فصل اول : ترسیم‌های هندسی و استدلال

درس اول : ترسیم‌های هندسی

برای ترسیم ، تنها باید از خط‌کش و پرگار استفاده کنیم.

تعریف نیمساز : به نیم خطی که مبدأ آن رأس زاویه باشد و زاویه را به دو زاویه‌ی مساوی تقسیم کند، نیمساز گویند.

خاصیت نیمساز یک زاویه : اگر نقطه‌ای روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد ، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است. اگر نقطه‌ای به فاصله‌ای یکسان از دو ضلع یک زاویه باشد ، آن نقطه روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

تعریف عمود منصف پاره‌خط : خطی است که بر آن پاره‌خط عمود شده و آن را به دو قسمت مساوی تقسیم کند و می‌توان گفت عمود منصف پاره‌خط ، خطی است که از وسط پاره‌خط گذشته و بر آن عمود می‌شود.

خاصیت عمود منصف پاره‌خط : اگر نقطه‌ای روی عمود منصف یک پاره‌خط قرار داشته باشد، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است. اگر نقطه‌ای از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد ، روی عمود منصف آن پاره‌خط واقع است.

درس دوم : استدلال

استدلال استقرایی نوعی استدلال است که از مشاهدات و بررسی موضوعی در چند حالت ، نتیجه‌ی کلی در آن موضوع گرفته شود . به طور مثال اگر فردی با مشاهده این‌که پنج نفر از افراد یک کلاس به رنگ سبز علاقه دارند، نتیجه‌گیری می‌کند که همه‌ی افراد آن کلاس به رنگ سبز علاقه دارند ، این فرد از استدلال استقرایی استفاده کرده است.

استدلال استنتاجی نوعی استدلال است و براساس نتیجه‌گیری منطقی بر پایه‌ی واقعیت‌هایی است که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم. نتایجی که از استدلال استنتاجی به دست می‌آید، **« قضیه »** نامیده می‌شود. هر قضیه شامل **فرض** و **حکم** می‌باشد.

فرض موضوعاتی است که قبلاً به اثبات رسیده و حقایقی است که پذیرفته‌ایم . حکم ، موضوعی است که می‌خواهیم به درستی آن برسیم. چگونگی رسیدن به درستی حکم را **استدلال** گوییم. اگر در یک قضیه جای فرض و حکم را عوض کنیم به آن‌چه حاصل می‌شود **« عکس قضیه »** گفته می‌شود. عکس یک قضیه ممکن است درست یا نادرست باشد.

گزاره : جمله‌ای خبری است که دقیقاً درست یا دقیقاً نادرست باشد.

در ریاضیات و هندسه ، بسیاری از قضیه‌ها به صورت جمله‌های شرطی بیان می‌شوند. این گونه جمله‌های شرطی را که ارزش درست دارند **قضیه‌ی شرطی** می‌نامند ، که در آن‌ها از کلمات **اگر ... آن‌گاه** استفاده شده است. اگر جای فرض و حکم در یک قضیه شرطی عوض شود و عبارت به دست آمده خود یک قضیه‌ی شرطی باشد، در این صورت این دو قضیه را **قضیه‌ی دو شرطی** می‌نامیم.

فرق یک جمله‌ی شرطی و یک قضیه‌ی شرطی در این است که جمله یا گزاره‌ی شرطی می‌تواند درست یا نادرست باشد، اما قضیه‌ی شرطی حتماً می‌بایست درست باشد.

اگر در یک جمله خبری درست از کلمات « اگر و تنها اگر » یا « اگر و فقط اگر » و یا « برعکس » استفاده شد آن جمله‌ی خبری درست یک **قضیه‌ی دو شرطی** است.

در ذیل بعضی از قضایا را به صورت یک گزاره بیان می‌کنیم :

مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰° است.

مجموع زاویه‌های داخلی هر چهار ضلعی محدب ۳۶۰° است.

سه عمود منصف اضلاع هر مثلث همرس اند.

