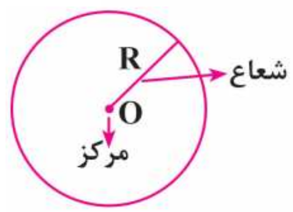
باسمه تعالی

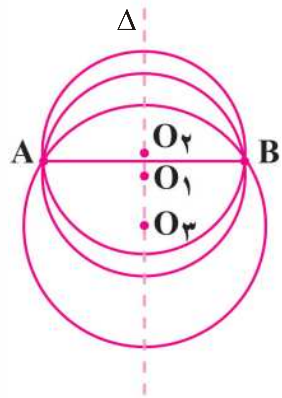
خلاصه درس هندسه (۲) پایه یازدهم

فصل اول — دایره

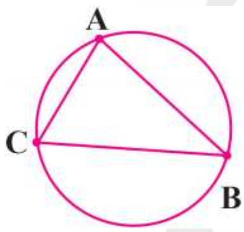
در زیر نکاتی را راجع‌به دایره یادآوری می‌کنیم :



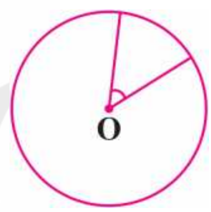
۱- **تعریف دایره :** دایره مجموعه تمام نقاط یک صفحه است که از یک نقطه ثابت در همان صفحه به فاصله ثابت باشد. آن نقطه ثابت را مرکز دایره و آن فاصله ثابت را **شعاع دایره** گویند.



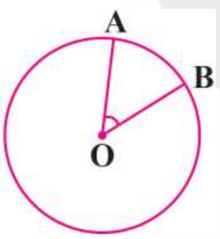
۲- از هر دو نقطه متمایز بی شمار دایره می‌گذرد. طبق شکل روبه‌رو از دو نقطه متمایز A و B دایره‌های بی شماری می‌گذرد که مرکز همه این دایره‌ها روی عمود منصف پاره‌خط AB یعنی خط Δ قرار دارد.



۳- از سه نقطه دو به دو متمایز که روی یک خط نیستند فقط و فقط **یک دایره** می‌گذرد.

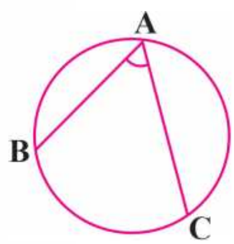


۴- **تعریف زاویه مرکزی :** زاویه‌ای را که رأس آن بر مرکز دایره است ، **زاویه مرکزی** گویند.

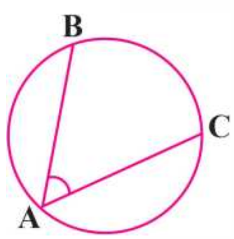


۵- اندازه هر زاویه مرکزی برابر با اندازه کمان روبه‌روی آن می‌باشد .

$$\widehat{O} = \overset{\frown}{AB}$$

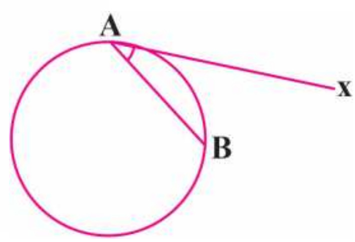


۶- **تعریف زاویه محاطی :** زاویه‌ای است که رأس آن روی محیط دایره بوده و اضلاع آن وترهای دایره باشند.

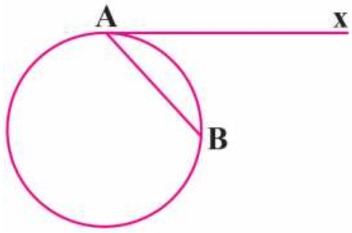


۷- اندازه هر زاویه محاطی برابر با نصف اندازه کمان روبه‌روی آن زاویه است.

$$\angle A = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$$



۸- **تعریف زاویه ظلی :** زاویه‌ای است که رأس آن روی محیط دایره بوده و یک ضلع آن وتری از دایره ، ضلع دیگر آن مماس بر دایره باشد.

