پیشامد B را مشخص کنیم.

تست **یک تاس را سه بار پرتاب می‌کنیم. اگر هر سه عدد رو شده زوج باشند، احتمال آن‌که هیچ‌یک از اعداد رو شده ۶ نباشند، کدام است؟**

۱) $\frac{۸}{۲۷}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱۰}{۲۷}$ ۴) $\frac{۴}{۹}$

پاسخ: اگر B پیشامد زوج بودن عدد رو شده در هر سه پرتاب تاس باشد، آن‌گاه عدد رو شده در هر پرتاب یکی از سه عدد زوج است و در نتیجه:

$$n(B)=\frac{۳}{}\times\frac{۳}{}\times\frac{۳}{}=۲۷$$

اگر A پیشامدی باشد که هیچ‌یک از سه عدد رو شده ۶ نباشد، آن‌گاه در هر حالت یکی از دو عدد ۲ یا ۴ رو شده است (می‌دانیم عدد رو شده، زوج است):

$$\Rightarrow n(A\cap B)=\frac{۲}{}\times\frac{۲}{}\times\frac{۲}{}=۸\Rightarrow P(A\,|\,B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{۸}{۲۷}\Rightarrow$$ گزینهٔ (۱) صحیح است.

مثال

در پرتاب دو تاس، اگر حداقل یکی از اعداد رو شده ۵ باشد، با چه احتمالی عدد ۲ ظاهر می‌شود؟

پاسخ: اگر B پیشامد رو شدن حداقل یک بار عدد ۵ در پرتاب دو تاس باشد، آن‌گاه:

$$B=\{(۱،۵)،(۲،۵)،(۳،۵)،(۴،۵)،(۵،۵)،(۶،۵)،(۵،۱)،(۵،۲)،(۵،۳)،(۵،۴)،(۵،۶)\}\Rightarrow n(B)=۱۱$$

اگر A پیشامد ظاهر شدن عدد ۲ باشد، آن‌گاه:

$$A\cap B=\{(۲،۵)،(۵،۲)\}\Rightarrow n(A\cap B)=۲\Rightarrow P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{۲}{۱۱}$$

مثال

در یک خانواده با سه فرزند، اگر فرزند اول پسر باشد، با چه احتمالی این خانواده دقیقاً ۲ فرزند پسر دارد؟ (مشابه تمرین ۱ صفحهٔ ۶۴ کتاب درسی)

پاسخ: فضای نمونه‌ای جنسیت فرزندان یک خانواده با سه فرزند، ۸ عضو دارد. اگر B پیشامدی باشد که در آن، فرزند اول پسر باشد، آن‌گاه:

$$B=\{(\text{پ، پ، پ})،(\text{پ، پ، د})،(\text{پ، د، پ})،(\text{پ، د، د})\}\Rightarrow n(B)=۴$$

اگر A پیشامدی باشد که در آن، خانواده دقیقاً ۲ فرزند پسر داشته باشد، آن‌گاه:

$$A\cap B=\{(\text{پ، پ، د})،(\text{پ، د، پ})\}\Rightarrow n(A\cap B)=۲\Rightarrow P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$$

مثال

از بین ۵ دانش‌آموز رشتهٔ تجربی و ۳ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی، سه نفر به تصادف انتخاب‌شده‌اند. اگر حداقل دو دانش‌آموز رشتهٔ تجربی در بین انتخاب‌شدگان باشند، با کدام احتمال دقیقاً دو نفر از انتخاب‌شدگان از رشتهٔ تجربی می‌باشند؟

پاسخ: می‌دانیم از بین ۳ نفر انتخاب‌شده، حداقل ۲ نفر آنان از رشتهٔ تجربی هستند، بنابراین اگر B پیشامدی باشد که رخ داده باشد (حداقل دو دانش‌آموز رشتهٔ تجربی، بین انتخاب‌شدگان وجود دارند)، آن‌گاه:

B: ۲ نفر از رشتهٔ تجربی و ۱ نفر از رشتهٔ ریاضی یا هر سه نفر از رشتهٔ تجربی $\Rightarrow n(B)=\binom{۵}{۲}\binom{۳}{۱}+\binom{۵}{۳}=۱۰\times ۳+۱۰=۴۰$

اگر A پیشامدی باشد که در آن دقیقاً دو نفر از انتخاب‌شدگان از رشتهٔ تجربی باشند، آن‌گاه:

$A\cap B$: ۲ نفر از رشتهٔ تجربی و ۱ نفر از رشتهٔ ریاضی $\Rightarrow n(A\cap B)=\binom{۵}{۲}\binom{۳}{۱}=۳۰\Rightarrow P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{۳۰}{۴۰}=\frac{۳}{۴}$

مثال

اعداد ۱ تا ۸ را روی هشت کارت نوشته و سه کارت را به تصادف انتخاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال این‌که دقیقاً ۲ کارت با شمارهٔ زوج باشد به شرط این‌که مجموع آن‌ها فرد باشد.

پاسخ: اگر B (شرط) پیشامد آن باشد که مجموع ۳ عدد انتخاب‌شده فرد و A (پیشامد مطلوب) پیشامد آن باشد که دقیقاً ۲ کارت با شمارهٔ زوج انتخاب‌شده باشد، آن‌گاه داریم:

(اگر هر سه عدد فرد یا دو عدد زوج و دیگری فرد باشد، آن‌گاه جمع سه عدد فرد است.)

$$n(B)=\overset{\text{انتخاب ۳ عدد فرد از ۴ عدد فرد}}{\binom{۴}{۳}}+\underbrace{\binom{۴}{۲}\binom{۴}{۱}}_{\text{انتخاب ۲ عدد زوج و یک عدد فرد}}=۴+۶\times ۴=۲۸$$

در این صورت $A\cap B$، پیشامدی است که باید دو عدد زوج و یک عدد فرد انتخاب شود، داریم:

$$n(A\cap B)=\binom{۴}{۲}\binom{۴}{۱}=۲۴\Rightarrow P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{۲۴}{۲۸}=\frac{۶}{۷}$$

تست

از ۹ کلید درون کیسه‌ای، ۴ تای آن‌ها طلایی‌رنگ است. قفلی داریم که فقط با کلیدهای طلایی‌رنگ باز می‌شود. اگر به تصادف دو کلید از این کیسه خارج کنیم و بتوان قفل را باز کرد، با چه احتمالی با هر دو کلید می‌توان قفل را باز کرد؟

۱) $\frac{۷}{۲۶}$ ۲) $\frac{۳}{۱۰}$ ۳) $\frac{۵}{۱۳}$ ۴) $\frac{۳}{۱۳}$

پاسخ: اگر حداقل یکی از دو کلید طلایی‌رنگ باشد، آن‌گاه می‌توان قفل را باز کرد. پس اگر B پیشامد آن باشد که حداقل یکی از دو کلید انتخاب‌شده، طلایی‌رنگ باشد، آن‌گاه داریم:

$$n(B)=\binom{۴}{۱}\binom{۵}{۱}+\binom{۴}{۲}=۴\times ۵+۶=۲۶$$

اگر A پیشامدی باشد که بتوان با هر دو کلید، قفل را باز کرد، آن‌گاه A پیشامدی است که در آن هر دو کلید انتخاب‌شده طلایی‌رنگ می‌باشد، بنابراین داریم:

$n(A\cap B)=\binom{۴}{۲}=۶\Rightarrow P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{۶}{۲۶}=\frac{۳}{۱۳}\Rightarrow$ گزینهٔ (۴) صحیح است.

تعریف کلی احتمال شرطی (برای فضاهای هم‌شانس و فضاهای غیرهم‌شانس) به‌صورت زیر است:

تعریف فرض کنید A و B دو پیشامد باشند، به قسمی که $P(B) > ۰$، در این صورت اگر B رخ داده باشد، احتمال وقوع A را با نماد $P(A|B)$ نشان می‌دهیم و آن را احتمال شرطی A به شرط وقوع B می‌گوییم و از دستور مقابل محاسبه می‌شود:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

تذکر در حالتی‌که $P(B) = ۰$، احتمال هیچ پیشامدی به شرط B تعریف نمی‌شود.

مثال

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند به طوری‌که $P(A) = ۲P(B) = ۰/۴$ و $P(A \cup B) = ۰/۵$، مقدار $P(A|B)$ را به‌دست آورید.

پاسخ: با توجه به فرمول $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ و مقدار $P(B) = ۰/۲$، باید مقدار $P(A \cap B)$ را به‌دست آوریم. داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \xrightarrow[P(A \cup B)=۰/۵]{P(A)=۰/۴ ، P(B)=۰/۲} ۰/۵ = ۰/۴ + ۰/۲ - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = ۰/۶ - ۰/۵ = ۰/۱ \Rightarrow P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{۰/۱}{۰/۲} = \frac{۱}{۲} = ۰/۵$$

مثال

یک فضای نمونه‌ای متشکل از ۴ برآمد a، b، c و d است. اگر $P(a) = P(b) = \frac{۱}{۳}$ و $P(c) = P(d) = \frac{۱}{۶}$، مطلوب است:

آ) محاسبهٔ $P(\{a،b،c\})$ **ب) محاسبهٔ $P(\{a،b،c\}|\{b،c،d\})$**

پاسخ: فضای نمونه‌ای به‌صورت $S = \{a،b،c،d\}$ است. S یک فضای نمونه‌ای غیرهم‌شانس است.

آ) طبق محاسبهٔ احتمال در فضای نمونه‌ای غیرهم‌شانس، داریم:

$$P(\{a،b،c\}) = P(a) + P(b) + P(c) = \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۶} = \frac{۲}{۳} + \frac{۱}{۶} = \frac{۴+۱}{۶} = \frac{۵}{۶}$$

ب) برای محاسبهٔ احتمال شرطی داده‌شده، با فرض $A = \{a،b،c\}$ و $B = \{b،c،d\}$، باید مقدار $P(A|B)$ را به‌دست آوریم. داریم:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\{b،c\})}{P(\{b،c،d\})} \quad (۱)$$

طبق تعریف احتمال در فضای نمونه‌ای غیرهم‌شانس، داریم:

$$P(\{b،c\}) = P(b) + P(c) = \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۶} = \frac{۲+۱}{۶} = \frac{۱}{۲} \quad (۲)$$

$$P(\{b،c،d\}) = P(b) + P(c) + P(d) = \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۶} = \frac{۱}{۳} + \frac{۲}{۶} = \frac{۲}{۳} \quad (۳)$$

$$(۱)،(۲)،(۳) \Rightarrow P(A|B) = \frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۲}{۳}} = \frac{۳}{۴}$$

تست

کارخانه‌ای به هنگام نصب دستگاه‌های جدید به احتمال ۰/۲۵ به متخصصین جدید و به احتمال ۰/۴ به کارگران جدید و به احتمال ۰/۱۵ هم به متخصصین جدید و هم به کارگران جدید نیاز دارد. اگر این کارخانه به متخصصین جدید نیاز داشته باشد، با کدام احتمال به کارگران جدید نیاز دارد؟

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۳}{۵}$ ۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۲}{۵}$

پاسخ: احتمال مورد نظر، احتمال شرطی است. پیشامدهای A و B را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

A: کارخانه به هنگام نصب دستگاه‌های جدید به متخصصین جدید نیاز داشته باشد.

B: کارخانه به هنگام نصب دستگاه‌های جدید به کارگران جدید نیاز داشته باشد.

طبق فرض $P(A) = ۰/۲۵$، $P(B) = ۰/۴$ و $P(A \cap B) = ۰/۱۵$ می‌باشد. احتمال مطلوب، $P(B|A)$ است. طبق فرمول احتمال شرطی داریم:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{۰/۱۵}{۰/۲۵} = \frac{۱۵}{۲۵} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow$$ گزینهٔ (۲) صحیح است.

مثال

در یخچال یک شیرینی‌فروشی ۱۴ کیک تولد وجود دارد که وزن هیچ دوتایی برابر نیستند. اگر یکی از این کیک‌ها را به تصادف انتخاب کنیم: (مشابه مثال صفحهٔ ۵۵ کتاب درسی)

آ) احتمال این‌که وزن آن کیک از همه بیش‌تر باشد، چقدر است؟

ب) کیک دیگری را به تصادف انتخاب می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم که از کیک اول سبک‌تر است. احتمال آن‌که وزن کیک اول از همه بیش‌تر باشد چه‌قدر است؟

پاسخ: آ) با توجه به این‌که یکی از ۱۴ کیک، سنگین‌تر از بقیه است، احتمال آن‌که کیکی را که انتخاب کرده‌ایم، سنگین‌ترین باشد برابر $\frac{۱}{۱۴}$ است.

ب) احتمال خواسته‌شده یک احتمال شرطی است. با معرفی پیشامدهای A و B به صورت زیر، مقدار $P(A|B)$ را از فرمول $\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ به‌دست می‌آوریم:

A : کیک اول، سنگین‌ترین کیک باشد. B : کیک دوم سبک‌تر از کیک اول باشد.

$$A\subseteq B\Rightarrow A\cap B=A\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)=\frac{۱}{۱۴}$$

در نیمی از حالات، کیک اول سنگین‌تر از کیک دوم است و در نیمی از حالات دیگر، کیک دوم سنگین‌تر از کیک اول است، بنابراین:

$$P(B)=\frac{۱}{۲}\Rightarrow P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{۱}{۱۴}}{\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۷}$$

قانون ضرب احتمالات

از رابطهٔ $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$، تساوی $P(A\cap B)=P(B)P(A|B)$ به‌دست می‌آید که به آن قانون ضرب احتمالات می‌گوییم و از این قانون برای به‌دست آوردن احتمال هم‌زمان وقوع دو پیشامد استفاده می‌کنیم.

مثال

درون جعبه‌ای ۴ لامپ سالم و ۱ لامپ معیوب وجود دارد. ۲ لامپ به تصادف و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که لامپ اول سالم و لامپ دوم معیوب باشد را به‌دست آورید. (مشابه مثال صفحهٔ ۵۶ کتاب درسی)

پاسخ: فرض کنیم A پیشامد سالم بودن لامپ اول و B پیشامد معیوب بودن لامپ دوم باشد. می‌خواهیم $P(A\cap B)$ را به‌دست آوریم. داریم:

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$$

$$P(A)=\frac{۴}{۵}\quad,\quad P(B|A)=P(\text{لامپ دوم معیوب}\,|\,\text{لامپ اول سالم})=\frac{۱}{۴}\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{۴}{۵}\times\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۵}$$

مثال

۵۵ درصد جمعیت جامعه‌ای را که ۶۰ درصد این جامعه باسواد هستند، زنان تشکیل می‌دهند. اگر نیمی از زنان این جامعه باسواد باشند و یک نفر را به تصادف انتخاب کنیم، با چه احتمالی این شخص، زن یا باسواد می‌باشد؟

پاسخ: فرض کنیم A پیشامد زن بودن شخص انتخاب‌شده و B پیشامد باسواد بودن وی باشد. طبق فرض $P(A)=۰/۵۵$، $P(B)=۰/۶$ و $P(B|A)=۰/۵$ (نیمی از زنان جامعه باسواد هستند) می‌باشد. داریم:

$$P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}\Rightarrow ۰/۵=\frac{P(B\cap A)}{۰/۵۵}\xrightarrow{A\cap B=B\cap A}P(A\cap B)=۰/۵\times ۰/۵۵=۰/۲۷۵$$

می‌خواهیم $P(A\cup B)$ را به‌دست آوریم. داریم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=۰/۵۵+۰/۶-۰/۲۷۵=۰/۸۷۵$$

تست

۶۰ درصد کارکنان یک سازمان، مرد هستند. ۲۵ درصد کل کارکنان این سازمان و ۲۰ درصد کارکنان مرد این سازمان، چاق هستند. اگر یک نفر از بین آن‌ها به تصادف انتخاب کنیم، با کدام احتمال مرد یا چاق می‌باشد؟

۱) ۰/۸۲ ۲) ۰/۷۸ ۳) ۰/۷۳ ۴) ۰/۷

پاسخ: $B\Rightarrow P(B)=۰/۲۵$: پیشامد چاق بودن فرد انتخاب‌شده ، $A\Rightarrow P(A)=۰/۶$: پیشامد مرد بودن شخص انتخاب‌شده

$$P(\text{چاق بودن}\,|\,\text{مرد بودن})=P(B|A)=۰/۲\Rightarrow\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=۰/۲\Rightarrow\frac{P(B\cap A)}{۰/۶}=۰/۲\Rightarrow P(B\cap A)=۰/۶\times ۰/۲=۰/۱۲$$

$\Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=۰/۶+۰/۲۵-۰/۱۲=۰/۷۳\Rightarrow$ گزینهٔ (۳) صحیح است.