سه ارتفاع هر مثلث همرس‌اند. در مثلث قائم‌الزاویه نقطه‌ی همرسی روی رأس زاویه‌ی قائمه است. نقطه‌ی همرسی ارتفاع‌های مثلثی که یک زاویه‌ی منفرجه دارد، خارج مثلث است.

سه نیمساز زوایای داخلی هر مثلث همرس‌اند.
اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند ، زاویه‌ی روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر ، بزرگ‌تر است از زاویه‌ی روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر.
اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند ، ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی بزرگ‌تر ، بزرگ‌تر است از ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی کوچک‌تر.
در هر مثلث متساوی‌الساقین زوایای روبه‌رو به اضلاع مساوی با هم برابرند.
اندازه‌ی هر زاویه‌ی خارجی مثلث از هر زاویه‌ی داخلی غیر مجاورش بزرگ‌تر است.
نقیض یک گزاره : اگر ارزش یک گزاره درست باشد و یا نادرست، ارزش نقیض یک گزاره دقیقاً مخالف با ارزش خود گزاره می‌باشد.
معمولاً می‌توانیم در گزاره‌هایی که از کلمه‌ی « همه» یا « هر» یا «تمام » استفاده شده است، برای نقیض آن‌ها از کلمات نظیر « بعضی» و « وجود دارند » استفاده کنیم و جمله را نقض کنیم. به طور مثال نقیض گزاره‌ی « مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰° است » چنین است « مجموع زوایای داخلی بعضی از مثلث‌ها ۱۸۰° نیست » یا « مثلثی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی آن ۱۸۰° نیست ».
در نوعی از استدلال فرض می‌کنیم حکم نادرست باشد و به یک تناقض و یا یک موضوع غیر ممکن برسیم. در این صورت حکم دقیقاً درست می‌باشد. به چنین استدلالی « برهان خلف » می‌گوییم.

فصل دوم : قضیه تالس ، تشابه و کاربردهای آن

درس اول : نسبت و تشابه در هندسه

نسبت بین دو عدد a و b عبارت است از کسر $\frac{a}{b}$ به طوری که $b \neq ۰$
دو نسبت مساوی را تناسب گویند.

در تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ حاصل‌ضرب دو جمله‌ی طرفین برابر با حاصل‌ضرب دو جمله‌ی وسطین است یعنی :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a.d = b.c$$

خواص تناسب

الف) در تناسب می‌توان جای جملات کناری (طرفین) را با هم و یا جای جملات وسط (وسطین) را با هم عوض نمود. در این صورت تناسب جدیدی به دست می‌آید :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a} \ , \ \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

ب) در تناسب می‌توانیم نسبت‌ها را معکوس نماییم در این صورت تناسب جدیدی حاصل می‌شود :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

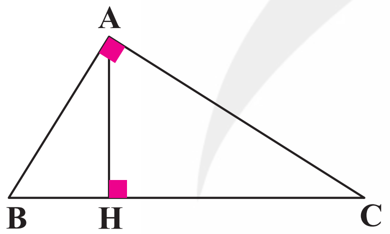
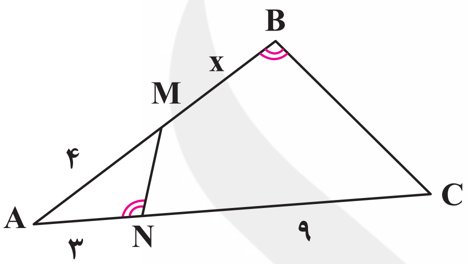
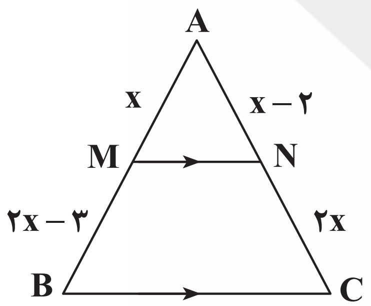
پ) در تناسب می‌توانیم ترکیب نسبت در صورت یا مخرج و یا تفضیل نسبت در صورت و مخرج کنیم :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \quad \text{یا} \quad \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