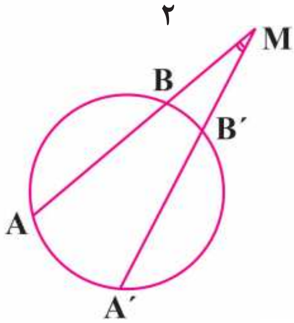


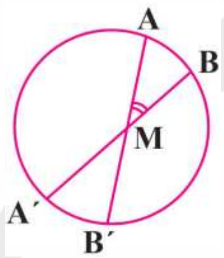
۹- اندازه هر زاویه ظلی برابر با نصف اندازه کمان روبه‌روی آن زاویه می‌باشد. $\angle A = \frac{۱}{۲}\,\overset{\frown}{AB}$

۱۰- از برخورد دو وتر در درون دایره و یا امتداد دو وتر در بیرون یک دایره زوایایی به وجود می‌آیند که اندازه آن‌ها چنین است :

$$\hat{M} = \frac{\left|\overset{\frown}{AA'} - \overset{\frown}{BB'}\right|}{۲}$$

$$\angle M = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{A'B'}}{۲}$$

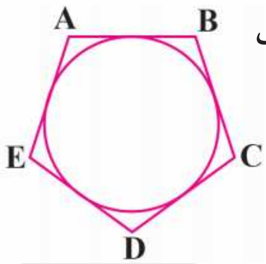


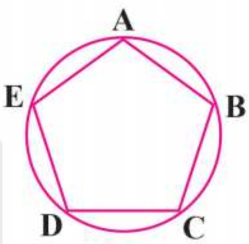


۱۱- تعریف n ضلعی محاطی : یک n ضلعی که تمام رأس‌های آن روی محیط یک دایره قرار می‌گیرند.

۱۲- تعریف n ضلعی محیطی : یک n ضلعی که همه اضلاع آن بر یک دایره مماس می‌باشند.

پنج ضلعی محیطی



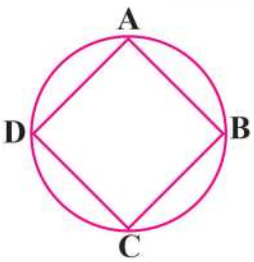


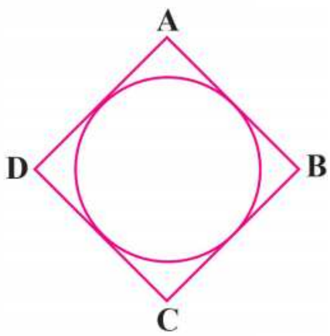
پنج ضلعی محاطی

۱۳- زوایای روبه‌روی هر چهار ضلعی محاطی مکمل یکدیگرند. و برعکس هرگاه هر دو زاویه روبه‌روی یک چهار ضلعی مکمل هم باشند آن چهار ضلعی محاطی است.

$$\hat{A} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ$$

$$\hat{B} + \hat{D} = ۱۸۰^\circ$$



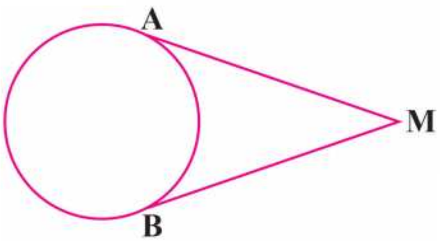


۱۴- مجموع اندازه اضلاع روبه‌روی هر چهار ضلعی محیطی با مجموع اندازه دو ضلع روبه‌روی دیگر برابرند و برعکس هرگاه در یک چهارضلعی مجموع اندازه دو ضلع روبه‌رو با مجموع اندازه دو ضلع روبه‌روی دیگر برابر باشند آن چهار ضلعی محیطی می‌باشد.