نکته قانون ضرب احتمال را می‌توان برای سه پیشامد نیز نوشت:

اگر $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ پیشامدهایی با احتمال مثبت باشند، آن‌گاه:

$$P(A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳) = P(A_۱)P(A_۲ | A_۱)P(A_۳ | A_۱ \cap A_۲)$$

و می‌توان این قانون را برای هر n پیشامد $A_۱$، $A_۲$، ... و A_n با احتمال مثبت تعمیم داد:

$$P(A_۱ \cap A_۲ \cap \cdots \cap A_n) = P(A_۱)P(A_۲ | A_۱)\cdots P(A_n | A_۱ \cap \cdots \cap A_{n-۱})$$

مثال

در کیسه‌ای ۲ گوی سفید، ۳ گوی سیاه و ۳ گوی سبز وجود دارد. از کیسه سه گوی به ترتیب و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم. احتمال این‌که گوی اول سبز، گوی دوم سفید و گوی سوم سیاه باشد را به‌دست آورید. (مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۵۷ کتاب درسی)

پاسخ: پیشامدهای $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$A_۱$: گوی اول سبز $\qquad$ $A_۲$: گوی دوم سفید $\qquad$ $A_۳$: گوی سوم سیاه

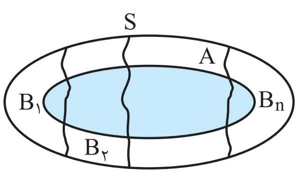
مقدار $P(A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳)$ مطلوب است. طبق قانون ضرب احتمالات برای سه پیشامد داریم:

$$P(A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳) = P(A_۱)P(A_۲ | A_۱)P(A_۳ | A_۱ \cap A_۲)$$

در ابتدا ۸ گوی درون کیسه قرار دارد که ۳ تای آن‌ها سبز می‌باشند، بنابراین احتمال آن‌که گوی اول خارج‌شده سبز باشد برابر $P(A_۱) = \frac{۳}{۸}$ می‌باشد. با خارج شدن یک گوی سبز، ۷ گوی درون کیسه باقی می‌ماند که ۲ تای آن‌ها سفید هستند، بنابراین اگر گوی دوم را خارج کنیم، آن‌گاه احتمال سفید بودن آن برابر $P(A_۲ | A_۱) = \frac{۲}{۷}$ است و در نهایت با خارج کردن این گوی از کیسه، ۶ گوی درون کیسه باقی می‌ماند که ۳ تای آن‌ها سیاه هستند. پس با خارج کردن گوی سوم، احتمال سیاه بودن آن برابر $P(A_۳ | A_۱ \cap A_۲) = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$ است. پس داریم:

$$P(A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳) = \frac{۳}{۸} \times \frac{\cancel{۲}}{۷} \times \frac{۱}{\cancel{۲}} = \frac{۳}{۵۶}$$

قانون احتمال کل (احتمال‌های چندشاخه‌ای)

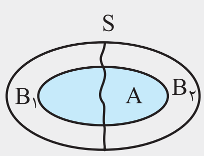


فرض کنید $B_۱$، $B_۲$، ... و B_n پیشامدهایی با احتمال مثبت باشند که فضای نمونه را افراز می‌کنند. با این شرایط برای هر پیشامد دلخواه A داریم:

$$\mathbf{P(A) = P(B_۱)P(A | B_۱) + \cdots + P(B_n)P(A | B_n) = \sum_{i=۱}^{n} P(B_i)P(A | B_i)}$$

مثال

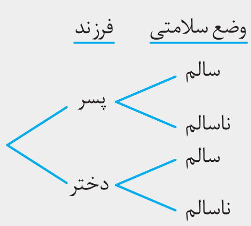
فرض کنید انتقال نوعی بیماری ارثی از والدین به فرزند پسر ۰/۱۲ و به فرزند دختر ۰/۰۹ باشد. والدینی که حامل این نوع بیماری هستند، انتظار فرزندی را دارند. مطلوب است احتمال آن‌که این فرزند سالم باشد.



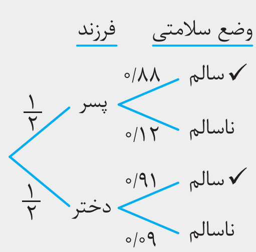
پاسخ: فرزندی که به دنیا خواهد آمد یا پسر است یا دختر. پس اگر پسر بودن فرزند را با $B_۱$ و دختر بودن آن را با $B_۲$ نشان دهیم، آن‌گاه $B_۱$ و $B_۲$ ناسازگارند و حتماً یکی از آن‌ها رخ خواهد داد. سالم بودن فرزند را با A نشان می‌دهیم. می‌خواهیم $P(A)$ را حساب کنیم.

$$P(A) = P(B_۱)P(A | B_۱) + P(B_۲)P(A | B_۲) = \frac{۱}{۲} \times (۱ - ۰/۱۲) + \frac{۱}{۲}(۱ - ۰/۰۹) = ۰/۴۴ + ۰/۴۵۵ = ۰/۸۹۵$$

برای این مسئله اگر سعی می‌کردیم فهرستی از حالات ممکن تشکیل دهیم به نموداری به‌صورت مقابل دست می‌یافتیم:



اگر روی هر یک از پاره‌خط‌های نمودار بالا احتمال پیشامد نظیر آن خط را بنویسیم، خواهیم نوشت:



حال اگر شاخه‌هایی را که به وضعیت سالم ختم می‌شوند، مشخص کنیم و احتمال‌های روی آن شاخه را در هم ضرب و با نتیجهٔ حاصل از شاخه‌های دیگر جمع کنیم، خواهیم داشت:

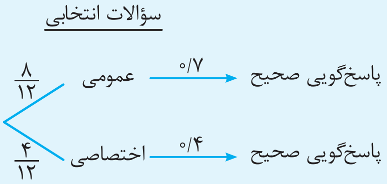
$$\underbrace{\frac{۱}{۲} \times ۰/۸۸}_{\text{شاخهٔ اول}} + \underbrace{\frac{۱}{۲} \times ۰/۹۱}_{\text{شاخهٔ دوم}} = ۰/۸۹۵$$

تست

احتمال پاسخ‌گویی صحیح به سؤالات اختصاصی و عمومی در یک آزمون به ترتیب ۰/۴ و ۰/۷ است. اگر از بین ۴ سؤال اختصاصی و ۸ سؤال عمومی یک سؤال به تصادف انتخاب شود، احتمال پاسخ‌گویی صحیح به این سؤال چقدر است؟

۱) $\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۲}{۱۵}$ ۴) $\frac{۱}{۱۵}$

پاسخ : اطلاعات مسئله را در نمودار درختی روبه‌رو، خلاصه می‌کنیم:



بنابر احتمال کل داریم:

$$P\,(\text{پاسخ‌گویی صحیح}) = \frac{۸}{۱۲}\times\frac{۷}{۱۰}+\frac{۴}{۱۲}\times\frac{۴}{۱۰}=\frac{۵۶+۱۶}{۱۲۰}=\frac{۷۲}{۱۲۰}=\frac{۳}{۵}$$

بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

مثال

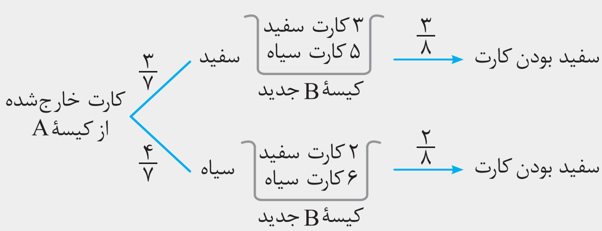
درون کیسهٔ A ، ۳ کارت سفید و ۴ کارت سیاه و درون کیسهٔ B ، ۲ کارت سفید و ۵ کارت سیاه وجود دارد. کارتی به تصادف از درون کیسهٔ A انتخاب کرده و بدون نگاه کردن آن را درون کیسهٔ B قرار می‌دهیم. سپس از کیسهٔ B کارتی به تصادف بیرون می‌آوریم. احتمال سفید بودن کارت خارج‌شده از کیسهٔ B کدام است؟

پاسخ : دو حالت برای کارتی که از کیسهٔ A خارج می‌کنیم وجود دارد:

حالت اول: کارت خارج‌شده سفید است. احتمال خارج کردن کارت سفید از کیسهٔ A برابر $\frac{۳}{۷}$ است. با قرار دادن این کارت سفید درون کیسهٔ B، تعداد کارت‌های سفید کیسهٔ B، $۳ = ۱ + ۲$ خواهد شد. احتمال انتخاب یک کارت سفید از این کیسهٔ جدید برابر $\frac{۳}{۸}$ است.

حالت دوم: کارت خارج‌شده سیاه است. احتمال خارج کردن کارت سیاه از کیسهٔ A برابر $\frac{۴}{۷}$ است. با قرار دادن این کارت سیاه درون کیسهٔ B، تعداد کارت‌های سفید کیسهٔ A تغییر نمی‌کند ولی تعداد کارت‌های سیاه برابر $۶ = ۱ + ۵$ می‌شود و در نتیجه احتمال انتخاب یک کارت سفید از این کیسهٔ جدید برابر $\frac{۲}{۸}$ می‌شود.

نمودار درختی و احتمال مطلوب به‌صورت مقابل می‌باشد.



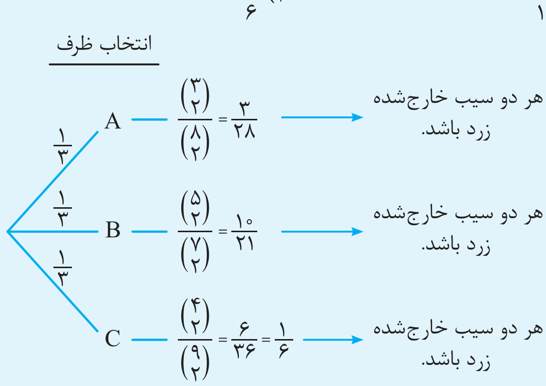
$$\Rightarrow P(\text{سفید بودن کارت}) = \frac{۳}{۷}\times\frac{۳}{۸}+\frac{۴}{۷}\times\frac{۲}{۸}=\frac{۹+۸}{۵۶}=\frac{۱۷}{۵۶}$$

تست

درون ظرف A ، ۳ سیب زرد و ۵ سیب قرمز، درون ظرف B ، ۵ سیب زرد و ۲ سیب قرمز و در ظرف C ، ۴ سیب زرد و ۵ سیب قرمز وجود دارد. یکی از ظرف‌ها را به تصادف انتخاب کرده و سپس ۲ سیب از آن خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که هر دو سیب خارج‌شده زرد باشند، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۱۴}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

پاسخ : نمودار درختی به‌صورت مقابل درمی‌آید:



$$P\,(\text{هر دو سیب خارج‌شده زرد باشند}) = \frac{۱}{۳}\left(\frac{۳}{۲۸}+\frac{۱۰}{۲۱}+\frac{۱}{۶}\right)=\frac{۱}{۳}\times\frac{۹+۴۰+۱۴}{۲۸\times۳}=\frac{۱}{۳}\times\frac{۶۳}{۲۸\times۳}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow$$ گزینهٔ (۱) صحیح است.

مثال **درون جعبه‌ای ۵ مهرهٔ سفید و ۴ مهرهٔ سیاه قرار دارد. یک مهره بدون رؤیت از جعبه خارج می‌کنیم و سپس مهرهٔ دیگری از بین ۸ مهرهٔ باقی‌مانده خارج می‌کنیم، با کدام احتمال این مهره سفید است؟**

پاسخ : مهرهٔ اولی که از جعبه خارج می‌کنیم، یا سفید است یا سیاه. پیشامدهای B_1 و B_2 که فضای نمونه‌ای S را به دو مجموعه افراز می‌کنند، به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

B_1 : مهرهٔ اول خارج‌شده سفید است. B_2 : مهرهٔ اول خارج‌شده سیاه است.

داریم: $P(B_1)=\frac{5}{9}$ ، $P(B_2)=\frac{4}{9}$

اگر A پیشامد سفید بودن مهرهٔ دوم باشد، آن‌گاه با خارج کردن یک مهرهٔ سفید، ۴ مهرهٔ سفید و ۴مهرهٔ سیاه در جعبه باقی می‌مانند، بنابراین داریم:

$P(A\mid B_1)=\frac{4}{8}$

با خارج کردن یک مهرهٔ سیاه، ۵ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه در جعبه باقی می‌مانند، بنابراین داریم: $P(A\mid B_2)=\frac{5}{8}$

بنابر قانون احتمال کل داریم: $P(A)=P(B_1)P(A\mid B_1)+P(B_2)P(A\mid B_2)=\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}+\frac{4}{9}\times\frac{5}{8}=\frac{20+20}{72}=\frac{40}{72}=\frac{5}{9}$

در مثال قبل، عدد به‌دست‌آمده با حالتی که از ابتدا یک مهره برداریم و احتمال سفید بودن آن را به‌دست آوریم، برابر است. می‌توان این مطلب را به صورت نکتهٔ زیر نوشت:

نکته اگر از درون جعبه‌ای، تعدادی مهره بدون رؤیت خارج کنیم و سپس مهرهٔ دیگری از این جعبه خارج کنیم، آن‌گاه برای به‌دست آوردن احتمال مطلوب، احتمال حالتی را به‌دست می‌آوریم که اصلاً مهره‌ای از جعبه خارج نکرده‌ایم و این مهره اولین مهرهٔ خارج‌شده از جعبه است.

نکته می‌دانیم که دو پیشامد B و B' ، فضای نمونه‌ای S را افراز می‌کنند. بنابراین ساده‌ترین شکل قانون احتمال کل در حالت $n=2$ است که به‌صورت زیر بیان می‌شود:

فرض کنید B پیشامدی باشد که $0<P(B)<1$ ، در این صورت برای هر پیشامد دلخواه A ، داریم: $P(A)=P(B)P(A\mid B)+P(B')P(A\mid B')$

قانون بیز

مدیر شرکتی که تولیدکنندهٔ پوشاک گرم است، فکر می‌کند به احتمال ۶۰ درصد دمای زمستان امسال بین۸ تا ۱۰- درجهٔ سانتی‌گراد است و عددی را به عنوان تعداد تولیدی پوشاک گرم در نظر می‌گیرد. حال اگر این مدیر به واسطهٔ اخبار هواشناسی مطلع شود که دمای زمستان امسال خیلی پایین‌تر از سال‌های قبل خواهد بود، ممکن است به احتمالش بیفزاید و آن را مثلاً به عدد ۸۰ درصد برساند و در نتیجه به مقدار تولیدش بیفزاید.

قانون بیز که از قوانین مهم در علم احتمال است، این موضوع را به زبان ریاضی فرمول‌بندی می‌کند.

قانون بیز مشخص می‌کند که «احتمال‌های پیش از مشاهده» چگونه به «احتمال‌های پس از مشاهده» تبدیل می‌شوند. **فرضیات قانون بیز** کاملاً مشابه **فرضیات قانون احتمال کل** است. در واقع قانون بیز، نوعی محاسبهٔ احتمال شرطی با فرضیات قانون احتمال کل است.