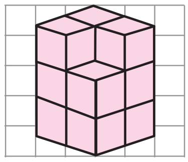
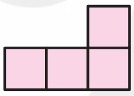
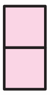
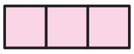
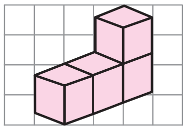
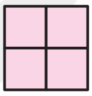
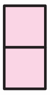
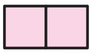
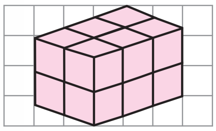
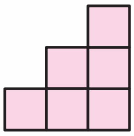
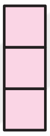
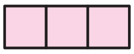
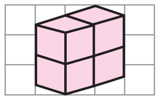
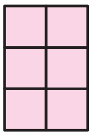
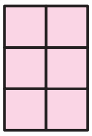
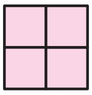
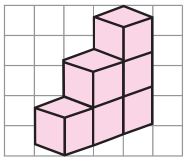
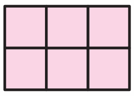
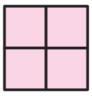
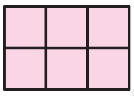
$$\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} \quad \text{یا} \quad \frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$$

ت)

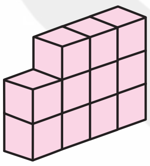
$$\frac{a_۱}{b_۱} = \frac{a_۲}{b_۲} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_۱ + a_۲ + \dots + a_n}{b_۱ + b_۲ + \dots + b_n}$$

۱- زاویه‌ای به اندازه ۱۲۰ درجه رسم کنید و آن را به کمک خط‌کش و پرگار به ۴ قسمت مساوی تقسیم کنید.	۱
۲- مربعی رسم کنید که طول هر قطر آن ۵ cm باشد.	۱
۳- مساحت یک شش ضلعی منتظم را به دست آورید که اندازه یک ضلع ۱۰ cm باشد.	۱
۴- قضیه: (اثبات کنید) اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، زاویه روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از زاویه روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر.	۱/۵
۵- ثابت کنید: در ذوزنقه متساوی‌الساقین قطرها با هم برابر هستند.	۱/۵
۶- ثابت کنید: در متوازی‌الاضلاع قطرها همدیگر را نصف می‌کنند.	۱/۵
۷- تعداد قطرهای یک ۸ ضلعی منتظم محدب را به دست آورید.	۱/۵
۸- ثابت کنید : در هر مثلث قائم‌الزاویه ارتفاع، وارد بر وتر واسطه هندسی دو پاره‌خطی است که ارتفاع روی وتر جدا می‌کند: $AH^۲ = BH.HC$ 	۱/۵
۹- با توجه به شکل مقدار x را بیابید. $(\hat{B} = \hat{N})$ 	۱/۵
۱۰- با توجه به شکل زیر MN موازی BC است. مقدار x را پیدا کنید. 	۱
۱۱- شرط عمود بودن خط بر صفحه در فضا را بیان کنید.	۱
۱۲- به چند طریق می‌توان یک صفحه را در فضا مشخص کرد؟	۱
۱۳- اگر نسبت‌های مساحت‌های دو مثلث متشابه $\frac{۸۱}{۱۲۱}$ باشد. نسبت ارتفاع‌های نظیر را به دست آورید.	۱

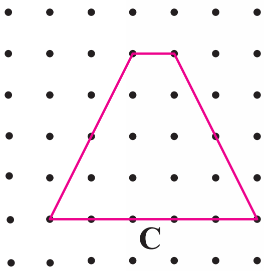
۱۴- نمای روبه‌رو، چپ و بالای مکعب‌های سمت راست در ستون سمت چپ رسم شده است. هر شکل را به نماهای مربوط به آن وصل کنید: ۱/۲۵

		نمای روبه‌رو	نمای چپ	نمای بالا
الف) 	۱)			
ب) 	۲)			
پ) 	۳)			
ت) 	۴)			
ث) 	۵)			

۱۵- سعی کنید از جهت‌های مختلف به شکل نگاه کرده و آن نما را رسم کنید: ۰/۷۵

نمای روبه‌رو	نمای بالا	نمای چپ	
			

۱۶- مساحت شکل روبه‌رو را به دست آورید: ۱



۱۷- جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید: ۱

الف) یک نیم‌دایره حول قطرش دوران پیدا می‌کند، شکل حاصل را .... می‌نامند.