$$AB + CD = AD + BC$$

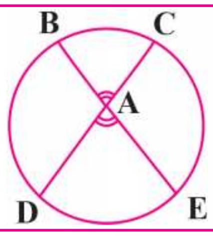
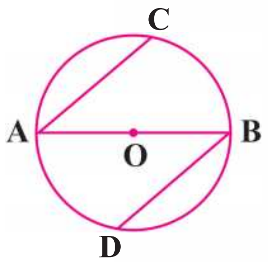
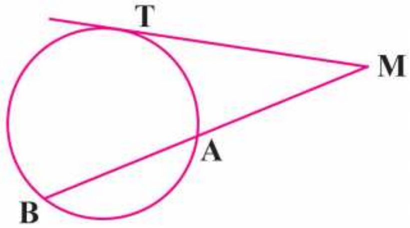
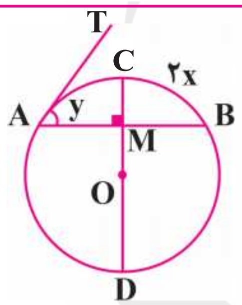
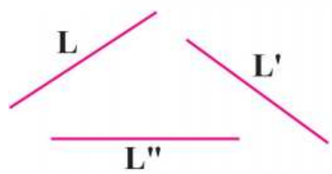
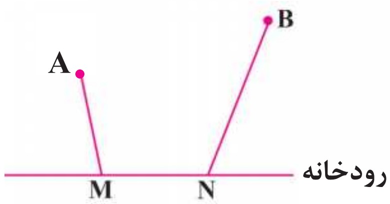
۱۵- هرگاه از نقطه M خارج یک دایره دو مماس بر دایره رسم کنیم اندازه آن دو مماس با هم برابرند.

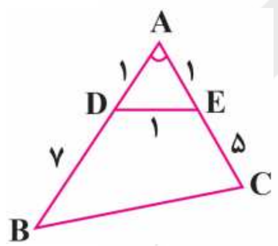
$$MA = MB$$



باسمه تعالی

سؤالات امتحان کلاس‌های یازدهم سؤالات امتحان پیشنهادی پایان سال	درس : **هندسه (۲)** رشته : ریاضی و فیزیک	تاریخ امتحان : خرداد ماه مدت امتحان : ۱۰۰ دقیقه	آزمون شماره **۷**

۱- مفاهیم روبه‌رو را تعریف کنید : الف) وتر دایره ب) زاویه مرکزی	۱
۲- رأس زاویه $D\hat{A}E$ مانند شکل روبه‌رو در درون دایره می‌باشد و اضلاع آن دایره را قطع کرده است ثابت کنید : $D\hat{A}E=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{DE})$ 	۲
۳- در شکل روبه‌رو AB قطری از دایره است و وترهای AC و BD موازی‌اند. ثابت کنید : $AC=BD$. 	۲
۴- از نقطه M خارج یک دایره یک مماس و یک قاطع بر دایره رسم کرده‌ایم. ثابت کنید : $MT^{۲}=MA\cdot MB$. 	۲
۵- در شکل روبه‌رو قطر CD بر وتر AB عمود و AT بر دایره مماس است . اگر $\overset{\frown}{CB}=۲x^\circ$ و $\overset{\frown}{AD}=(۳x+۱۰)^\circ$ و $T\hat{A}B=y^\circ$ آن‌گاه x و y را محاسبه کنید . 	۲
۶- یک ذوزنقه هم محیطی است هم محاطی . ثابت کنید مساحت این ذوزنقه برابر است با میانگین حسابی دو قاعده آن ضرب در میانگین هندسی آن‌ها.	۱
۷- سه خط دو به دو ناموازی L و L' و L'' در صفحه مفروض‌اند . پاره‌خطی به طول ۵ سانتی‌متر رسم کنید که دو سر آن روی L و L' و موازی L'' باشد. 	۱
۸- دو شهر A و B مطابق شکل در یک طرف رودخانه‌ای واقعند. می‌خواهیم جاده‌ای از A به B بسازیم به طوری که ۴ کیلومتر از این جاده در ساحل رودخانه ساخته شود . این ۴ کیلومتر را در چه قسمتی از رودخانه بسازیم تا مسیر $AMNB$ کوتاه‌ترین مسیر ممکن باشد؟ 	۲

