

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

آموزش ریاضیات ۷

به همراه تمرین‌های مناسب

ویرایشی دانش‌آموزان ممتاز

(کتاب آبی)

مؤلفین

مسئول باطنی

ممیدرضا فلیلی



انتشارات خورشید

خاطره

دوران تحصیلات ابتدایی و راهنمایی را در روستای زادگاهم گذراندم. بدیهی است که وجود کتاب کمک آموزشی در آن منطقه و در آن زمان (از سال ۵۵ تا ۶۳) فقط در حد حل المسائل میسر بود. کتاب‌های درسی به هیچ عنوان اغناکننده‌ی نیاز و توانایی من در امر ریاضیات نبودند و مثل یک آدم تشنه در جستجوی منابعی برای سیراب کردن این تشنگی، دورانم را سپری کردم تا این که پس از مهاجرت به اسلام‌شهر (از شهرستان‌های استان تهران) و با شروع دوران مقطع دبیرستان از وجود استادی به نام «سجودی» بهره‌جستم. در آن منطقه از حاشیه‌ی شهر تهران و در بین حدوداً ۲۰۰ نفر دانش‌آموز پایه‌ی اول دبیرستان این استاد توانمند پی به توانایی و علاقه‌ی من به ریاضیات برده و در حد خودش در صدد سیراب کردن این فرد تشنه به ریاضی برآمد. در آن زمان نمایشگاه کتاب مثل الان پررونق نبود. در پارک دانشجو نمایشگاه کوچکی از کتاب دایر شده بود که ایشان من را به همراه دو دانش‌آموز دیگر از اسلام‌شهر به این نمایشگاه آورده و کتاب‌هایی را برای ما معرفی کرد. در آن زمان کتابی را خریدم که ترجمه شده‌ی یک کتاب روسی بود و توانایی‌های خودم را در امر ریاضی را مدیون این کتاب می‌دانم. بودن کتابی مناسب می‌تواند در ذهن یک دانش‌آموز چنان تاثیری داشته باشد که بعد از گذشت حدوداً ۳۰ سال از آن تاریخ، لحظات خوش بودن با آن کتاب فراموش نشود.

حادثه

هر از چندگاهی اتفاقات ناگواری ناشی از نخبه‌پروری و تلاش برای نخبه‌جلوه دادن دانش‌آموزی از گوشه و کنار به گوش می‌رسد. آخرین این حوادث متعلق به دانش‌آموزی ۱۲ ساله می‌شود که در اردیبهشت ۹۴ در سر جلسه‌ی امتحان آزمون ورودی تیزهوشان بر اثر سکت‌های مغزی و فشار استرس وارد بر او جان خود را از دست داد.

دلهره

اگر دیده باشید بر روی پاکت‌های سیگار دو نوع ریه کشیده شده است، ریه‌ی فردی سالم که از دخانیات به دور است و ریه‌ی فردی مبتلا به دخانیات. شاید تولیدکنندگان دخانیات اجبار به کشیدن این دو تصویر شده‌اند تا مضرات استفاده از این دخانیات را به آگاهی عموم برسانند.

دغدغه

وجود دانش‌آموزان نخبه‌ی بالقوه‌ی زیادی در مملکت و کشور عزیزمان از یک طرف و وجود افراد توانمندی که می‌توانند به این نخبگان ارائه‌ی خدمت بدهند از طرف دیگر، ایجاب وظیفه می‌کند که زمینه را چنان فراهم کنیم که این افراد توانمند بتوانند برای نخبگان این مرز و بوم ارائه‌ی خدمت نموده و جهت بارور نمودن استعداد و توانایی‌های آنان تلاش لازم را انجام دهند.

نتیجه

انتشارات خوشخوان با بهره‌گیری از دبیران، مولفین، فارغ‌التحصیلان ممتاز که خود در سنوات گذشته از افتخار آفرینان و مدال‌آوران المپیاد بوده‌اند و یا جزء نفرات ممتاز کنکور سراسری، توانسته است کتب مناسب و مفیدی را تدوین و روانه‌ی بازار نشر کند. باز خورد و بازتاب وجود این کتب در مدارس، منازل، کتابخانه‌ها و ... در چند سال گذشته برای ما دلگرم‌کننده و شادی‌بخش بود و از خداوند منان خواسته‌ایم تا نگارش قلم ما و دستاورد کاران این انتشارات را در جهت خدمت بیشتر به نخبگان این مملکت قرار دهد ولی با شنیدن حوادثی که به نمونه‌ای از آن اشاره شد دلهره سر تا پای وجودمان را می‌گیرد که نکند ما هم در جهت تقویت و تشویق اولیا برای نخبه جلوه دادن فرزندشان به هر قیمتی، گامی برداشته‌ایم! متزلزل شدن قلم‌ها به خاطر این دلهره و موارد اشاره شده در خاطره و دغدغه، این تزلزل را از بین می‌برد و دوباره جان و امید دوباره‌ای پیدا کرده و با همتی دوچندان در نگارش مباحثی برای دانش‌آموزان ممتاز، تیزهوش و المپیادی، برمی‌آییم ولی آن چیزی که نباید فراموش شود جایگاه این کتب در پر کردن اوقات فرزندان عزیز می‌باشد و کسانی که می‌توانند این موضوع را مدیریت کنند اولیاء گرامی می‌باشند. اگر از مطالعه کتبی مشابه این کتاب فرزندمان به وجد آمده و احساس کند گم شده‌اش را پیدا کرده،

آن‌گاه مبارک او باد و حق به حق‌دار رسیده است، ولی اگر با پافشاری ما اولیاء در جهت حل سوالات این کتاب و کتب مشابه به جهت این که او را در جامعه به عنوان یک فرد نخبه معرفی کنیم و غیر از استرس و خمودی در او چیزی یافت نکنیم باید آگاه باشیم که در حق چنین فرزندی ظلمی روا می‌داریم که جبران‌ش غیرممکن است.

پس:

اگر خریدار این کتاب جزء دانش‌آموزان تیزهوش و نخبه می‌باشد و از حل سوالات آن لذت برده و بر شادابی اش افزوده می‌شود، مبارک‌ش باد، در غیر این صورت بهتر است آن را بوسیده و کنار بگذارد و هم‌نوعان خود از نظر هوش و استعداد را از خرید آن بر حذر دارد.

خاتمه

در انتها لازم می‌دانم از تمام کسانی که در تولید این اثر نقش داشتند اعم از مولفین، حروف‌چین‌ها، پرسنل زحمت‌کش انتشارات و . . . کمال تشکر را داشته باشم و از شما خوانندگان گرامی نیز به خاطر نواقص و کمبودهای احتمالی طلب عفو دارم.

رسول حاجی زاده

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



پیشرفتای علمی خیلی سرعت گرفتن. کامپیوترها، گوشی‌های تلفن همراه، اینترنت و . . . به سرعت پیش می‌روند. وقتی ما بچه بودیم، همین تلفن‌های معمولی رو هم که می‌دیدیم کلی تعجب می‌کردیم. برامون خیلی عجیب بود که صدا از توی سیم عبور می‌کرد و به طرف دیگه‌ی شهر، کشور یا دنیا می‌رفت. نمی‌دونستیم چطوری تلفن ما می‌فهمید که ما با کی می‌خواهیم صحبت کنیم و اون شماره رو که می‌گیریم، چجوری به تلفن شخص مور دنظر ما وصل می‌شه. البته هنوزم بعضی چیزا رو نمی‌دونیم. مثلاً هنوز نمی‌دونیم وقتی یه جایی مون درد می‌کنه و قرص استامینوفن می‌خوریم، استامینوفن از کجا می‌فهمه کجامون درد می‌کنه و اون جا رو خوب می‌کنه!

الان خیلی شگفت‌زده می‌شیم وقتی می‌بینیم همه چی اینقدر سریع پیشرفت می‌کنه.

