ساختار کتاب

کتاب شب امتحان **ریاضی (۳) دوازدهم** از ۴ قسمت اصلی به صورت زیر تشکیل شده است:

۱) آزمون‌های نوبت اول: آزمون‌های شمارهٔ ۱ تا ۴ این کتاب مربوط به مباحث نوبت اول است که خودش به دو قسمت تقسیم می‌شود:

الف) آزمون‌های طبقه‌بندی‌شده: آزمون‌های شمارهٔ ۱ و ۲ را فصل به فصل طبقه‌بندی کرده‌ایم؛ بنابراین شما به راحتی می‌توانید پس از خواندن هر فصل از درس‌نامه تعدادی سؤال را بررسی کنید. حواستان باشد این آزمون‌ها، ۲۰نمره‌ای و مثل یک آزمون کامل هستند. در کنار سؤال‌های این آزمون‌ها **نکات مشاوره‌ای** نوشته‌ایم. این نکات به شما در درس‌خواندن قبل از امتحان و پاسخگویی به آزمون در زمان امتحان کمک می‌کند.

ب) آزمون‌های طبقه‌بندی‌نشده: آزمون‌های شمارهٔ ۳ و ۴ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم تا دو آزمون نوبت اول، مشابه آزمونی که معلمتان از شما خواهد گرفت، ببینید.

۲) آزمون‌های نوبت دوم: آزمون‌های شمارهٔ ۵ تا ۱۲ از کل کتاب و مطابق امتحان پایان سال طرح شده‌اند. این قسمت هم، خودش به ۲ بخش تقسیم می‌شود:

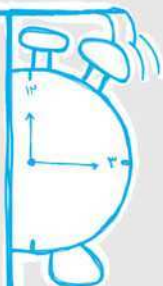
الف) آزمون‌های طبقه‌بندی‌شده: آزمون‌های شمارهٔ ۵ تا ۸ را که به ترتیب امتحان‌های نهایی خرداد ۹۸، خرداد و شهریور ۹۹ و دی ۱۴۰۰ است هم طبقه‌بندی کرده‌ایم. با این کار باز هم می‌توانید پس از خواندن هر فصل تعدادی سؤال مرتبط را پاسخ دهید. هر کدام از این آزمون‌ها، ۲۰ نمره دارند؛ در واقع در این بخش، شما ۴ آزمون کامل را می‌بینید. این آزمون‌ها **نکات مشاوره‌ای** دارند.

ب) آزمون‌های طبقه‌بندی‌نشده: آزمون‌های شمارهٔ ۹ تا ۱۲ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم؛ پس، در این بخش با ۴ آزمون نوبت دوم، مشابهِ آزمون پایان سال مواجه خواهید شد. این آزمون‌ها به ترتیب امتحان‌های نهایی خرداد ۱۴۰۰، خرداد ۱۴۰۱، شهریور ۱۴۰۰ و شهریور ۱۴۰۱ هستند.

۳) پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون‌ها: در پاسخ تشریحی آزمون‌ها، همهٔ آن‌چه را که شما باید در امتحان بنویسید تا نمرهٔ کامل کسب کنید، برایتان نوشته‌ایم.

۴) درس‌نامهٔ کامل شب امتحانی: این قسمت، برگ برندهٔ شما نسبت به کسانی است که این کتاب را نمی‌خوانند. در این قسمت، همهٔ آن‌چه را که شما برای گرفتن نمرهٔ عالی در امتحان ریاضی (۳) نیاز دارید، در ۱۷ صفحه آورده‌ایم، بخوانید و لذتش را ببرید!

یک راهکار: موقع امتحان‌های نوبت اول می‌توانید از سؤال‌های فصل‌های اول تا چهارم آزمون‌های ۵ تا ۸ هم استفاده کنید.



فهرست

بارم‌بندی درس ریاضی (۳)

شمارهٔ فصل		نوبت اول	نوبت دوم	شهریور و دی
فصل اول		۷	۲	۳
فصل دوم		۵	۲	۳
فصل سوم		۵	۲	۲
فصل چهارم	تا صفحهٔ ۷۶	۳	۱	۵
	صفحهٔ ۷۷ به بعد	–	۴	
فصل پنجم		–	۳/۵	۳
فصل ششم		–	۳/۵	۲/۵
فصل هفتم		–	۲	۱/۵
جمع		۲۰	۲۰	۲۰

ریاضی (۳)	رشته: علوم تجربی	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	kheilisabz.com	
ردیف	آزمون شمارهٔ ۱	نوبت اول پایهٔ دوازدهم	نمره	

فصل اول

۱ درستی یا نادرستی جملات زیر را بررسی کنید: — ۱

الف) برای دو تابع f و g با شرط آن‌که $f \neq g$ تساوی $(fog)(x)=(gof)(x)$ هیچ‌گاه برقرار نیست.

ب) بُرد تابع $2f(x-1)$ در حالت کلی با بُرد تابع $f(x)$ برابر نیست.

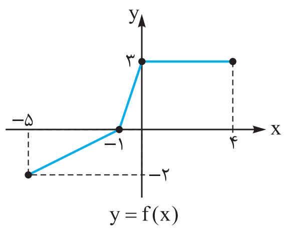
۲ ابتدا نمودار تابع f را رسم کنید سپس بازه‌هایی را که در آن‌ها تابع اکیداً صعودی، اکیداً نزولی یا ثابت است، مشخص کنید. — ۱/۵

$$f(x)=\begin{cases} x^3 & x<0 \\ 1 & 0\le x\le 1 \\ x-1 & x>1 \end{cases}$$

شما از سال دهم با رسم نمودارهای مختلف سروکار داشتین، ولی اگه یادتون رفته چه‌طوری نمودار توابع رو رسم کنید به درس‌نامهٔ آخر این کتاب یه نیگا بندازین.

