علامه حلی

ریاضی ۲ یازدهم تجربی

+ کنکور ۹۷

مطابق با آخرین تغییرات کتاب درسی

• سیدمحمدصالح ارشاد • حجت انصاری • اقبال زارعی • سید حسین نیری‌پور •

علامه حلی

مجموعه کتاب‌های علامه حلی

ریاضی (۲)

رشته علوم تجربی

پایه یازدهم

• سیدمحمدصالح ارشاد • حجت انصاری
• اقبال زارعی • سید حسین نیری‌پور

شناسنامه کتاب

شناسه : ارشاد، سیدمحمدصالح، ۱۳۶۵

عنوان و نام پدیدآور : ریاضی (۲) علوم تجربی یازدهم / سیدمحمدصالح ارشاد و دیگران.

مشخصات نشر : تهران: انتشارات حلی، ۱۳۹۷

مشخصات ظاهری : ۲۹×۲۲ س م. ۱: مصور، جدول، نمودار (بخشی رنگی)؛ ص ۴۳۲

فروست : مجموعه کتاب علامه‌حلی

شابک : ۵-۰۷۵-۴۹۶-۶۰۰-۹۷۸

وضعیت فهرست‌نویسی : فیپای مختصر

یادداشت : فهرست‌نویسی کامل این اثر در نشانی *http://opac.nlai.ir* : قابل دسترسی است.

شناسه افزوده : سیدمحمدصالح ارشاد، حجت انصاری، اقبال زارعی، سیدحسین نیری‌پور

شماره کتابشناسی ملی : ۵۳۷۸۳۰۷

علامه حلی

عنوان کتاب: ریاضی (۲) رشته علوم تجربی

ناشر: انتشارات حلی

مؤلفان: سیدمحمدصالح ارشاد، حجت انصاری، اقبال زارعی، سیدحسین نیری‌پور

ویراستار علمی: معصومه صباغیان

هماهنگی: سمیه سادات فاطمی

طراح جلد: سعید شمس

صفحه‌آرا: راضیه سادات فرهانیان، عاطفه قلیچ‌خانی

رسام: محدثه فریابی‌کنی

حروف‌نگار: حروف‌نگاری علامه‌حلی

سال چاپ: ۱۴۰۱

نوبت چاپ: پنجم

شمارگان: ۲۰۰۰ جلد

قیمت: ۲۷۷۰۰۰ تومان

شماره شابک: ۵-۰۷۵-۴۹۶-۶۰۰-۹۷۸

تهران، خیابان انقلاب، میدان فردوسی، ابتدای کوچه براتی، پلاک ۱۶ واحد ۱۴

تلفن دفتر مرکزی: ۵-۶۶۷۴۴۳۸۴

جالب است بدانی

فهرست مطالب

با نرم افزار موبایل »کتاب زنده« دیده شود.

قبل از شروع به مطالعه کتاب این قسمت را بخوانید:

وقتی شروع به خواندن این کتاب کنید با بخش‌های مختلفی مواجه می‌شوید که غالباً یک لاک‌پشت متفاوت برای هرکدام وجود دارد که هریک از این بخش‌ها از شما انتظار داریم کار متفاوتی انجام دهید. این قسمت‌ها براساس تئوری‌های نوین آموزش و تجارب موفق تدریس برای آموزش دانش‌آموزان مستعد طراحی شده است. این بخش‌ها شامل:

درخت دانش: در صفحه دوم هر فصل، نموداری رسم شده تا به شما کمک کند در کمترین حجم، مطالب علمی فصل و چگونگی تقسیم‌بندی و ارتباط آن‌ها را با هم درک کنید. درواقع این بخش نقشه‌ای است برای گم نشدن در موضوعات علمی.

اهداف رفتاری: بعد از درخت دانش، چند جمله نوشته شده که از اول کار معلوم کند این فصل را می‌خوانیم که چه بشود. خوب است در آخر فصل هم برگردیم و ببینیم، آیا می‌توانم کارهایی را که در این بخش گفته انجام دهیم یا نه!

پاسخگو باش: در این قسمت باید پاسخگوی مطالبی که تا اینجا خوانده‌اید باشید. پاسخگوی سؤالاتی که انتظار می‌رود بعد از خواندن درس تا آن قسمت، بتوانید باکمی فکرکردن به آن‌ها جواب دهید.

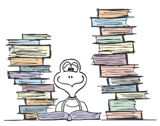
فسفر بسوزان: شاید لازم باشد مقدار بیشتری از مغز خودمان استفاده کنیم و قدری فسفر ذخیره شده را بسوزانیم. البته اگر نتوانستید به سوالات این بخش جواب دهید افسرده نشوید؛ برخی از فسفر بسوزانیدها را خود مولفان هم بلد نیستند جواب دهند!

دست به کد شو: در اکثر مدارس خوب کشور از پایه هفتم، آموزش برنامه‌نویسی شروع می‌شود. نوشتن برنامه برای حل یک مسئله علاوه بر کمک به یادگیری بهتر برنامه‌نویسی، به فهم عمیق مسئله و نحوه حل آن کمک زیادی می‌کند. در پایان هر فصل بخشی به نام دست به کد شو وجود دارد که با توجه به موضوعات فصل و مهارت‌های برنامه‌نویسی طراحی شده است. اگر برنامه‌نویسی بلد نیستید می‌توانید به کتاب برنامه‌نویسی انتشارات ما رجوع کنید و هرچه سریع‌تر برنامه‌نویسی را یاد بگیرید.

تاریخ علم: در این بخش شخصیتی در متن درس معرفی می‌شود و درکنار صفحه، عکس و مختصری از زندگی وی می‌بینید. حق مسلم ما است که حداقل قیافه این دانشمندان دوست داشتنی را ببینیم، شاید در کتاب‌های آینده عکس شما هم اینجا قرار بگیرد!

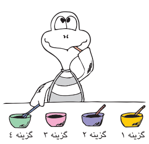
جالب است بدانی: برای افرادی که دوست دارند بیشتر از سطح استاندارد با موضوعات آشنا شوند این قسمت توصیه می‌شود. در این قسمت مطالبی آورده شده که خواندن و یادگرفتن آن الزامی نیست ولی آن‌قدر جذاب است که نشود به‌راحتی بی‌خیال خواندن آن شد.

جمع‌بندی کن: در انتهای فصل برای یک جمع‌بندی سریع می‌توان از این قسمت کمک گرفت. در این قسمت با هم فصل را جمع می‌کنیم و نکات و مطالب مهم را برای خود تکمیل می‌کنیم.



لغت‌نامه: ما دانش‌آموزان مستعد و متفاوت (!) دوست داریم بتوانیم علاوه بر مطالب درسی، جستجویی هم بکنیم و ببینیم در دنیا درباره موضع درسی ما چه چیزی وجود دارد. برای همین در پایان هر فصل لغات مهم با معادل انگلیسی آن آورده شده است.

تمرین‌ها: در آخر هر فصل تمرین‌های مرتبط با آن آورده شده است. تعداد تمرین‌ها، وقت لازم برای انجام آن‌ها، تعداد سؤالات سخت و آسان و نوع سؤالات کاملاً محاسبه شده، پس خیالتان راحت که همه را می‌توانید انجام دهید. سوالات سخت با ستاره مشخص شده، اگر این سوالات را نتوانستید حل کنید خیلی به خودتان آسیب نزنید!