۹- برای تبدیلات زیر آیا طول پاره‌خط به اندازه زاویه ، شیب خط ، جهت شکل و مساحت شکل تغییر می‌کند : الف) بازتاب ب) انتقال	۱
۱۰- قضیه کسینوس‌ها را در مثلث ABC در حالتی که $\hat{A} > 90^\circ$ است ، ثابت کنید .	۲
۱۱- در مثلث ABC میانه AM را رسم کرده‌ایم $\left(MB = MC = \frac{a}{2}\right)$. ثابت کنید : (قضیه میانه‌ها) : $b^2 + c^2 = 2AM^2 + \frac{a^2}{2}$	۲
۱۲- دستور محاسبه مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a را به کمک دستور هرون به دست آورید .	۱
۱۳- در شکل روبه‌رو ، اولاً : طول BC را به دست آورید . ثانیاً : مساحت چهارضلعی $DECB$ را بیابید . 	۱

برای مطالعه بیشتر

هندسه فراکتال یا برخال

فراکتال (Fractal) ساختاری هندسی است که با بزرگ کردن هر بخش از این ساختار به نسبت معین، همان ساختار نخستین به دست آید. به گفتاری دیگر برخال ساختاری است که هر بخش از آن با کل‌اش همانند است. برخال از دور و نزدیک یکسان دیده می‌شود. به این ویژگی خودهمانندی گویند. نکته جالب در برخال‌ها این است که بعد صحیح ندارند، یعنی اگر بعد خط را یک، بعد صفحه را دو و بعد فضا را سه در نظر بگیریم ،بعد یک برخال می‌تواند ۱/۲ باشد که بدین ترتیب از خط پیچیده‌تر و از صفحه سادتر است. بعد برخال‌ها از یک سری فرمول‌های لگاریتمی بدست می‌آیند. تکرار یکی از راه‌های ایجاد فرم در معماری است اما در فرکتال این فرم بایستی دارای مشخصات هندسی که در قسمت هندسه فرکتال مطرح شد را دارا باشد. به طور کلی این تکرار می‌تواند از کنار هم قرار گرفتن یک شیء بدست آید یا اینکه یک موضوع نسبت به موضوع دیگر و به طور متوالی کوچک شود. یکی از اصول طراحی در این معماری هندسه فراکتال است.

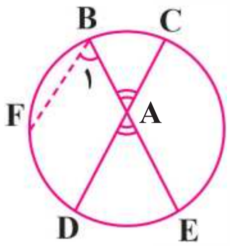
ساده‌ترین مثال برخال‌ها در طبیعت دیده می‌شود. به طور مثال در گل کلم، هر قطعه کوچک متشابه قطعه بزرگ آن است. برخال‌ها در مناظر طبیعی نیز دیده می‌شوند: رشته کوه‌ها، پشته‌های ابر، مسیر رودخانه‌ها و خطوط ساحلی همگی مثالهایی از یک فراکتال هستند.

در صفحات بعد مثال‌هایی از این دست می‌بینید.

جمع	۲۰

۱- الف) پاره‌خطی که دو سر آن روی دایره باشد .
ب) زاویه‌ای است که رأس آن بر مرکز دایره واقع باشد .

۲- اثبات : از B به موازات CD رسم می‌کنیم تا دایره را در F قطع کند .