۳ با رسم نمودار، وضعیت یکنوایی تابع $y=2^x-1$ را بررسی کنید، سپس در صورت امکان، ضابطه و نمودار تابع وارون آن را به دست آورید. — ۱/۲۵

۴ نمودار تابع $y=f(x)$ داده شده است. نمودار توابع $y=\frac{1}{2}f(2x)$ و $y=-f(-x)$ را رسم کنید. — ۱



۵ برای دو تابع $f(x)=\frac{1+x^2}{1-x^2}$ و $g(x)=\sqrt{x(1-x)}$ ضابطه و دامنهٔ تابع fog را به دست آورید. — ۱

۶ نمودار تابع $f(x)=x^2-2x$ را رسم کرده سپس دامنه‌اش را طوری محدود کنید که یک‌به‌یک شود، در نهایت با در نظر گرفتن این دامنه، ضابطهٔ وارون f را به دست آورید. — ۱/۲۵

فصل دوم

۷ برای زاویهٔ $22/5°$ مقادیر سینوس، کسینوس و تانژانت را بدست آورید. — ۱/۵

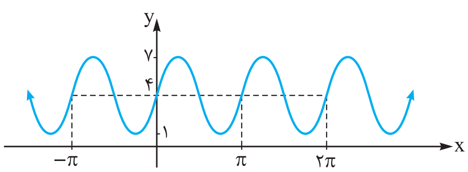
ما مقدارهای $\sin 22/5°$ و $\cos 22/5°$ رو نمی‌دونیم ولی $\sin 45°$ و $\cos 45°$ رو بلدیم، پس از فرمول‌های 2α استفاده می‌کنیم.

۸ معادلهٔ مثلثاتی $\cos x(4\cos x-9)=-5$ را حل کنید. جواب‌هایی را که در بازهٔ $[0,4\pi]$ قرار دارند، تعیین کنید. — ۱/۲۵

۹ در جای خالی، عبارت مناسب قرار دهید: — ۰/۲۵

جواب معادلهٔ $\cos^2 x-\sin^2 x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ که در بازهٔ $[0,\frac{\pi}{2}]$ واقع می‌باشد، برابر با .... است.

۱۰ نمودار مقابل مربوط به تابع $f(x)=a\sin bx+c$ است. با دقت در شکل نمودار و تشخیص دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع، ضابطهٔ آن را مشخص کنید. — ۱



۱۱ مثلثی با مساحت ۹ سانتی‌متر مربع مفروض است. اگر اندازهٔ دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۱۸ سانتی‌متر باشند، آن‌گاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟ — ۱

فصل سوم

۱۲ حاصل حدود زیر را به دست آورید: — ۲/۵

در محاسبهٔ حد توابع کسری، اگر صورت کسر، عددی غیرصفر و مخرج کسر صفر شد باید نوع صفر رو تعیین کنید یعنی باید ببینید مخرج 0^+ می‌شود یا 0^-

الف) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3-x^2-x+10}{x^2+3x+2}$

ب) $\lim\limits_{t\to -\infty}\frac{1-9t^3}{t^2+2t}$

پ) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{4x}{(x-1)^3}$

۱۳ با توجه به جدول زیر می‌توان گفت: ۱

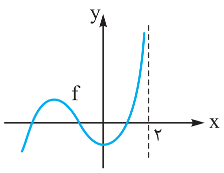
الف) حد تابع f وقتی $x \to +\infty$ برابر است با ....

ب) حد f وقتی $x \to -\infty$ برابر است با ....

x	$-\infty$	$\leftarrow$	-1000	-100	0	100	1000	$\rightarrow$	$+\infty$
$f(x)=\frac{1}{x}$	○	$\leftarrow$	○	○	○	○	○	$\rightarrow$	○

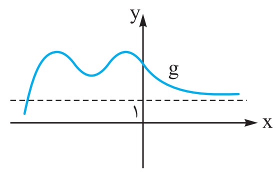
۱۴ برای هر شکل، یک عبارت حدی مناسب بنویسید. ۱/۵

الف)



(حد در $x=2$)

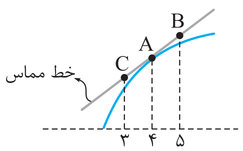
ب)



(حد در $+\infty$)

فصل چهارم

۱۵ برای تابع f در شکل مقابل داریم: $f'(4)=2$ و $f(4)=18$. مختصات نقاط B و C را به دست آورید. ۱/۵



۱۶ با فرض آن‌که $f(x)=-x^2+4x$ باشد به کمک تعریف مشتق، مقدار $f'(3)$ را به دست آورید. سپس معادلهٔ خط مماس بر نمودار $f(x)$ را در نقطهٔ $x=3$ بنویسید. ۱/۵

	موفق باشید	جمع نمرات	۲۰

پاسخ‌نامهٔ تشریحی

آزمون شمارهٔ ۱ (نوبت اول)

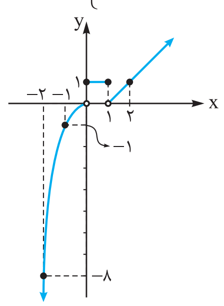
۱- الف) نادرست؛ مثلاً اگر $f(x)=x$ و $g(x)=\frac{1}{x}$ باشند، با آن‌که $f\neq g$ ولی تساوی $fog=gof$ برقرار است و هر دو تابع fog و gof با هم برابر می‌شوند:

$$(fog)(x)=(gof)(x)=\frac{1}{x}$$

ب) درست، مثلاً اگر بُرد $f(x)$ برابر با $[0,1]$ باشد بُرد $2f(x-1)$ برابر است با $[0,2]$.