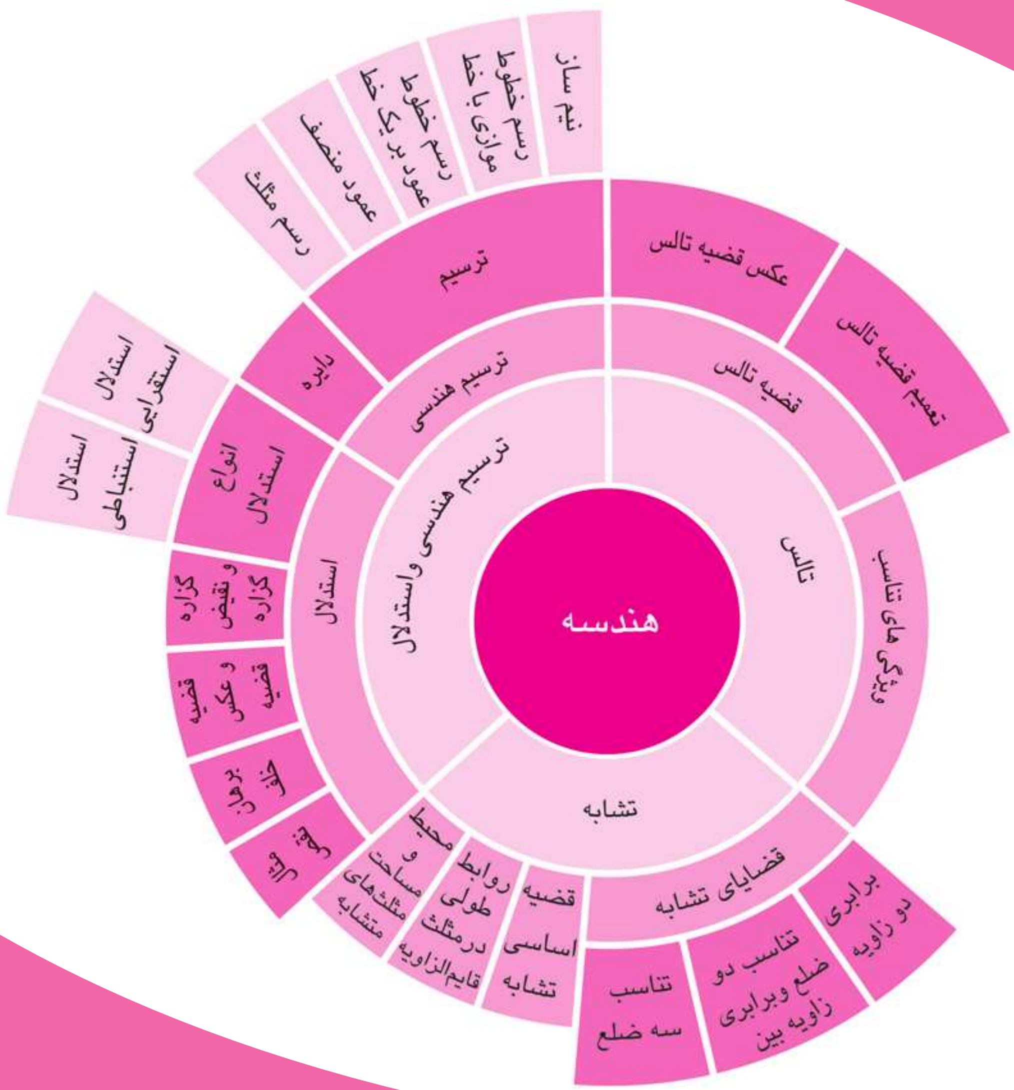
پرسش‌های چهارگزینه‌ای: سؤالات چهارگزینه‌ای یا همان تست هم در آخر هر فصل طراحی شده است. سؤالات چهارگزینه‌ای با این پیش فرض طراحی شده است که اگر نکات مربوط به سؤال را بلد باشید حداکثر در ۲ دقیقه بتوانید به آن جواب دهید.

پاسخ‌ها: پاسخ سؤالات چهارگزینه‌ای همه فصل‌ها به‌صورت معرفی گزینه درست طراحی شده. جواب‌های نهایی سؤال‌ها هم برای چک کردن درستی راه حل، ارائه شده است. پاسخ تشریحی تمرین‌های زوج به‌طور کامل در وب‌سایت کتاب و همچنین همه پاسخ‌ها به‌طور کامل در کتاب پاسخنامه قابل دسترس است.

فصل ۲

هندسه

هندسه زاده نیاز انسان به اندازه‌گیری زمین است. واژه «هندسه» هم در تحلیل آخر به «اندازه‌گیری زمین» برمی‌گردد. بنابراین از دید تاریخی، نخستین مفهوم‌های هندسی، ضمن اندازه‌گیری زمین‌های کشاورزی پدید آمد. در چند هزار سال پیش از این در بابل، منطقه مشهور به عیلام، مصر و دیگر سرزمین‌ها، هندسه شامل قاعده‌هایی برای اندازه‌گیری مساحت و مرزهای زمین‌های کشاورزی بود...



اگر این فصل را به خوبی مطالعه کنی و کارهای خواسته‌شده را به دقت انجام دهی می‌توانی:

- ترسیم‌های ساده‌ای مثل عمودمنصف و نیمساز را یاد بگیری.
- با چند روش درست استدلال آشنا شوی.
- با ویژگی‌هایی از تناسب و نحوه استفاده از آن آشنا شوی.
- قضیه تالس را آموخته و مسائل مربوط به آن را حل کنی.
- مفهوم تشابه دو مثلث و نتایج بسیار حاصل از آن را بیاموزی.

◄ درس ۱: ترسیم‌های هندسی و استدلال

ترسیم‌های هندسی

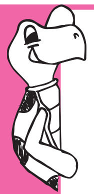
مجموعه نقاطی که همگی یک ویژگی مشترک داشته باشند «مکان هندسی» با آن ویژگی می‌نامیم. برای مثال مجموعه نقاطی که از خط d به فاصله ℓ باشند دو خط Δ و Δ' در دو طرف d و به فاصله ℓ از خط d می‌باشد.

اولین مکان هندسی که در این درس با آن آشنا می‌شویم «دایره» است.

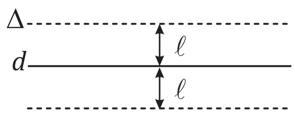
دایره

تعریف: مکان هندسی (مجموعه نقاطی) از صفحه که از نقطه ثابت O به فاصله مشخص r قرار دارند.

دایره $C(O,r)$ دایره‌ای به مرکز O و شعاع r است.



مجموعه نقاطی از صفحه که به فاصله ℓ از خط d قرار دارند، دو خط موازی با d در دو طرف آن به فاصله ℓ از آن هستند.



مثال ۱. نقطه A به فاصله ۴ سانتی‌متر از خط d قرار گرفته است:

الف) چند نقطه روی خط d به فاصله ۵ سانتی‌متر از نقطه A داریم؟

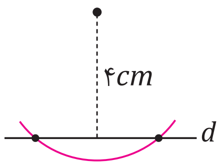
ب) چند نقطه روی خط d به فاصله ۴ سانتی‌متر از نقطه A داریم؟

ج) چند نقطه روی خط d به فاصله ۳ سانتی‌متر از نقطه A داریم؟

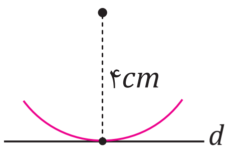
پاسخ:

الف) گفتیم که برای پیدا کردن مجموعه نقاطی از صفحه که دارای فاصله ثابت از نقطه A است، دایره‌ای به مرکز نقطه A و شعاع مشخص‌شده رسم می‌کنیم. برای پیدا کردن تعداد نقاطی که روی خط d از نقطه A به فاصله ۵ سانتی‌متر قرار دارند، دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۵ سانتی‌متر رسم می‌کنیم. محل تقاطع این نقاط با خط مفروض d تعداد جواب‌های این سؤال است.

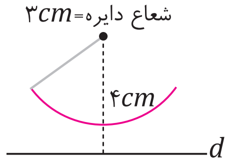
با توجه به شکل، دایره رسم‌شده در دو نقطه خط مفروض d را قطع می‌کند.