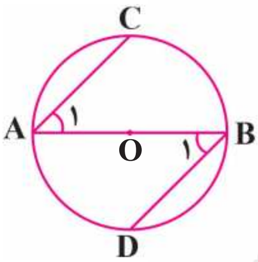


$$BF \parallel CD \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{DF}$$

$$\left.\begin{aligned} BF \parallel CD \Rightarrow \text{طبق خطوط موازی و مورب}\ \hat{B}_۱ = D\hat{A}E \\ \text{محاطی}\ \hat{B}_۱ = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{FE} \end{aligned}\right\} \Rightarrow D\hat{A}E = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{FE}$$

$$\Rightarrow D\hat{A}E = \frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{DE} + \overset{\frown}{FD}) = \frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{DE} + \overset{\frown}{BC})$$

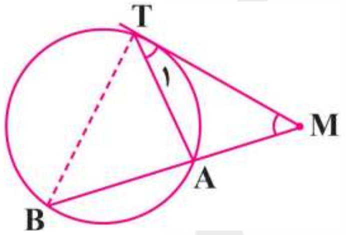
۳- اثبات :



$$AC \parallel BD \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{B}_۱ \xrightarrow[\text{روبه‌روی آن‌ها باهم برابر می‌شوند .}]{\text{هر دو محاطی پس کمان‌های}} \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AD}$$

$$\Rightarrow ۱۸۰^\circ - \overset{\frown}{AC} = ۱۸۰^\circ - \overset{\frown}{BD} \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD} \Rightarrow AC = BD$$

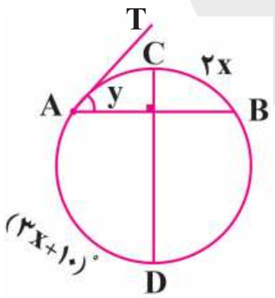
۴- اثبات : T را به A و B وصل می‌کنیم و دو مثلث MAT و MBT را در نظر می‌گیریم :



$$\left\{\begin{aligned} \hat{M} = \hat{M}\ \ \text{مشترک} \\ \hat{T}_۱ = \hat{B} = \frac{\overset{\frown}{AT}}{۲}\ \ \text{محاطی ظلی} \end{aligned}\right. \xrightarrow{\text{(بنابر تساوی دو زاویه)}} \overset{\Delta}{MAT} \sim \overset{\Delta}{MBT}$$

$$\Rightarrow \frac{MT}{MB} = \frac{MA}{MT} \Rightarrow MT \cdot MT = MA \cdot MB \Rightarrow MT^۲ = MA \cdot MB$$

۵-



$$CD \perp AB \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DB} = ۳x + ۱۰^\circ$$

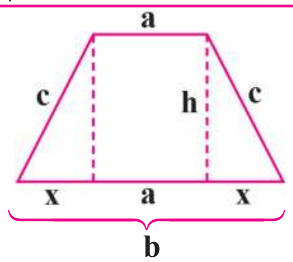
$$\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CA} = ۲x$$

$$(۳x+۱۰)^\circ + (۳x+۱۰)^\circ + ۲x + ۲x = ۳۶۰^\circ$$

$$۱۰x + ۲۰^\circ = ۳۶۰^\circ\ ,\ ۱۰x = ۳۴۰^\circ \Rightarrow \boxed{x = ۳۴^\circ}$$

$$\text{زاویه ظلی}\ \hat{y} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} = \frac{۲x + ۲x}{۲} = \frac{۴x}{۲} = ۲x = ۲(۳۴^\circ) = ۶۸^\circ$$

۶-



$a + b = c + c = ۲c$ چون چهار ضلعی محیطی است

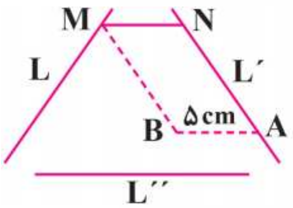
$$c = \frac{a+b}{۲}\ ,\ x = \frac{b-a}{۲}$$

$$h^۲ = c^۲ - x^۲ = (a + \frac{b}{۲})^۲ - (\frac{b-a}{۲})^۲ = \frac{a^۲ + ۲ab + b^۲}{۴} - \frac{b^۲ - ۲ab + a^۲}{۴} = \frac{a^۲ + ۲ab + b^۲ - b^۲ + ۲ab - a^۲}{۴} = \frac{۴ab}{۴} = ab$$