ب) یک ربع دایره حول شعاع آن دوران پیدا کند، شکل حاصل را .... می‌نامند.

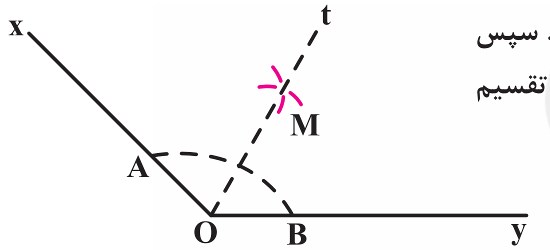
پ) اگر یک مستطیل را حول طول یا عرض آن دوران دهیم، شکل حاصل را .... می‌نامند.

ت) اگر یک مثلث قائم‌الزاویه را حول یک ضلع دوران دهیم ، شکل حاصل یک .... خواهد بود.

جمع ۲۰

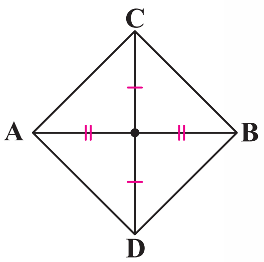
۱- ابتدا نیم‌ساز زاویه xoy را رسم می‌کنیم تا دو زاویه 60° به دست آید. سپس مجدداً نیم‌ساز زوایای 60° را رسم می‌کنیم تا زاویه به چهار قسمت مساوی تقسیم گردد.

برای رسم نیم‌ساز زاویه xoy چنین عمل می‌کنیم.



پرگار را به اندازه دلخواه بازکرده به مرکز o کمانی می‌زنیم تا اضلاع ox و oy را در A و B قطع کند. سپس پرگار را بیشتر از نصف AB بازکرده از A و B کمان‌هایی می‌زنیم تا یکدیگر را در M قطع نمایند oM نیم‌ساز زاویه xoy می‌باشد.
همین عمل را برای زوایای xot و toy انجام می‌دهیم. بدین ترتیب زاویه xoy به چهار قسمت مساوی تقسیم می‌شود.

۲- پاره‌خط $AB = 5\,cm$ را رسم می‌کنیم. از وسط AB پاره‌خط $CD = 5$ را چنان رسم می‌کنیم که CD و AB بر هم عمود باشند و دو پاره‌خط یکدیگر را نصف کنند بدین ترتیب چهار ضلعی ACBD مربع بوده که قطر آن ۵ cm می‌باشد.



۳- $\text{مساحت شش ضلعی منتظم به ضلع } a = \dfrac{6a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

$a = 10 \text{ شش ضلعی منتظم } S = \dfrac{3(10)^2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{300\sqrt{3}}{2} = 150\sqrt{3}\,cm^2$

۴-

فرض	$AB > AC$
حکم	$\hat{C} > \hat{B}$

استدلال: چون $AB > AC$ پس می‌توانیم نقطه D را روی AB چنان انتخاب کنیم که $AC = AD$.

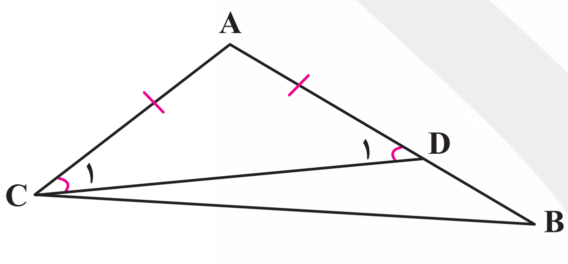
$AC = AD \Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{D}_1 \quad (1)$

از طرفی زاویه D_1 یک زاویه خارجی برای مثلث BCD می‌باشد پس:

$\hat{D}_1 > \hat{B} \quad (2)$

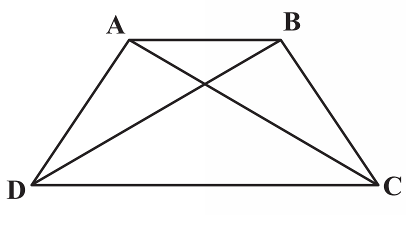
$(1), (2) \Rightarrow \hat{C}_1 > \hat{B}$

و چون $\hat{C}_1$ جزیی از زاویه C می‌باشد پس: $\hat{C} > \hat{B}$



فرض	ذوزنقه ABCD $AD = BC$
حکم	$AC = BD$

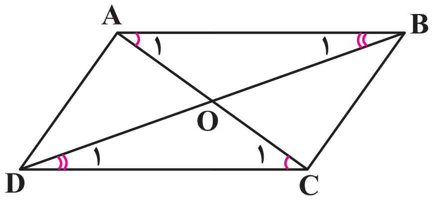
۵- اثبات: دو مثلث ACD و BCD را در نظر می‌گیریم داریم:



$\begin{cases} AD = BC & \text{زیرا در ذوزنقه متساوی‌الساقین} \\ A\hat{D}C = B\hat{C}D & \text{زوایای مجاور قاعده با هم برابرند.} \\ DC = DC & \text{مشترک} \end{cases} \xrightarrow{\text{(ض ز ض)}} \overset{\Delta}{ADC} \cong \overset{\Delta}{BCD}$

$\Downarrow$

$AC=BD$



۶- ABCD متوازی‌الاضلاع است : فرض

$\begin{cases} OA = OC \\ OB = OD \end{cases}$: حکم

اثبات : دو مثلث OAB و OCD را در نظر می‌گیریم داریم:

$\begin{cases} \hat{A}_۱ = \hat{C}_۱ & \text{زیرا } AB \parallel CD \text{ و } AC \text{ مورب است.} \\ AB = CD & \text{دو ضلع روبه‌روی متوازی‌الاضلاع} \\ \hat{B}_۱ = \hat{D}_۱ & \text{زیرا } AB \parallel CD \text{ و } BD \text{ مورب است.} \end{cases} \xrightarrow{(ز\ ض\ ز)} O\overset{\Delta}{A}B \cong O\overset{\Delta}{C}D$

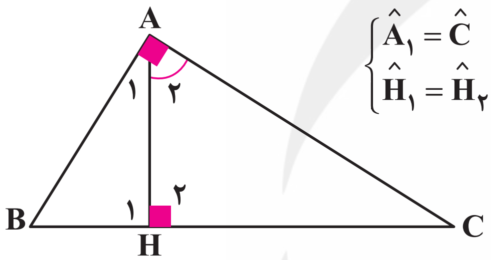
$\Downarrow$

$OA = OC$

$OB = OD$

۷- $\dfrac{n(n-۳)}{۲} =$ تعداد قطرهای n ضلعی محدب

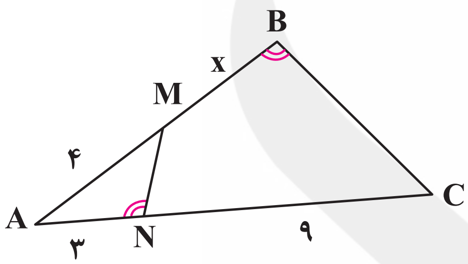
$\dfrac{۸(۸-۳)}{۲} = \dfrac{۸(۵)}{۲} = ۲۰ =$ تعداد قطرهای ۸ ضلعی منتظم



۸- $A\overset{\Delta}{B}H \sim A\overset{\Delta}{H}C \xrightarrow[\text{دو زاویه}]{\text{بنابر تساوی}}$ $\begin{cases} \hat{A}_۱ = \hat{C} \\ \hat{H}_۱ = \hat{H}_۲ = ۹۰^\circ \end{cases}$ زیرا هر دو زاویه متمم زاویه $A_۲$ هستند.