ب) دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۴ سانتی‌متر رسم می‌کنیم. چون شعاع این دایره برابر با فاصله نقطه تا خط است، پس این دایره بر خط d مماس می‌شود. بنابراین مسئله یک جواب خواهد داشت.



ج) دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۳ سانتی‌متر رسم می‌کنیم. چون شعاع دایره کم‌تر از فاصله نقطه تا خط است، پس این دایره در هیچ نقطه‌ای خط d را قطع نکرده، بنابراین این مسئله جواب ندارد.

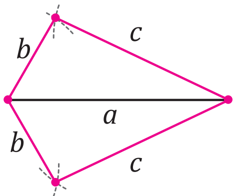


رسم مثلث

با توجه به توضیحات داده شده می‌خواهیم اولین ترسیم این درس را بررسی کنیم. در این درس هر جا از ترسیم صحبت کردیم تنها وسایلی که در اختیار داریم خط‌کش غیرمدرج و پرگار است.

اگر در سؤال گفته شد خطی با طول ۲، ۳ و یا ...، منظور طول داده‌شده ۲، ۳ و یا ... است چون همان‌طور که در بالا گفته شد در این درس از درجه هیچ استفاده‌ای نمی‌کنیم.

روش ترسیم



اگر بخواهیم مثلثی با طول اضلاع a، b و c رسم کنیم ابتدا پاره‌خطی به طول داده‌شده a به‌وسیله خط‌کش رسم می‌کنیم (مانند شکل روبه‌رو) سپس یک بار دهانه پرگار را به طول مفروض b باز کرده و از یک رأس پاره‌خط کمانی رسم می‌کنیم و سپس دهانه پرگار را به‌اندازه c باز کرده و کمانی به مرکز رأس دیگر پاره‌خط رسم می‌کنیم. محل تلاقی این دو کمان رأس سوم مثلث خواسته شده است.

مثال ۲. مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول مفروض a رسم کنید.

پاسخ: پاره‌خطی به طول a رسم می‌کنیم. دهانه پرگار را به‌اندازه پاره‌خط رسم شده (a)، باز می‌کنیم و به مرکز هر یک از رئوس پاره‌خط کمانی رسم می‌کنیم. محل تلاقی این دو کمان رأس سوم مثلث خواسته‌شده است. دو سر پاره‌خط را به‌وسیله خط‌کش به رأس سوم رسم کرده و مثلث متساوی‌الاضلاع موردنظر به دست می‌آید.

تست ۱. **برای مثلثی با طول اضلاع ۳، ۷ و ۹ حداقل به رسم چند کمان نیاز داریم؟**

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) چنین مثلثی وجود ندارد.

پاسخ گزینه ۲

برای رسم هر مثلث ابتدا یک ضلع را رسم کرده و سپس دو کمان به شعاع هر یک از دو ضلع دیگر به مرکز هر یک از رئوس پاره‌خط رسم می‌کنیم. پس برای ترسیم هر مثلث حداقل به ۲ کمان نیاز داریم.

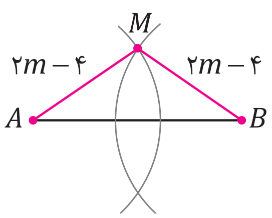
مثال ۳. زاویه‌ای ۱۲۰° رسم کنید.

پاسخ: زاویه داخلی هر مثلث متساوی‌الاضلاع ۶۰° است. در نتیجه هر زاویه خارجی آن برابر ۱۲۰° خواهد بود. اگر یک مثلث متساوی‌الاضلاع رسم کنیم یک زاویه ۱۲۰° خواهیم داشت. با توجه به توضیحات بالا پاره‌خطی به طول دلخواه a رسم می‌کنیم، دهانه پرگار را به‌اندازه طول پاره‌خط باز کرده و به مرکز دو سر پاره‌خط کمان می‌زنیم. محل تقاطع دو کمان رأس سوم مثلث خواهد بود. به این ترتیب یک مثلث متساوی‌الاضلاع داریم که زاویه خارجی آن برابر ۱۲۰° است.

تست ۲. **دو نقطه A و B به فاصله ۸ از یکدیگر مفروضند. اگر در صفحه دو نقطه پیدا شوند که از A و B به فاصله $۲m-۴$ باشند، حدود m کدام است؟**

۱) $m>۵$ ۲) $m>۸$ ۳) $m>۴$ ۴) $m>۶$

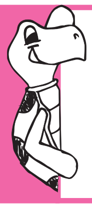
پاسخ گزینه ۳



برای پیدا کردن نقطه‌هایی که از A و B به فاصله $۲m-۴$ باشد باید دو کمان به مرکز A و B و به شعاع $۲m-۴$ رسم کنیم. محل تقاطع این دو کمان از دو نقطه A و B به فاصله یکسان $۲m-۴$ می‌باشد. برای این‌که این دو کمان یکدیگر را قطع کنند باید $۲m-۴$ از نصف فاصله A تا B بیشتر باشد، یعنی: $۲m-۴>۴ \Rightarrow m>۴$

اگر پاره‌خطی به طول a داشته باشیم و از دو سر آن کمان‌هایی با شعاع‌های b و c رسم کنیم. اگر $b+c<a$ باشد این دو کمان یکدیگر را قطع نمی‌کنند و در نتیجه مثلثی تشکیل نمی‌شود. و اگر $b+c=a$ باشد، این دو کمان در نقطه‌ای روی پاره‌خط اولیه یکدیگر را قطع کرده و باز هم مثلثی تشکیل نمی‌شود، پس شرط تشکیل مثلث این است که:

$b+c>a$



فرض کنید a، b و c عددهای حقیقی و مثبت باشند. برای این‌که مثلثی به طول ضلع‌های a، b و c وجود داشته باشد، باید:

$$a+b>c \quad , \quad a+c>b \quad , \quad b+c>a$$

تست ۳. **در مثلث ABC، $AB=۷x$، $AC=۲x-۱$ و $BC=۴x+۲$ است. حدود x برای آن‌که مثلث ABC وجود داشته باشد، کدام است؟**

۱) $-\frac{۱}{۳}<x<۱$ ۲) $\frac{۳}{۵}<x<۲$ ۳) $-\frac{۱}{۳}<x<۲$ ۴) $\frac{۳}{۵}<x<۱$

پاسخ گزینه ۴

با توجه به نکته بیان‌شده باید:

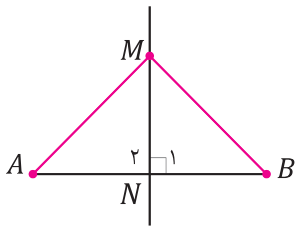
$$BC+AC>AB: ۷x<۶x+۱ \Rightarrow x<۱$$
$$AB+AC>BC: ۴x+۲<۹x-۱ \Rightarrow x>\frac{۳}{۵}$$
$$AB+BC>AC: ۲x-۱<۱۱x+۲ \Rightarrow x>-\frac{۱}{۳}$$

با اشتراک گرفتن از نابرابری‌های بالا نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{۳}{۵}<x<۱$$

ترسیم عمودمنصف

تعریف عمودمنصف: عمودمنصف پاره‌خط AB خطی است عمود به این پاره‌خط که این پاره‌خط را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند.



خاصیت اصلی عمودمنصف: هر نقطه روی عمودمنصف پاره‌خط، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است و هر نقطه که از دو سر پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمود منصف آن پاره‌خط قرار دارد. به‌عبارت دیگر در شکل مقابل، اگر M روی عمودمنصف پاره‌خط AB باشد، آن‌گاه $MA=MB$ و برعکس، اگر $MA=MB$ آن‌گاه M روی عمودمنصف پاره‌خط AB است.

