

آمار و احتمال

فصل اول

درس اول: شمارش

اصل جمع

اگر بتوان عملی را به  $m$  طریق و عمل دیگری را به  $n$  طریق انجام داد، و این دو عمل را نتوان با هم انجام داد، در این صورت به  $m + n$  طریق می توان عمل اول یا عمل دوم را انجام داد. (اصل جمع به بیش از دو عمل نیز قابل تعمیم است.)

اصل ضرب

اگر عملی طی دو مرحله اول و دوم انجام پذیرد که در مرحله اول به  $m$  طریق و در مرحله دوم هر کدام از این  $m$  طریق به  $n$  روش انجام پذیر باشند، در کل آن عمل از  $m \times n$  طریق انجام پذیر است. (اصل ضرب قابل تعمیم به بیشتر از دو مرحله است.)

نماد فاکتوریل



برای ضرب یک عدد طبیعی و بزرگ تر از یک در تمام اعداد طبیعی کوچک تر از خودش

از نماد فاکتوریل «!» استفاده می کنیم :

$$n! = n \times n - 1 \times \dots \times 1$$

قرارداد: صفر فاکتوریل و یک فاکتوریل را برابر یک در نظر می گیریم :  $0! = 1$  ,  $1! = 1$

جایگشت

هر حالت از کنار هم قرار گرفتن  $n$  شی متمایز را یک جایگشت  $n$  تایی از آن  $n$  شی

می نامیم. تعداد کل جایگشت های  $n$  تایی از  $n$  شی متمایز، برابر است با:  $n!$

تبدیل  $r$  شی از  $n$  شی یا جایگشت  $r$  شی از  $n$  شی : تعداد انتخاب های  $r$  شی از بین  $n$  شی

را که جابه جایی یا ترتیب انتخاب مهم باشد، با نماد  $P(n, r)$  نشان می دهیم :

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

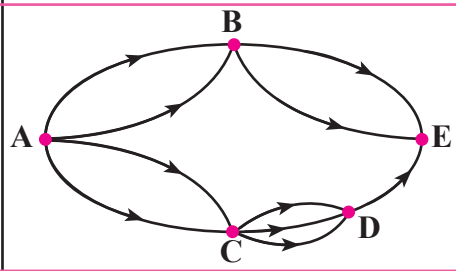


ترکیب  $r$  شی از  $n$  شی

تعداد انتخاب های  $r$  شی از بین  $n$  شی را که جابه جایی اشیای انتخاب شده پس از انتخاب، حالت جدید تولید نکرده و ترتیب انتخاب

اهمیت نداشته باشد با  $C_r^n = \binom{n}{r}$  نشان می دهیم :