این پیشرفتها چطور صورت می‌گیره؟ کیا موجب می‌شن علم با این سرعت پیش بره؟ قطعاً ریاضی در این پیشرفت نقش موثری داره و مهندسانی که ریاضی شون خوب بوده در این پیشرفتها تاثیر زیادی دارن. توی اینترنت ریاضی مهم‌ترین وسیله برای حفظ پیغامها و مبادله‌های مالی و ابزار اصلی فشرده کردن اطلاعات، کدگذاری و مبنای بانک‌های اطلاعاتیه. و خیلی چیزای دیگه.

البته فکر نکنین که ریاضی یه سری فرموله که به‌طور معجزه‌آسایی از اون‌ها استفاده می‌کنیم. بلکه ریاضی «درست فهمیدن» صورت مساله و «درست فکر کردن» برای رسیدن به جواب مساله‌هاست.

برای این که به این توانایی برسین باید «صبر و پشتکار» داشته باشین.

بعضی از معلم‌ها از روش کلامی در آموزش ریاضی استفاده می‌کنن و همه چیز رو در کلاس توضیح می‌دن. خودشون همه‌کاره و دانش‌آموز هیچ‌کاره است. معلم مساله می‌گه و دانش‌آموز حل می‌کنه. دانش‌آموز بدون معلم قدمی پیش نمی‌ره و پشت سر معلم حرکت می‌کنه.

ما معتقدیم که خود شما توانایی بسیار زیادی در «یادگیری» دارید. فقط کافیست که شرایط فراهم بشه. در این روش خودتون بدون راهنمایی معلم یا با راهنمایی مختصر، اصل یا قانونی را کشف می‌کنین و مساله‌ای را حل می‌کنین. شما در یادگیری آغازکننده هستید و هر جا به مشکلی برخورد کردید اول خودتون فکر می‌کنین، بعد با دوستتون بحث می‌کنین و در نهایت از معلم می‌پرسین. توی این روش معلم باید خیلی صبر و حوصله داشته باشه و عجله نکنه و به شما این فرصت رو بده که خودتون کشف کنین. فقط باید شما رو هدایت کنه. وقتی خودتون مطلبی رو کشف می‌کنین، چنان لذتی می‌برین که دوست دارین کشف خودتون رو برای همه بیان کنین. و این «بهترین انگیزه» برای تلاش‌های بعدی برای یادگیریه.

توی این کتاب ما سعی کردیم همین کار رو بکنیم. یعنی مساله‌ای را طرح کنیم و شما به دنبال مسیری برای حل اون باشین. سعی کردیم انگیزه‌ی فکر کردن به مساله‌ها رو ایجاد کنیم. این روش یادگیری اکتشافی نامیده می‌شه. یادگیری اکتشافی توانایی‌های ذهنی شما رو تقویت می‌کنه. انگیزه‌ی درونی شما رو افزایش می‌ده. به شما مهارت‌های کشف کردن رو یاد میده و شما را جستجوگر و خلاق بار میاره و مطالب بهتر یادتون می‌مونه.

در این روش دانش‌آموز فعاله و در امر یادگیری شرکت داره، با مساله‌ها مواجه می‌شه، راجع به اون فکر می‌کنه و با راهنمایی معلم به حل اون می‌پردازه و خودش به مفاهیم پی می‌بره. دانش‌آموز در این روش با سرعت خودش، مطالب رو یاد می‌گیره و فرصت داره که به مطالب فکر کنه و وقتی مفاهیم رو یاد می‌گیره و مساله‌ها رو حل می‌کنه اعتماد به نفس پیدا می‌کنه و علاقه‌مند میشه که چیزای بیشتری یاد بگیره و به جای این که راه رفتن معلم رو تماشا کنه، خودش قدم به قدم راه رفتن رو تمرین می‌کنه.

حالا توصیه‌ی ما به شما عزیزان:

۱. در شروع هر فصل، توضیحات این کتاب رو بخون، سعی کن خودت یاد بگیری. اگه خودت یاد بگیری از درس خوندن لذت می‌بری اما اگه یه نفر بگه بیا بهت یاد بدم، اون موقع خیلی کیف نمی‌کنی.
۲. سعی کن مثال‌ها رو اول خودت حل کنی. اگه نتونستی به حل اون‌ها نگاه کن.
۳. در حل مساله‌ها «صبر و پشتکار» فراموش نشه.
۴. اگه نتونستی مساله‌ای رو حل کنی یا به جوابت شک داری، از دوستان کمک بگیر اگه باز هم نتونستی اونو حل کنی از معلمت راهنمایی بگیر.

امیدواریم این کتاب به شما کمک کنه خودتون مفاهیم رو کشف کنین و دانش پنهان در مغز خودتون رو آشکار کنین.

فهرست مطالب

۱	راهبردهای حل مسئله	فصل ۱	
۳۷	اعداد صحیح	فصل ۲	
۶۵	جبر و معادله	فصل ۳	
۹۱	هندسه و استدلال	فصل ۴	
۱۲۳	شمارنده‌های و اعداد اول	فصل ۵	
۱۶۱	سطح و حجم	فصل ۶	
۱۸۷	توان و جذر	فصل ۷	
۲۳۳	بردار و مختصات	فصل ۸	
۲۶۹	آمار و احتمال	فصل ۹	



راهبردهای حل مسئله

۱. راهبرد رسم شکل
۲. راهبرد الگوسازی
۳. راهبرد حذف حالت‌های نامطلوب
۴. راهبرد الگویابی
۵. راهبرد حدس و آزمایش
۶. راهبرد زیرمسئله
۷. راهبرد حل مسئله‌ی ساده‌تر
۸. راهبرد روش‌های نمادین





راهبرد رسم شکل



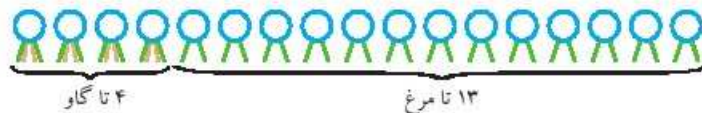
مساله ۱

یک کشاورز تعدادی گاو و مرغ دارد. اگر این حیوانات روی هم ۱۷ سر و ۴۲ پا داشته باشند. (با فرض این که همگی سالم باشند.) این کشاورز چند گاو و چند مرغ دارد؟

حل. مجتبی برای حل این مسئله، شکل‌های زیر را رسم کرد. او به جای سر هر حیوان دایره‌ای کشید. بعد با خود فکر کرد که اگر همه‌ی حیوان‌ها مرغ باشند، چند پا خواهند داشت؟ و برای هر حیوان ۲ تا پا کشید.



۱۷ حیوان هر کدام ۲ پا دارند، روی هم $17 \times 2 = 34$ تا پا دارند. اما تعداد پاها باید ۴۲ تا باشد. از آن جا که $42 - 34 = 8$ پس او باید ۸ تا پای دیگر بکشد. پس با کشیدن ۲ تا پا برای بعضی از مرغ‌ها، آن‌ها را به گاو تبدیل می‌کند! او با کشیدن ۸ تا پا، می‌تواند ۴ مرغ را به گاو تبدیل کند.



پس این کشاورز ۴ تا گاو و ۱۳ تا مرغ دارد.