ابتدا اثبات می‌کنیم که اگر M روی عمودمنصف AB باشد، $MA=MB$ است:

$$\left.\begin{array}{l} AN=NB \\ MN\ (\text{مشترک}) \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \overset{\triangle}{MNA} \cong \overset{\triangle}{MNB} \Rightarrow MA=MB$$

حال اگر $MA=MB$ باشد، باید ثابت کنیم M روی عمودمنصف AB است. نقطه N را به عنوان وسط پاره‌خط AB جدا می‌کنیم و از نقطه مفروض M به ۳ نقطه A، B و N خطی رسم می‌کنیم:

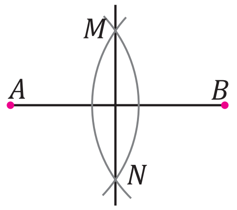
$$\left.\begin{array}{l} MA=MB \\ MN\ (\text{مشترک}) \\ AN=NB\ (AB\ \text{وسط}\ N) \end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{ض ض ض})} \overset{\triangle}{MNA} \cong \overset{\triangle}{MNB} \Rightarrow \hat{N}_۱=\hat{N}_۲$$

چون $\hat{N}_۱+\hat{N}_۲=۱۸۰$ است، پس نتیجه می‌گیریم: $\hat{N}_۱=\hat{N}_۲=۹۰^\circ$

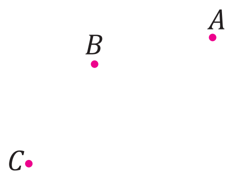
بنابراین نقطه M روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار گرفته است.

بنابراین، عمود منصف؛ مکان هندسی مجموعه نقاطی در صفحه است که از دو نقطه A و B به یک فاصله هستند.

روش رسم عمودمنصف

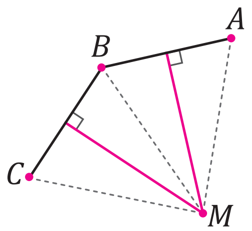


برای ترسیم عمودمنصف پاره‌خط AB، دهانه پرگار را بیش از نصف طول پاره‌خط AB باز می‌کنیم. یک بار به مرکز A و بار دیگر به مرکز B با همان شعاع کمان می‌زنیم. این دو کمان یکدیگر را در نقطه M و N قطع می‌کنند. چون M و N از A و B به یک فاصله هستند، پس خطی که از M و N می‌گذرد، عمودمنصف AB است.

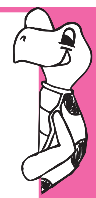


مثال ۴. سه نقطه A، B و C به صورت مقابل داده‌شده است. دایره‌ای رسم کنید که از این سه نقطه عبور کند.

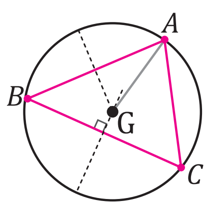
پاسخ:



اگر دایره خواسته‌شده بخواهد از سه نقطه A، B و C عبور کند. باید فاصله هر سه نقطه از مرکز دایره یکسان باشد، یعنی مرکز دایره مکان هندسی نقاطی است که از A، B و C فاصله برابر داشته باشد. این ۳ نقطه را به هم وصل می‌کنیم. هر نقطه بر روی عمودمنصف‌های پاره‌خط‌های AB و BC از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است، پس محل تلاقی این دو عمود منصف فاصله برابر از ۳ نقطه داشته است بنابراین مرکز دایره نقطه M می باشد. که نقطه M محل تلاقی عمود منصف‌های AB و BC است.حال چون $m = MA = MB = MC$ است از نقطه M به شعاع m یک دایره رسم می‌کنیم. این دایره از ۳ نقطه A، B و C عبور خواهد کرد.



فرض کنید نقطه G درون هر مثلث از هر سه رأس مثلث به یک فاصله است، برای پیدا کردن این نقطه، کافی است محل برخورد عمودمنصف اضلاع AB و BC را پیدا کنیم و آن را G بنامیم. توجه داشته باشید که نقطه G از A و B به یک فاصله و از B و C نیز به یک فاصله است، پس از هر سه رأس به یک فاصله می‌باشد. بنابراین دایره‌ای به شعاع GA و به مرکز G وجود دارد که از هر سه رأس مثلث می‌گذرد.

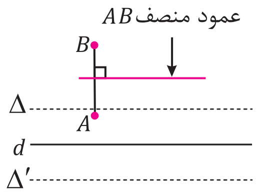


تست ۴. **دو نقطه A و B و خط d در یک صفحه مفروضند. تعداد نقطه‌هایی از این صفحه که از خط d به فاصله L بوده و از دو نقطه A و B به یک فاصله باشند. کدام گزینه نمی‌تواند باشد؟**

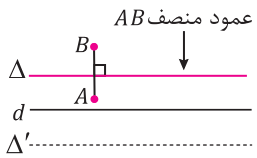
۱) ۱   ۲) ۲   ۳) صفر   ۴) نامتناهی

پاسخ گزینه ۱

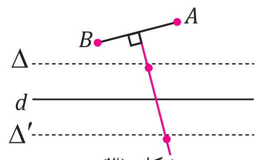
نقطه‌هایی که از خط d به فاصله L باشند دو خط Δ و Δ' موازی d و در دو طرف آن هستند و مکان هندسی نقاطی که از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله باشند، عمودمنصف AB است. بر طبق شکل (۱) محل تلاقی این دو مکان هندسی یا صفر (زمانی که خط عمودمنصف موازی Δ و Δ' است) یا مانند شکل (۲) نامتناهی (زمانی که خط عمودمنصف منطبق بر خطوط Δ و Δ' باشد) و یا شبیه به شکل (۳) خواهد بود. پس گزینه ۱ جواب این تست است.



شکل (۲)

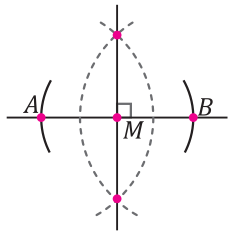


شکل (۱)

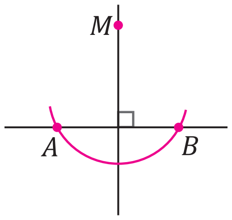


شکل (۳)

رسم خط عمود بر یک خط

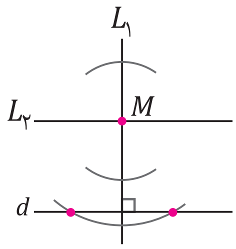


الف) از نقطه‌ای روی خط اولیه: نقطه M روی خط d قرار دارد. به مرکز M و شعاع دلخواه دایره‌ای رسم می‌کنیم. محل برخورد این دایره با خط d را A و B می‌نامیم. عمودمنصف پاره‌خط AB خطی است که از M می‌گذرد و بر d عمود است.



ب) از نقطه‌ای خارج از خط اولیه: نقطه M خارج از خط d قرار دارد. به مرکز M کمانی رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطه‌های A و B قطع کند. عمودمنصف AB از M می‌گذرد و بر d عمود است.

رسم خطی موازی یک خط

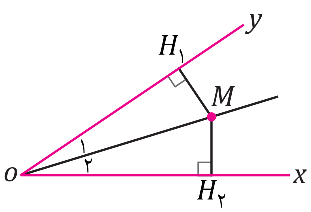


نقطه M خارج از خط d قرار دارد. می‌خواهیم خطی موازی d و گذرا از M رسم کنیم. از نقطه M خط L_1 عمود بر خط d رسم می‌کنیم. سپس L_2 را طوری رسم می‌کنیم که از M بگذرد و بر L_1 عمود باشد. چون دو خط عمود بر یک خط با هم موازی هستند، پس L_2 خطی موازی d است که از M می‌گذرد.

رسم نیمساز

تعریف: نیمساز هر زاویه، نیم‌خطی است که آن زاویه را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند.

خاصیت اصلی نیمساز: هر نقطه روی نیمساز زاویه، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و هر نقطه که از دو ضلع زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز این زاویه قرار دارد.