فرض کنید B_1 ، B_2 ، ... و B_n پیشامدهایی با احتمال ناصفر باشند که فضای نمونه را افراز می‌کنند. در این صورت برای هر پیشامد دلخواه A و هر $1\le i\le n$ داریم:

$$P(B_i\mid A)=\frac{P(B_i)P(A\mid B_i)}{P(A)}$$

این قانون توضیح می‌دهد که چگونه $P(B_i)$ ها بعد از مشاهدهٔ رخ دادن پیشامد A ، به $P(B_i\mid A)$ ها تبدیل می‌شوند.

گاهی قانون بیز را به شکل مقابل می‌نویسند:

$$P(B_i\mid A)=\frac{P(B_i)P(A\mid B_i)}{\sum_{k=1}^{n}P(B_k)P(A\mid B_k)}$$

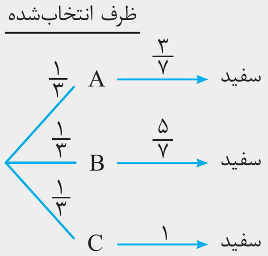
هدف از این نوع نوشتن قانون بیز این است که تصریح شود در یک مسئلهٔ مربوط به قانون بیز معمولاً داده‌های موجود $P(B_k)$ ها و $P(A\mid B_k)$ ها هستند. توجه کنید که آن‌چه در مخرج عبارت سمت راست آمده است، **طبق قانون احتمال کل، همان $P(A)$** است.

مثال **در جعبه‌ای سه ظرف وجود دارد. ظرف A شامل ۳ مهرهٔ سفید و ۴ مهرهٔ سیاه، ظرف B شامل ۵ مهرهٔ سفید و ۲ مهرهٔ سیاه و ظرف C شامل تنها تعدادی مهرهٔ سفید است. یکی از ظرف‌ها را به تصادف انتخاب می‌کنیم و سپس مهره‌ای از آن و به تصادف خارج می‌کنیم. اگر مشاهده کنیم مهرهٔ خارج‌شده سفید است، با چه احتمالی این مهره از ظرف C خارج شده است؟**

پاسخ : مسئله نوعی احتمال شرطی با فرضیات قانون احتمال کل است. این احتمال را باید از قانون بیز به‌دست آوریم. اگر D پیشامد سفید بودن مهرهٔ خارج‌شده و E پیشامد خارج شدن مهره از ظرف C باشد، آن‌گاه $P(E\mid D)$ ، احتمال مطلوب است.

طبق فرمول احتمال شرطی، داریم: $P(E\mid D)=\frac{P(E\cap D)}{P(D)}$

مقدار $P(D)$ را باید از قانون احتمال کل به‌دست آوریم. اطلاعات در نمودار درختی زیر خلاصه شده است:



$$\Rightarrow P(D)=\frac{۱}{۳}\times\frac{۳}{۷}+\frac{۱}{۳}\times\frac{۵}{۷}+\frac{۱}{۳}\times ۱=\frac{۳}{۲۱}+\frac{۵}{۲۱}+\frac{۱}{۳}=\frac{۳+۵+۷}{۲۱}=\frac{۱۵}{۲۱}=\frac{۵}{۷}$$

از قانون ضرب احتمالات، داریم:

$$P(E\cap D)=P(E)P(D|E)=\frac{۱}{۳}\times ۱=\frac{۱}{۳}\Rightarrow P(E|D)=\frac{P(E\cap D)}{P(D)}=\frac{\frac{۱}{۳}}{\frac{۵}{۷}}=\frac{۷}{۱۵}$$

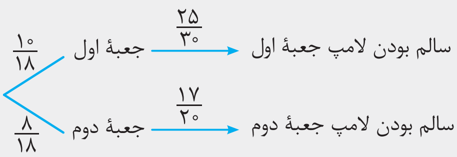
مثال

در دو جعبه به ترتیب ۳۰ و ۲۰ عدد لامپ همانند وجود دارد. در جعبهٔ اول ۵ عدد لامپ معیوب و در جعبهٔ دوم ۳ عدد لامپ معیوب موجود است. از اولی ۱۰ لامپ و از دومی ۸ لامپ به تصادف انتخاب می‌کنیم و آن‌ها را به‌صورت درهم در جعبه‌ای جدید قرار می‌دهیم. از این جعبه به تصادف لامپی برمی‌داریم:

آ) احتمال آن‌که لامپ انتخاب‌شده از جعبهٔ جدید، سالم باشد چقدر است؟

ب) اگر بدانیم لامپ انتخاب‌شده از جعبهٔ جدید سالم است، با کدام احتمال این لامپ از جعبهٔ اول خارج‌شده است؟

پاسخ : آ) جعبهٔ جدید را می‌توان به‌صورت دو دسته لامپ که یک دستهٔ آن لامپ‌های جعبهٔ اول و دستهٔ دیگر لامپ‌های جعبهٔ دوم است، در نظر گرفت. پس برای لامپی که از جعبهٔ جدید خارج می‌کنیم، دو حالت به‌وجود می‌آید. در نمودار درختی زیر، اطلاعات نوشته شده است:



$$\Rightarrow P(\text{سالم بودن لامپ})=P(A)=\frac{\cancel{۱۰}}{۱۸}\times\frac{۲۵}{\underset{۳}{\cancel{۳۰}}}+\frac{\overset{۲}{\cancel{۸}}}{۱۸}\times\frac{۱۷}{\underset{۵}{\cancel{۲۰}}}=\frac{۱۲۵+۱۰۲}{۱۸\times ۱۵}=\frac{۲۲۷}{۲۷۰}$$

ب) احتمال خواسته‌شده، احتمال شرطی اما با فرضیات قانون احتمال کل می‌باشد.

اگر A پیشامد سالم بودن لامپ انتخاب‌شده و B پیشامد خارج شدن لامپ از جعبهٔ اول باشد، باید $P(B|A)$ را با قانون بیز به‌دست آوریم:

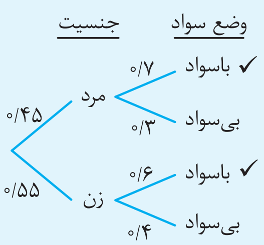
$$P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{\frac{۱۰}{۱۸}\times\frac{۲۵}{\cancel{۳۰}}}{\frac{۲۲۷}{\underset{۹}{\cancel{۲۷۰}}}}=\frac{\overset{۱}{\cancel{۹}}\times\overset{۵}{\cancel{۱۰}}\times ۲۵}{\underset{\underset{۱}{\cancel{۲}}}{\cancel{۱۸}}\times ۲۲۷}=\frac{۱۲۵}{۲۲۷}$$

تست

۵۵ درصد جمعیت کشوری را زنان و ۴۵ درصد بقیه را مردان تشکیل می‌دهند. ۶۰ درصد زنان و ۷۰ درصد مردان باسواد می‌باشند. شخصی به تصادف از بین آنان انتخاب می‌کنیم، اگر شخص انتخاب‌شده باسواد باشد، آن‌گاه احتمال آن‌که مرد باشد، چقدر است؟

۱) $\frac{۲۷}{۴۳}$ ۲) $\frac{۲۱}{۴۳}$ ۳) $\frac{۴۱}{۸۶}$ ۴) $\frac{۴۷}{۸۶}$

پاسخ : اطلاعات مسئله را در نمودار درختی روبه‌رو خلاصه می‌کنیم:



بنابراین احتمال باسواد بودن برابر است با:

$$P(\text{باسواد بودن})=۰/۴۵\times ۰/۷+۰/۵۵\times ۰/۶=۰/۶۴۵$$

احتمال خواسته‌شده یک احتمال شرطی است. می‌دانیم که شخص انتخاب‌شده باسواد است (B)، می‌خواهیم احتمال مرد بودن وی (A) را به‌دست آوریم. داریم:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\ ,\ P(B)=۰/۶۴۵$$

$$P(A\cap B)=۰/۴۵\times ۰/۷=۰/۳۱۵\Rightarrow P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{۰/۳۱۵}{۰/۶۴۵}=\frac{۶۳}{۱۲۹}=\frac{۲۱}{۴۳}\Rightarrow$$ گزینهٔ (۲) صحیح است.

☆۳۰۰. در فضای نمونه‌ای $S=\{a,b,c,d\}$، $P(b)=\frac{۱}{۱۲}$، $P(\{a,b,c\})=m+\frac{۱}{۳}$ و $P(\{b,d\})=m+\frac{۱}{۴}$ می‌باشند، مقدار m کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۱۲}$

۳۰۱. اگر $S=\{۱,۲,۳,۴\}$ و $P(۱)=۲P(۲)=۳P(۳)=۴P(۴)$، $P(۱)$ کدام است؟ (سراسری ریاضی)

۱) $\frac{۲}{۲۵}$ ۲) $\frac{۸}{۲۵}$ ۳) $\frac{۱۲}{۲۵}$ ۴) $\frac{۱۴}{۲۵}$

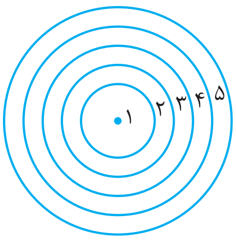
★۳۰۲. اگر $S=\{a,b,c,d\}$ و $P(a)$، $P(b)$ و $P(c)$ سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت $\frac{۲}{۱۵}$ و $P(d)=\frac{۱}{۵}$ باشند، مقدار $P(a)$ کدام است؟ (مشابه تمرین ۴ صفحهٔ ۵۱ کتاب درسی)

۱) $\frac{۱}{۱۵}$ ۲) $\frac{۲}{۱۵}$ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۱۵}$

☆۳۰۳. اگر $S=\{a,b,c\}$ و $P(a)$، $P(b)$ و $P(c)$ سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت $\frac{۱}{۲}$ باشند، مقدار $P(c)$ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۷}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$ ۳) $\frac{۲}{۷}$ ۴) $\frac{۱}{۷}$

★۳۰۴. در پرتاب دارت به صفحهٔ دایره‌ای شکل مقابل، اگر مرز مشترک بین دو ناحیه را جزء ناحیهٔ کوچک‌تر در نظر بگیریم و احتمال اصابت دارت به ناحیهٔ k اُم برابر $\frac{k}{a}$ باشد و اگر یک دارت پرتاب شود و بدانیم به یکی از این ۵ ناحیهٔ برخورد کرده است، با کدام احتمال دارت به ناحیهٔ شمارهٔ زوج اصابت کرده است؟ (مشابه تمرین ۵ صفحهٔ ۵۱ کتاب درسی)



۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

۳۰۵. بر روی یک تاس اعداد ۱، ۱، ۱، ۱، ۲ و ۳ نوشته شده است. در پرتاب یک بار این تاس، چقدر احتمال دارد که عدد فرد ظاهر شود؟ (مشابه فعالیت صفحهٔ ۴۸ کتاب درسی)

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۶}$

قسمت سوم: احتمال شرطی

احتمال شرطی

☆۳۰۶. در پرتاب دو تاس سفید و سیاه با هم، می‌دانیم جمع دو عدد رو شده ۸ است. با کدام احتمال تاس سفید ۳ آمده است؟ (مشابه مثال صفحهٔ ۵۴ کتاب درسی)

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۳۰۷. در پرتاب دو تاس، اگر هر دو عدد رو شده اول باشند، با کدام احتمال مجموع آن‌ها نیز عددی اول است؟

۱) $\frac{۴}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۷}{۹}$

☆۳۰۸. یک تاس همگن را انداخته‌ایم. برآمد حاصل، مضرب ۳ نیست. احتمال آن‌که شمارهٔ ظاهرشده ۲ باشد، کدام است؟ (سراسری ریاضی - ۸۶)

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۳۰۹. تاس همگنی را با چشم بسته انداخته‌ایم و فقط می‌دانیم که برآمد عدد زوج است. احتمال این‌که شمارهٔ ۴ یا ۶ ظاهر شده باشد، کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۱)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

★۳۱۰. دو تاس همگن را انداخته‌ایم. اگر حاصل جمع شماره‌های رو شده کم‌تر از ۶ باشد، احتمال آن‌که حداقل شمارهٔ یکی از تاس‌های رو شده ۲ باشد، کدام است؟ (سراسری ریاضی - ۹۱)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۳۱۱. در پرتاب دو تاس، اگر حداقل یکی از تاس‌ها ۵ ظاهر شود، احتمال این‌که دو تاس دو عدد متوالی را نشان دهند چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۱۸}$ ۴) $\frac{۴}{۱۱}$

۳۱۲. دو تاس را با هم می‌ریزیم. اگر حداقل یکی از تاس‌ها مضرب ۳ نباشد، با کدام احتمال جمع دو عدد روشده مضرب ۳ است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۳)

۱) $\frac{۲}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۱۸}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

★۳۱۳. تاس همگنی را سه بار پرتاب می‌کنیم. اگر بدانیم مجموع اعداد روشده یک عدد فرد است، احتمال این‌که لااقل یکی از تاس‌های روشده ۲ باشد، کدام است؟ (سراسری ریاضی - ۹۹)

۱) $\frac{۵}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۷}{۱۲}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۳۱۴. تاس همگنی را سه بار پرتاب می‌کنیم. اگر بدانیم مجموع اعداد رو شده یک عدد فرد است، احتمال این‌که لااقل یکی از تاس‌های رو شده ۳ باشد، کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۹)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱۵}{۳۶}$

☆۳۱۵. یک خانوادهٔ چهار فرزندی با کدام احتمال، سه فرزند پسر دارد، در صورتی‌که حداقل یکی از فرزندان آن‌ها پسر است؟(مشابه تمرین ۱ صفحهٔ ۶۴ کتاب درسی)

۱) $\frac{۴}{۱۵}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۳۱۶. در یک خانوادهٔ سه فرزندی، می‌دانیم یکی از فرزندان پسر است. با کدام احتمال دو فرزند دیگر دختر هستند؟(سراسری تجربی خارج از کشور- ۸۹)

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$ ۳) $\frac{۴}{۷}$ ۴) $\frac{۵}{۸}$

۳۱۷. یک خانوادهٔ سه فرزندی با کدام احتمال، حداقل دو فرزند دختر دارد، در صورتی‌که می‌دانیم حداقل یکی از فرزندان دختر است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۸۷)

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۵}{۸}$

۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) $\frac{۴}{۷}$

★۳۱۸. در یک خانوادهٔ سه فرزندی، می‌دانیم فرزند اول آن‌ها دختر است. با کدام احتمال لااقل یکی از فرزندان پسر است؟ (سراسری تجربی- ۸۷)

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۳۱۹. در یک خانوادهٔ دو فرزندی، می‌دانیم یکی از فرزندان پسر است. با کدام احتمال، این خانواده دارای فرزند دختر است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۸۵)

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۳۲۰. یک تاس و سپس سکه‌ای را سه بار پرتاب می‌کنیم. اگر عدد رو شده در پرتاب تاس زوج و فقط ۲ پرتاب از ۳ پرتاب سکه «پشت» بیاید، احتمال آن‌که عدد رو شدهٔ تاس ۲ و پرتاب اول سکه «پشت» بیاید کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$ ۳) $\frac{۴}{۹}$ ۴) $\frac{۲}{۹}$

☆۳۲۱. دانشجویان دانشکده‌ای مطابق جدول زیر توزیع شده‌اند. احتمال آن‌که دانشجوی زنی در مقطع کارشناسی ارشد مشغول به تحصیل باشد، کدام است؟