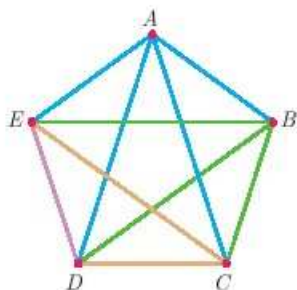
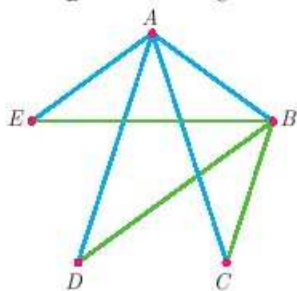
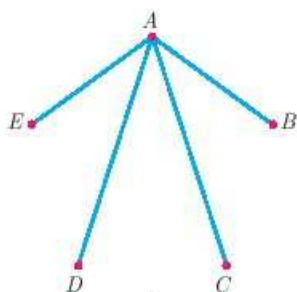
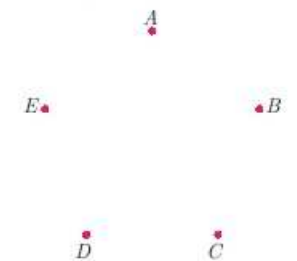


مشاهده کردید که مجتبی چگونه با کشیدن شکلی ساده، راهبرد حل مسئله را پیدا کرد. کشیدن یک شکل مناسب، می‌تواند به ساده شدن و حل مسئله کمک کند.

مساله ۲

پنج تیم فوتبال در یک دوره مسابقات شرکت کرده‌اند. قرار است هر تیم با هر یک از تیم‌های دیگر یک بار مسابقه دهد. علی می‌خواهد بداند در کل، چند مسابقه باید برگزار شود؟





حل. علی ابتدا این پنج تیم را با حروف A, B, C, D و E نام گذاری کرد و هر تیم را با یک نقطه نمایش داد.

اگر مسابقه‌ای بین دو تیم برگزار شود، نقطه‌های مربوط به آن دو تیم را به وسیله‌ی یک پاره‌خط به هم وصل می‌کند. تیم A باید با همه‌ی تیم‌ها مسابقه دهد. نقطه‌ی A را به همه‌ی نقطه‌ها وصل می‌کند.

تیم B هم باید با همه‌ی تیم‌ها مسابقه دهد. علی نقطه‌ی B را قبلاً به نقطه‌ی A وصل کرده است. کافی است B را به نقاط C, D و E وصل کند.

او به همین ترتیب نقاط دیگر را هم به هم وصل کرد و شکل مقابل به دست آمد.

حالا با شمردن تعداد پاره‌خط‌ها، می‌توان تعداد مسابقات را مشخص کرد.

از نقطه‌ی A ، ۴ پاره‌خط رسم کرد. از نقطه‌ی B ، ۳ پاره‌خط جدید (یکی را که به A وصل شده قبلاً شمرده‌ایم)، از نقطه‌ی C ، ۲ پاره‌خط جدید (دو تا که به A و B وصل شده‌اند را قبلاً شمرده‌ایم) و از D ، ۱ پاره‌خط جدید رسم کردیم. تعداد پاره‌خط‌ها برابر

است با: $۱ + ۲ + ۳ + ۴ = ۱۰$. پس در کل ۱۰ مسابقه انجام خواهد گرفت.



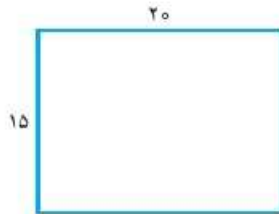


این مطلب را می‌توانستیم به صورت زیر نیز بیان کنیم:

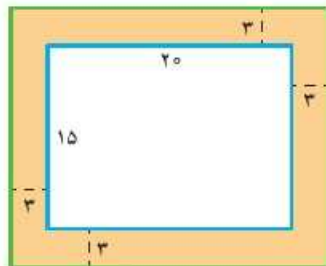


مسئله ۳

یک استخر به شکل مستطیل به طول ۲۰ متر و عرض ۱۵ متر ساخته‌اند. دور تا دور این استخر حاشیه‌ای به پهنای ۳ متر دارد. می‌خواهند حاشیه‌ی استخر را سنگ‌فرش کنند. مساحت ناحیه‌ای را که باید سنگ‌فرش شود را حساب کنید.



حل. استخر را به شکل یک مستطیل می‌کشیم که طول آن ۲۰ و عرض آن ۱۵ باشد.



برای کشیدن حاشیه‌ی استخر مستطیل دیگری می‌کشیم که طول آن از طول استخر ۳ متر فاصله داشته باشد. عرض آن هم همین‌طور. این مستطیل در بیرون مستطیل استخر رسم می‌شود.

مستطیل بزرگ‌تر را در نظر بگیرید. طول و عرض این مستطیل چند متر است؟
طول این مستطیل ۶ متر بیش‌تر از طول استخر و عرض آن هم ۶ متر بیش‌تر از عرض استخر است. پس طول آن ۲۶ و عرض آن ۲۱ است.
برای محاسبه‌ی مساحت حاشیه‌ی استخر باید مساحت مستطیل بزرگ را منهای مساحت استخر کنیم.

$$\text{مترمربع } 546 = 26 \times 21 = \text{مساحت مستطیل بزرگ}$$

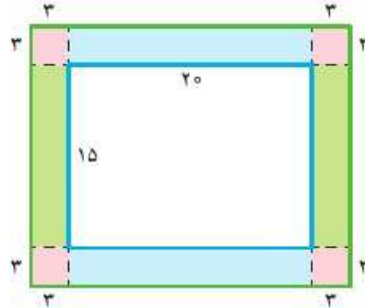
$$\text{مترمربع } 300 = 20 \times 15 = \text{مساحت استخر}$$

$$\text{مترمربع } 246 = 546 - 300 = \text{مساحت حاشیه‌ی استخر}$$





می توانستیم مساحت حاشیه‌ی استخر را با استفاده از شکل زیر و محاسبه‌ی مساحت‌های مربع‌ها و مستطیل‌ها به دست آوریم.

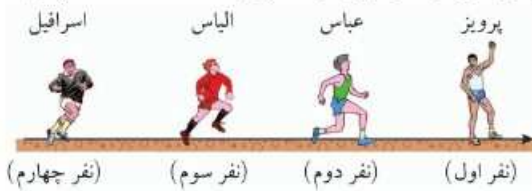


مساله‌ی ۴

چهار نفر به نام‌های پرویز، الیاس، اسرافیل و عباس در مسابقه‌ی دو شرکت کردند. عباس زودتر از الیاس از خط پایان گذشت. پرویز در این مسابقه اول شد. اسرافیل بعد از الیاس از خط پایان گذشت. رتبه‌های این چهار نفر را مشخص کنید. حل. برای حل این مسئله، ابتدا مسیر و جهت حرکت افراد را تعیین می‌کنیم.



عباس زودتر از الیاس و الیاس هم زودتر از اسرافیل از خط پایان گذشته است. پس:



مساله‌ی ۵

در کنار یک جاده‌ی مستقیم، تیرهای چراغ برق به فاصله‌ی مساوی پشت سر هم قرار گرفته‌اند. محسن با سرعت ثابت فاصله‌ی تیر اول تا تیر سوم را در ۳۰ ثانیه طی می‌کند. چه مدت طول می‌کشد تا محسن فاصله‌ی تیر اول تا ششم را طی کند؟





حل. برای حل این مسئله شکل زیر را در نظر می‌گیریم:



محسن فاصله‌ی تیر اول تا تیر سوم را در ۳۰ ثانیه طی می‌کند. پس برای طی کردن فاصله‌ی هر دو تیر متوالی ۱۵ ثانیه ($30 \div 2 = 15$) زمان لازم دارد.



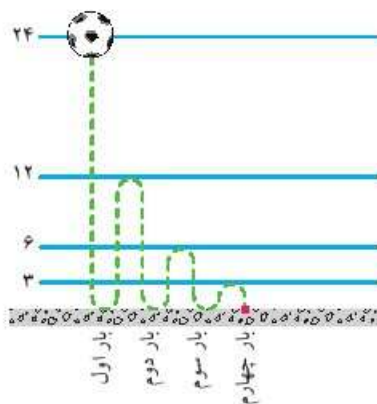
برای طی کردن فاصله‌ی تیر اول تا تیر ششم ۷۵ ثانیه، زمان لازم دارد. $5 \times 15 = 75$



مسئله‌ی ۶.