به عبارت دیگر در شکل مقابل، اگر M روی نیمساز زاویه xoy باشد، آن‌گاه $MH_1 = MH_2$ و اگر $MH_1 = MH_2$، آن‌گاه M روی نیمساز زاویه xoy قرار دارد.

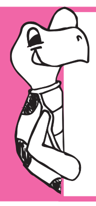
برای اثبات این خاصیت ابتدا ثابت می‌کنیم که اگر M روی نیمساز باشد، $MH_1 = MH_2$ است. چون M روی نیمساز قرار دارد، بنابراین $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ خواهد بود:

$$\left.\begin{matrix} MO\ (\text{مشترک}) \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \overset{\triangle}{MOH_1} \cong \overset{\triangle}{MOH_2} \Rightarrow MH_1 = MH_2$$

حال طرف دیگر این قضیه را اثبات می‌کنیم، اگر $MH_1 = MH_2$ باشد، M روی نیمساز زاویه xoy قرار دارد.

$$\left.\begin{matrix} MH_1 = MH_2 \\ MO\ (\text{مشترک}) \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \overset{\triangle}{MOH_1} \cong \overset{\triangle}{MOH_2} \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

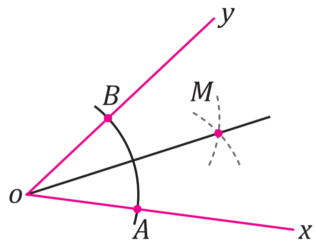
چون $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ پس نقطه M روی نیمساز زاویه xoy قرار دارد.



مجموعه تمام نقطه‌هایی که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله هستند، نیمسازهای زاویه‌های این دو خط هستند که بر هم عمودند.

ثابت کنید نیمسازهای دو خط متقاطع برهم عمودند.

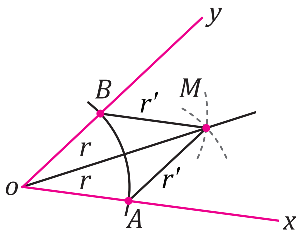
روش رسم نیمساز



می‌خواهیم نیمساز زاویه $x\hat{o}y$ را رسم کنیم. به مرکز O و شعاع دلخواه کمانی رسم می‌کنیم تا Ox و Oy را به ترتیب در A و B قطع کند. به مرکز A دایره‌ای با شعاع بیش از نصف اندازه پاره‌خط AB کمانی رسم می‌کنیم و به همین شعاع و به مرکز B کمانی دیگر رسم می‌کنیم. محل برخورد این دو کمان را M می‌نامیم. OM نیمساز زاویه xoy است.

مثال ۵. ثابت کنید نقطه M که در بالا پیدا کردیم، بر روی نیمساز زاویه $x\hat{o}y$ قرار دارد.

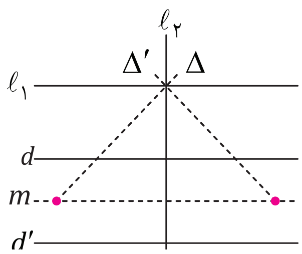
پاسخ:



$$\left.\begin{array}{l} OA = OB \\ AM = BM \\ OM \ (\text{مشترک}) \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{ض‌ض‌ض}]{\overset{\triangle}{OAM} \cong \overset{\triangle}{OBM}} \hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

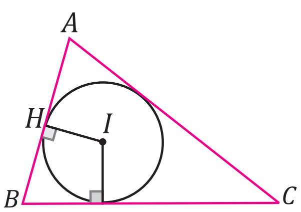
در نتیجه OM نیمساز زاویه O است.

مثال ۶. همه نقطه‌هایی را پیدا کنید که فاصله آن‌ها از دو خط موازی مفروض برابر باشد، در ضمن از دو خط متقاطع مفروض به یک فاصله باشد.



پاسخ: مجموعه نقاطی که از دو خط موازی به یک فاصله باشد، خطی موازی است بین این دو خط که از آن‌ها به فاصله یکسان باشد. خط m در شکل روبه‌رو بین دو خط d و d' موازی آن‌ها است. از سوی دیگر مکان هندسی مجموعه نقاطی که از دو خط متقاطع ℓ_1 و ℓ_2 برابر باشد، نیمساز زاویه بین این دو خط خواهد بود. پس جواب این مسئله تقاطع نیمسازهای Δ و Δ' با خط m خواهد بود.

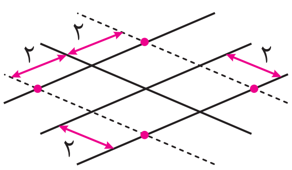
نقطه‌ای که از هر سه ضلع به یک فاصله است، محل برخورد نیمسازهای دو زاویه مثلث است. دقت کنید که این نقطه از دو ضلع AB و AC به یک فاصله و از دو ضلع AB و BC هم به یک فاصله است. پس نقطه I از هر ۳ ضلع به یک فاصله است. این یعنی اگر دایره‌ای به مرکز I و شعاع IH رسم کنیم، بر هر ضلع مثلث ABC مماس است.



تست ۵. **زاویه حاده xoy مفروض است. چند نقطه در صفحه وجود دارد که فاصله آن از هر ضلع زاویه برابر ۲ است؟**

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) نامتناهی

پاسخ **پاسخ:** گزینه ۳



خطوطی موازی دو ضلع زاویه و به فاصله ۲ از آن‌ها رسم می‌کنیم. محل برخورد این خط‌ها جواب مسئله است که ۴ نقطه هستند. این ۴ نقطه در اصل بر روی نیمسازهای این زاویه یا زاویه متقابل به رأس آن قرار می‌گیرد.

تست ۶. **در مثلث ABC، $AB = ۵$، $AC = ۴$ و $BC = ۶$. چند نقطه وجود دارد که از دو ضلع AB و AC به یک فاصله بوده و هم‌چنین از دو رأس B و C به یک فاصله باشد؟**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) نامتناهی

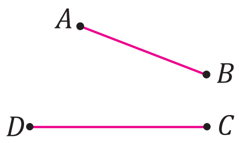
تمرین‌ها

ترسیم‌های هندسی

۱. نقطه A به فاصله $2cm$ از خط d قرار دارد. چند نقطه روی خط d وجود دارد که از نقطه A به فاصله $3cm$ باشد؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)

۲. مثلثی رسم کنید که طول اضلاع آن ۴، ۵ و ۷ باشد.

۳. الف) دو پاره‌خط AB و CD مطابق شکل داده شده‌اند. نقطه‌ای بیابید که از دو نقطه A و B به یک فاصله باشد و از دو نقطه c و d نیز به یک فاصله باشند. (تمرین کتاب درسی)



ب) نقطه موردنظر در قسمت «الف» را O می‌نامیم. اگر نقطه O روی عمودمنصف پاره‌خط BC باشد و G دایره‌ای به مرکز O و شعاع OA باشد، رأس‌های چهارضلعی $ABCD$ نسبت به دایره G چه وضعیتی دارند؟ چرا؟

۴. دو دایره به مرکزهای O و O' یکدیگر را در نقطه A و B قطع کرده‌اند. ثابت کنید OO' عمودمنصف پاره‌خط AB است.

۵. نقاطی از یک صفحه را پیدا کنید که از دو نقطه A و B در آن صفحه به یک فاصله بوده و از خط مفروض d در همان صفحه به فاصله معلوم a باشد (درباره تعداد جواب‌ها بحث کنید.)

۶. دو خط d و d' در نقطه O متقاطعند. نقاطی را بیابید که به نقطه O به فاصله $5cm$ و از دو خط d و d' به یک فاصله باشد.