		جنسیت	
		مرد	زن
مقطع تحصیلی	کارشناسی ارشد	۲۵	۱۵
	دکترا	۱۵	۵

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۵}{۸}$

۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۸}$

★۳۲۲. اداره‌ای ۱۲ کارمند دارد که سن هیچ دو نفری یکسان نیست. یکی از کارمندان را به تصادف انتخاب می‌کنیم، سپس کارمند دیگری را به تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر کارمند دوم مسن‌تر از کارمند اول نباشد، با کدام احتمال کارمند اول مسن‌ترین کارمند است؟ (مشابه مثال صفحهٔ ۵۵ کتاب درسی)

۱) $\frac{۱}{۱۱}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۱۲}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$

★۳۲۳. ارقام ۱۰۳۰۴۰۴۰۵ را به تصادف کنار هم قرار می‌دهیم. اگر عدد حاصل زوج باشد، احتمال آن‌که دو رقم یکسان کنار هم باشند، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۳۲۴. از بین اعداد سه‌رقمی، یک عدد به تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر عدد انتخاب شده مضرب ۳ باشد، با کدام احتمال مضرب ۴ می‌باشد؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۱۲}$

☆**۳۲۵.** درون کیسه‌ای ۴ مهرهٔ سفید با شماره‌های ۱ تا ۴ و ۳ مهرهٔ سیاه با شماره‌های ۱ تا ۳ قرار دارند. از این کیسه دو مهره به ترتیب و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم. اگر حداقل یکی از مهره‌ها سفید و با شمارهٔ ۲ باشد، با کدام احتمال مجموع شماره‌های دو مهره برابر ۴ است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۱۲}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

☆**۳۲۶.** درون کیسه‌ای ۵ گوی سفید و ۴ گوی سیاه قرار دارد. از این کیسه دو گوی پی‌درپی و با جایگذاری خارج می‌کنیم. اگر دو گوی خارج‌شده هم‌رنگ باشند، با کدام احتمال سفید می‌باشند؟

۱) $\frac{۱۶}{۴۱}$ ۲) $\frac{۲۵}{۴۱}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۵}{۸}$

☆**۳۲۷.** درون جعبه‌ای ۳ مهرهٔ سفید، ۵ مهرهٔ سیاه و ۲ مهرهٔ آبی وجود دارد. ۳ مهره به تصادف از جعبه بیرون می‌آوریم. اگر حداکثر یکی از مهره‌های خارج‌شده آبی باشد، با کدام احتمال دو مهرهٔ سیاه خارج شده است؟

۱) $\frac{۵}{۲۸}$ ۲) $\frac{۲۵}{۵۶}$ ۳) $\frac{۷}{۲۸}$ ۴) $\frac{۱۳}{۵۶}$

☆**۳۲۸.** پنج مهرهٔ سفید با شماره‌های ۱ تا ۵ و همچنین ۵ مهرهٔ سیاه با شماره‌های ۱ تا ۵ و یکسان را در ظرفی قرار می‌دهیم. به تصادف دو مهره از بین آن‌ها بیرون می‌آوریم. اگر مجموع شماره‌های دو مهره ۶ باشد، با کدام احتمال، هر دو مهره هم‌رنگ هستند؟ (سراسری ریاضی- ۹۲)

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۴}{۹}$ ۳) $\frac{۵}{۹}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

★**۳۲۹.** سه کارت یکسان داریم. دو طرف کارت اول آبی، دو طرف کارت دوم قرمز و یک طرف کارت سوم آبی و طرف دیگر آن قرمز است. کارتی را به تصادف برمی‌داریم و مشاهده می‌کنیم که یک طرف آن آبی است. با کدام احتمال هر دو طرف آن آبی است؟ (مثال صفحهٔ ۵۸ کتاب درسی)

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۳۳۰. شخصی به تصادف به ۳ سؤال از ۱۰ سؤال پاسخ داده است. اگر این شخص به سؤال اول پاسخ داده باشد، با کدام احتمال این شخص دقیقاً به دو سؤال با شمارهٔ فرد پاسخ داده است؟

۱) $\frac{۱۱}{۳۶}$ ۲) $\frac{۵}{۱۸}$ ۳) $\frac{۵}{۹}$ ۴) $\frac{۴}{۹}$

☆**۳۳۱.** اعداد ۱ تا ۹ را بر روی نُه کارت یکسان نوشته و سپس دو کارت به تصادف از بین آنان انتخاب می‌کنیم. اگر بدانیم مجموع اعداد روی دو کارت کم‌تر از ۶ است، با کدام احتمال عدد روی یکی از کارت‌ها برابر ۴ است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

★**۳۳۲.** امیر و بهروز هر کدام به ترتیب با احتمال ۰/۶ و ۰/۳ در یک مسابقهٔ علمی شرکت می‌کنند. احتمال شرکت امیر به شرط شرکت بهروز برابر ۰/۵ است. احتمال شرکت امیر به شرط شرکت نکردن بهروز، کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۸)

۱) $\frac{۹}{۱۴}$ ۲) $\frac{۵}{۷}$ ۳) $\frac{۱۱}{۱۴}$ ۴) $\frac{۶}{۷}$

۳۳۳. از بین ۳ کارت سفید و ۴ کارت سبز یکسان، به تصادف یک کارت بدون جایگذاری بیرون می‌آوریم، سپس کارت دوم را خارج می‌کنیم. با کدام احتمال، هر دو کارت هم‌رنگ هستند؟ (سراسری تجربی- ۹۱)

۱) $\frac{۲}{۷}$ ۲) $\frac{۵}{۱۴}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) $\frac{۴}{۷}$

★**۳۳۴.** در جعبه‌ای ۸ لامپ موجود است که دوتای آن‌ها معیوب است. به تصادف متوالیاً این لامپ‌ها را آزمایش کرده و لامپ سالم را کنار می‌گذاریم تا اولین لامپ معیوب پیدا شود. با کدام احتمال در آزمایش سوم، اولین لامپ معیوب پیدا می‌شود؟ (سراسری ریاضی)

۱) $\frac{۵}{۲۸}$ ۲) $\frac{۴}{۲۱}$ ۳) $\frac{۳}{۱۴}$ ۴) $\frac{۵}{۲۱}$

۳۳۵. در کیسه‌ای ۲ مهرهٔ سفید، ۴ مهرهٔ سیاه و ۲ مهرهٔ زرد قرار دارد. از این کیسه دو مهره به ترتیب و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم. با کدام احتمال حداقل یکی از مهره‌های خارج‌شده زرد می‌باشد؟

۱) $\frac{۱۵}{۲۸}$ ۲) $\frac{۱۳}{۲۸}$ ۳) $\frac{۱۷}{۲۸}$ ۴) $\frac{۳۱}{۵۶}$

۳۳۶. درون ظرفی ۴ سیب و ۵ پرتقال وجود دارد. از این ظرف ۳ عدد از آن‌ها را به ترتیب و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم. با کدام احتمال در ابتدا سیب و سپس دو پرتقال از ظرف خارج می‌شود؟ (مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۵۷ کتاب درسی)

۱) $\frac{۲۵}{۱۲۶}$ ۲) $\frac{۸}{۶۳}$ ۳) $\frac{۲}{۹}$ ۴) $\frac{۱۰}{۶۳}$

۳۳۷. بسکتبالیستی هر بار که اقدام به پرتاب می‌کند، اگر روحیهٔ خوبی داشته باشد، پرتابش به احتمال ۹۰ درصد وارد سبد می‌شود و در غیر این صورت به احتمال ۷۰ درصد پرتاب‌هایش وارد سبد می‌شود. اگر این بسکتبالیست به هنگام پرتاب اول روحیهٔ خوبی داشته باشد و سه پرتاب متوالی انجام دهد، با کدام احتمال فقط پرتاب دوم وارد سبد نمی‌شود؟ (مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۵۷ کتاب درسی)

۱) ۰/۲۴۳ ۲) ۰/۱۸۹ ۳) ۰/۰۶۳ ۴) ۰/۰۸۱

☆۳۳۸. شخصی در سه آزمون پی‌درپی شرکت می‌کند. احتمال قبولی وی در آزمون اول برابر ۰/۶ و احتمال قبولی وی در آزمون‌های بعدی به شرط قبولی یا عدم قبولی در آزمون قبل به ترتیب ۰/۸ و ۰/۵۵ است. شرط پذیرش، قبولی در حداقل دو آزمون است. احتمال پذیرش این شخص کدام است؟

۱) ۰/۶۲۵ ۲) ۰/۶۹۴ ۳) ۰/۷۲۲ ۴) ۰/۷۲۸

۳۳۹. دو تاس سالم را با هم پرتاب می‌کنیم تا برای اولین بار هر دو عدد رو شده زوج باشند. با کدام احتمال حداکثر در سه پرتاب نتیجه حاصل می‌شود؟ (سراسری تجربی- ۹۱)

۱) $\frac{۲۷}{۶۴}$ ۲) $\frac{۳۷}{۶۴}$ ۳) $\frac{۱۹}{۳۲}$ ۴) $\frac{۳۹}{۶۴}$

☆۳۴۰. اگر ارزش گزارهٔ شرطی $p \Rightarrow q$ درست باشد، احتمال آن‌که مقدم درست باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

★۳۴۱. ارزش گزارهٔ $p \Rightarrow (q \vee r)$، درست است. احتمال این‌که ارزش گزارهٔ r نادرست باشد، کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۱۴۰۰)

۱) $\frac{۳}{۷}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۴}{۷}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۳۴۲. ارزش گزارهٔ $(p \vee q) \Rightarrow r$، نادرست است. احتمال این‌که q نادرست باشد، کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۱۴۰۰)

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

☆۳۴۳. اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، به طوری‌که $P(A) = ۰/۳$، $P(B) = ۰/۴$ و $P(A|B) = ۰/۶$، آن‌گاه $P(B|A)$ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۵}$ ۲) $\frac{۳}{۵}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

☆۳۴۴. اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند به طوری‌که $P(A) = ۰/۲$، $P(B) = ۰/۲۲$ و $P(B|A) = ۰/۷$، آن‌گاه $P(B'|A')$ کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۰)

۱) ۰/۹۶ ۲) ۰/۹ ۳) ۰/۹۲ ۴) ۰/۸۴

۳۴۵. اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند به طوری‌که $A \subseteq B$، $P(A) = \frac{۱}{۳}$ و $P(B) = \frac{۳}{۴}$، آن‌گاه $P(B|A')$ کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۰)

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۷}{۱۲}$ ۴) $\frac{۵}{۸}$

★۳۴۶. A و B دو پیشامد از یک فضای نمونه‌ای هستند. اگر $P(A) = ۰/۴$، $P(B|A) = ۰/۲۵$ و $P(B) = ۰/۳$ باشد، $P(B|A')$، کدام است؟ (سراسری ریاضی - ۹۹)

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

☆۳۴۷. یک فضای نمونه‌ای متشکل از ۴ برآمد a، b، c و d است. اگر $P(a) = \frac{۱}{۴}$، $P(b) = \frac{۱}{۶}$، $P(c) = ۲P(d)$ باشد، حاصل $P(\{a,c,d\}|\{b,c,d\})$ کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۱۸}$ ۲) $\frac{۵}{۱۸}$ ۳) $\frac{۵}{۹}$ ۴) $\frac{۷}{۹}$

★۳۴۸. یک فضای نمونه‌ای متشکل از ۵ برآمد a، b، c، d و e است. اگر $P(a) = \frac{۱}{۴}$ و $P(\{a,b,c\}) = \frac{۲}{۳}$ باشد، احتمال $P(\{b,c,e\}|\{a,b,c\})$ کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۶)

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۵}{۱۲}$ ۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

قانون احتمال کل

☆۳۴۹. پیشامدهای $B_۱$، $B_۲$ و $B_۳$ یک افراز از فضای نمونه‌ای S می‌باشند. به طوری‌که به ازای هر i، $i = ۱,۲,۳$، $P(B_i) = \frac{i}{۶}$ و $P(A|B_i) = \frac{۱}{۴}$، احتمال وقوع پیشامد A از این فضای نمونه‌ای کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

☆۳۵۰. سه ظرف همانند داریم. در اولی و دومی هر کدام ۵ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه و در ظرف سوم ۴ مهرهٔ سفید و ۶ مهرهٔ سیاه است. اگر به تصادف یک ظرف انتخاب و یک مهره بیرون آوریم، با کدام احتمال این مهره سیاه است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور)

۱) $\frac{۹}{۲۰}$ ۲) $\frac{۱۱}{۲۰}$ ۳) $\frac{۱۳}{۴۰}$ ۴) $\frac{۱۷}{۴۰}$

☆۳۵۱. ظرف A دارای ۴ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه است و هر یک از دو ظرف یکسان B و C دارای ۶ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه است. به تصادف یکی از سه ظرف را انتخاب کرده و ۴ مهره از آن خارج می‌کنیم. با کدام احتمال دو مهره از مهره‌های خارج‌شده، سفید است؟ (سراسری تجربی ـ ۹۳)

۱) $\frac{۲۵}{۶۳}$ ۲) $\frac{۲۶}{۶۳}$ ۳) $\frac{۱۰}{۲۱}$ ۴) $\frac{۱۱}{۲۱}$

۳۵۲. سه ظرف داریم. در ظرف اول ۹ مهرهٔ سفید، در دومی ۹ مهرهٔ سیاه و در سومی ۴ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه قرار دارند. به تصادف از یک ظرف ۲ مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال، لااقل یکی از این دو مهره سیاه است؟ (سراسری ریاضی ـ ۹۹)

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱۱}{۱۸}$ ۳) $\frac{۲۵}{۳۶}$ ۴) $\frac{۱۳}{۱۸}$

★۳۵۳. در جعبهٔ اول ۴ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه و در جعبهٔ دوم ۳ مهرهٔ سفید و ۶ مهرهٔ سیاه موجود است. به تصادف یکی از جعبه‌ها را انتخاب نموده و دو مهره با هم و به تصادف از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال هر دو مهره سفید است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور ـ ۹۲)

۱) $\frac{۳۱}{۱۶۸}$ ۲) $\frac{۱۱}{۵۶}$ ۳) $\frac{۱۷}{۸۴}$ ۴) $\frac{۱۳}{۵۶}$

۳۵۴. کیسه‌ای شامل دو ظرف است که در ظرف اول ۵ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه و در ظرف دوم ۶ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه است. اگر بخواهیم در برداشتن یک مهره به تصادف از یک ظرف، احتمال سیاه و سفید برابر باشد، چند مهرهٔ سیاه باید به ظرف دوم اضافه کنیم؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷

☆۳۵۵. دو ظرف داریم، در اولی ۵ مهرهٔ سیاه و ۴ مهرهٔ سفید و در دومی ۷ مهرهٔ سفید و ۱۰ مهرهٔ سیاه است. از ظرف اول یک مهره برداشته و بدون رؤیت در ظرف دوم قرار می‌دهیم. آن‌گاه از ظرف دوم یک مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال این مهره سفید است؟ (سراسری ریاضی)

۱) $\frac{۸}{۲۷}$ ۲) $\frac{۱۱}{۲۷}$ ۳) $\frac{۳۴}{۸۱}$ ۴) $\frac{۴۱}{۸۱}$

۳۵۶. در جعبهٔ اول ۶ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه و در جعبهٔ دوم ۴ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه قرار دارند. از جعبهٔ اول یک مهره به دلخواه خارج و در جعبهٔ دوم می‌اندازیم سپس دو مهره از جعبهٔ دوم بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال، لااقل یکی از این دو مهره، سفید است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور ـ ۹۹)

۱) $\frac{۲۰}{۲۷}$ ۲) $\frac{۳۴}{۴۵}$ ۳) $\frac{۳۸}{۴۵}$ ۴) $\frac{۲۳}{۲۷}$

☆۳۵۷. در جعبه‌ای ۳ مهرهٔ سفید و ۴ مهرهٔ سیاه موجود است. ۲ مهره بدون رؤیت از جعبه خارج می‌کنیم. سپس از بین باقی‌ماندهٔ مهره‌ها، به تصادف یک مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال این مهره سفید است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور ـ ۹۳)