تویی از هر ارتفاعی رها شود، پس از برخورد با زمین نصف ارتفاع قبلی خود، بالا می‌آید. این توپ را از ارتفاع ۲۴ متری رها می‌کنیم. این توپ از لحظه‌ی رها شدن تا لحظه‌ای که برای چهارمین بار به زمین برخورد می‌کند، چند متر حرکت کرده است؟

حل. با توجه به شکل مسیر حرکت توپ را مشخص می‌کنیم. از لحظه‌ی رها شدن تا وقتی که برای اولین بار به زمین برخورد می‌کند ۲۴ متر را طی می‌کند. بعد از برخورد ۱۲ متر به بالا و سپس ۱۲ متر به پایین حرکت می‌کند.



تا این جا $12 + 12 + 24$ متر را پیموده است. سپس ۶ متر به بالا می‌رود و بعد ۶ متر به پایین حرکت می‌کند تا برای سومین بار به زمین برخورد می‌کند و در نهایت ۳ متر بالا می‌رود و دوباره ۳ متر پایین می‌آید تا برای چهارمین بار به زمین برخورد کند. در این لحظه مسافت طی شده برابر است با:

$$24 + 12 + 12 + 6 + 6 + 3 + 3 = 66 \text{ متر}$$





شش نفر به هم رسیدند و دوبه‌دو با هم دست دادند. عمل دست دادن روی هم چند بار صورت می‌گیرد؟



صابر تعدادی گوسفند و اردک دارد. تعداد سرهای آن‌ها روی هم ۲۱ و تعداد پاهای آن‌ها روی هم ۶۶ تا است. صابر چند گوسفند و چند اردک دارد؟



بابک، کامران، فرهاد، حسین، آرمین و رحیم در یک مسابقه‌ی دوی ۴۰۰ متر شرکت کردند. در پایان مسابقه، آرمین ۶ متر جلوتر از ابراهیم بود. بابک ۱۱ متر عقب‌تر از رضا بود. آرمین ۴ متر از حسین جلوتر و از رحیم ۲ متر عقب‌تر بود. فاصله‌ی کامران از نفر اول و آخر به یک اندازه بود. آن‌ها با چه ترتیبی مسابقه را تمام کردند؟ فاصله‌ی بین آن‌ها چقدر بود؟



کرمی در پایین دیواری ۱۳ متری قرار دارد. کرم هر روز ۴ متر به طرف بالا می‌خزد و هر شب لیز می‌خورد و ۳ متر پایین می‌آید. چند روز طول می‌کشد تا به بالای دیوار برسد؟



راهبرد الگوسازی



مسئله‌ی ۱

مهرداد آدم پولداری است. او زمین‌های کشاورزی زیادی دارد و تعداد زیادی کارگر در زمین‌های او کار می‌کنند. سعید یکی از کارگرهای اوست که بسیار تلاشگر و زحمت‌کش است. مهرداد می‌خواهد برای تشکر از زحمات سعید، قطعه زمینی را به او هدیه دهد. به این منظور طنابی به طول ۲۸ متر را به سعید می‌دهد و به او می‌گوید: با این طناب دور قطعه زمینی به شکل مستطیل را محصور کن. آن زمین مال تو خواهد بود. البته طوری که اندازه‌ی طول و عرض زمین بر حسب متر عددی طبیعی باشد.

سعید با خود فکر کرد که چگونه با این مقدار طناب قطعه زمینی را محصور کند به طوری که بیش‌ترین مساحت ممکن





را داشته باشد؟ طول و عرض زمین چند متر باید باشد؟ مساحت آن چند متر مربع خواهد بود؟



حل. این ۲۸ متر طناب در واقع محیط زمین مستطیل شکل خواهد بود. پس حاصل جمع طول و عرض زمین ۱۴ متر می‌باشد. $(28 \div 2 = 14)$

در جدول زیر حالت‌های مختلف اندازه‌های طول و عرض زمین را مشاهده می‌کنید: توجه داشته باشید که مربع هم نوعی مستطیل است.

عرض	طول
۱	۱۳
۲	۱۲
۳	۱۱
۴	۱۰
۵	۹
۶	۸
۷	۷

با توجه به این که مساحت مستطیل برابر است با: «طول \times عرض» در هر حالت، مساحت زمین را حساب می‌کنیم:

طول	عرض	مساحت
۱۳	۱	$13 \times 1 = 13$
۱۲	۲	$12 \times 2 = 24$
۱۱	۳	$11 \times 3 = 33$
۱۰	۴	$10 \times 4 = 40$
۹	۵	$9 \times 5 = 45$
۸	۶	$8 \times 6 = 48$
۷	۷	$7 \times 7 = 49^*$

بیش‌ترین مقدار مساحت ۴۹ مترمربع می‌باشد. بنابراین سعید باید زمینی به شکل مربع را که اندازه‌ی هر ضلع آن ۷ متر است انتخاب کند.





در حل این مسئله، همه‌ی حالت‌های ممکن برای طول و عرض قطعه زمین مستطیل شکل را در نظر گرفتیم و برای این‌که حالتی را از قلم نیندازیم آن‌ها را با نظم و ترتیب مشخصی نوشتیم. بیش‌ترین مقدار طول ۱۳ متر بود. آن را اول نوشتیم بعد ۱۲ و ...

با رعایت نظم در نوشتن حالت‌های مختلف، مطمئن می‌شویم که همه‌ی حالت‌ها را نوشته‌ایم. این روش حل مسئله را «راهبرد تفکر نظام‌دار» هم می‌نامند و حالت‌های مختلف را در یک جدول به طور منظم می‌نویسیم که به آن «جدول نظام‌دار» می‌گویند.

مسئله‌ی ۲

می‌خواهیم از بین ۵ نفر به نام‌های حسین، سهراب، رسول، مهرداد و حسن، دو نفر را برای تهیه‌ی روزنامه دیواری انتخاب کنیم. به چند صورت می‌توان این دو نفر را انتخاب کرد؟

حل. سیروس می‌خواهد این مسئله را حل کند. او شروع کرد به نوشتن حالت‌های مختلف:

حالت اول) حسین - سهراب حالت دوم) سهراب - رسول
حالت سوم) مهرداد - حسن حالت چهارم) رسول - حسین

اما روش سیروس نظم ندارد و بعد از نوشتن چند حالت دیگر دچار مشکل می‌شویم و نمی‌دانیم آیا همه‌ی حالت‌ها را نوشته‌ایم یا نه.

روش نظام‌دار را پی می‌گیریم. ابتدا فرض می‌کنیم یکی از دو نفر، حسین باشد. حالت‌های ممکن را می‌نویسیم:

حسین - سهراب			
حسین - رسول			
حسین - مهرداد			
حسین - حسن			

حالت‌هایی را که یکی از نفرات انتخابی ما حسین باشد مشاهده کردید. حالا حالت‌هایی را در نظر بگیریم که یکی از نفرات انتخابی ما سهراب باشد. فقط یادتان باشد حالت «حسین - سهراب» را دوباره ننویسید.

حسین - سهراب	سهراب - رسول		
حسین - رسول	سهراب - مهرداد		
حسین - مهرداد	سهراب - حسن		
حسین - حسن			





اکنون حالت‌هایی را در نظر بگیریم که یکی از نفرات انتخابی ما رسول باشد. حالت‌هایی را که قبلاً نوشته‌ایم دیگر نمی‌نویسیم.