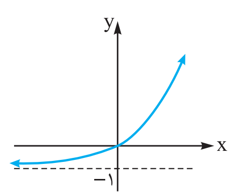
۲- ابتدا با توجه به هر ضابطه و دامنهٔ مربوط به آن، تک‌تک نمودارها را به روش نقطه‌یابی رسم می‌کنیم، سپس صعودی یا نزولی بودن یا ثابت‌بودن هر یک را بررسی می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} x^3 & x<0 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 0 & -1 & -2 \\ \hline y & 0 & -1 & -8 \end{array} \\ 1 & 0\le x\le 1 \Rightarrow y=1 \text{ خط افقی} \\ x-1 & x>1 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & 1 & 2 \\ \hline y & 0 & 1 \end{array} \end{cases}$$



واضح است که تابع در بازه‌های $(-\infty,0)$ و $(1,+\infty)$ اکیداً صعودی و در بازهٔ $[0,1]$ ثابت است.

۳- با توجه به شکل مقابل، هر خط افقی، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند؛ پس این تابع، یک‌به‌یک است. لذا وارون‌پذیر هم می‌باشد.
ضمناً تابع، اکیداً صعودی است.
حال برای به دست آوردن تابع وارون، باید x را برحسب y بنویسیم. ضمناً توجه دارید که وارون تابع نمایی، یک تابع لگاریتمی است و برعکس.



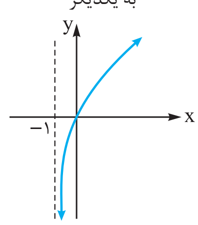
$y=2^x-1$

یافتن تابع وارون: $y=2^x-1 \Rightarrow 2^x=y+1$

$$\xrightarrow[\text{در مبنای ۲ می‌گیریم.}]{\text{از دو طرف لگاریتم}} \log_2 2^x=\log_2(y+1) \Rightarrow x=\log_2(y+1)$$

$$\xrightarrow[\text{به یکدیگر}]{\text{تبدیل اسم متغیرها}} y^{-1}(x)=\log_2(x+1)$$

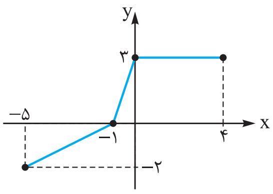
برای رسم نمودار y^{-1} باید نمودار $\log_2 x$ را ۱ واحد به چپ حرکت دهیم:
(یا می‌توانیم قرینهٔ نمودار $y=2^x-1$ را نسبت به خط $y=x$ رسم کنیم.)



$y^{-1}=\log_2(x+1)$

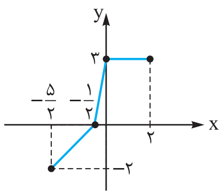
۴- دامنهٔ تابع $f(x)$ برابر $[-5,4]$ می‌باشد. حالا برای یافتن دامنهٔ $f(2x)$ باید طول تمام نقاط را بر ۲ تقسیم کنیم؛ یعنی دامنهٔ تابع $f(2x)$ به صورت $[-\frac{5}{2},\frac{4}{2}]$ خواهد بود. زیرا:

$$-5\le 2x\le 4 \xrightarrow{\div 2} -\frac{5}{2}\le x\le 2$$



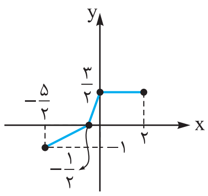
$y=f(x)$

طول نقاط را نصف می‌کنیم.



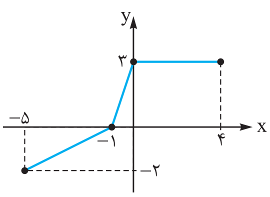
$y=f(2x)$

عرض نقاط را نصف می‌کنیم.



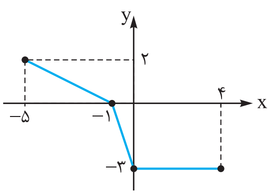
$y=\frac{1}{2}f(2x)$

حالا نمودار $y=-f(-x)$ را رسم می‌کنیم:



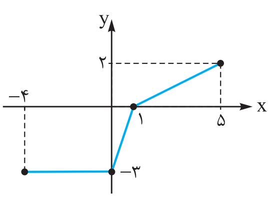
$y=f(x)$

قرینه نسبت به محور xها



$y=-f(x)$

قرینه نسبت به محور yها



$y=-f(-x)$

۵- ابتدا دامنهٔ توابع f و g را جداگانه به دست می‌آوریم. می‌دانید دامنهٔ توابع گویا به شکل $\frac{\bigcirc}{\square}$ برابر است با $\mathbb{R}-\{\square=0 \text{ ریشه‌های معادلهٔ}\}$ و دامنهٔ توابع رادیکالی به شکل $\sqrt[\text{زوج}]{\square}$ برابر است با جواب نامعادلهٔ $\square\ge 0$.

$$f(x)=\frac{1+x^2}{1-x^2} \xrightarrow{\text{یافتن دامنه}} 1-x^2=0 \Rightarrow x^2=1$$

$$\Rightarrow x=\pm 1 \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{\pm 1\}$$

$g(x)=\sqrt{x(1-x)} \xrightarrow{\text{یافتن دامنه}} x(1-x)\ge 0 \xrightarrow[\text{علامت}]{\text{جدول تعیین}} 0\le x\le 1$

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{0\le x\le 1 \mid \underbrace{\sqrt{x(1-x)}\ne \pm 1}_{\text{طرفین به توان ۲}}\}$$

$$x(1-x)\ne 1 \;\downarrow\; \Delta<0 \;\downarrow\; x\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow D_{fog}=\{0\le x\le 1\mid x\in\mathbb{R}\}=[0,1]$$

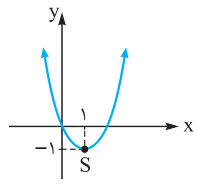
$$(fog)(x)=f(g(x))=\frac{1+g^2}{1-g^2}=\frac{1+(\sqrt{x(1-x)})^2}{1-(\sqrt{x(1-x)})^2}$$

۶- $y=x^2-2x \Rightarrow x_S=\frac{-b}{2a}=\frac{-(-2)}{2(1)}=1$ (طول رأس)

حالا عدد به دست آمده را در تابع سهمی قرار می‌دهیم تا عرض رأس هم به دست آید:

$y=x^2-2x \xrightarrow{x=1} y_s=1^2-2(1)=-1$ عرض رأس

پس مختصات رأس به صورت $S(1,-1)$ است.