۱) $\frac{۵}{۱۴}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$ ۳) $\frac{۴}{۷}$ ۴) $\frac{۹}{۷}$

۳۵۸. در ظرفی ۴ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه است. به تصادف ۲ مهره از ظرف بدون رؤیت خارج‌شده است. از ۵ مهرهٔ باقی‌مانده، یک مهره خارج می‌کنیم. با کدام احتمال این مهره سفید است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور ـ ۹۶)

۱) $\frac{۱۲}{۳۵}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$ ۳) $\frac{۱۶}{۳۵}$ ۴) $\frac{۴}{۷}$

☆۳۵۹. در دو ظرف به‌ترتیب ۲۴ و ۱۸ مهرهٔ یکسان موجود است. در ظرف اول ۶ مهرهٔ سفید و در ظرف دوم ۳ مهرهٔ سفید است. از اولی ۷ مهره و از دومی ۵ مهره به تصادف برداشته و در ظرف دیگری می‌ریزیم. سپس از ظرف آخر یک مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال این مهره سفید است؟ (سراسری ریاضی ـ ۹۴)

۱) $\frac{۱۳}{۷۲}$ ۲) $\frac{۷}{۳۶}$ ۳) $\frac{۱۵}{۷۲}$ ۴) $\frac{۳۱}{۱۴۴}$

۳۶۰. در دو جعبه به ترتیب ۲۴ و ۱۵ عدد لامپ یکسان موجود است. در جعبهٔ اول ۴ عدد و در جعبهٔ دوم ۳ عدد لامپ معیوب‌اند. از اولی ۸ لامپ و از دومی ۶ لامپ به تصادف برداشته و در یک جعبهٔ جدید قرار می‌دهیم. با کدام احتمال یک لامپ انتخابی از جعبهٔ جدید معیوب است؟

۱) $\frac{۱۷}{۱۰۵}$ ۲) $\frac{۱۹}{۱۰۵}$ ۳) $\frac{۶}{۳۵}$ ۴) $\frac{۸}{۳۵}$ (سراسری ریاضی ـ ۸۹)

★۳۶۱. در دو جعبه به ترتیب ۲۰ و ۱۲ لامپ موجود است. در جعبهٔ اول ۴ لامپ و در جعبهٔ دوم ۳ لامپ معیوب است. از جعبهٔ اول ۵ لامپ و از جعبهٔ دوم ۷ لامپ، به تصادف برداشته و در جعبهٔ جدید قرار می‌دهیم. با کدام احتمال، یک لامپ انتخابی از جعبهٔ جدید، معیوب است؟ (سراسری ریاضی ـ ۹۸)

۱) $\frac{۵}{۲۴}$ ۲) $\frac{۱۱}{۴۸}$ ۳) $\frac{۱۳}{۴۸}$ ۴) $\frac{۷}{۲۴}$

۳۶۲. شش مهره با شماره‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ در ظرفی قرار دارند. دو مهره با هم بیرون می‌آوریم و بدون جایگذاری، ۲ مهرهٔ دیگر خارج می‌کنیم. با کدام احتمال مهره با شمارهٔ ۲ خارج‌شده است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۵)

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۳۶۳.☆ یک تاس را پرتاب می‌کنیم. اگر عدد حاصل مضرب ۳ باشد، دو سکه را با هم و در غیر این‌صورت سه سکه را با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال آن‌که دقیقاً ۲ بار «رو» ظاهر شود، چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۳۶۴.☆ سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر «رو» بیاید تاس را می‌ریزیم، اگر «پشت» بیاید، سه سکهٔ دیگر را با هم می‌ریزیم. در این آزمایش، احتمال این‌که دقیقاً یک سکه «رو» ظاهر شود، کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۸۹)

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۹}{۱۶}$ ۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۱۱}{۱۶}$

۳۶۵. در پرتاب یک تاس اگر ۶ ظاهر شود، مجاز به پرتاب تاس دوم هستیم. در غیر این صورت دو سکه پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال حداقل یک سکه «رو» ظاهر می‌شود؟ (سراسری ریاضی)

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۵}{۱۲}$

۳۶۶. تاس سالمی را پرتاب می‌کنیم. اگر زوج ظاهر شود، دو تاس دیگر و اگر فرد ظاهر شود، یک تاس دیگر پرتاب می‌کنیم. احتمال این‌که مجموع تاس‌های پرتاب‌شده برابر ۷ باشد، چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۱۸}$ ۴) $\frac{۱}{۳۶}$

۳۶۷.★ در ظرف اول ۳ مهرهٔ آبی و ۶ مهرهٔ قرمز و در ظرف دوم ۴ مهرهٔ آبی و ۵ مهرهٔ قرمز قرار دارند. دو تاس پرتاب می‌کنیم. اگر مجموع اعداد رو شده بیش‌تر از ۹ باشد، به تصادف از ظرف اول یک مهره خارج کرده در ظرف دوم می‌اندازیم. در غیر این‌صورت از ظرف دوم یک مهره برداشته و به ظرف اول اضافه می‌کنیم. اکنون یک مهره از ظرف با مهرهٔ بیش‌تر انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که مهره قرمز باشد، کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۱۴۰۰)

۱) $\frac{۱۵۷}{۲۷۰}$ ۲) $\frac{۱۶۵}{۲۷۰}$

۳) $\frac{۱۷۳}{۲۷۰}$ ۴) $\frac{۱۸۰}{۲۷۰}$

۳۶۸. در ظرف اول ۳ مهرهٔ آبی و ۶ مهرهٔ قرمز و در ظرف دوم ۴ مهرهٔ آبی و ۵ مهرهٔ قرمز قرار دارند. دو تاس پرتاب می‌کنیم. اگر مجموع اعداد روشده ۷ یا ۱۰ باشد، به تصادف یک مهره از ظرف اول خارج کرده و در ظرف دوم می‌اندازیم. در غیر این‌صورت از ظرف دوم یک مهره برداشته و به ظرف اول اضافه می‌کنیم. اکنون یک مهره از ظرف با مهرهٔ بیش‌تر انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که مهره آبی باشد، کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۱۴۰۰)

۱) $\frac{۷}{۱۸}$ ۲) $\frac{۱۱}{۳۰}$

۳) $\frac{۱۹}{۳۰}$ ۴) $\frac{۱۱}{۱۸}$

۳۶۹. در شهری ۷۰ درصد از راننده‌ها مرد و ۳۰ درصد زن هستند. احتمال این‌که یک رانندهٔ مرد تخلفی مرتکب شده باشد، ۰/۸ و این احتمال برای رانندهٔ زن ۰/۴۵ است. احتمال این‌که یک راننده در این شهر تخلفی مرتکب شده باشد، کدام است؟ (مشابه تمرین ۸ صفحهٔ ۶۵ کتاب درسی)

۱) ۰/۶۹۵ ۲) ۰/۶۶۵ ۳) ۰/۶۴ ۴) ۰/۶۲

۳۷۰.☆ در آزمون ورودی دانشگاه، درصد شرکت‌کنندگان سه رشتهٔ تجربی، ریاضی و انسانی به‌ترتیب ۵۰، ۲۵ و ۲۵ می‌باشد. همچنین درصد شرکت‌کنندگان دختر در سه رشته به ترتیب ۶۰، ۴۰ و ۴۰ می‌باشد. اگر یک نفر به تصادف از بین آن‌ها انتخاب شود، با کدام احتمال دختر می‌باشد؟

۱) ۰/۴۵ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۵۲ ۴) ۰/۵۶

۳۷۱.☆ احتمال انتقال نوعی بیماری ارثی از والدین به فرزند پسر، ۱۰ درصد و به فرزند دختر ۶ درصد است. با کدام احتمال، فرزندی که به دنیا می‌آید، این نوع بیماری را ندارد؟ (سراسری تجربی)

۱) ۰/۹۱ ۲) ۰/۹۲ ۳) ۰/۹۳ ۴) ۰/۹۴

۳۷۲. ۹۵ درصد متهم‌هایی که به یک دادگاه آورده می‌شوند گناهکار می‌باشند. اگر در ۹۸ درصد مواقع هیئت منصفه تشخیص درست بدهد و یک نفر از متهم‌ها را به تصادف از بین آن‌ها انتخاب کنیم، با کدام احتمال گناهکار است؟

۱) ۰/۹۱۲ ۲) ۰/۹۳۲ ۳) ۰/۹۳۸ ۴) ۰/۹۴۶

۳۷۳. در یک روستا ۵۴ درصد جمعیت را مردان و ۴۶ درصد را زنان تشکیل می‌دهند. اگر ۶۰ درصد مردان و ۷۵ درصد زنان دفترچهٔ سلامت داشته باشند، با کدام احتمال یک فرد انتخابی به تصادف از بین آن‌ها، دفترچهٔ سلامت دارد؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۰)

۱) ۰/۶۵۸ ۲) ۰/۶۶۹ ۳) ۰/۶۸۵ ۴) ۰/۶۹۶

۳۷۴. احتمال انتقال بیماری مسری به افرادی که واکسن زده‌اند ۰/۰۲۵ و احتمال انتقال به افراد دیگر ۰/۲ است. $\frac{۲}{۵}$ کارگران یک کارگاه واکسن زده‌اند. اگر فرد حامل بیماری به تصادف با یکی از کارگران ملاقات کند، با کدام احتمال، این بیماری منتقل می‌شود؟ (سراسری تجربی- ۸۹)

۱) ۰/۱۳ ۲) ۰/۱۴ ۳) ۰/۱۵ ۴) ۰/۱۶

۳۷۵. ۵۵ درصد دانشجویان سال اول، دختر و بقیه پسر هستند. ۶۰ درصد دختران و ۶۴ درصد پسران تمام واحدهای درسی خود را گذرانده‌اند. چند درصد کل دانشجویان، تمام واحدهای درسی را گذرانده‌اند؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۸۸)

۱) ۶۱/۴ ۲) ۶۱/۸ ۳) ۶۲/۴ ۴) ۶۲/۸

۳۷۶. در یک شرکت بسته‌بندی کالا، درصد محصولات تولیدی، با سه دستگاه A ، B و C به ترتیب ۳۰، ۴۵ و ۲۵ می‌باشد. می‌دانیم ۱ درصد از محصولات A ، ۲ درصد از محصولات B و ۴ درصد از محصولات C معیوب هستند. اگر یک کالا به تصادف از بین این محصولات انتخاب کنیم، احتمال سالم بودن آن کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۹)

۱) ۰/۹۷۵ ۲) ۰/۹۷۸ ۳) ۰/۹۸۲ ۴) ۰/۹۸۷

۳۷۷. نقشه‌های جغرافیایی با دو دستگاه متمایز و جدا از هم چاپ می‌شوند. درصد چاپ معیوب در ماشین اول ۴ و در ماشین دوم ۵ می‌باشد و تعداد نقشه‌های چاپ‌شدهٔ ماشین دوم سه برابر تعداد نقشه‌های چاپ‌شدهٔ ماشین اول است. اگر به تصادف یک نقشه انتخاب شود، با کدام احتمال این نقشه معیوب است؟

۱) ۰/۰۴۳۳ ۲) ۰/۰۴۲۵ ۳) ۰/۰۴۴۵ ۴) ۰/۰۴۷۵

۳۷۸. در یک خانواده، احتمال داشتن گروه خونی A برای فرزند پسر ۰/۳ و برای فرزند دختر ۰/۴ است. اگر این خانواده دو فرزند داشته باشد، احتمال آن‌که گروه خونی هر دو فرزند از نوع A باشد، کدام است؟

۱) ۰/۴۷ ۲) $\frac{۴۷}{۴۰۰}$ ۳) $\frac{۴۹}{۴۰۰}$ ۴) ۰/۴۹

قانون بیز

۳۷۹. اگر B_1 ، B_2 و B_3 افرازی از فضای نمونه‌ای S باشند، با توجه به اطلاعات زیر، مقدار $P(B_2 | A)$ کدام است؟

$$P(B_1)=۰/۲ ،\ P(A|B_1)=۰/۰۱ ،\ P(B_2)=۰/۳ ،\ P(A|B_2)=۰/۰۲ ،\ P(B_3)=۰/۵ ،\ P(A|B_3)=۰/۰۵$$

۱) $\frac{۲}{۳۳}$ ۲) $\frac{۱}{۱۶}$ ۳) $\frac{۲}{۱۱}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۳۸۰. سه جعبه سیب همانند داریم. اولی شامل ۲ سیب سالم و ۱۳ سیب لکه‌دار، دومی شامل ۳ سیب سالم و ۷ سیب لکه‌دار و سومی تنها شامل سیب‌های سالم است. با چشم بسته یکی از سه جعبه را انتخاب و از آن سیبی خارج می‌کنیم. اگر بدانیم سیب خارج‌شده سالم است، با کدام احتمال از جعبهٔ سوم خارج شده است؟

۱) $\frac{۱۹}{۴۳}$ ۲) $\frac{۳۰}{۴۳}$ ۳) $\frac{۲۵}{۸۶}$ ۴) $\frac{۴۷}{۸۶}$

۳۸۱. در یک کتابخانه، ۴۰ درصد کتاب‌ها به زبان فارسی و بقیه به زبان لاتین هستند. در میان کتاب‌های فارسی ۳۰ درصد و در میان کتاب‌های لاتین ۴۰ درصد جلد مقوایی دارند. اگر کتابی را به تصادف انتخاب و مشاهده کنیم که جلد مقوایی دارد، احتمال آن‌که به زبان لاتین باشد، کدام است؟

۱) ۰/۱۲ ۲) ۰/۲۴ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۳۸۲. درون کیسه‌ای سه سکه وجود دارد. سکهٔ اول همگن، دو طرف سکهٔ دوم «پشت» و در سکهٔ سوم، احتمال آمدن «رو» دو برابر احتمال آمدن «پشت» است. یکی از سکه‌ها را به تصادف خارج می‌کنیم، سپس آن را پرتاب می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم «پشت» است، با چه احتمالی سکهٔ خارج‌شده همگن است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۵}{۱۱}$ ۳) $\frac{۸}{۱۱}$ ۴) $\frac{۳}{۱۱}$

۳۸۳. در یک جامعهٔ روستایی، ۶۰ درصد جمعیت آن را مردان و ۴۰ درصد آن را زنان تشکیل می‌دهند. می‌دانیم ۸۰ درصد مردان و ۳۰ درصد زنان به کار کشاورزی مشغول می‌باشند. اگر یک نفر از این جامعه به تصادف انتخاب کنیم و مشغول کار کشاورزی باشد، با کدام احتمال زن می‌باشد؟

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

☆**۳۸۴.** در ظرف اول ۷ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه و در ظرف دوم ۴ مهرهٔ سفید و ۸ مهرهٔ سیاه موجود است. یک تاس را پرتاب می‌کنیم. اگر ۵ یا ۶ بیاید مجاز هستیم که از ظرف اول سه مهره و در غیر این صورت از ظرف دوم سه مهره بیرون آوریم. اگر از مهره‌های خارج‌شده دقیقاً ۲ مهره سفید باشد، با کدام احتمال از ظرف اول خارج شده‌اند؟

۱) $\frac{۴۲}{۷۱}$ ۲) $\frac{۳۵}{۶۷}$ ۳) $\frac{۳۹}{۷۱}$ ۴) $\frac{۳۲}{۶۷}$

۳۸۵. ۶۰ درصد تلفن‌های شرکتی توسط تلفنچی A و مابقی توسط تلفنچی B وصل می‌شود. شخص A از هر ۵۰ تلفن یکی و شخص B از هر ۲۰ تلفن یکی را اشتباه وصل می‌کنند. شکایتی در خصوص اشتباه وصل شدن تلفن رسیده است. احتمال این‌که شخص A آن را وصل کرده باشد، چقدر است؟