رسول - مهرداد	سهراب - رسول	حسین - سهراب	
رسول - حسن	سهراب - مهرداد	حسین - رسول	
	سهراب - حسن	حسین - مهرداد	
		حسین - حسن	

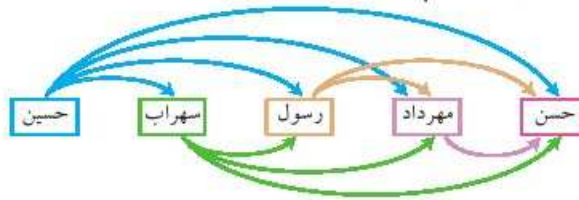
و در پایان حالت‌هایی را که یکی از نفرات انتخابی مهرداد باشد در نظر می‌گیریم. فقط یک حالت وجود دارد. حالت‌های دیگر را قبلاً نوشته‌ایم.

مهرداد - حسن	رسول - مهرداد	سهراب - رسول	حسین - سهراب
	رسول - حسن	سهراب - مهرداد	حسین - رسول
		سهراب - حسن	حسین - مهرداد
			حسین - حسن

تعداد حالت‌های مختلف ۱۰ می‌باشد.



برای نوشتن منظم، از تفکر زیر بهره گرفتیم:



مسئله ۳

مریم ۴۵ تومان پول دارد. پول او به صورت سکه‌های ۱۰ تومانی و ۵ تومانی است. (هم سکه‌ی ۱۰ تومانی دارد و هم سکه‌ی ۵ تومانی) همه‌ی حالت‌های مختلفی را که او با داشتن سکه‌های ۱۰ و ۵ تومانی می‌تواند ۴۵ تومان پول داشته باشد را بیاید.

حل. با نوشتن حالت‌های مختلف بدون نظم و ترتیب ممکن است با مشکل مواجه شویم یا بعضی از حالت‌ها را ننویسیم. بهتر است با استفاده از یک جدول نظام‌دار، حالت‌های مختلف را با نظم و ترتیب بنویسیم:





● بیشترین تعداد سکه‌ی ۱۰ تومانی که مریم می‌تواند داشته باشد ۴ تا می‌باشد. در این صورت او یک سکه‌ی ۵ تومانی خواهد داشت.

● ممکن است او ۳ تا سکه‌ی ۱۰ تومانی داشته باشد. در این صورت او ۳ سکه‌ی ۵ تومانی خواهد داشت.

● اگر او ۲ تا سکه‌ی ۱۰ تومانی داشته باشد، در این صورت ۵ سکه‌ی ۵ تومانی خواهد داشت.

● و اگر ۱ سکه‌ی ۱۰ تومانی داشته باشد، در این صورت ۷ سکه‌ی ۵ تومانی خواهد داشت.

این اطلاعات را در جدول زیر مشاهده کنید:

تعداد سکه‌های ۵ تومانی	تعداد سکه‌های ۱۰ تومانی
۱	۴
۳	۳
۵	۲
۷	۱



تمرین‌های بخش ۲-۱

۱ رسول قصد دارد با ۸۰۰۰ تومان پولی که دارد، تعدادی خودکار و دفتر بخرد. قیمت هر خودکار ۸۰۰ تومان و قیمت هر دفتر ۱۶۰۰ تومان است. او به چند طریق می‌تواند با همه‌ی پولش، خودکار و دفتر بخرد؟

۲ سعید، احمد، مهدی و محسن می‌خواهند روی یک نیمکت در کنار هم بنشینند. همه‌ی حالت‌های ممکن را برای ترتیب نشستن این چهار نفر بنویسید.

۳ کامبیز می‌خواهد یک سکه‌ی ۵۰۰ ریالی را با سکه‌های ۵۰ ریالی، ۱۰۰ ریالی و ۲۵۰ ریالی خرد کند. او به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد.

۴ حاصل ضرب دو عدد طبیعی ۳۶۰ و مجموع آن دو عدد کم‌تر از ۱۰۰ است. همه‌ی حالت‌های ممکن برای این دو عدد را بنویسید.

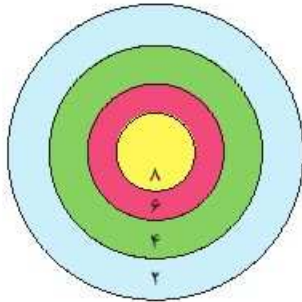




راهبرد حذف حالت‌های نامطلوب

گاهی در حل مسئله، می‌توانیم با حذف کردن حالت‌هایی که با شرایط مسئله سازگاری ندارند (حالت‌های نامطلوب) پاسخ مسئله را به دست آوریم.

مسئله ۱



علی ۴ تیر به سمت صفحه‌ی هدف شلیک کرد. همه‌ی تیرهای او به هدف برخورد کرد. امتیازهای روی صفحه‌ی هدف ۲، ۴، ۶ و ۸ بودند. کدام یک از اعداد زیر می‌توانند مجموع امتیازهای علی باشند؟

۲۴، ۲۱، ۶، ۲۹، ۳۰، ۳۴

حل الف. در مورد ۳۴، حداکثر امتیاز ممکن زمانی به دست می‌آید که هر ۴ تیر به بخش ۸ امتیازی برخورد کند. در این صورت حداکثر امتیاز که ۳۲ است به دست می‌آید. پس ۳۴ نمی‌تواند امتیاز علی باشد.

ب. مشخص است که مجموع امتیازهای علی نمی‌تواند عددی فرد باشد. چون امتیاز همه‌ی بخش‌ها زوج است. پس عددهای ۲۹ و ۲۱ هم حذف می‌شوند.

ج. حداقل امتیاز علی زمانی به دست می‌آید که هر ۴ تیر او به بخش ۲ امتیازی برخورد کند (طبق فرض هر ۴ تیر به هدف خورده و هیچ تیری به خارج از هدف برخورد نکرده است). در این صورت امتیاز او ۸ خواهد بود. پس عدد ۶ هم نمی‌تواند امتیاز علی باشد.

د. علی می‌تواند به گونه‌ای به هدف زده باشد که امتیاز او ۲۴ یا ۳۰ باشد. مثلاً

$$۸ + ۸ + ۸ + ۶ = ۳۰ \quad \text{و} \quad ۸ + ۶ + ۶ + ۴ = ۲۴$$

مسئله ۲

مجموع دو عدد طبیعی ۳۰ و حاصل ضرب آن‌ها مضرب ۴۵ است. این دو عدد را بیابید.





حل. حالت‌های ممکن برای این دو عدد را مشاهده کنید:

$$(۱, ۲۹), (۲, ۲۸), (۳, ۲۷), \dots, (۱۵, ۱۵)$$

چون حاصل ضرب دو عدد مورد نظر مضرب ۴۵ است و هر عددی که بر ۴۵ بخش پذیر باشد، بر ۵ بخش پذیر است. پس حاصل ضرب دو عدد باید مضرب ۵ باشد. در نتیجه لااقل یکی از دو عدد مورد نظر باید مضرب ۵ باشد. با حذف حالت‌های نامطلوب فقط سه حالت باقی می‌ماند:

$$(۵, ۲۵), (۱۰, ۲۰), (۱۵, ۱۵)$$

(۵, ۲۵) را بررسی می‌کنیم: $۵ \times ۲۵ = ۱۲۵$ ولی ۱۲۵ بر ۴۵ بخش پذیر نیست. این حالت حذف می‌شود.

(۱۰, ۲۰) را بررسی می‌کنیم: $۱۰ \times ۲۰ = ۲۰۰$ ولی ۲۰۰ بر ۴۵ بخش پذیر نیست. این حالت هم حذف می‌شود.

(۱۵, ۱۵) را بررسی می‌کنیم: $۱۵ \times ۱۵ = ۲۲۵$ و ۲۲۵ بر ۴۵ بخش پذیر است. پس دو عدد طبیعی مورد نظر ۱۵ و ۱۵ می‌باشند.