ضمناً سهمی min دارد، چون ضریب x^2 مثبت است:

اگر مثلاً دامنه را به صورت $[1,+\infty)$ تعریف کنیم، f یک‌به‌یک خواهد شد که در این صورت خواهیم داشت:

$$y=(x-1)^2-1 \Rightarrow (x-1)^2=y+1$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} x-1=\pm\sqrt{y+1} \xrightarrow{x\ge 1} x-1=\sqrt{y+1}$$

$$\Rightarrow x=1+\sqrt{y+1} \xrightarrow[\text{به یکدیگر}]{\text{تبدیل اسم متغیرها}} f^{-1}(x)=1+\sqrt{x+1}$$

۷- نسبت‌های مثلثاتی $22/5^\circ$ را نمی‌دانیم ولی نسبت‌های مثلثاتی ۲ برابر آن یعنی 45° را می‌دانیم لذا از فرمول‌های 2α استفاده می‌کنیم:

$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha \xrightarrow{\alpha=22/5^\circ} \cos 45^\circ=1-2\sin^2 22/5^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt2}{2}=1-2\sin^2 22/5^\circ \Rightarrow 2\sin^2 22/5^\circ=1-\frac{\sqrt2}{2}$$

$$\Rightarrow 2\sin^2 22/5^\circ=\frac{2-\sqrt2}{2} \Rightarrow \sin^2 22/5^\circ=\frac{2-\sqrt2}{4}$$

$$\xrightarrow[\text{می‌گیریم}]{\text{جذر}} \sin 22/5^\circ=\sqrt{\frac{2-\sqrt2}{4}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt2}}{2}$$

$$\cos^2 22/5^\circ=1-\sin^2 22/5^\circ=1-\frac{2-\sqrt2}{4}=\frac{2+\sqrt2}{4}$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} \cos 22/5^\circ=\sqrt{\frac{2+\sqrt2}{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt2}}{2}$$

$$\tan 22/5^\circ=\frac{\sin 22/5^\circ}{\cos 22/5^\circ}=\frac{\frac{\sqrt{2-\sqrt2}}{\cancel{2}}}{\frac{\sqrt{2+\sqrt2}}{\cancel{2}}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt2}}{\sqrt{2+\sqrt2}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt2}{2+\sqrt2}}$$

۸- $4\cos^2 x-9\cos x+5=0$

با فرض $\cos x=t$ خواهیم داشت: $4t^2-9t+5=0\Rightarrow \Delta=b^2-4ac=81-80=1$

$$\Rightarrow t=\frac{9\pm\sqrt1}{2(4)}=\frac{9\pm1}{8}\Rightarrow \begin{cases} t=\frac{10}{8}=\frac54>1 \text{ غ‌ق‌ق} \\ t=\frac{8}{8}=1\end{cases}$$

(کسینوس یک زاویه نمی‌تواند بزرگ‌تر از ۱ باشد.)

$$t=1\Rightarrow \cos x=1\Rightarrow x=2k\pi \begin{cases}\xrightarrow{k=0} x=0\in[0,4\pi] \\ \xrightarrow{k=1} x=2\pi\in[0,4\pi]\\ \xrightarrow{k=2} x=4\pi\in[0,4\pi]\end{cases}$$

۹- $\frac{\pi}{12}$، **توضیح:** $\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$

$$\Rightarrow \cos 2x=\frac{\sqrt3}{2}=\cos\frac{\pi}{6}\Rightarrow 2x=2k\pi\pm\frac{\pi}{6}$$

$$\xrightarrow{\div 2} x=k\pi\pm\frac{\pi}{12}\xrightarrow{x\in[0,\frac{\pi}{2}]} x=\frac{\pi}{12}$$

۱۰- با توجه به شکل، $\max=7$ و $\min=1$ و همچنین دورهٔ تناوب برابر با π است؛ بنابراین:

$$T=\frac{2\pi}{|b|}=\pi\Rightarrow |b|=2\Rightarrow b=\pm 2$$

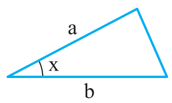
ضمناً توجه کنید که مقدار c همواره برابر است با میانگین max و min، لذا:

$$\max=7,\min=1\Rightarrow c=\frac{7+1}{2}=4$$

$$\max=|a|+c\Rightarrow |a|+4=7\Rightarrow |a|=3\Rightarrow a=\pm 3$$

با توجه به شکل a و b هر دو باید هم‌علامت باشند، لذا: $a=3$ و $b=2$ یا $a=-3$ و $b=-2$، ولی ضابطهٔ تابع در هر دو حالت به شکل $y=3\sin 2x+4$ می‌باشد.

۱۱- اگر دو ضلع و زاویهٔ بین آن‌ها از مثلثی را داشته باشیم (مانند شکل زیر) می‌توانیم مساحت آن را به دست آوریم.