۱) ۰/۰۰۲ ۲) ۰/۰۱۲ ۳) ۰/۳۷۵ ۴) ۰/۶۲۵

۳۸۶. در یک شرکت تولیدی، ۵۵ درصد کالا محصول دستگاه A با احتمال ۳ درصد معیوب و ۴۵ درصد آن محصول دستگاه B با احتمال ۵ درصد معیوب است. دو دستگاه مستقل از هم هستند. اگر یک کالا را به‌طور تصادفی انتخاب کنیم و بدانیم که معیوب است، با کدام احتمال این کالا محصول دستگاه A است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۴)

۱) $\frac{۱۱}{۲۶}$ ۲) $\frac{۶}{۱۳}$ ۳) $\frac{۷}{۱۳}$ ۴) $\frac{۱۵}{۲۶}$

★**۳۸۷.** فرض کنید از بین ۳ کارت با شماره‌های ۲ تا ۴ کارتی را به تصادف انتخاب می‌کنیم و سپس سکه‌ای را به تعداد عدد کارت پرتاب می‌کنیم. اگر یک بار «رو» بیاید، احتمال این‌که شمارهٔ کارت خارج‌شده ۳ باشد، چقدر است؟ (مشابه تمرین ۱۶ صفحهٔ ۶۶ کتاب درسی)

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

★**۳۸۸.** در یک آزمون از دو کلاس A و B، ۴۰ درصد دانش‌آموزان کلاس A و ۶۰ درصد دانش‌آموزان کلاس B قبول شده‌اند. اگر تعداد داوطلبان در کلاس A دو برابر کلاس B باشد و فردی به تصادف از بین قبول‌شدگان انتخاب شود، با کدام احتمال این فرد از کلاس A است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۸)

۱) ۰/۴۳ ۲) ۰/۵۷
۳) ۰/۶۱ ۴) ۰/۶۳

☆**۳۸۹.** ۶۰ درصد واجدین شرایط در شهر A، ۷۰ درصد واجدین شرایط در شهر B و ۸۰ درصد واجدین شرایط در شهر C در انتخابات ریاست جمهوری شرکت کرده‌اند. اگر تعداد واجدین شرایط شهر A، دو برابر تعداد واجدین شرایط شهر B و سه برابر تعداد واجدین شرایط شهر C باشند و فردی به تصادف از بین رأی‌دهندگان این سه شهر انتخاب شود، با کدام احتمال از شهر B است؟ (مشابه تمرین ۱۰ صفحهٔ ۶۵ کتاب درسی)

۱) $\frac{۳۱}{۷۳}$ ۲) $\frac{۲۷}{۷۳}$ ۳) $\frac{۲۵}{۷۳}$ ۴) $\frac{۲۱}{۷۳}$

۳۹۰. جعبه‌ای شامل ۴ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ آبی است. دو مهره را به تصادف خارج کرده و آن‌ها را بدون توجه به رنگشان کنار می‌گذاریم و سپس مهرهٔ سومی را خارج می‌کنیم. اگر سومین مهرهٔ خارج‌شده سفید باشد، با کدام احتمال دو مهرهٔ اول خارج‌شده آبی هستند؟

۱) $\frac{۹}{۱۴}$ ۲) $\frac{۵}{۱۴}$ ۳) $\frac{۵}{۲۸}$ ۴) $\frac{۹}{۲۸}$

۳۹۱. کتابی توسط سه ویراستار A، B و C، ویرایش شده است که سهم ویراستاری آن‌ها به ترتیب ۴۰، ۳۵ و ۲۵ درصد است. احتمال آن‌که این سه نفر ویراستاری بدون غلط داشته باشند به ترتیب ۰/۹۸، ۰/۹۶ و ۰/۹ می‌باشد. اگر صفحه‌ای ویراستاری شده باشد ولی غلط نداشته باشد، آن‌گاه احتمال آن‌که مسئول ویراستاری آن صفحه، ویراستار A باشد چقدر است؟ (مشابه تمرین ۱۵ صفحهٔ ۶۶ کتاب درسی)

۱) $\frac{۳۵۲}{۹۵۳}$ ۲) $\frac{۳۶۱}{۹۵۳}$ ۳) $\frac{۳۶۸}{۹۵۳}$ ۴) $\frac{۳۹۲}{۹۵۳}$

۳۹۲. دانش‌آموزی در یک آزمون تستی چهارگزینه‌ای، گزینهٔ ۴۰ درصد سؤالات را به تصادف انتخاب کرده است. اگر بدانیم این دانش‌آموز، تستی را درست پاسخ داده است، با کدام احتمال این تست را به تصادف پاسخ داده است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۷}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

قسمت چهارم: پیشامدهای مستقل و وابسته

پیشامدهای مستقل

☆**۳۹۳.** اگر دو پیشامد A و B مستقل باشند، $P(A)=\frac{۱}{۴}$ و $P(B)=\frac{۱}{۳}$، حاصل $P(A\cup B')$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

۳۰۲
۱ **۲** ۳ ۴

اگر x جملهٔ اول و d قدرنسبت یک دنبالهٔ حسابی باشد، آن‌گاه جملات دنباله به صورت روبه‌رو است: $x, x+d, x+2d, \ldots$

اگر فرض کنیم $P(a)=x$، آن‌گاه:

$$P(b)=x+d=x+\frac{2}{15}\ ,\ P(c)=x+2d=x+\frac{4}{15}$$

همواره $P(S)=1$ می‌باشد، بنابراین:

$$P(a)+P(b)+P(c)+P(d)=1\ ,\ P(d)=\frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow x+\left(x+\frac{2}{15}\right)+\left(x+\frac{4}{15}\right)+\frac{1}{5}=1 \Rightarrow 3x+\frac{2}{15}+\frac{4}{15}+\frac{1}{5}=1$$

$$\Rightarrow 3x+\frac{2+4+3}{15}=1 \Rightarrow 3x=1-\frac{9}{15}=\frac{6}{15} \Rightarrow x=\frac{2}{15}=P(a)$$

۳۰۳
۱ ۲ ۳ **۴**

اگر x جملهٔ اول و q قدرنسبت یک دنبالهٔ هندسی باشد، آن‌گاه جملات دنباله به‌صورت مقابل می‌باشد:

$$x, xq, xq^2, \ldots$$

بافرض $P(a)=x$ و $q=\frac{1}{2}$، داریم:

$$P(b)=xq=\frac{1}{2}x\ ,\ P(c)=xq^2=\frac{1}{4}x$$

از طرفی $P(S)=1$ می‌باشد، پس داریم: $P(a)+P(b)+P(c)=1$

$$\Rightarrow x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x=1 \Rightarrow \frac{4x+2x+x}{4}=1 \Rightarrow \frac{7x}{4}=1$$

$$\Rightarrow 7x=4 \Rightarrow x=\frac{4}{7} \Rightarrow P(c)=\frac{1}{4}x=\frac{1}{4}\times\frac{4}{7}=\frac{1}{7}$$

۳۰۴
۱ ۲ **۳** ۴

فضای نمونه‌ای را به‌صورت $S=\{1,2,3,4,5\}$ در نظر می‌گیریم. طبق فرض داریم:

$$P(\text{اصابت به ناحیهٔ } k)=\frac{k}{a}$$

$$\Rightarrow P(1)=\frac{1}{a}, P(2)=\frac{2}{a}, P(3)=\frac{3}{a}, P(4)=\frac{4}{a}, P(5)=\frac{5}{a}$$

$$P(S)=1 \Rightarrow P(1)+\cdots+P(5)=1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{2}{a}+\frac{3}{a}+\frac{4}{a}+\frac{5}{a}=1 \Rightarrow \frac{15}{a}=1 \Rightarrow a=15$$

اگر A پیشامد اصابت به ناحیه با شمارهٔ زوج باشد، آن‌گاه:

$$A=\{2,4\} \Rightarrow P(A)=P(2)+P(4)=\frac{2}{a}+\frac{4}{a}=\frac{6}{a}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$$

۳۰۵
۱ ۲ ۳ **۴**

فضای نمونه‌ای S به‌صورت $S=\{1,2,3\}$ است و در این فضای نمونه‌ای داریم:

$$P(1)=\frac{4}{6}\ ,\ P(2)=P(3)=\frac{1}{6}$$

اگر A پیشامد آن باشد که عدد رو شده فرد باشد، آن‌گاه:

$$A=\{1,3\} \Rightarrow P(A)=P(1)+P(3)=\frac{4}{6}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

۳۰۶
۱ ۲ **۳** ۴

فرض کنیم ابتدا تاس سفید و سپس تاس سیاه پرتاب شده است. اگر B پیشامدی باشد که در آن جمع دو عدد رو شده برابر ۸ باشد، آن‌گاه:

$$B=\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\} \Rightarrow n(B)=5$$

اگر A پیشامدی باشد که در آن تاس سفید عدد ۳ آمده باشد؛ آن‌گاه:

$$A\cap B=\{(3,5)\} \Rightarrow n(A\cap B)=1$$

$$\Rightarrow P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{1}{5}$$

۳۰۷
۱ ۲ ۳ ۴

در پرتاب دو تاس، در $3\times 3=9$ حالت هر دو عدد رو شده، اول می‌باشند:

$$B=\{(2,2),(2,3),(2,5),(3,2),(3,3),(3,5),(5,2),(5,3),(5,5)\}$$

جمع دو عدد اول باشد: $A \Rightarrow A\cap B=\{\underbrace{(2,3),(3,2)}_{\text{مجموع}=5},\underbrace{(2,5),(5,2)}_{\text{مجموع}=7}\}$

$$\Rightarrow n(A\cap B)=4 \Rightarrow P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{4}{9}$$

۳۰۸
۱ ۲ **۳** ۴

اگر B پیشامدی باشد که برآمد حاصل، مضرب ۳ نباشد، آن‌گاه: $B=\{1,2,4,5\}$

شمارهٔ ۲ ظاهر شود: $A \Rightarrow A\cap B=\{2\} \Rightarrow P(A|B)=\frac{1}{4}$

۳۰۹
۱ ۲ **۳** ۴

عدد حاصل زوج است: $B \Rightarrow B=\{2,4,6\}$

عدد ظاهرشده ۴ یا ۶ است: $A \Rightarrow A\cap B=\{4,6\} \Rightarrow P(A|B)=\frac{2}{3}$

۳۱۰
۱ ۲ ۳ ۴

اگر B پیشامدی باشد که در آن حاصل جمع شماره‌های دو تاس کم‌تر از ۶ باشد، آن‌گاه:

$$B=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(4,1)\}$$

اگر A پیشامدی باشد که در آن حداقل شمارهٔ یکی از تاس‌های رو شده ۲ باشد، آن‌گاه:

$$A\cap B=\{(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(3,2)\}$$

$$\Rightarrow P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

۳۱۱
۱ ۲ ۳ **۴**

احتمال خواسته‌شده، احتمال شرطی است. با فرض‌های زیر، داریم:

B: حداقل یکی از تاس‌ها ۵ ظاهر شود. A: دو تاس دو عدد متوالی را نشان دهد.

$$B=\{(1,5),(2,5),(3,5),(4,5),(5,5),(6,5),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,6)\} \Rightarrow n(B)=11$$

$$A\cap B=\{(4,5),(5,4),(5,6),(6,5)\} \Rightarrow n(A\cap B)=4$$

$$\Rightarrow P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{4}{11}$$

۳۱۲
۱ ۲ ۳ **۴**

اگر B (پیشامد رخ داده) تمام حالت‌هایی در پرتاب دو تاس باشد که حداقل یکی از تاس‌ها مضرب ۳ نباشد، آن‌گاه B' پیشامدی است که هر دو تاس مضرب ۳ است، بنابراین: $B'=\{(3,3),(3,6),(6,3),(6,6)\}$

فضای نمونه‌ای پرتاب دو تاس (S)، ۳۶ عضو دارد، بنابراین:

$$B=S-B' \Rightarrow n(B)=36-4=32$$

اگر A پیشامدی باشد که جمع دو عدد رو شده مضرب ۳ باشد، آن‌گاه:

$$A\cap B=\{\underbrace{(1,2),(2,1)}_{\text{مجموع}=3},\underbrace{(1,5),(2,4),(4,2),(5,1)}_{\text{مجموع}=6},\underbrace{(4,5),(5,4)}_{\text{مجموع}=9}\}$$

$$\Rightarrow n(A\cap B)=8 \Rightarrow P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$$

۳۱۳ **۱** ۲ ۳ ۴

فضای نمونه‌ای پرتاب ۳ بار یک تاس، $۲۱۶ = ۶ \times ۶ \times ۶$ حالت دارد که در نصف حالت‌ها مجموع سه عدد، عددی فرد است. بنابراین اگر B پیشامدی باشد که مجموع سه عدد روشده، فرد باشد، آن‌گاه: $n(B) = \frac{۲۱۶}{۲} = ۱۰۸$

فرض کنیم A پیشامدی است که در آن لااقل یکی از اعداد روشده ۲ باشد، در این صورت:

$$A \cap B : \begin{cases} ۲، ۴، \text{عدد فرد} \Rightarrow \text{تعداد} = \underset{\text{تعداد اعداد فرد}}{۳} \times ۳! = ۱۸ \\ ۲، ۶، \text{عدد فرد} \Rightarrow \text{تعداد} = ۳ \times ۳! = ۱۸ \\ ۲، ۲، \text{عدد فرد} \Rightarrow \text{تعداد} = \frac{۳ \times ۳!}{\underset{\text{۲ بار تکرار}}{۲!}} = ۹ \end{cases}$$

$$\Rightarrow n(A \cap B) = ۴۵ \Rightarrow P(A | B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{۴۵}{۱۰۸} = \frac{۵}{۱۲}$$

۳۱۴ ۱ ۲ ۳ ۴

فضای نمونه‌ای پرتاب ۳ بار یک تاس، ۲۱۶ عضو دارد که در $۱۰۸ = ۲ \div ۲۱۶$ حالت، مجموع فرد است. پس اگر B پیشامدی باشد که در آن مجموع سه عدد روشده فرد باشد، آن‌گاه: $n(B) = ۱۰۸$

اگر A پیشامدی باشد که در آن حداقل یکی از اعداد روشده ۳ باشد، آن‌گاه برای $A \cap B$، حالت‌های زیر به‌وجود می‌آید:

۱) مجموع سه عدد ۵ ⇐ ۳،۱،۱ ⇐ ۳ حالت

۲) مجموع سه عدد ۷ ⇐ $\begin{cases} ۳،۱،۳ \Leftarrow ۳ \text{ حالت} \\ ۳،۲،۲ \Leftarrow ۳ \text{ حالت} \end{cases}$

۳) مجموع سه عدد ۹ ⇐ $\begin{cases} ۳،۳،۳ \Leftarrow ۱ \text{ حالت} \\ ۳،۲،۴ \Leftarrow ۶ \text{ حالت} \\ ۳،۱،۵ \Leftarrow ۶ \text{ حالت} \end{cases}$

۴) مجموع سه عدد ۱۱ ⇐ $\begin{cases} ۳،۲،۶ \Leftarrow ۶ \text{ حالت} \\ ۳،۴،۴ \Leftarrow ۳ \text{ حالت} \\ ۳،۳،۵ \Leftarrow ۳ \text{ حالت} \end{cases}$

۵) مجموع سه عدد ۱۳ ⇐ $\begin{cases} ۳،۵،۵ \Leftarrow ۳ \text{ حالت} \\ ۳،۴،۶ \Leftarrow ۶ \text{ حالت} \end{cases}$

۶) مجموع سه عدد ۱۵ ⇐ ۳،۶،۶ ⇐ ۳ حالت

۷) مجموع سه عدد ۱۷ ⇐ امکان‌پذیر نیست. (مجموع دو عدد دیگر ۱۴ نمی‌شود!)