مسئله ۳

سه برادر به نام‌های محسن، یوسف و علی، همگی بین ۱۸ و ۳۱ سال سن دارند. اگر مجذور سن هر یک از این سه نفر را بنویسیم (مجذور یک عدد یعنی حاصل ضرب آن عدد در خودش. مثلاً مجذور عدد ۷ برابر است با ۴۹ چون $۷ \times ۷ = ۴۹$) هر یک از رقم‌های ۱، ۲، ۳، ... و ۹ دقیقاً یک بار در مجذور سن این سه نفر دیده می‌شوند. سن هر یک از این سه نفر را مشخص کنید.

حل. اعداد ۱۹ تا ۳۰ و مجذورهای آن‌ها را در جدول زیر مشاهده می‌کنید:

مجدور	عدد	مجدور	عدد	مجدور	عدد
۳۶۱	۱۹	۵۲۹	۲۳	۷۲۹	۲۷
۴۰۰	۲۰	۵۷۶	۲۴	۷۸۴	۲۸
۴۴۱	۲۱	۶۲۵	۲۵	۸۴۱	۲۹
۴۸۴	۲۲	۶۷۶	۲۶	۹۰۰	۳۰

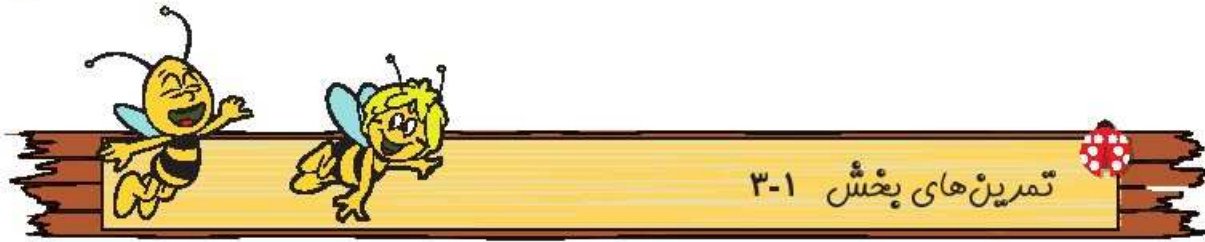
می‌خواهیم سه تا از مجذورها را انتخاب کنیم که هر یک از ارقام ۱ تا ۹ در آن‌ها یک بار دیده شوند. نباید عددی را انتخاب کنیم که در آن رقم‌های تکراری وجود داشته باشد. (چرا؟) به این ترتیب اعداد ۴۰۰، ۴۴۱، ۴۸۴، ۶۷۶ و ۹۰۰ حذف می‌شوند.

اعداد ۳۶۱، ۵۲۹، ۵۷۶، ۶۲۵، ۷۲۹، ۷۸۴ و ۸۴۱ می‌مانند. در بین این اعداد فقط ۳۶۱ دارای رقم ۳ است. پس اگر بخواهیم سه تا از این اعداد را انتخاب کنیم که ارقام ۱ تا ۹ داشته باشند حتماً باید ۳۶۱ را انتخاب کنیم. این عدد تنها عددی از بین این اعداد است که رقم ۳ در آن وجود دارد. در بین اعداد دیگر، اعدادی را که رقم‌های ۳، ۶ و ۱ (که





در ۳۶۱ وجود دارند) دارند حذف می‌کنیم. به این ترتیب اعداد ۵۲۹، ۷۲۹ و ۷۸۴ باقی می‌مانند. رقم ۵ فقط در ۵۲۹ وجود دارد. پس دومین عدد انتخابی ما ۵۲۹ است. روشن است که سومین عدد ۷۸۴ خواهد بود. بنابراین سه عدد مجذور ۳۶۱، ۵۲۹ و ۷۸۴ می‌باشند و سن این سه نفر ۱۹، ۲۳ و ۲۸ خواهد بود.



یک عدد چهاررقمی را در ۴ ضرب کرده‌ایم؛ حاصل عددی چهاررقمی است که ترتیب قرار گرفتن ارقام آن، برعکس عدد چهاررقمی اولیه است. (مثلاً اگر عدد چهاررقمی اولیه ۱۲۰۷ باشد چهار برابر آن باید ۷۰۲۱ بشود که البته این مثال غلط است.) این عدد چهاررقمی را بیابید.

عددی را در خودش ضرب کردیم، حاصل برابر با ۵۳۲۹ شده است. آن عدد را بیابید.

در یک کلاس تعداد دانش‌آموزان کم‌تر از ۳۵ نفر می‌باشد. اگر دانش‌آموزان این کلاس را به گروه‌های ۲ نفره تقسیم کنیم، یک نفر اضافه می‌ماند. اگر دانش‌آموزان این کلاس را به گروه‌های ۳ نفره تقسیم کنیم، ۲ نفر اضافه می‌ماند و اگر دانش‌آموزان این کلاس را به گروه‌های ۵ نفره تقسیم کنیم ۴ نفر اضافه می‌ماند. این کلاس چند دانش‌آموز دارد؟

در عمل ضرب زیر، هر حرف به جای یک رقم قرار گرفته است و حروف مختلف نشان‌گر رقم‌های مختلف می‌باشند. به جای هر حرف چه رقمی باید قرار گیرد؟

$$\begin{array}{r}
 ab \\
 \times \quad cd \\
 \hline
 ed \\
 + \quad da \\
 \hline
 dfd
 \end{array}$$





راهبرد الگویابی

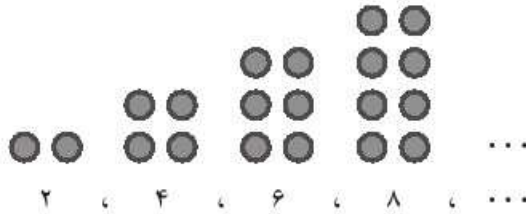


مطالعه‌ی الگوهایی که در اطراف ما وجود دارد خیلی مهم است. بعضی‌ها ریاضیات را، «علم الگوه‌ا» می‌نامند. طراحی‌های صنعتی، سنگ‌فرش خیابان‌ها، طراحی‌های هنری و معماری و ... دارای الگوهایی هستند. برای پیدا کردن الگوه‌ا باید یک نگاه دقیق و آگاهانه داشته باشیم. معمولاً کلید یافتن یک الگو، سازمان‌دهی و تنظیم داده‌ها است.

الگو در اعداد

اعداد طبیعی زوج

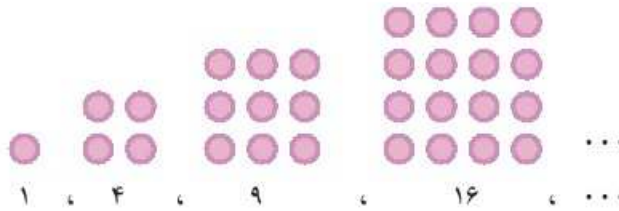
اگر اعداد طبیعی زوج را با تعداد دایره‌های سیاه نمایش دهیم، یک الگو به‌دست می‌آید.



با کشف الگوی این شکل‌ها، می‌توان شکل‌های بعدی را رسم کرد.

اعداد مربعی

به این الگو توجه کنید:



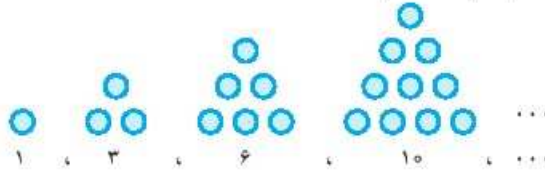
اعداد ۱، ۴، ۹، ۱۶ و ... را اعداد مربعی یا مربع کامل یا مجذور کامل می‌نامند. با توجه به الگوی این شکل‌ها، دو شکل بعدی و عدد مربوط به هر شکل را مشخص کنید. عدد مربوط به شکل دوازدهم را بیابید. آیا عدد ۴۰۰ جزو این اعداد است؟





مسئله ۱

با توجه به شکل‌های زیر، شکل‌های پنجم و ششم و عدد مربوط به هر شکل را بیابید.