$\Rightarrow$ مساحت $S=\frac12 a.b.\sin x$

با توجه به اطلاعات مسئله، داریم:

$$\frac{1}{\cancel{2}}\times\cancel{2}\times 18\times\sin x=9 \Rightarrow \sin x=\frac{9}{18}=\frac12=\sin\underbrace{\boxed{\frac{\pi}{6}}}_{\alpha}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=2k\pi+\frac{\pi}{6} \xrightarrow{k=0} x=\frac{\pi}{6} \\ x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{5\pi}{6} \xrightarrow{k=0} x=\frac{5\pi}{6}\end{cases}$$

پس مسئله دو جواب دارد، یعنی ۲ مثلث با خواص ذکرشده وجود دارند.

۱۲- الف)

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3-x^2-x+10}{x^2+3x+2}=\frac{0}{0}$$

عامل صفرشونده $(x+2)$ است؛ پس صورت و مخرج را بر $(x+2)$ تقسیم می‌کنیم. البته مخرج به راحتی به کمک اتحاد جمله‌مشترک قابل تجزیه است:

$$x^2+3x+2=(x+2)(x+1)$$

حالا صورت کسر را بر $x+2$ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{l|l} x^3-x^2-x+10 & x+2 \\ \hline -(x^3+2x^2) & x^2-3x+5 \\ \quad -3x^2-x+10 & \\ \quad -(-3x^2-6x) & \\ \qquad 5x+10 & \\ \qquad -(5x+10) & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \text{حد مورد نظر}=\lim_{x\to -2}\frac{\cancel{(x+2)}(x^2-3x+5)}{\cancel{(x+2)}(x+1)}$$

$$=\frac{(-2)^2-3(-2)+5}{-2+1}=\frac{15}{-1}=-15$$

ب) $\lim_{t\to-\infty}\frac{1-9t^3}{t^2+2t}=\lim_{t\to-\infty}\frac{-9t^3}{t^2}=\lim_{t\to-\infty}\frac{-9t}{1}=-9\times(-\infty)=+\infty$

پ) اگر به جای xها ۱ بگذاریم، مخرج کسر صفر می‌شود، لذا باید حد چپ و راست را جداگانه محاسبه کنیم:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{4x}{(x-1)^3}=\frac{4(1)}{(0^+)^3}=\frac{4}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{4x}{(x-1)^3}=\frac{4(1)}{(0^-)^3}=\frac{4}{0^-}=-\infty$$

۱۳- به جای x در تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ اعداد داده‌شده را جایگزین می‌کنیم تا ببینیم مقادیر تابع به سمت چه عددی نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند.

x	$-\infty \leftarrow$	-1000	-100	0	100	1000	$\rightarrow +\infty$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$0 \leftarrow$	$-0/001$	$-0/01$	تعریف‌نشده	$0/01$	$0/001$	$\rightarrow 0$

پس نتیجه می‌گیریم که:

الف) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ ب) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$

۱۴- الف) وقتی x از سمت چپ به ۲ نزدیک می‌شود، عرض نقاط تابع f از هر عدد مثبتی بزرگ‌تر می‌شود، لذا: $\lim_{x\to 2^-} f(x)=+\infty$

ب) وقتی x به سمت $+\infty$ نزدیک می‌شود، مقادیر تابع g به عدد ۱ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند، لذا: $\lim_{x\to+\infty} g(x)=1$

۱۵- در نقطهٔ A خط بر منحنی تابع مماس است، لذا $f'(4)$ همان شیب خط مماس است، مختصات نقطهٔ A هم که به شکل $(4,18)$ می‌باشد، لذا ابتدا معادلهٔ خط مماس را می‌نویسیم:

$$y-y_1=m(x-x_1)\xrightarrow[m=2]{A\left|\begin{matrix}4\to x_1\\18\to y_1\end{matrix}\right.} y-18=2(x-4)$$

$$\Rightarrow y=2x-8+18 \Rightarrow y=2x+10$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\xrightarrow{x=3} y=2(3)+10=16 \Rightarrow C\left|\begin{matrix}3\\16\end{matrix}\right.\\ \xrightarrow{x=5} y=2(5)+10=20 \Rightarrow B\left|\begin{matrix}5\\20\end{matrix}\right.\end{cases}$$

۱۶-

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$\Rightarrow f'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{-x^2+4x-3}{x-3}=$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{-(x^2-4x+3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{-\cancel{(x-3)}(x-1)}{\cancel{x-3}}=-2$$

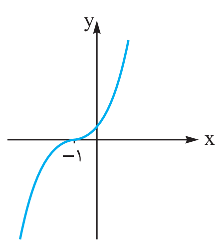
حالا به کمک $A(3,3)$ و $m=-2$ معادلهٔ خط را می‌نویسیم:

$$y-y_1=m(x-x_1) \Rightarrow y-3=-2(x-3)$$

آزمون شمارهٔ ۲ (نوبت اول)

۱- الف) چهارم

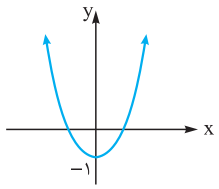
توضیح برای رسم نمودار $y=(x+1)^3$ باید نمودار $y=x^3$ را ۱ واحد به چپ حرکت دهیم.



$\Rightarrow$ نمودار فقط از ناحیهٔ چهارم نمی‌گذرد.

ب) اکیداً نزولی

توضیح برای رسم نمودار تابع $y=x^2-1$ باید نمودار $y=x^2$ را ۱ واحد به پایین حرکت دهیم.



$\Rightarrow$ تابع در بازهٔ $(-\infty,0]$ اکیداً نزولی است.