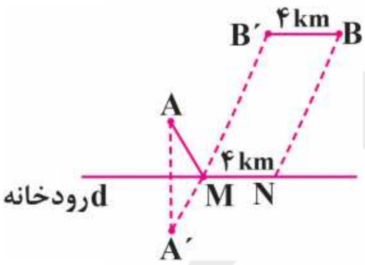
$$h = \sqrt{ab}$$

$$\text{ذوزنقه}\ S = \frac{۱}{۲}(a+b)h = \frac{۱}{۲}(a+b)\sqrt{ab}$$

۷- نقطه دلخواهی روی L' در نظر می‌گیریم و آن را A می‌نامیم . از A پاره‌خط $AB=5cm$ را به موازات L'' رسم می‌کنیم . سپس از B به موازات L' رسم می‌کنیم تا خط L را در M قطع کند . اگر از M به موازات L'' رسم کنیم خط L' را در N قطع می‌کند. MN همان پاره‌خط موردنظر است. زیرا چهارضلعی ABMN متوازی‌الاضلاع بوده و $MN=AB=5$ و از طرفی : $MN \parallel L''$



۸- ابتدا از نقطه‌ی B به اندازه‌ی ۴km به موازات خط d رسم می‌کنیم تا B' به دست آید . سپس قرینه‌ی A را نسبت به d به دست آورده از A' به B' وصل می‌کنیم تا خط d را در M قطع کند . MN را برابر با ۴km روی خط d جدا کرده از N به B وصل می‌کنیم. مسیر AMNB همان مسیر موردنظر است .



اثبات : (چهار ضلعی $B'BNM$ متوازی‌الاضلاع است) طول مسیر $AMB'B$ = طول مسیر AMNB

$AMB'+B'B$ طول مسیر = طول مسیر AMNB

می‌دانیم AMB' کوتاه‌ترین مسیر است و $B'B$ همان MN است . پس : AMNB = کوتاه‌ترین مسیر

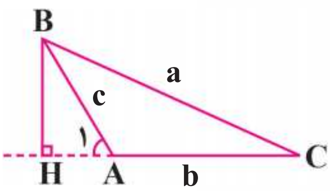
۹-

	طول پاره‌خط	اندازه‌ی زاویه	شیب خط	جهت شکل	مساحت
الف) بازتاب	تغییر نمی‌کند	تغییر نمی‌کند	تغییر می‌کند	تغییر می‌کند	تغییر نمی‌کند
ب) انتقال	تغییر نمی‌کند	تغییر نمی‌کند	تغییر نمی‌کند	تغییر نمی‌کند	تغییر نمی‌کند

۱۰- اثبات : ارتفاع BH را رسم می‌کنیم. چون $\widehat{A}>90^\circ$ پس ارتفاع بیرون مثلث واقع می‌شود .

در مثلث ABH داریم :

$$\cos\widehat{A}_1=\frac{AH}{AB} \quad , \quad \sin\widehat{A}_1=\frac{BH}{AB}$$



$$AH=AB\cos\widehat{A}_1=c\cos A_1=c\cos(180-\widehat{A})=-c\cos\widehat{A} \quad , \quad BH=AB\sin\widehat{A}_1=AB\sin(180^\circ-\widehat{A})=c\sin\widehat{A}$$

$$CH=AC+AH=b+AH=b-c\cos A$$

$$\Delta BCH: BC^2=BH^2+CH^2$$

$$a^2=(c\sin\widehat{A})^2+(b-c\cos\widehat{A})^2=\underline{c^2\sin^2\widehat{A}}+b^2-2bc\cos\widehat{A}+\underline{c^2\cos^2\widehat{A}}=c^2\underbrace{(\sin^2\widehat{A}+\cos^2\widehat{A})}_{1}+b^2-2bc\cos\widehat{A}$$