$\Rightarrow \dfrac{AH}{HC} = \dfrac{BH}{AH} \xrightarrow[\text{وسطین کردن}]{\text{از طرفین}} AH.AH = BH.HC$

$AH^۲ = BH.HC$



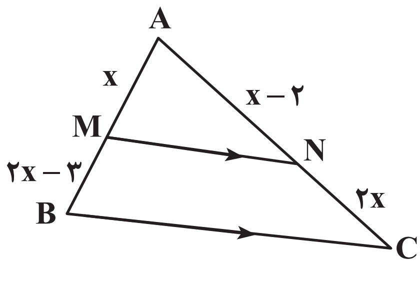
۹- بنابر تساوی دو زاویه $\begin{cases} \hat{B} = \hat{N} \\ \hat{A} = \hat{A} \end{cases} \Rightarrow A\overset{\Delta}{M}N \sim A\overset{\Delta}{B}C$

$\dfrac{AN}{AB} = \dfrac{AM}{AC} \Rightarrow \dfrac{۳}{۴+x} = \dfrac{۴}{۱۲} \rightarrow ۴(۴+x) = ۳۶$

$۱۶ + ۴x = ۳۶$

$۴x = ۲۰$

$x = ۵$



۱۰- $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{AN}{NC}$

$\dfrac{x}{۲x-۳} = \dfrac{x-۲}{۲x}$

$۲x^۲ = ۲x^۲ - ۴x - ۳x + ۶$

$۷x = ۶ \rightarrow x = \dfrac{۶}{۷}$

۱۱- اگر خطی بر دو خط متقاطع از صفحه‌ای عمود باشد بر تمام خطوط آن صفحه و در نتیجه بر آن صفحه عمود است.

۱۲- به صورت‌های زیر می‌توان یک صفحه را در فضا مشخص کرد:

الف) به وسیله سه نقطه که روی یک خط راست نباشند.

ب) به وسیله یک خط و یک نقطه خارج آن

پ) به وسیله دو خط متوازی

ت) به وسیله دو خط متقاطع

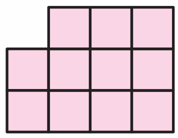
۱۳- ^{۲}(نسبت ارتفاع‌ها) = ^{۲}(نسبت تشابه) = نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه

$$\frac{s}{s'} = (\frac{h_a}{h'_a})^{۲} = \frac{۸۱}{۱۲۱} \rightarrow \frac{h_a}{h'_a} = \frac{۹}{۱۱}$$

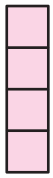
۱۴-
ب → (۱
ت → (۲
ث → (۳
الف → (۴
پ → (۵

۱۵-

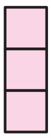
نمای روبه‌رو



نمای بالا



نمای چپ



۱۶- $i + ۱ - \frac{b}{۲}$ = نقاط درونی چندضلعی + ۱ − $\frac{\text{نقاط مرزی}}{۲}$ = مساحت چهارضلعی

چندضلعی $S = \frac{۱۰}{۲} - ۱ + ۸ = ۵ - ۱ + ۸ = ۱۲$

۱۷- الف) کره   ب) نیم‌کره   پ) استوانه   ت) مخروط

برای مطالعه بیشتر

خیام ریاضی دان بزرگ ایرانی (زادهٔ ۲۸ اردیبهشت ۴۲۷ در نیشابور – درگذشتهٔ ۱۲ آذر ۵۱۰ در نیشابور)