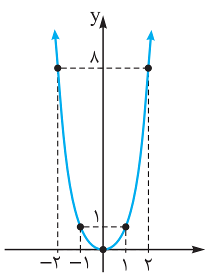
پ) $[-1,\frac{1}{2}]$ زیرا:

$$-2\le 2x\le 1 \xrightarrow{\div 2} -1\le x\le \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \text{دامنهٔ تابع مطلوب}=[-1,\frac{1}{2}]$$

۲-

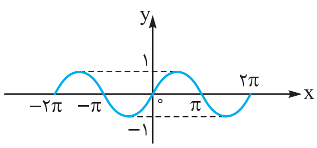
$$y=x^2\underset{\substack{\uparrow\\ \text{ریشهٔ داخل } x=0}}{|x|}=\begin{cases}x^3 & x\ge 0 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 0 & 1 & 2\\ \hline y & 0 & 1 & 8\end{array}\\ -x^3 & x<0 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 0 & -1 & -2\\ \hline y & 0 & 1 & 8\end{array}\end{cases}$$



$y=x^2|x|$

وسیع‌ترین بازه‌ای که تابع در آن نزولی است، بازهٔ $(-\infty,0]$ می‌باشد. لذا حداکثر مقدار a برابر صفر است.

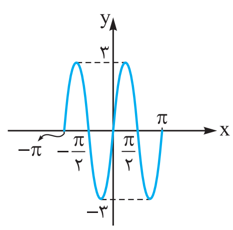
۳- ابتدا نمودار $y=\sin x$ را در بازهٔ $[-2\pi,2\pi]$ رسم می‌کنیم و سپس به کمک قوانین انتقال نمودارهای مطلوب را رسم می‌کنیم:



$y=\sin x$

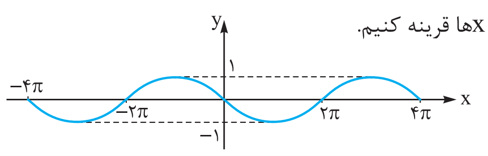
$D_f=[-2\pi,2\pi]$

طول نقاط را نصف و عرض نقاط را سه برابر می‌کنیم. $\longrightarrow$



$y=3\sin 2x$

برای رسم نمودار $y=-\sin\frac{x}{2}$ باید طول نقاط نمودار $y=\sin x$ را ۲ برابر کرده و نمودار را نسبت به محور xها قرینه کنیم.



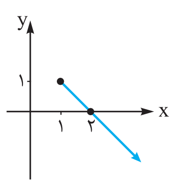
$y=-\sin\frac{x}{2}$

۴- چون $x\ge 1$ است؛ پس حاصل $(x-1)$ همواره نامنفی است و خودش از قدرمطلق خارج می‌شود؛ پس:

$$f(x)=-(x-1)+1=-x+1+1=-x+2$$

رسم نمودار $\longrightarrow$

x	1	2
y	1	0



با توجه به شکل، هر خط افقی که رسم کنیم، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند؛ پس f یک‌به‌یک و در نتیجه وارون‌پذیر است. حال ضابطهٔ f^{-1} را به دست می‌آوریم:

$$y=-x+2 \Rightarrow x=2-y \xrightarrow[y\to x]{x\to y} f^{-1}(x)=2-x$$

فصل ۱: تابع

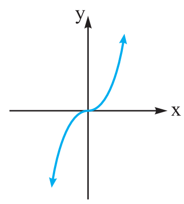
درس ۱: توابع چندجمله‌ای - توابع صعودی و نزولی

توابع چندجمله‌ای

هر تابع که ضابطه‌اش به شکل $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\cdots+kx+c$ باشد یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ n نام دارد.(n عدد صحیح نامنفی و $a\neq 0$ است.)

مثلاً تابع $f(x)=5x^4-8x+1$ یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ ۴ است.

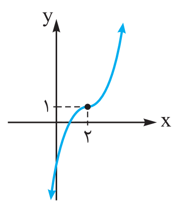
تابع درجه۳: تابع $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ یک تابع درجه۳ است $(a\neq 0)$. البته در کتاب درسی، تابع $y=x^3$ مورد توجه قرار گرفته که نمودار آن به طور تقریبی به شکل روبه‌رو است:



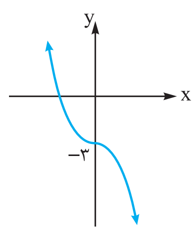
دامنه $=\mathbb{R}$, بُرد $=\mathbb{R}$

مثال: نمودار توابع $y_1=(x-2)^3+1$ و $y_2=-x^3-3$ را به کمک نمودار $y=x^3$ رسم کنید.

پاسخ: برای رسم نمودار y_1 باید نمودار x^3 را ۲ واحد به راست و سپس ۱ واحد به بالا انتقال دهیم که به نمودار روبه‌رو می‌رسیم:



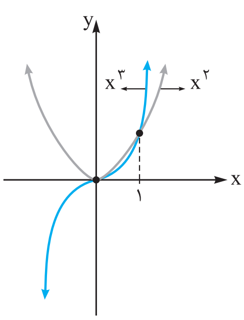
برای رسم نمودار y_2 ابتدا نمودار x^3 را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم سپس آن را ۳ واحد به پایین انتقال می‌دهیم:



مقایسهٔ نمودار $y=x^3$ و $y=x^2$

می‌دانید که اگر x هر عددی بین صفر و یک باشد، حاصل x^2 بزرگ‌تر از x^3 است، پس در بازهٔ $(0,1)$ نمودار x^2 بالاتر از x^3 است ولی در بقیهٔ xهای مثبت، نمودار x^3 بالاتر از x^2 است.

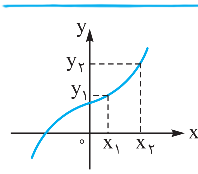
در xهای منفی هم که واضح است مقدار x^2 مثبت و مقدار x^3 منفی است، پس نمودار x^2 بالاتر است.