۷. الف) در مثلث ABC نقطه‌ای که از برخورد عمودمنصف‌های دو ضلع به دست می‌آید، فاصله‌اش تا سه رأس مثلث چگونه است؟

ب) ثابت کنید که برای هر مثلث دایره‌ای وجود دارد که از سه رأس مثلث بگذرد. (تمرین کتاب درسی)

۸. الف) در مثلث ABC نقطه‌ای که از برخورد دو نیمساز به دست می‌آید، فاصله‌اش تا ۳ ضلع چگونه است؟ (تمرین کتاب درسی)

ب) ثابت کنید می‌توان دایره‌ای چنان رسم کرد که بر هر سه ضلع مماس باشد.

۹. نقطه A و خط d مفروضند. مثلث متساوی‌الساقینی چنان رسم کنید که یک رأس آن نقطه A و یک ضلع آن روی خط d باشد. چگونه می‌توان این مثلث را به گونه‌ای رسم کرد که یکی از ساق‌ها بر روی خط d قرار گیرد. (تمرین کتاب درسی)

۱۰. زاویه‌های 15°، 30°، 45°، 60° و 75° را به کمک خط‌کش غیر مدرج و پرگار رسم کنید.

★ ۱۱. از مثلثی طول دو ضلع و طول دو ارتفاع نظیر ضلع سوم مفروض است، مثلث را رسم کنید.

۱۲. مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین به‌اندازه وتر $4\sqrt{2}$ رسم کنید.

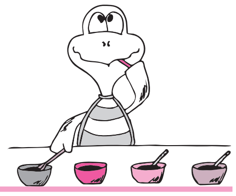
★ ۱۳. متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول قطرهای آن ۶ و ۸ باشد، در تعداد جواب‌ها بحث کنید.

★ ۱۴. مستطیلی به طول قطر ۸ رسم کنید.

★ ۱۵. یک لوزی رسم کنید که طول قطرهای آن ۴ و ۸ باشد.

★ ۱۶. مربعی رسم کنید که پاره‌خط AB با طول مفروض d قطر آن باشد.

★ ۱۷. ذوزنقه $ABCD$ را با معلوم بودن ۴ ضلع آن رسم کنید.



پرسش‌های چهارگزینه‌ای

ترسیم‌های هندسی

۱. نقطه‌ی O روی خط L قرار دارد. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از نقطه‌ی O به فاصله ۴ واحد و از خط L به فاصله ۳ واحد باشد؟

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) چهار

۲. محل برخورد قطرهای یک مربع، مرکز دایره‌ای به شعاع ۴ است. اگر طول قطر مربع ۸ واحد باشد، دایره و مربع در چند نقطه با یکدیگر برخورد دارند؟

۱) ۸ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) صفر

۳. پاره‌خط AB به طول L مفروض است. اگر باتوجه به مقدار L، فقط یک نقطه در صفحه وجود داشته باشد که از A به فاصله‌ی ۴ و از B به فاصله‌ی ۶ باشد، آن‌گاه مجموع مقادیر ممکن برای L کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۱۰ ۴) ۹

۴. مربعی به ضلع ۴ مفروض است. اگر A ناحیه‌ای درون مربع باشد که هر نقطه‌ی درون آن ناحیه، فاصله‌اش از تمام رئوس مربع بیشتر از یک باشد بیشترین مساحت ناحیه A کدام است؟

۱) $۱۶-\pi$ ۲) $۱۶-۲\pi$ ۳) π ۴) $\frac{\pi}{۴}$

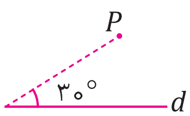
۵. چند نقطه در صفحه مختصات وجود دارد که از نقطه $A(۳,۲)$ به فاصله ۴ باشند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) بی‌شمار ۴) ۴

۶. نقطه‌ی T به فاصله $۳x+۱$ از خط d قرار دارد. اگر هیچ نقطه‌ای روی خط d به فاصله‌ی ۱۰ تا نقطه‌ی T وجود نداشته باشد، مقدار x کدام گزینه می‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷. باتوجه به شکل زیر چند نقطه وجود دارد که از نقطه P به فاصله ۲ و از خط d به فاصله‌ی ۱ باشد؟



۱) ۱ ۲) ۲
۳) ۳ ۴) ۴

۸. خط l و l' غیر موازی باشند. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از خط l به اندازه‌ی ۴ واحد و از خط l' به اندازه ۳ واحد باشد؟

۱) صفر ۲) دو ۳) چهار ۴) شش

۹. مربع $ABCD$ به ضلع $۲\sqrt{۲}$ مفروض است. چند نقطه روی محیط مربع وجود دارد که فاصله‌اش از قطر BD برابر ۱ واحد باشد؟

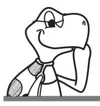
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰. اگر طول پاره‌خط AB برابر ۷ واحد باشد، آن‌گاه چند نقطه در صفحه یافت می‌شود که از A به فاصله ۵ واحد و از B به فاصله ۴ واحد باشد.

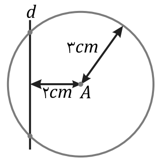
۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۱۱. اگر فاصله‌ی دو خط موازی d و d' برابر ۶ باشد. در این صورت کدام گزینه نشانگر همه نقاطی است که تفاضل فواصل آن نقاط از این دو خط برابر ۲ باشد؟

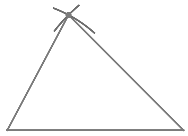
۱) یک خط موازی با d و d' و بین این دو
۲) دو خط موازی با d و d' و بین این دو
۳) دو خط موازی با d و d' و خارج این دو
۴) چهار خط موازی با d و d'



پاسخ تمرین‌های فصل ۲



۱. مکان هندسی مجموعه نقاطی در صفحه که از نقطه A به فاصله ۳cm می‌باشد، دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۳cm است. چون شعاع دایره از فاصله نقطه A تا خط d بیشتر است، پس این دایره خط را در دو نقطه قطع خواهد کرد. پس این مسئله دو جواب دارد.



۲. برای رسم این مثلث ابتدا باید پاره‌خطی به طول ۷cm رسم کنیم. سپس دهانه پرگار را به‌اندازه ۴cm باز می‌کنیم و به مرکز یک سر پاره‌خط کمانی می‌زنیم و بار دیگر دهانه پرگار را به‌اندازه ۵cm باز کرده و این بار به مرکز سر دیگر پاره‌خط کمانی می‌زنیم. محل تلاقی این دو کمان رأس سوم این مثلث خواهد بود.

۳. الف) مکان هندسی مجموعه نقاطی که از دو نقطه ثابت به یک فاصله است عمودمنصف پاره خط بین دو نقطه است. پس برای یافتن نقاطی که هم از A و B و هم از C و D به یک فاصله باشند، باید عمود منصف این دو پاره‌خط را رسم کنیم. محل تلاقی این دو عمودمنصف نقطه‌ای است که سؤال از ما خواسته است.

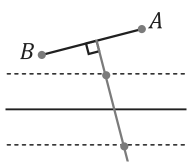
ب)

$$OA = OD \begin{cases} OA = OB \leftarrow & \text{نقطه } O \text{ روی عمودمنصف پاره‌خط } AB \\ OC = OD \leftarrow & \text{نقطه } O \text{ روی عمودمنصف پاره‌خط } CD \\ OB = OC \leftarrow & \text{نقطه } O \text{ روی عمودمنصف پاره‌خط } BC \end{cases}$$

چون $OA = OD$ پس نقطه O روی عمودمنصف پاره‌خط AD قرار می‌گیرد در نتیجه اگر دایره‌ای به مرکز O و شعاع AO رسم کنیم هر ۴ نقطه A، B، C و D روی محیط این دایره قرار می‌گیرند.

۴. چون هر دو نقطه A و B روی دایره به مرکز O است، نتیجه می‌گیریم $OA = OB$ است یعنی O روی عمودمنصف پاره‌خط AB است. و از طرفی چون دو نقطه A و B روی دایره به مرکز O' است، نتیجه می‌گیریم $O'A = O'B$ است، یعنی O' روی عمودمنصف پاره‌خط AB هم قرار می‌گیرد. پس OO' عمودمنصف AB خواهد بود.