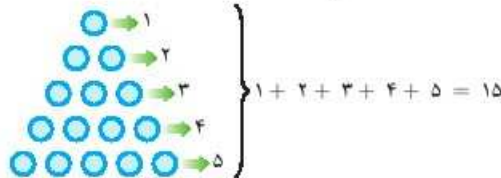


۱. آیا می‌توان بدون کشیدن شکل، عدد مربوط به شکل دهم را یافت؟ چگونه؟

۲. آیا می‌توان بدون کشیدن شکل، عدد مربوط به شکل صدم را یافت؟ چگونه؟

حل. در شکل پنجم که به صورت زیر است اگر دایره‌های هر طبقه را جدا جدا بشماریم، در می‌یابیم که تعداد دایره‌های

شکل پنجم برابر است با مجموع اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵



این الگو در شکل‌های اول تا چهارم هم دیده می‌شود. پس در شکل ششم تعداد دایره‌ها برابر است با:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$$

و تعداد دایره‌های شکل دهم برابر است با:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 10 = 55$$

و در شکل صدم تعداد دایره‌ها برابر است با:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 100$$

جواب این عبارت ۵۰۵۰ است. چگونگی به دست آوردن آن را در فصل ۲ خواهید آموخت.



مسئله ۲

با توجه به الگوی دنباله‌ی اعداد زیر، سه عدد بعدی هر دنباله را مشخص کنید:

الف. ۳، ۷، ۱۱، ۱۵، ...

ب. ۱، ۳، ۷، ۱۵، ...

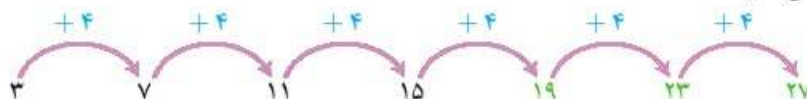
ب. ۱، ۳، ۷، ۱۵، ...

الف. ۳، ۷، ۱۱، ۱۵، ...





حل. الف. با توجه به فاصله‌ی بین هر دو عدد پشت سر هم، می‌توان به الگوی این دنباله پی برد. هر عدد به علاوه‌ی ۴ عدد بعدی را می‌سازد.



ب. در این دنباله، هم، طبق معمول ابتدا فاصله‌ی بین هر دو عدد پشت سر هم را به دست می‌آوریم:

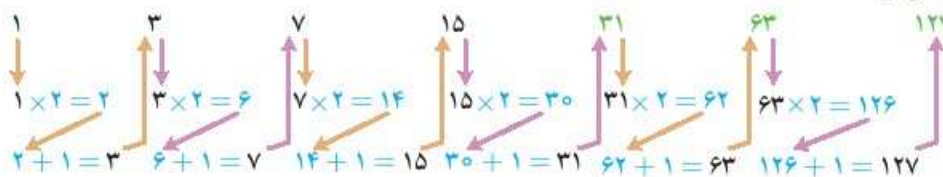


مشاهده می‌کنید که فاصله‌ی بین اعداد، دو برابر می‌شود پس فاصله‌ی ۱۵ با عدد بعدی باید دو برابر ۸ یعنی ۱۶ باشد و ...



و به این ترتیب می‌توان اعداد بعدی را پیدا کرد:

اما راه دیگری هم وجود دارد. «اگر هر عدد را دو برابر کنیم و حاصل را به علاوه‌ی یک کنیم» عدد بعدی به وجود می‌آید.



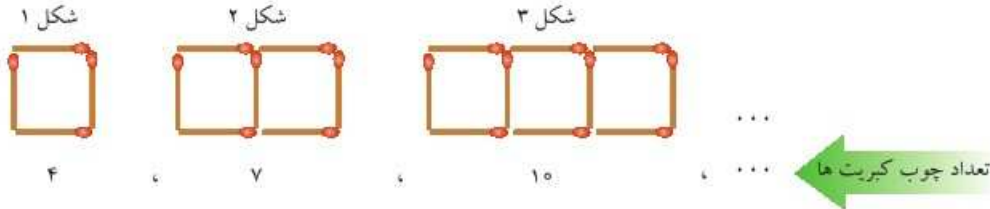
به این فکر کنید که اگر در این مسئله، عدد صدم هر دنباله را از ما می‌خواستند، باید چه کار می‌کردیم؟ برای تعیین عددهای یک دنباله در حالت کلی، مثلاً تعیین عدد صدم یا سیصد و هفتادم یا ... باید قانون الگو را بیابیم. یک بار دیگر مسئله‌ی (۱) را نگاه کنیم. برای تعیین عدد صدم گفته شد که باید «مجموع اعداد طبیعی ۱ تا ۱۰۰» را به دست آوریم. با این قانون می‌توان هر عدد دلخواهی از دنباله‌ی اعداد مثلثی را یافت. اما همیشه تعیین «قانون الگو» کار آسانی نیست. تلاش کنید مسئله‌ی بعدی را به تنهایی حل کنید و قانون الگو را خودتان کشف کنید و به کسی اجازه ندهید به جای شما فکر کند.





مسأله ۳

با توجه به الگوی زیر تعداد چوب کبریت‌های شکل چهارم و پنجم را تعیین کنید.



در شکل ۱۰ چند چوب کبریت وجود خواهد داشت؟ در شکل ۱۰۰ چند چوب کبریت وجود خواهد داشت؟ قانون الگو را بیابید.

حل. برای حل این مسئله، ابتدا جدول زیر را در نظر بگیرید. با رسم کردن شکل ۴ و شکل ۵ تعداد چوب کبریت‌ها مشخص می‌شود.

شماره‌ی شکل	۱	۲	۳	۴	۵	...
تعداد چوب کبریت	۴	۷	۱۰	۱۳	۱۶	...

به شماره‌ی شکل و تعداد چوب کبریت‌ها نگاه کنید. با دقت و نگاه آگاهانه و البته کمی هوش مشخص می‌شود که اگر شماره‌ی شکل را ۳ برابر کنیم و حاصل را به علاوه‌ی ۱ کنیم تعداد چوب کبریت‌ها به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} 1 \times 3 = 3 & \quad 2 \times 3 = 6 & \quad \dots \\ 3 + 1 = 4 & \quad 6 + 1 = 7 & \quad \dots \end{aligned}$$

شماره‌ی شکل	۱	۲	۳	۴	۵	...
تعداد چوب کبریت	۴	۷	۱۰	۱۳	۱۶	...

بنابراین تعداد چوب کبریت‌های شکل ۱۰ برابر است با ۳۱ زیرا:

$$10 \times 3 = 30$$

$$30 + 1 = 31$$

و تعداد چوب کبریت‌های شکل ۱۰۰ برابر است با ۳۰۱ زیرا:

$$100 \times 3 = 300$$

$$300 + 1 = 301$$





تمرین‌های بخش ۴-۱

سه جمله‌ی بعدی هر یک از دنباله‌های زیر را بنویسید و الگوی هر دنباله را بیان کنید.

- الف. $۵, ۹, ۱۳, ۱۷, \dots$ ج. $۱, ۲, ۴, ۸, \dots$
 ب. $۲, ۵, ۱۰, ۱۷, \dots$ د. $۲, ۶, ۱۲, ۲۰, \dots$

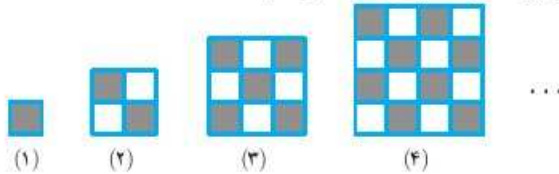
با توجه به الگوی زیر، تعداد دایره‌های شکل هفتم را مشخص کنید.



با توجه به الگوی زیر:

الف. تعداد خانه‌های سیاه در شکل بیست‌وششم را مشخص کنید.