توابع یکنوا (صعودی یا نزولی)

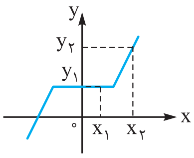
در تابع f اگر با افزایش مقادیر x مقادیر y هم مرتباً افزایش یابند، می‌گوییم f اکیداً صعودی است مانند تابع روبه‌رو:

$x_2>x_1\Rightarrow y_2>y_1$



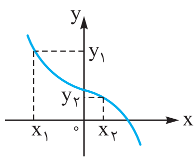
حالا اگر با افزایش مقادیر x مقادیر y زیاد شوند ولی بعضی نقاط نمودار، هم‌عرض باشند، می‌گوییم تابع f صعودی است مانند تابع روبه‌رو:

$x_2>x_1\Rightarrow y_2\geq y_1$



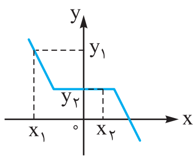
اکنون به کمک تعاریف قبل، می‌توانید تابع اکیداً نزولی و تابع نزولی را خودتان تعریف کنید.

$x_2>x_1\Rightarrow y_2<y_1$



شکل (۱)

$x_2>x_1\Rightarrow y_2\leq y_1$



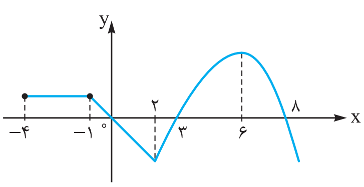
شکل (۲)

پس تابع مربوط به شکل (۱) اکیداً نزولی و تابع مربوط به شکل (۲) نزولی است.

نکته: تنها تابعی که هم صعودی و هم نزولی است، تابع ثابت $y=k$ می‌باشد. $(k\in\mathbb{R})$

یکنواکردن تابع با محدودکردن دامنه

ضمناً ممکن است تابعی در کل دامنهٔ خود، نه صعودی باشد نه نزولی ولی در بازه‌هایی از دامنه‌اش صعودی و در بازه‌هایی نزولی باشد؛ مانند شکل روبه‌رو: این تابع در بازهٔ $[-4,-1]$ ثابت (هم صعودی و هم نزولی)، در بازه‌های $[-1,2]$ و $[6,\infty)$ اکیداً نزولی و در بازهٔ $[2,6]$ اکیداً صعودی است. ولی در کل دامنهٔ خود $[-4,+\infty)$ نه صعودی است نه نزولی.



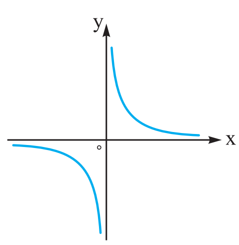
مثال: توابع زیر را رسم کرده و بازه‌هایی که در آن‌ها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است را مشخص کنید. (خرداد ۹۰)

الف) $y=\frac{1}{x}$ ب) $y=-\frac{1}{x}$

پ) $f(x)=\begin{cases}x+1 & x<-2\\ 1 & -2<x<1\\ -2x & x>1\end{cases}$

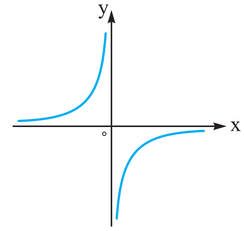
پاسخ:

الف) $y=\frac{1}{x}\xrightarrow[\text{حفظ باشیم}]{\text{نموداراین تابع را باید}}$



تابع در بازه‌های $(-\infty,0)$ و $(0,+\infty)$ اکیداً نزولی است ولی درکل $\mathbb{R}$، نه صعودی و نه نزولی است.

ب) $y=-\frac{۱}{x} \xrightarrow[\text{قرینه می‌کنیم}]{\text{نمودار } \frac{۱}{x} \text{ را نسبت به محور xها یا yها}}$

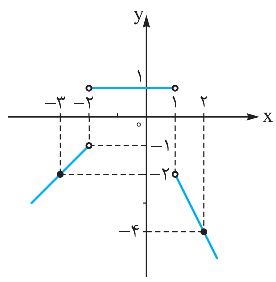


تابع در بازه‌های $(-\infty,۰)$ و $(۰,+\infty)$ اکیداً صعودی است ولی درکل $\mathbb{R}$، نه صعودی و نه نزولی است.

پ) $f(x)=\begin{cases} x+۱ & x<-۲ \Rightarrow \\ ۱ & -۲<x<۱ \\ -۲x & x>۱ \Rightarrow \end{cases}$

x	-۲	-۳
y	-۱	-۲

x	۱	۲
y	-۲	-۴



پس تابع f در بازهٔ $(-\infty,-۲)$ اکیداً صعودی، در بازهٔ $(-۲,۱)$ ثابت(هم صعودی، هم نزولی) و در بازهٔ $(۱,+\infty)$ اکیداً نزولی است.

درس ۲: ترکیب توابع

تعریف ترکیب توابع و به دست آوردن آن

اگر f و g دو تابع با دامنه‌های D_f و D_g باشند، ترکیب توابع f و g را با نمادهای fog و gof نمایش می‌دهیم و خواهیم نوشت:

$$y=(fog)(x)=f(g(x))\ ,\ D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$
$$y=(gof)(x)=g(f(x))\ ,\ D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$$

مثال **اگر $f=\{(۳,۴),(۷,۸),(۵,۲)\}$ و $g=\{(۱,۳),(-۲,۷),(۵,۹)\}$ باشد، تابع fog را تشکیل دهید.** (فرداد ۸۹)

پاسخ

$$۱ \xrightarrow{g} ۳ \xrightarrow{f} ۴$$
$$-۲ \xrightarrow{g} ۷ \xrightarrow{f} ۸ \quad \Rightarrow fog=\{(۱,۴),(-۲,۸)\}$$
$$۵ \xrightarrow{g} ۹ \xrightarrow{f} \times$$

دقت‌کنید ۹ در دامنهٔ f نیست!