۵. مکان هندسی مجموعه نقاطی در صفحه که از دو نقطه A و B به یک فاصله باشند، بر روی عمودمنصف پاره‌خط واصل بین دو نقطه قرار می‌گیرد. و مجموعه نقاطی که از خط d به یک فاصله است دو خط موازی با خط d در دو طرف آن و به فاصله a خواهد بود. محل تلاقی این دو خط با عمودمنصف پاره‌خط AB جواب این مسئله خواهد بود.

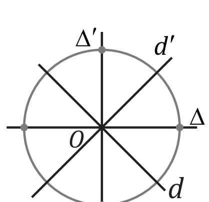


حالت ۱: اگر عمودمنصف با این خطوط قاطع باشد، این مسئله دو جواب خواهد داشت.

حالت ۲: اگر عمودمنصف با این خطوط موازی باشد، مسئله جوابی ندارد.

حالت ۳: اگر عمود منصف بر یکی از این خطوط منطبق باشد، این مسئله بی‌شمار جواب خواهد داشت.

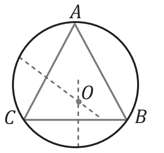
۶. مجموعه نقاطی در صفحه که از دو خط متقاطع به فاصله برابر باشند، دو نیمساز این دو خط است. (مطابق شکل زیر)



خطوط Δ و Δ' نیمسازهای دو خط d و d' هستند. حال بایستی این نقاط از نقطه O به فاصله ۵cm باشند. مکان هندسی مجموعه نقاطی که از یک نقطه ثابت به فاصله ۵cm باشد، دایره‌ای به مرکز نقطه ثابت و شعاع ۵cm است. پس نقاطی که به دنبال آن هستیم هم باید بر روی خطوط Δ یا Δ' باشد و هم اینکه روی محیط دایره بنابراین تعداد جواب‌های این سؤال ۴ نقطه خواهد بود.

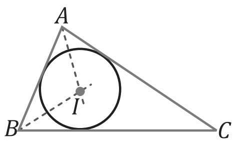
۷. الف) در هر مثلث نقطه‌ای که از برخورد عمودمنصف‌های دو ضلع به دست می‌آید از هر ۳ رأس به یک فاصله است.

$$\left.\begin{array}{l} AC \text{ روی عمود منصف } O \Rightarrow OA = OC \\ BC \text{ روی عمود منصف } O \Rightarrow OB = OC \end{array}\right\} \Rightarrow OA = OB = r$$



پس اگر دایره‌ای به مرکز O و شعاع $OC = OB = OA = r$ رسم کنیم هر سه رأس A، B و C روی محیط این دایره قرار می‌گیرد.

ب) با توجه به توضیحات بالا برای هر مثلث به مرکز محل تلاقی عمودمنصف‌ها و شعاع فاصله آن نقطه تا یکی از رئوس می‌توان دایره‌ای رسم کرد که از هر سه رأس مثلث عبور کند.



۸. الف) نقطه I محل تلاقی دو نیمساز زاویه‌های $\hat{A}$ و $\hat{B}$ است. پس فاصله نقطه I از اضلاع AC و AB و نیز AB و BC یکسان است، پس فاصله آن از اضلاع AC و BC هم برابر است، یعنی روی نیمساز زاویه $\hat{C}$ هم قرار می‌گیرد.

ب) چون فاصله نقطه A از هر سه ضلع یکسان و فرض می‌کنیم برابر a باشد، اگر دایره‌ای به مرکز I و شعاع a رسم کنیم، این دایره بر سه ضلع مماس خواهد شد.

۹. به مرکز A کمانی رسم می‌کنیم تا خط d را در دو نقطه قطع کند. چون فاصله این دو نقطه از نقطه A برابر است، پس این ۳ نقطه رئوس مثلث متساوی‌الساقین به رأس A خواهند بود. حال برای آن‌که یکی از ساق‌ها بر روی خط d قرار گیرد: دهانه پرگار را به میزان دلخواه باز می‌کنیم و به مرکز A یک کمان روی خط d می‌زنیم. نقطه تلاقی این کمان با خط d را B می‌نامیم. دهانه پرگار را تغییر نداده (به همان شعاع AB) این بار کمانی به مرکز B روی خط d می زنیم و این نقطه را C می‌نامیم. چون پاره‌خط‌های $BC = AB$ است، پس مثلث ABC متساوی‌الساقین بوده و یک ساق آن روی خط d منطبق است.

۱۰. زاویه 45°: یک خط دلخواه رسم می‌کنیم. از نقطه‌ای دلخواه یک عمود بر خط می‌زنیم. زاویه ایجادشده قائمه است. حال اگر نیمساز زاویه را رسم کنیم یک زاویه 45° خواهیم داشت.

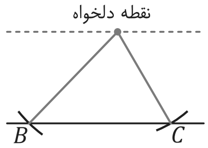
زاویه 60°: یک پاره‌خط به طول a رسم می‌کنیم. از دو س پاره‌خط کمان‌هایی به شعاع a رسم می‌کنیم تا یک مثلث متساوی‌الاضلاع تشکیل شود. هر زاویه داخلی این مثلث 60° است.

زاویه 30°: اگر نیم‌ساز زاویه ۶۰ درجه‌ای که رسک کردیم را رسم کنیم، زاویه 30° داریم.

زاویه 15°: اگر نیم‌ساز زاویه ۳۰ درجه‌ای که رسک کردیم را رسم کنیم، زاویه 15° داریم.

زاویه 75°: یک زاویه قائمه رسم می‌کنیم. دهانه پرگار را به‌اندازه a باز کرده و به مرکز این زاویه قائمه کمانی روی یکی از اضلاع قائمه می‌زنیم این بار به همان شعاع یک کمان به مرکز نقطه ایجاد شده و یک کمان به مرکز زاویه قائم رسم می‌کنیم. مثلث متساوی‌الاضلاعی که یک رأس آن روی زاویه قائم است خواهیم داشت. پس یعنی 60° روی 90° جدا کرده‌ایم حال برای زاویه 30° باقی‌مانده یک نیمساز رسم می‌کنیم بنابراین وقتی از 90°، 15° را جدا کنیم، یک زاویه 75° خواهیم داشت.

۱۱. خط دلخواه d را رسم می‌کنیم. خط موازی d و به فاصله ارتفاع داده‌شده رسم می‌کنیم. ضلع سوم مثلث حتماً روی خط d و یکی از رئوس مثلث روی خط رسم شده خواهد بود.

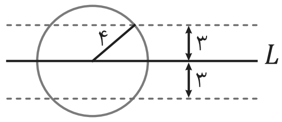


یک نقطه به دلخواه روی خط موازی انتخاب کرده و یک بار به شعاع یکی از اضلاع داده‌شده کمانی می‌زنیم تا خط d را در نقطه B قطع کند و یک بار به شعاع ضلع دیگر کمانی می‌زنیم تا خط d را در نقطه C قطع کند. حال اگر نقاط B و C را به نقطه دلخواه مشخص کرده وصل کنیم، مثلث خواسته‌شده به دست می‌آید.

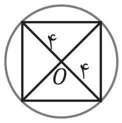
۱۲. می‌دانیم در هر مثلث متساوی‌الساقین میانه و عمودمنصف بر هم منطبق بوده و اگر مثلث قائم‌الزاویه باشد طول میانه وارد بر وتر نصف وتر است. با توجه به ویژگی فوق شروع به رسم می‌کنیم. پاره‌خطی به طول $۴\sqrt{۲}$ رسم می‌کنیم. عمودمنصف این پاره‌خط را رسم می‌کنیم. می‌دانیم رأس این مصلص نقطه‌ای

پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱. **گزینه «۴»**
دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۴ واحد رسم می‌کنیم. مجموعه نقاط روی دایره از O، ۴ واحد فاصله دارند. سپس دو خط موازی L در دو طرف آن به فاصله‌ی ۳ واحد رسم می‌کنیم. مطابق شکل زیر چهار نقطه داریم که هم‌زمان دو ویژگی فوق را داشته باشد.