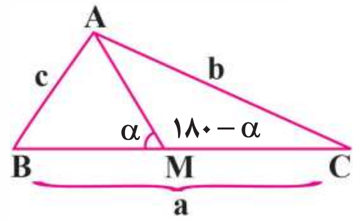
$$\Rightarrow a^2=c^2+b^2-2bc\cos\widehat{A}$$

-۱۱

$$\Delta AMC: b^۲ = AM^۲ + MC^۲ - ۲AM \cdot MC \cdot \cos(۱۸۰ - \alpha)$$

$$b^۲ = AM^۲ + \left(\frac{a}{۲}\right)^۲ + ۲AM\left(\frac{a}{۲}\right)\cos\alpha$$

$$b^۲ = AM^۲ + \frac{a^۲}{۴} + a \cdot AM\cos\alpha \qquad (۱)$$



$$\Delta AMB: c^۲ = AM^۲ + MB^۲ - ۲AM \cdot MB \cdot \cos\alpha$$

$$c^۲ = AM^۲ + \left(\frac{a}{۲}\right)^۲ - ۲AM\left(\frac{a}{۲}\right) \cdot \cos\alpha$$

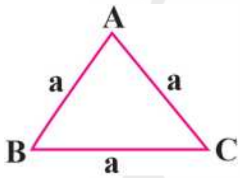
$$c^۲ = AM^۲ + \frac{a^۲}{۴} - a \cdot AM\cos\alpha \qquad (۲)$$

حال طرفین رابطه (۱) و (۲) را باهم جمع می‌کنیم داریم :

$$b^۲ + c^۲ = ۲AM^۲ + \frac{a^۲}{۲}$$

-۱۲

$$p = \frac{a+a+a}{۲} = \frac{۳a}{۲} \qquad a = b = c$$



$$s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$s = \sqrt{\frac{۳a}{۲}\left(\frac{۳a}{۲} - a\right)\left(\frac{۳a}{۲} - a\right)\left(\frac{۳a}{۲} - a\right)}$$

$$s = \sqrt{\frac{۳a}{۲} \times \frac{a}{۲} \times \frac{a}{۲} \times \frac{a}{۲}} = \sqrt{\frac{۳a^۴}{۱۶}} = \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}$$

-۱۳

$$AD = AE = DE \Rightarrow \widehat{A} = ۶۰^\circ$$

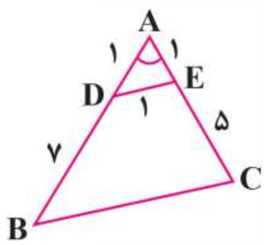
الف)

$$BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ - ۲AB \cdot AC \cdot \cos ۶۰^\circ$$

$$BC^۲ = ۸^۲ + ۶^۲ - ۲(۸)(۶) \times \frac{۱}{۲}$$

$$BC^۲ = ۶۴ + ۳۶ - ۴۸ = ۱۰۰ - ۴۸ = ۵۲$$

$$BC = \sqrt{۵۲} = ۲\sqrt{۱۳}$$



ب)

$$S_{DECB} = S_{ABC} - S_{ADE}$$

$$S_{DECB} = \frac{۱}{۲} AB \cdot AC \sin ۶۰^\circ - \frac{۱}{۲} AD \cdot AE \cdot \sin ۶۰^\circ$$

$$S_{DECB} = \frac{۱}{۲} \times ۸ \times ۶ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} - \frac{۱}{۲} \times ۱ \times ۱ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$S_{DECB} = \frac{۲۴\sqrt{۳}}{۲} - \frac{\sqrt{۳}}{۴} = \frac{۴۸\sqrt{۳} - \sqrt{۳}}{۴} = \frac{۴۷\sqrt{۳}}{۴}$$