ضمناً با توجه به جواب به دست آمده برای fog می‌توان گفت:

$(fog)(۱)=۴\ ,\ (fog)(-۲)=۸$

مثال **توابع $f(x)=\sqrt{۴-x^۲}$ و $g(x)=\frac{x+۲}{x-۱}$ مفروض‌اند. الف) دامنهٔ توابع f، g و gof را تعیین کنید. ب) ضابطهٔ gof را بیابید. پ) $(\frac{gof}{f-g})(۰)$ را محاسبه کنید.**

پاسخ الف) $f(x)=\sqrt{۴-x^۲} \xrightarrow{\text{تعیین دامنه}} ۴-x^۲\geq ۰$

$\Rightarrow x^۲\leq ۴ \Rightarrow -۲\leq x\leq ۲$

$g(x)=\frac{x+۲}{x-۱} \xrightarrow{\text{تعیین دامنه}} x-۱=۰ \Rightarrow x=۱ \Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{۱\}$

$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$

$=\{x\in[-۲,۲] \mid \underbrace{\sqrt{۴-x^۲}\in \mathbb{R}-\{۱\}}_{\sqrt{۴-x^۲}\neq ۱ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x\neq \pm\sqrt{۳}}\}=[-۲,۲]-\{\pm\sqrt{۳}\}$

ب) $(gof)(x)=g(f(x))=\frac{\sqrt{۴-x^۲}+۲}{\sqrt{۴-x^۲}-۱}$

پ) $(\frac{gof}{f-g})(۰)=\frac{(gof)(۰)}{f(۰)-g(۰)}=\frac{g(\overbrace{f(۰)}^{۲})}{۲-(-۲)}=\frac{۴}{۴}=۱$

به دست آوردن g(x) با داشتن f(x) و (fog)(x)

ابتدا کل تابع g را در تابع f به جای xها قرار می‌دهیم تا fog به دست آید. سپس جواب آن را با fog که در فرض به ما داده شده مساوی قرار می‌دهیم تا g به دست آید.

مثال **اگر $f(x)=\frac{x}{۱+x}$ و $(fog)(x)=\frac{۱}{x}$ باشد، ضابطهٔ تابع g(x) را بیابید.** (فرداد ۸۷)

پاسخ $(fog)(x)=f(g(x))=\frac{g(x)}{۱+g(x)} \xrightarrow{\text{طبق فرض}} \frac{g(x)}{۱+g(x)}=\frac{۱}{x}$

$\Rightarrow x\,g(x)=۱+g(x) \Rightarrow \underbrace{x\,g(x)-g(x)}_{\text{فاکتور از } g(x)}=۱$

$\Rightarrow g(x)(x-۱)=۱ \Rightarrow g(x)=\frac{۱}{x-۱}$

به دست آوردن f(x) با داشتن g(x) و (fog)(x)

در این صورت فرض می‌کنیم که $g(x)=t$، سپس از این رابطه x را برحسب t پیدا کرده و در رابطهٔ fog که به ما داده شده قرار می‌دهیم. درنهایت t را به x تبدیل می‌کنیم.

مثال **اگر $g(x)=۲x-۶$ و $(fog)(x)=۳x^۲-۷x$، آن‌گاه تابع f(x) را به دست آورید.**

پاسخ $(fog)(x)=f(g(x)) \Rightarrow f(\underbrace{۲x-۶}_{t})=۳x^۲-۷x$

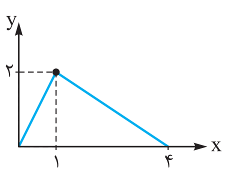
$۲x-۶=t \Rightarrow ۲x=t+۶ \Rightarrow x=\frac{t+۶}{۲}$

$\xrightarrow{\text{در تابع بالا}} f(t)=۳(\frac{t+۶}{۲})^۲-۷(\frac{t+۶}{۲})$

$\xrightarrow{\text{تبدیل t به x}} f(x)=۳(\frac{x+۶}{۲})^۲-۷(\frac{x+۶}{۲})$

انتقال و تبدیل نمودارها

نمودار تابع f را به صورت مقابل فرض کنید:

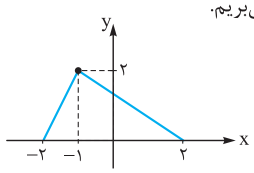


y = f(x)

۱) برای رسم نمودار $y=f(x+k)$:

- اگر $k>۰$ ← نمودار را k واحد به سمت چپ می‌بریم.
- اگر $k<۰$ ← نمودار را k واحد به سمت راست می‌بریم.

مثلاً برای رسم تابع $y=f(x+۲)$، نمودار f(x) را ۲ واحد به چپ منتقل می‌کنیم:

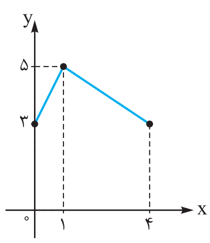


y = f(x + ۲)

۲) برای رسم نمودار $y=f(x)+k$:

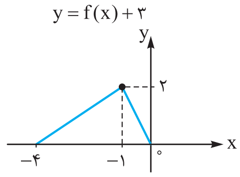
- اگر $k>۰$ ← نمودار را k واحد به سمت بالا می‌بریم.
- اگر $k<۰$ ← نمودار را k واحد به سمت پایین می‌بریم.

مثلاً برای رسم $y=f(x)+۳$ با توجه به نمودار اولیهٔ f کافی است نمودار f را ۳ واحد به بالا حرکت دهیم:



y = f(x) + ۳

۳) برای رسم $y=f(-x)$ کافی است نمودار f را نسبت به محور yها قرینه کنیم (انعکاس دهیم):



y = f(−x)