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

۱/۲۵	<p>۱- درستی یا نادرستی هر یک از عبارات های زیر را مشخص کنید :</p> <p>الف) تساوی <math>۳! \times ۲! = ۶!</math> همواره درست است.</p> <p>ب) اگر <math>A</math> و <math>B</math> دو پیشامد از فضای نمونه ای <math>S</math> باشند و <math>A \subseteq B</math> ، در این صورت <math>p(A) \leq p(B)</math> است.</p> <p>پ) تساوی <math>P(۳, ۰) = C(۴, ۴)</math> برقرار است.</p> <p>ت) در جامعه ای با اندازه <math>N</math> به <math>\binom{N}{n}</math> طریق می توان نمونه ای با اندازه <math>n</math> انتخاب کرد.</p> <p>ث) نتیجه یک آزمون چهار جوابی، که نیمی از سوالات آن را شانسی پاسخ داده ایم آزمایشی تصادفی است.</p>
۲	<p>۲- جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید :</p> <p>الف) روی محیط یک دایره که ۱۲ نقطه وجود دارد، به تعداد ..... مثلث متمایز می توان تشکیل داد.</p> <p>ب) اگر <math>A</math> و <math>B</math> دو پیشامد ناسازگار باشند، در این صورت <math>P(A \cup B) = \dots\dots\dots</math> است.</p> <p>پ) برای توصیف داده های کیفی (اسمی یا ترتیبی) گزارش درصد باید همیشه با گزارش ..... همراه باشد.</p> <p>ت) به آزمایش هایی که نتیجه آن ها قبل از اجرای آزمایش به طور قطع مشخص نیست ..... گویند.</p> <p>ث) یک سکه و تاس را با هم پرتاب می کنیم تعداد اعضای فضای نمونه آن ..... است.</p> <p>ج) پیشامد ..... وقتی رخ می دهد که پیشامد <math>A</math> رخ دهد ولی پیشامد <math>B</math> رخ ندهد.</p> <p>چ) تعداد اعضای جامعه را ..... گویند.</p> <p>ح) نمودار ..... نموداری است که نشان می دهد داده ها در کجا متراکم تر و کجا پراکنده تراند.</p>
۱/۵	<p>۳- با توجه به ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۵ و ۷ و ۸ به سوالات زیر پاسخ دهید: (تکرار ارقام مجاز نیست)</p> <p>الف) چند عدد سه رقمی می توان نوشت؟</p> <p>ب) چند عدد زوج سه رقمی می توان نوشت؟</p> <p>پ) چند عدد سه رقمی بزرگتر از ۶۰۰ می توان نوشت؟</p>
۲	<p>۴- با حروف کلمه «ولایت» و بدون تکرار حرف: (با معنی یا بی معنی)</p> <p>الف) چند کلمه چهار حرفی می توان نوشت که به «و» ختم شود؟</p> <p>ب) چند کلمه پنج حرفی می توان نوشت که «ل» و «ی» کنار هم باشند؟</p>
۱	<p>۵- اگر شکل مقابل نشان دهنده جاده های بین شهرهای <math>E</math> و <math>D</math> و <math>C</math> و <math>B</math> و <math>A</math> باشد و همه جاده ها یک طرفه باشند:</p> <p>الف) به چند طریق می توان از شهر <math>A</math> به شهر <math>D</math> رفت؟</p> <p>ب) به چند طریق می توان از شهر <math>A</math> به شهر <math>D</math> رفت بدون آن که از شهر <math>C</math> عبور کنیم؟</p> 
۲	<p>۶- سکه ای را پرتاب می کنیم. اگر رو ظاهر شود آنگاه تاس را می ریزیم، در غیر این صورت یک بار دیگر سکه را می اندازیم:</p> <p>الف) فضای نمونه ای این آزمایش تصادفی را با اعضایش مشخص کنید.</p> <p>ب) پیشامد این که عدد ظاهر شده روی تاس فرد یا سکه پشت بیاید را با اعضایش مشخص کنید.</p>
۱/۵	<p>۷- از جعبه ای که ۵ لامپ سالم و ۱۲ لامپ معیوب دارد، ۶ لامپ را به طور تصادفی انتخاب می کنیم. مطلوب است احتمال این که:</p> <p>الف) حداقل ۴ لامپ سالم باشد.</p> <p>ب) به تعداد مساوی لامپ سالم و معیوب برداریم.</p>
۱	<p>۸- در یک مهمانی ۵ نفر حضور دارند، مطلوب است احتمال آن که:</p> <p>الف) هر پنج نفر آن ها در ماه بهمن متولد شده باشند.</p> <p>ب) تولد هیچ دو تای آن ها در یک ماه نباشد.</p>

۱- الف) نادرست ث) درست	ب) درست	پ) درست	ت) درست
۲- الف) $\binom{12}{3} = 220$ ث) ۱۲	ب) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (پ) تعداد ج) $A - B$ (چ) اندازه جامعه	ت) تصادفی ح) جعبه‌ای	
۳- الف) ۱۰۰	ب) ۵۲ $5 \times 5 \times 4 = 100$ صفر نباشد $\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$ صفر باشد و یکی از ارقام ۱، ۵، ۲، ۰، ۷، ۸ نباشد.	تعداد اعداد فرد ۴۸ $\Rightarrow 4 \times 4 \times 3$ دو تا از ارقام ۰، ۱، ۵، ۲، ۷، ۸ نباشد. $\begin{matrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{matrix}$ تعداد اعداد زوج = $100 - 48 = 52$	
۴- الف) $1 \times 4 \times 3 \times 2 = 24$	ب) $2! \times 4!$	پ) ۴۰ $2 \times 5 \times 4 \Rightarrow 40$ یکان دهگان صدگان رقم صدگان فقط رقم‌های ۷ و ۸ می‌تواند باشد پس ۲ انتخاب داریم: رقم دهگان از بین رقم‌های $\{0, 1, 2, 5, 7, 8\}$ فقط ۵ رقم انتخاب داریم زیرا یک رقم در صدگان قرار گرفته و در رقم یکان از بین رقم‌های موجود ۴ انتخاب داریم.	
۵- الف) $2 \times 3 = 6$	ب) صفر		
۶- الف) $S = \{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, PR, PP\}$ ب) $A = \{R_1, R_3, R_5, PP, PR\}$			
۷- الف) $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{5}{4} \binom{12}{2} + \binom{5}{5} \binom{12}{1}}{\binom{17}{6}}$ ب) $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{\binom{5}{3} \binom{12}{3}}{\binom{17}{6}}$			
۸- الف) $\frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} = \left(\frac{1}{12}\right)^5$ ب) $\frac{12}{12} \times \frac{11}{12} \times \frac{10}{12} \times \frac{9}{12} \times \frac{8}{12}$			
۹- الف) $B = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5)\}$ , $A = \{(5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$ ب) بله، زیرا $A \cap B = \emptyset$			

ادامه دارد ...