$$\Rightarrow \text{تعداد کل حالت‌ها} = ۴۶ \Rightarrow P(A | B) = \frac{۴۶}{۱۰۸} = \frac{۲۳}{۵۴}$$

۳۱۵ **۱** ۲ ۳ ۴

فضای نمونه‌ای فرزندان خانواده با ۴ فرزند، $۲^۴ = ۱۶$ عضو دارد. اگر B پیشامدی باشد که در آن، این خانواده حداقل یک فرزند پسر داشته باشد، آن‌گاه B شامل تمام اعضای فضای نمونه‌ای S به غیر از برآمد (د ، د ، د ، د) است، بنابراین: $n(B) = n(S) - ۱ = ۱۶ - ۱ = ۱۵$

اگر A پیشامدی باشد که این خانواده دارای ۳ فرزند پسر باشد، آن‌گاه:

$A \cap B = \{$ (پ،پ،پ،د) ، (پ،پ،د،پ) ، (پ،د،پ،پ) ، (د،پ،پ،پ) $\}$

$$\Rightarrow n(A \cap B) = ۴ \Rightarrow P(A | B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{۴}{۱۵}$$

۳۱۶ ۱ **۲** ۳ ۴

فضای نمونه‌ای جنسیت فرزندان یک خانواده با سه فرزند، ۸ عضو دارد. اگر B پیشامدی باشد که در آن یکی از فرزندان پسر باشد، آن‌گاه:

$B = S - \{$(د ،د ،د)$\} \Rightarrow n(B) = ۸ - ۱ = ۷$

دو فرزند دختر: $A \Rightarrow A \cap B = \{$(پ، د، د) ، (د، پ، د) ، (د، د، پ)$\}$

$$\Rightarrow n(A \cap B) = ۳ \Rightarrow P(A | B) = \frac{۳}{۷}$$

۳۱۷ ۱ ۲ ۳ **۴**

فضای نمونه‌ای جنسیت فرزندان یک خانوادهٔ ۳ فرزندی، ۸ عضو دارد که فقط در یک حالت (پ، پ، پ) هیچ فرزندی دختر نمی‌باشد. بنابراین اگر B پیشامدی باشد که در آن حداقل یک فرزند دختر باشد، آن‌گاه B، ۷ عضو دارد و اگر A پیشامدی باشد که در آن حداقل دو فرزند دختر باشند، آن‌گاه:

$$n(A \cap B) = \binom{۳}{۲} + \binom{۳}{۳} = ۴ \Rightarrow P(A | B) = \frac{۴}{۷}$$

۳۱۸ ۱ ۲ ۳ **۴**

فرزند اول دختر است: $B = \{$(د،د،د)،(د،پ،د)،(د،د،پ)،(د،پ،پ)$\}$

A: لااقل یکی از فرزندان پسر

$\Rightarrow A \cap B = \{$(د ،د ،پ)،(د ،پ ،پ)،(د ، پ ، د)$\}$

$$\Rightarrow P(A | B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{۳}{۴}$$

۳۱۹ ۱ ۲ **۳** ۴

حداقل یکی از فرزندان پسر است: $B = \{$(پ ،پ)،(پ ،د)،(د ،پ)$\}$

خانواده دارای فرزند دختر است: $A \Rightarrow A \cap B = \{$(پ ،د)،(د ،پ)$\}$

$$\Rightarrow P(A | B) = \frac{۲}{۳}$$

۳۲۰ ۱ ۲ ۳ **۴**

پیشامدهای A و B را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم و سپس احتمال شرطی $P(A | B)$ را به‌دست می‌آوریم:

B: عدد تاس زوج و فقط ۲ پرتاب از ۳ پرتاب سکه «پشت» بیاید.

از اصل ضرب برای به‌دست آوردن $n(B)$ استفاده می‌کنیم:

$$n(B) = \overset{\text{تعداد عددهای زوج تاس}}{۳} \times \underset{\text{در ۳ پرتاب سکه، ۲ بار «پشت» بیاید.}}{\binom{۳}{۲}} = ۳ \times ۳ = ۹$$

A: عدد رو شدهٔ تاس ۲ و پرتاب اول سکه «پشت» بیاید.

$$n(A \cap B) = \overset{\text{عدد تاس ۲ باشد.}}{۱} \times \underset{\{\text{(ر، پ، پ)، (پ، ر، پ)}\}}{۲} = ۲$$

$$\Rightarrow P(A | B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{۲}{۹}$$

۱۰۷. سه دوندهٔ a، b و c در یک مسابقه شرکت می‌کنند. احتمال برد a، نصف احتمال برد b و احتمال برد b، $\frac{۱}{۳}$ احتمال برد c است. (نهایی- خرداد ۹۱)
آ) احتمال برد هر یک از دونده‌ها را بیابید. ب) احتمال آن‌که b یا c برنده شوند را تعیین کنید.

۱۰۸. اگر $S=\{۱،۲،۳،۴\}$ فضای نمونه‌ای یک تجربهٔ تصادفی باشد و داشته باشیم $P(۱)=۲P(۲)=۳P(۳)=۴P(۴)$، مطلوب است محاسبهٔ $P(۱)$ (نهایی- خرداد ۹۰)

۱۰۹. تاسی به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد اول ۳ برابر احتمال وقوع هر عدد غیراول است. اگر در یک پرتاب این تاس، A پیشامد وقوع عددی کوچک‌تر از ۴ باشد، $P(A)$ را بیابید. (نهایی- خرداد ۸۸)

۱۱۰. در فضای نمونه‌ای $S=\{a،b،c،d\}$ داریم $P(\{a،d\})=\frac{۵}{۷}$، $P(\{a،b،c\})=\frac{۱۷}{۳۵}$ و b و c هم‌شانس هستند. احتمال هریک را بیابید. (نهایی- شهریور ۸۷)

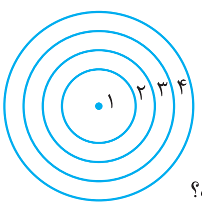
۱۱۱. تاسی به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد کوچک‌تر از ۴، سه برابر احتمال وقوع هر عدد بزرگ‌تر یا مساوی ۴ است. اگر در یک پرتاب این تاس، A پیشامد وقوع عددی زوج باشد، $P(A)$ را بیابید. (نهایی- شهریور ۹۴)

۱۱۲. علی، حسین و رضا در یک مسابقه شرکت می‌کنند. اگر احتمال برد علی دو برابر احتمال برد حسین و احتمال برد حسین $\frac{۱}{۳}$ احتمال برد رضا باشد، احتمال این‌که حسین یا رضا برنده شوند، چقدر است؟ (نهایی- دی ۹۵)

۱۱۳. اگر فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی $S=\{۱،۲،۳\}$ باشد و $P(۳)=۲P(۲)=a$ و $P(۱)=a^۲$، مقدار a و $P(۲)$ را به‌دست آورید. (نهایی- خرداد ۹۴)

۱۱۴. در پرتاب یک تاس، احتمال مشاهدهٔ هر عدد، متناسب با مربع همان عدد است. اگر این تاس را به هوا پرتاب کنیم، احتمال این‌که عدد مضرب ۳ مشاهده شود را تعیین کنید. (مشابه تمرین ۲ صفحهٔ ۵۱ کتاب درسی)

۱۱۵. در تیراندازی به یک صفحهٔ دایره‌ای‌شکل، مطابق شکل روبه‌رو که به چهار ناحیهٔ مجزا تقسیم شده است، فرض کنید احتمال اصابت تیر به ناحیهٔ اول، x باشد. اگر احتمال اصابت به ناحیهٔ kام، $x(۳k-۲)$ باشد: (مرز بین دو ناحیه را جزء ناحیهٔ کوچک‌تر محسوب کنید.) (مشابه تمرین ۵ صفحهٔ ۵۱ کتاب درسی)



آ) احتمال اصابت تیر به هر ناحیه را به‌دست آورید.
ب) آیا احتمال اصابت تیر به یکی از ناحیه‌های اول یا چهارم با احتمال اصابت تیر به یکی از ناحیه‌های دوم یا سوم برابر است؟

۱۱۶. در یک تجربهٔ تصادفی، $S=\{x،y،z\}$ فضای نمونه‌ای است. اگر $P(x)$، $P(y)$ و $P(z)$ به ترتیب یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت $\frac{۱}{۲}$ تشکیل دهند، احتمال وقوع هر کدام از این برآمدها را به‌دست آورید.

۱۱۷. در یک تجربهٔ تصادفی $S=\{a،b،c،d\}$ فضای نمونه‌ای است. اگر $P(a)$، $P(b)$، $P(c)$ و $P(d)$ یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت $\frac{۱}{۱۰}$ تشکیل دهند، احتمال وقوع پیشامد $\{a،c\}$ را به‌دست آورید. (مشابه تمرین ۴ صفحهٔ ۵۱ کتاب درسی)

قسمت سوم: احتمال شرطی

۱۱۸. دو تاس سفید و سیاه را پرتاب می‌کنیم. (مشابه مثال صفحهٔ ۵۴ کتاب درسی)
آ) اگر بدانیم مجموع دو تاس ۸ شده است، احتمال این‌که تاس سفید ۵ آمده باشد را به‌دست آورید.
ب) اگر بدانیم تاس سفید ۵ آمده است، احتمال این‌که مجموع دو تاس ۸ شده باشد را به‌دست آورید.

۱۱۹. خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است. اگر بدانیم این خانواده دقیقاً سه فرزند دختر دارد، احتمال آن‌که فرزند اول این خانواده پسر باشد را به‌دست آورید. (مشابه تمرین ۱ صفحهٔ ۶۴ کتاب درسی)

۱۲۰. سکه‌ای را سه بار پرتاب می‌کنیم. می‌دانیم که دست‌کم یک بار «پشت» آمده است. احتمال این‌که دقیقاً دو بار «رو» آمده باشد چقدر است؟ (مشابه مثال صفحهٔ ۵۴ کتاب درسی)

۱۲۱. درون جعبه‌ای ۴ مهرهٔ سفید، ۵ مهرهٔ سیاه و ۳ مهرهٔ زرد وجود دارد. از این جعبه سه مهره به تصادف خارج می‌کنیم. در هر یک از قسمت‌های زیر، احتمال خواسته‌شده را به‌دست آورید.
آ) اگر حداقل دو مهرهٔ خارج‌شده سفید باشند، احتمال آن‌که دقیقاً ۲ مهرهٔ خارج‌شده سفید باشد.
ب) اگر سه مهرهٔ خارج‌شده هم‌رنگ باشند، احتمال آن‌که هر سه سفید باشند.
پ) اگر دقیقاً یکی از مهره‌های خارج‌شده سیاه باشد، احتمال آن‌که رنگ مهره‌های خارج‌شده متفاوت باشد.

۱۲۲. اگر $P(A')=\frac{۱}{۴}$ ، $P(B)=\frac{۲}{۳}$ و $P(A\cup B)=\frac{۴}{۵}$ باشد، مقدار $P(A\mid B)$ را به‌دست آورید.

۱۲۳. تیم فوتبال یک مدرسه، ۱۰ بازیکن دارد که قد هیچ دو نفری برابر نیست. اگر یکی از بازیکن‌ها را به تصادف انتخاب کنیم:

آ) احتمال این‌که آن بازیکن بلندقدترین بازیکن تیم باشد، چقدر است؟ (مشابه مثال صفحهٔ ۵۵ کتاب درسی)

ب) بازیکن دیگری را به تصادف انتخاب می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم که از بازیکن اول کوتاه‌قدتر است. در این صورت احتمال این‌که بازیکن اول بلندقدترین بازیکن تیم باشد، چقدر است؟

۱۲۴. چهار نفر به نام‌های a ، b ، c و d در یک مسابقه شرکت کرده‌اند. اگر شانس پیروزی a ، دو برابر b و سه برابر c باشد، b و d هم‌شانس باشند و بدانیم b پیروز نشده است، احتمال پیروزی a را به‌دست آورید.

۱۲۵. فرض کنید B پیشامدی با احتمال مثبت باشد، نشان دهید: (کار در کلاس صفحهٔ ۵۶ کتاب درسی)

آ) اگر $A_۱$ و $A_۲$ دو پیشامد ناسازگار باشند، آن‌گاه: $P((A_۱\cup A_۲)\mid B)=P(A_۱\mid B)+P(A_۲\mid B)$

ب) برای هر پیشامد A داریم: $P(A'\mid B)=۱-P(A\mid B)$

۱۲۶. در کیسه‌ای ۳ گوی سفید، ۲ گوی سیاه و ۲ گوی زرد است. از این کیسه سه گوی به‌ترتیب و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم. مطلوب است احتمال این‌که: (مشابه مثال صفحهٔ ۵۶ کتاب درسی)

آ) گوی اول و دوم سفید و گوی سوم زرد باشد. ب) گوی اول سفید، گوی دوم سیاه و گوی سوم زرد باشد.

۱۲۷. والیبالیستی هر بار که اقدام به زدن آبشار می‌کند، اگر روحیهٔ خوبی داشته باشد، آبشارش به احتمال ۸۰ درصد تبدیل به امتیاز می‌شود و اگر روحیه‌اش ضعیف باشد، احتمال گرفتن امتیازش به ۵۰ درصد می‌رسد. به علاوه می‌دانیم او اگر آبشاری را به امتیاز تبدیل کند، در آبشار بعدی روحیهٔ خوبی دارد و در غیر این صورت روحیه‌اش ضعیف است. فرض کنید این والیبالیست، قبل از اولین آبشارش روحیهٔ خوبی داشته باشد. احتمال این‌که از سه آبشار متوالی، دقیقاً دو آبشار آخر تبدیل به امتیاز شود، چقدر است؟

۱۲۸. فرض کنید سه کارت داریم. دو روی کارت اول سبز و دو روی کارت دوم قرمز است و یک روی کارت سوم سبز و روی دیگرش قرمز است. کارتی را به تصادف برمی‌داریم و مشاهده می‌کنیم که یک روی آن سبز است. احتمال این‌که هر دو روی آن سبز باشد چقدر است؟

۱۲۹. قانون ضرب احتمال برای سه پیشامد را ثابت کنید: $P(A_۱\cap A_۲\cap A_۳)=P(A_۱)P(A_۲\mid A_۱)P(A_۳\mid A_۱\cap A_۲)$

($A_۱$ و $A_۲$ و $A_۳$ سه پیشامد با احتمال‌های ناصفر می‌باشند.) (تمرین ۴ صفحهٔ ۶۵ کتاب درسی)

۱۳۰. اگر $B_۱$ ، $B_۲$ و $B_۳$ یک افراز فضای نمونه‌ای S و A یک پیشامد از آن با اطلاعات زیر باشد، مقدار $P(A)$ را به‌دست آورید.

$$P(B_۱)=\frac{۱}{۴},\ P(A\mid B_۱)=\frac{۱}{۵},\ P(B_۲)=\frac{۲}{۵},\ P(A\mid B_۲)=\frac{۳}{۴},\ P(A\mid B_۳)=\frac{۱}{۴}$$

۱۳۱. در دو جعبهٔ یکسان، مهره‌هایی به این شرح قرار دارد که در جعبهٔ اول، ۳ مهرهٔ سفید و ۷ مهرهٔ قرمز و در جعبهٔ دوم، ۱۰ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ قرمز، موجود است. مهره‌ای را از جعبهٔ اول خارج نموده و در جعبهٔ دوم قرار می‌دهیم. حال مهره‌ای به تصادف از جعبهٔ دوم انتخاب می‌کنیم، احتمال آن‌که این مهره قرمز باشد را بیابید. (مشابه تمرین ۷ صفحهٔ ۶۵ کتاب درسی)