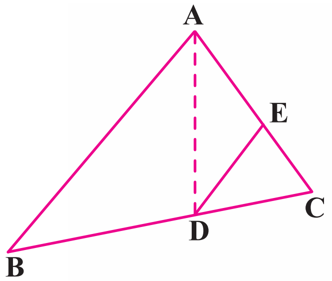
عُمَر خَیّام نیشابوری (نام کامل: غیاث‌الدین ابوالفتح عُمَر بن ابراهیم خَیّام نیشابوری) فیلسوف، ریاضی‌دان، ستاره‌شناس و رباعی‌سرای ایرانی در دورهٔ سلجوقی است. گرچه پایگاه علمی خیام برتر از جایگاه ادبی اوست و لقبش «حجّة‌الحق» بوده‌است،ولی آوازهٔ وی بیشتر به‌واسطهٔ نگارش رباعیاتش است که شهرت جهانی دارد و کمتر کسی است که وی را به عنوان یک ریاضی دان بشناسد. او نخستین کسی بود که نشان داد معادلهٔ درجهٔ سوم ممکن است دارای بیش از یک جواب باشد و یا این که اصلاً جوابی نداشته باشند. به گفته وی : «آنچه که در هر حالت مفروض اتفاق می‌افتد بستگی به این دارد که آن مقاطع مخروطی که وی از آن‌ها استفاده می‌کند در هیچ نقطه یکدیگر را قطع نکنند، یا در یک یا دو نقطه یکدیگر را قطع کنند.».خیام نخستین کسی بود که گفت معادلهٔ درجهٔ سوم را نمی‌توان عموماً با تبدیل به معادله‌های درجهٔ دوم حل کرد، اما می‌توان با بکار بردن مقاطع مخروطی به حل آن دست یافت. همچنین در مورد جبر، کار خیام در ابداع نظریهٔ هندسی معادلات درجهٔ سوم موفق‌ترین کاری است که دانشمندی مسلمان انجام داده‌است.

۱- در مثلث ABC ، AD نیمساز زاویه A و DE || AB.

مثلث ADE چه نوع مثلثی می‌باشد :

۱) قائم‌الزاویه ۲) متساوی‌الساقین

۳) متساوی‌الاضلاع ۴) غیر مشخص



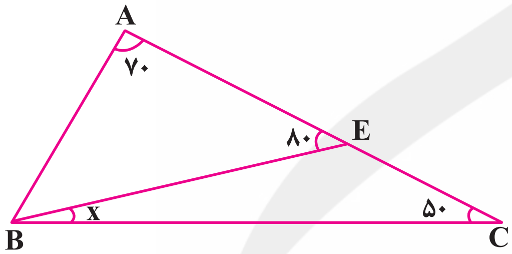
۲- دو قطر یک چهارضلعی متساویند. نوع این چهارضلعی همواره کدام است :

۱) مستطیل ۲) ذوزنقه یا مربع ۳) ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین ۴) غیر مشخص

۳- در شکل روبه‌رو مقدار x چقدر است :

۱) ۲۵ ۲) ۳۵

۳) ۳۰ ۴) ۴۰



۴- محیط مستطیل ABCD برابر با ۳۰ و قطر آن برابر با ۱۳ است. مساحت مستطیل چیست :

۱) ۲۰ ۲) ۲۸ ۳) ۳۶ ۴) ۴۲

۵- وتر یک مثلث قائم‌الزاویه برابر ۱۵ و محیط آن ۳۴ سانتی‌متر است ، مساحت این مثلث چقدر است :

۱) ۳۴ ۲) ۹۶ ۳) ۲۴ ۴) ۱۹۶

۶- مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۲ واحد چقدر است :

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$

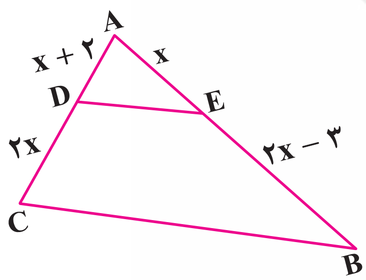
۷- اگر $\frac{۱}{۲} = \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$ ، حاصل $\frac{۱ + ۲a - ۵c}{۲ + ۲b - ۵d}$ چیست :

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) ۱

۸- در شکل روبه‌رو اگر DE || BC اندازه‌ی AB چیست :

۱) ۱۰ ۲) ۲۰

۳) ۱۵ ۴) ۳۰



۹- در شکل روبه‌رو ، اگر EC || MN و EN || BC و AM = ۵ و ME = ۴

اندازه‌ی BE چقدر است :

۱) ۶/۵ ۲) ۷/۵

۳) ۸/۲ ۴) ۷/۲