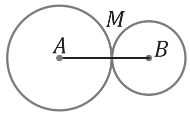


۲. **گزینه «۲»**

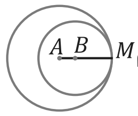


قطرهای مربع یکدیگر را نصف کرده و برهم عمودند. بنابراین اگر دایره‌ای رسم کنیم به مرکز محل برخورد قطرهای مربع و شعاع نصف طول قطر، از هر ۴ رأس عبور خواهد کرد.

۳. **گزینه «۲»**



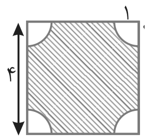
حالت اول : $L = AM + BM = ۶ + ۴ = ۱۰$



حالت دوم : $L = AM - BM = ۶ - ۴ = ۲$

باتوجه به شکل‌های فوق دو جواب مختلف برای L وجود دارد که مجموع آن‌ها برابر ۱۲ خواهد شد.

۴. **گزینه «۱»**
مربعی به طول ضلع ۴ رسم می‌کنیم. مکان هندسی نقاطی که درون مربع از هر رأس فاصله‌ای کم‌تر از یک دارند ربع دایره‌ای به شعاع یک و به مرکز رئوس مربع است. چون به دنبال نقاطی هستیم که فاصله آن‌ها بیشتر از یک باشد، پس مکان هندسی خواسته شده ناحیه هاشور خورده در شکل زیر است:



$$S_{\text{هاشور}} = S_{\text{مربع}} - S_{\text{دایره}} = ۴ \times ۴ - \pi(۱)^۲ = ۱۶ - \pi$$

چون ۴ ربع دایره داریم، با هم تشکیل یک دایره کامل خواهند داد.

۵. **گزینه «۳»**

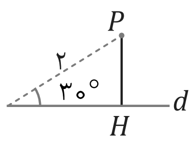
نکته: مکان هندسی مجموعه نقاطی که از نقطه O به فاصله r هستند، دایره‌ای به مرکز O و شعاع r است.

بنابراین مکان هندسی خواسته شده سؤال یک دایره خواهد بود. یعنی بی‌شمار جواب برای این مسئله وجود دارد.

۶. **گزینه «۴»**
باتوجه به تعریف دایره، مجموعه نقاطی که از نقطه T فاصله برابر ۱۰ واحد دارند، دایره‌ای به مرکز T و شعاع ۱۰ را می‌سازند. باتوجه به فرض سؤال این دایره نباید خط مذکور را قطع نماید. پس فاصله نقطه T تا خط باید از شعاع دایره بیشتر باشد:

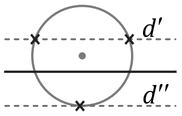
$$۳x + ۱ > ۱۰ \longrightarrow ۳x > ۹ \longrightarrow x > ۳$$

۷. **گزینه «۳»**
از آن‌جا که $\sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲}$ نتیجه می‌گیریم:



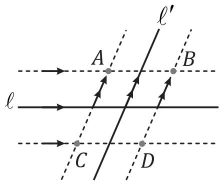
$$\sin ۳۰^\circ = \frac{pH}{۲} \Rightarrow pH = ۲(\frac{۱}{۲}) = ۱$$

تمام نقاطی که از نقطه‌ی p به فاصله‌ی ۲ هستند. روی دایره‌ای به مرکز p و به شعاع ۲ قرار دارد. و تمام نقاطی که از خط d به فاصله‌ی ۱ باشند دو خط موازی d و در دو طرف d است.



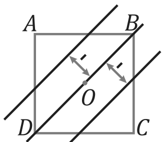
مطابق شکل دایره خط d' را در دو نقطه قطع کرده و بر خط d'' مماس خواهد شد.

۸. **گزینه «۳»**



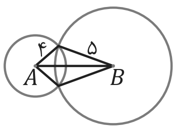
باتوجه به شکل دو خط به موازات l به فاصله‌ی ۴ واحد و دو خط به موازات l' به فاصله‌ی ۳ واحد رسم می‌کنیم. محل تلاقی خطوط رسم شده با هم چهار نقطه خواهد بود.

۹. **گزینه «۴»**



طول قطر مربع باتوجه به قضیه فیثاغورس برابر چهار واحد است. فاصله‌ی نقطه O از A و C برابر ۲ واحد می‌باشد. مجموع نقاطی که از قطر BD برابر ۱ واحد هستند، دو خط موازی می‌باشند، این دو خط موازی محیط مربع را در ۴ نقطه قطع خواهد کرد.

۱۰. **گزینه «۳»**

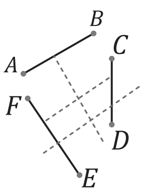


پاره‌خط AB به طول ۷ واحد را رسم می‌کنیم. باتوجه به تعریف دایره دو دایره به شعاع‌های ۴ و ۵ واحد به مرکز A و B رسم می‌کنیم، محل تلاقی این دو دایره جواب‌های این مسئله است. همانطور که در شکل مشاهده می‌شود ۲نقطه با چنین ویژگی یافت می‌شود.

۱۱. **گزینه «۲»**
مجموع فاصله‌ی این نقطه از دو خط برابر ۶ و اختلاف آن برابر ۲ است پس فاصله این نقطه از یک خط برابر ۴ و از خط دیگر برابر ۲ خواهد بود.
حال ممکن است یک‌بار فاصله آن از d، ۲ و بار دیگر از d' برابر ۲ باشد پس گزینه ۲ صحیح خواهد بود.

۱۲. **گزینه «۱»**

نکته: مجموعه نقاطی که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد روی عمود منصف آن پاره‌خط قرار دارد.

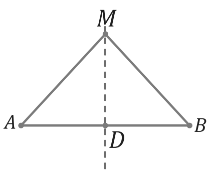


پس برای به‌دست آوردن جواب باید عمود منصف ۳ پاره‌خط مفروض را رسم کنیم.
باتوجه به شکل روبه‌رو چون این سه عمود منصف هم‌رأس نیستند پس این مسئله جواب ندارد.

۱۳. **گزینه «۳»**
فاصله هر نقطه روی عمود منصف از دو سر پاره‌خط برابر است. بنابراین:

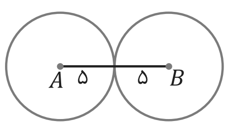
$$۳x - ۷ = x + ۵ \Rightarrow ۲x = ۱۲ \Rightarrow x = ۶$$

در مثلث MDB، $MB = ۱۱$ و $DB = ۴$ خواهد بود. بنابراین:



$$MD^۲ = MB^۲ - DB^۲$$
$$MD^۲ = ۱۲۱ - ۱۶$$
$$MD^۲ = ۱۰۵ \Rightarrow MD = \sqrt{۱۰۵}$$

۱۴. **گزینه «۲»**



دو دایره‌ی به شعاع ۵ و به مرکز A و B رسم می‌کنیم چون $AB = ۱۰$ است پس این دو دایره بر هم مماس شده و یک نقطه، جواب مسئله است.

۱۵. **گزینه «۳»**

$$OA = OD \Rightarrow \begin{cases} OA = OB \leftarrow AB \text{ نقطه } O \text{ روی عمود منصف} \\ OC = OD \leftarrow CD \text{ نقطه } O \text{ روی عمود منصف} \\ OB = OC \leftarrow BC \text{ نقطه } O \text{ روی عمود منصف} \end{cases}$$

چون $OD = OA$ پس فاصله‌ی نقطه O از ۴ نقطه A، B، C و D یکسان است پس این ۴ نقطه روی یک دایره به مرکز O قرار دارند.