۱۳۲. سه ظرف همانند داریم. اولین ظرف شامل ۵ مهرهٔ سفید و ۱۱ مهرهٔ سیاه است. دومین ظرف شامل ۳ مهرهٔ سفید و ۹ مهرهٔ سیاه و سومین ظرف تنها شامل مهره‌های سفید می‌باشد. با چشم بسته یکی از سه ظرف را انتخاب و از آن مهره‌ای درمی‌آوریم. احتمال این‌که مهره سفید باشد، چقدر است؟

۱۳۳. دو ظرف همانند داریم. اولی شامل ۱۰ مهرهٔ سفید و ۸ مهرهٔ سیاه و دومی شامل ۷ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه می‌باشد. از ظرف اول ۲ مهره و از ظرف دوم ۳ مهره انتخاب کرده و در ظرف جدیدی قرار می‌دهیم، سپس از ظرف جدید مهره‌ای خارج می‌کنیم؛ به کدام احتمال، مهرهٔ خارج‌شده سفید است؟ (مشابه تمرین ۹ صفحهٔ ۶۵ کتاب درسی)

۱۳۴. ۶۰ درصد کارمندان اداره‌ای مرد و بقیه زن هستند. ۶۵ درصد مردان و ۵۰ درصد زنان این اداره تحصیلات دانشگاهی دارند. اگر یک نفر از بین کارمندان این اداره به تصادف انتخاب کنیم، احتمال آن‌که تحصیلات دانشگاهی داشته باشد را به‌دست آورید. (مشابه تمرین ۶ صفحهٔ ۶۵ کتاب درسی)

۱۳۵. احتمال مبتلا شدن به یک بیماری خاص برای افرادی که ورزش می‌کنند، ۰/۱ و برای افرادی که ورزش نمی‌کنند برابر ۰/۳۵ است. اگر ۴۰ درصد افراد جامعه‌ای ورزش کنند و یک نفر به تصادف از این جامعه انتخاب کنیم، با چه احتمالی به این بیماری خاص مبتلا می‌شود؟
(مشابه تمرین ۱۱ صفحهٔ ۶۵ کتاب درسی)

۱۳۶. فرض کنید B_1، B_2، ... و B_n پیشامدهایی با احتمال ناصفر باشند که فضای نمونه‌ای را افراز می‌کنند، در این صورت برای هر پیشامد دلخواه A، ثابت کنید:

$$P(A)=P(B_1)P(A\mid B_1)+P(B_2)P(A\mid B_2)+\cdots+P(B_n)P(A\mid B_n)$$

۱۳۷. فرض کنید A و B، دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، ثابت کنید:

$$P(A)=P(B)P(A\mid B)+P(B')P(A\mid B')$$

(احتمال پیشامدهای B و B' مثبت هستند.)

۱۳۸. درون جعبهٔ A، ۶ لامپ سالم و ۲ لامپ معیوب، درون جعبهٔ B، ۵ لامپ سالم و ۳ لامپ معیوب و درون جعبهٔ C، ۷ لامپ سالم و ۵ لامپ معیوب وجود دارد. یکی از جعبه‌ها را به تصادف انتخاب کرده و لامپی را به تصادف از آن خارج می‌کنیم. اگر بدانیم لامپ خارج‌شده سالم است، احتمال آن‌که لامپ از جعبهٔ B خارج شده باشد را به‌دست آورید.

۱۳۹. در یک شرکت قطعه‌سازی وقتی خط تولید سالم است، تنها ۳ درصد از قطعه‌ها غیراستاندارد هستند، ولی وقتی یکی از قطعات اصلی خط تولید دچار عیب می‌شود، این مقدار به ۸ درصد افزایش پیدا می‌کند. براساس تجربه‌های قبلی، احتمال خراب شدن خط تولید پس از دو ماه در اثر معیوب شدن آن قطعه ۴ درصد است. ۲ ماه پیش این خط تولید به طور کامل سرویس شده بود. مسئول کنترل کیفیت کارخانه به تصادف یک قطعه را مورد بررسی قرار می‌دهد و مشاهده می‌کند که غیراستاندارد است. احتمال سالم بودن خط تولید را به‌دست آورید.
(مشابه مثال صفحهٔ ۶۳ کتاب درسی)

۱۴۰. دسته‌ای کارت شامل ۵ کارت دو رو سبز و ۴ کارت یک رو سفید و یک رو سبز است. کارتی را به تصادف از این دسته انتخاب می‌کنیم و یک روی آن را می‌بینیم.
(مشابه مثال صفحهٔ ۶۰ کتاب درسی)

آ) احتمال این‌که آن رو سبز باشد چقدر است؟

ب) اگر بدانیم آن رو که دیده‌ایم سبز می‌باشد، احتمال آن‌که روی دیگر آن نیز سبز باشد، چقدر است؟

۱۴۱. کشوری دارای ۲ شرکت خودروسازی A و B است که به‌ترتیب ۴۵ و ۵۵ درصد کل تولیدات را انجام می‌دهند. شرکت A، ۲۰ درصد و شرکت B، ۱۵ درصد محصولات را به کشورهای دیگر صادر می‌کنند. اگر یک خودرویی که در این کشور تولید می‌شود را به تصادف انتخاب کنیم، آن‌گاه ....

آ) با چه احتمالی این خودرو صادر می‌شود؟

ب) اگر بدانیم خودروی انتخاب‌شده صادراتی است، با چه احتمالی تولید شرکت خودروسازی B است؟

۱۴۲. شخصی برای رفتن به محل کار از مترو، اتوبوس یا تاکسی استفاده می‌کند که درصد استفاده از آن‌ها در هر روز به ترتیب ۶۰، ۳۰ و ۱۰ می‌باشد و هنگامی که از آن‌ها استفاده می‌کند، احتمال دیر رسیدن به محل کار به ترتیب ۰/۱، ۰/۳ و ۰/۲۵ است.

آ) احتمال آن‌که این شخص به موقع در محل کار حاضر شود چقدر است؟

ب) اگر این شخص در یک روز خاص به موقع در محل کار حاضر شده باشد، با چه احتمالی از تاکسی استفاده کرده است؟

۱۴۳. فرض کنید از بین چهار کارت با شماره‌های ۱ تا ۴، کارتی را به تصادف انتخاب می‌کنیم و سپس سکه‌ای را به تعداد عدد کارت پرتاب می‌کنیم. اگر دقیقاً یک بار «رو» بیاید، احتمال این‌که شمارهٔ کارت خارج‌شده ۴ باشد، چقدر است؟
(مشابه تمرین ۱۶ صفحهٔ ۶۶ کتاب درسی)

۱۴۴. ۷۰ درصد واجدین شرایط در شهر A و ۸۰ درصد واجدین شرایط در شهر B در انتخابات شورای شهر شرکت کرده‌اند. اگر تعداد واجدین شرایط شهر B، دو برابر تعداد واجدین شرایط شهر A باشند و فردی به تصادف از بین رأی‌دهندگان این دو شهر انتخاب شود، به چه احتمالی از شهر A می‌باشد؟
(مشابه تمرین ۱۰ صفحهٔ ۶۵ کتاب درسی)

۱۴۵. در یک کارخانه ماشین A، ۳۵ درصد، ماشین B، ۴۵ درصد و ماشین C، ۲۰ درصد از کالاهای کارخانه را تولید می‌کنند. ۲ درصد از تولیدات ماشین A، ۴ درصد از تولیدات ماشین B و ۱/۵ درصد از تولیدات ماشین C معیوب است. کالایی از این کارخانه به تصادف انتخاب کرده و ملاحظه می‌کنیم، معیوب است. احتمال این‌که کالا از ماشین C باشد، چقدر است؟

۱۴۶. در یک دبیرستان متوسطهٔ دوم، ۵۰ درصد دانش‌آموزان کلاس دهم، ۳۰ درصد دانش‌آموزان کلاس یازدهم و بقیهٔ دانش‌آموزان کلاس دوازدهم هستند. ۸۰ درصد کلاس دهم، ۹۰ درصد کلاس یازدهم و ۷۰ درصد کلاس دوازدهم دارای معدل بالای ۱۷ هستند. فردی به تصادف از دانش‌آموزان این دبیرستان انتخاب می‌کنیم. اگر معدل این فرد بالای ۱۷ باشد، با چه احتمالی این فرد از دانش‌آموزان کلاس یازدهم است؟

$$P(S)=۱\Rightarrow P(۱)+P(۲)+P(۳)+P(۴)=۱\Rightarrow x+۴x+۷x+۱۰x=۱$$

$$\Rightarrow ۲۲x=۱\Rightarrow x=\frac{۱}{۲۲}$$

$$\Rightarrow P(۱)=\frac{۱}{۲۲}\ ,\ P(۲)=\frac{۴}{۲۲}\ ,\ P(۳)=\frac{۷}{۲۲}\ ,\ P(۴)=\frac{۱۰}{۲۲}$$

ب) احتمال اصابت تیر به ناحیهٔ اول یا چهارم:

$$P(۱)+P(۴)=\frac{۱}{۲۲}+\frac{۱۰}{۲۲}=\frac{۱۱}{۲۲}$$

احتمال اصابت تیر به ناحیهٔ دوم یا سوم:

$$P(۲)+P(۳)=\frac{۴}{۲۲}+\frac{۷}{۲۲}=\frac{۱۱}{۲۲}$$

در نتیجه احتمال اصابت تیر به ناحیهٔ اول یا چهارم با احتمال اصابت تیر به ناحیهٔ دوم یا سوم برابر است.

۱۱۶

اگر $P(x)=w$ را جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی در نظر بگیریم، دو جملهٔ بعدی آن به ترتیب برابر $P(y)=\frac{۱}{۲}w$ و $P(z)=\frac{۱}{۴}w$ می‌باشد.

از تساوی $P(S)=۱$ داریم:

$$P(x)+P(y)+P(z)=۱\Rightarrow w+\frac{۱}{۲}w+\frac{۱}{۴}w=۱$$

$$\xrightarrow{\times ۴} ۴w+۲w+w=۴\Rightarrow ۷w=۴\Rightarrow w=\frac{۴}{۷}$$

در نتیجه $P(x)=\frac{۴}{۷}$، $P(y)=\frac{۲}{۷}$ و $P(z)=\frac{۱}{۷}$ می‌باشد.

۱۱۷

جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول $t_۱$ و قدرنسبت d برابر $t_n=t_۱+(n-۱)d$ است. اگر $P(a)$ را برابر x فرض کنیم، آن‌گاه داریم:

$$P(a)=x\Rightarrow P(b)=x+d=x+\frac{۱}{۱۰}$$

$$P(c)=x+۲d=x+\frac{۲}{۱۰}\ ,\ P(d)=x+۳d=x+\frac{۳}{۱۰}$$

از طرفی $P(a)+P(b)+P(c)+P(d)=۱$ می‌باشد، بنابراین:

$$x+(x+\frac{۱}{۱۰})+(x+\frac{۲}{۱۰})+(x+\frac{۳}{۱۰})=۱\Rightarrow ۴x+\frac{۶}{۱۰}=۱$$

$$\Rightarrow ۴x=۱-\frac{۶}{۱۰}=\frac{۴}{۱۰}\Rightarrow x=\frac{۱}{۱۰}$$

$$\Rightarrow P(\{a,c\})=P(a)+P(c)=x+(x+\frac{۲}{۱۰})$$

$$=۲x+\frac{۲}{۱۰}=\frac{۲}{۱۰}+\frac{۲}{۱۰}=\frac{۴}{۱۰}$$

۱۱۸

آ) اگر B پیشامدی باشد که در آن مجموع دو تاس ۸ باشد، آن‌گاه داریم:

(عدد اولی را عدد تاس سفید و عدد دومی را عدد تاس سیاه در نظر می‌گیریم.)

$$B=\{(۲,۶),(۳,۵),(۴,۴),(۵,۳),(۶,۲)\}\Rightarrow n(B)=۵$$

اگر A پیشامد رو شدن عدد ۵ برای تاس سفید باشد، آن‌گاه:

$$A\cap B=\{(۵,۳)\}\Rightarrow n(A\cap B)=۱$$

$$\Rightarrow P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{۱}{۵}$$

ب) اگر B پیشامدی باشد که در آن عدد تاس سفید ۵ باشد، آن‌گاه:

$$B=\{(۵,۱),(۵,۲),(۵,۳),(۵,۴),(۵,۵),(۵,۶)\}\Rightarrow n(B)=۶$$

اگر A پیشامدی باشد که مجموع دو تاس برابر ۸ باشد، آن‌گاه:

$$A\cap B=\{(۵,۳)\}\Rightarrow n(A\cap B)=۱$$

$$\Rightarrow P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{۱}{۶}$$

۱۱۹

اگر B پیشامدی باشد که در آن دقیقاً ۳ فرزند از ۴ فرزند این خانواده دختر باشد، آن‌گاه:

B = {(د، د، د، پ)، (د، د، پ، د)، (د، پ، د، د)، (پ، د، د، د)}

$$\Rightarrow n(B)=۴$$

اگر A پیشامدی باشد که در آن فرزند اول این خانواده پسر باشد، آن‌گاه:

A ∩ B = {(پ، د، د، د)} ⇒ $n(A\cap B)=۱$

$$\Rightarrow P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{۱}{۴}$$

۱۲۰

اگر A پیشامد رو آمدن در ۲ پرتاب از ۳ پرتاب و B پیشامد آن باشد که دست‌کم یک بار «پشت» آمده باشد، باید مقدار $P(A|B)$ را به‌دست آوریم:

برای محاسبهٔ $n(B)$ از پیشامد متمم استفاده می‌کنیم:

هیچ‌یک از سکه‌ها پشت نیایند : $B'\Rightarrow B'=\{$(ر، ر، ر)$\}$

$$\Rightarrow n(B)=n(S)-n(B')=۸-۱=۷$$

A ∩ B = {(ر، ر، پ)، (ر، پ، ر)، (پ، ر، ر)}

$$\Rightarrow n(A\cap B)=۳\Rightarrow P(A|B)=\frac{۳}{۷}$$

۱۲۱

آ) B: حداقل دو مهرهٔ خارج‌شده سفید باشد.

$$n(B)=\underbrace{\binom{۴}{۲}\binom{۸}{۱}}_{\text{۲ مهره سفید و ۱ مهره غیرسفید}}+\underbrace{\binom{۴}{۳}}_{\text{هر سه مهره سفید}}=۶\times۸+۴=۵۲$$

A: دقیقاً ۲ مهرهٔ خارج‌شده سفید باشد.

$$n(A\cap B)=\binom{۴}{۲}\binom{۸}{۱}=۶\times۸=۴۸$$

$$\Rightarrow P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{۴۸}{۵۲}=\frac{۱۲}{۱۳}$$

ب) B: سه مهرهٔ خارج‌شده هم‌رنگ باشند.

$$\Rightarrow n(B)=\underbrace{\binom{۴}{۳}}_{\text{هر سه مهره سفید}}+\overbrace{\binom{۵}{۳}}^{\text{هر سه مهره سیاه}}+\underbrace{\binom{۳}{۳}}_{\text{هر سه مهره زرد}}=۴+۱۰+۱=۱۵$$

A: هر سه مهره سفید باشند.

$$\Rightarrow n(A\cap B)=\binom{۴}{۳}=۴\Rightarrow P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{۴}{۱۵}$$

پ) B: دقیقاً یکی از مهره‌های خارج‌شده سیاه باشد.

$$\Rightarrow n(B)=\underbrace{\binom{۵}{۱}\binom{۷}{۲}}_{\text{یک مهره سیاه و دو مهره غیرسیاه}}=۵\times۲۱$$

A: رنگ مهره‌ها متفاوت باشند.

$$n(A\cap B)=\binom{۴}{۱}\binom{۵}{۱}\binom{۳}{۱}=۴\times۵\times۳$$

$$\Rightarrow P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{۴\times\cancel{۵}\times\cancel{۳}^{۱}}{\cancel{۵}\times\cancel{۲۱}_{۷}}=\frac{۴}{۷}$$