ب. تعداد خانه‌های سیاه در شکل بیست‌وهفتم را مشخص کنید.



در ضرب‌های زیر رقم یکان عدد حاصل را در نظر بگیرید:

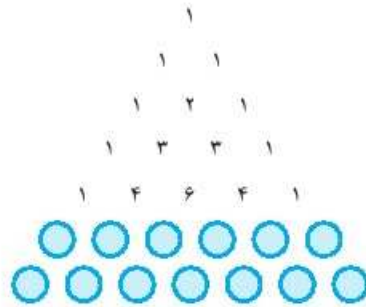
ضرب	۲	۲×۲	$۲ \times ۲ \times ۲$	$۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲$	$۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲$	$۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲$...
حاصل ضرب	۲	۴	۸	۱۶	۳۲	۶۴	...
رقم یکان حاصل ضرب	۲	۴	۸	۶	۲	۴	...





- الف. اگر پانزده تا ۲ را در هم ضرب کنیم، رقم یکان حاصل ضرب، چند است؟
 ب. اگر هفتاد و چهار تا ۲ را در هم ضرب کنیم، رقم یکان حاصل ضرب، چند است؟
 ج. یک الگوی کلی برای پیدا کردن رقم یکان، با توجه به تعداد ۲های ضرب شده، بیابید.

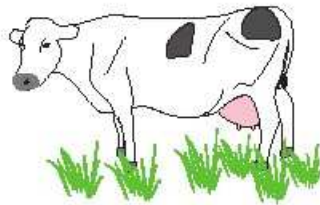
با توجه به الگوی زیر، اعدادی را که باید داخل دایره‌ها نوشته شوند، بیابید.



راهبرد حدس و آزمایش



بعضی وقت‌ها برای رسیدن به جواب مسئله «حدس زدن» به ما کمک می‌کند و با «آزمایش کردن» می‌توانیم به درستی حدس‌مان اطمینان پیدا کنیم. در ابتدای این فصل مسئله‌ای را مطرح کردیم راجع به یک کشاورز که تعدادی گاو و مرغ داشت. تعداد سرهای این حیوانات ۱۷ و تعداد پاهایشان ۴۲ بود. اکنون همین مسئله را با استفاده از راهبرد حدس و آزمایش حل می‌کنیم.

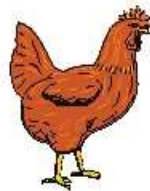


اگر ۱۲ تا گاو داشته باشیم و ۵ تا مرغ:
 $12 \times 4 = 48$ تا گاو تا پا دارند.
 $5 \times 2 = 10$ تا مرغ تا پا دارند.
 روی هم $48 + 10 = 58$ تا پا دارند.
 زیاد شد! تعداد پاها باید ۴۲ تا باشند.
 فکر کنیم باید تعداد گاوها را کم کنیم.

اگر ۸ تا گاو داشته باشیم در نتیجه ۹ تا هم مرغ داریم (تعداد حیوان‌ها ۱۷ تا باید باشد).

۸ تا گاو تا پا دارند. $8 \times 4 = 32$





و ۹ تا مرغ ۱۸ پا دارند. ($9 \times 2 = 18$)
روی هم ۵۰ پا دارند.
باز هم زیاد شد! تعداد پاها باید ۴۲ تا باشد.

اگر ۵ تا گاو داشته باشیم در نتیجه ۱۲ تا مرغ داریم. ($5 + 12 = 17$)

۵ تا گاو ۲۰ پا دارند. ($5 \times 4 = 20$)

و ۱۲ تا مرغ ۲۴ پا دارند. ($12 \times 2 = 24$)

روی هم ۴۴ پا دارند. ($20 + 24 = 44$)

باز هم زیاد شد! اما نزدیک شدیم.

اگر ۴ تا گاو داشته باشیم در نتیجه ۱۳ تا مرغ داریم.

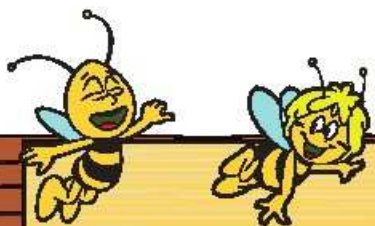
۴ تا گاو ۱۶ پا دارند. ($4 \times 4 = 16$)

و ۱۳ تا مرغ ۲۶ پا دارند. ($13 \times 2 = 26$)

روی هم ۴۲ پا دارند. ($16 + 26 = 42$)

بله، درست است. بالاخره جواب پیدا شد.

شاید بعضی‌ها خیلی از این روش لذت نبرند. اما این روش به ما کمک می‌کند مسئله را بهتر بفهمیم و گاهی نقطه‌ی شروع خوبی برای فکر کردن به مسئله و حل آن است. گاهی با این روش خیلی زود جواب پیدا می‌شود و گاهی کار طولانی می‌شود. دلسرد نشوید. منظم کار کنید و با سماجت و پشتکار زیاد تلاش کنید تا جواب را پیدا کنید. این روش زحمت زیادی دارد اما در هر صورت ما را به سمت جواب می‌برد.



تمرین‌های بخش ۱-۵

۱ احمد ۱۳ تا اسکناس دارد. اسکناس‌های او یا ۵۰۰ تومانی است یا ۱۰۰۰ تومانی. اگر پول احمد ۱۰۵۰۰ تومان باشد، او چند اسکناس ۵۰۰ تومانی و چند اسکناس ۱۰۰۰ تومانی دارد؟

۲ محیط یک زمین مستطیل شکل ۹۴ متر است. طول زمین از دو برابر عرض زمین ۲ متر بیش‌تر است. مساحت این زمین را تعیین کنید.





عددی دورقمی بیابید که اگر ترتیب ارقام آن را برعکس کنیم و با عدد اولیه جمع کنیم عدد حاصل ۱۷۶ شود. (به طور مثال اگر عدد اولیه ۵۲ باشد وقتی جای ارقام آن را برعکس کنیم عدد ۲۵ به دست می آید حاصل جمع این دو عدد $۲۵ + ۵۲ = ۷۷$ می باشد معلوم است که عدد ۵۲ جواب این مسئله نیست.)



در یک شهرستان به ازای هر ۱۲ دانش آموز پسر، ۱۱ دانش آموز دختر وجود دارد. در این شهرستان ۳۲۸۹ دانش آموز مشغول تحصیل اند. چند نفر آن ها پسر و چند نفر دختر می باشند؟



یک عدد سه رقمی داریم که رقم دهگان آن صفر است. می دانیم ۱۱ برابر این عدد را می توان به صورت «حاصل ضرب یک عدد در خودش» نوشت. این عدد سه رقمی را بیابید.



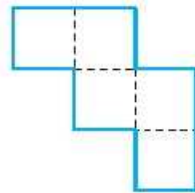
راهبرد زیرمسئله



سعید می خواهد از درخت، میوه بچیند. اما او قد کوتاهی دارد و دستش به میوه ها نمی رسد. (مسئله اصلی او چیدن میوه از درخت است.) او با خود فکر می کند که اگر نردبان داشت می توانست میوه بچیند. (مسئله کمی یا زیرمسئله، پیدا کردن یک نردبان است.) گاهی برای حل یک مسئله، مسئله های دیگری طرح می شود که حل آن ها موجب حل شدن مسئله اصلی می شود.

مسئله ۱

در شکل مقابل پنج مربع یکسان دیده می شود. اگر مساحت این شکل ۱۸۰ مترمربع باشد، محیط این شکل چند متر است؟



حل.

مسئله اصلی: به دست آوردن محیط شکل

زیرمسئله (۱): اگر اندازه ی ضلع یک مربع را پیدا کنیم می توانیم محیط شکل را بیابیم.

زیرمسئله (۲): برای پیدا کردن اندازه ی ضلع یک مربع، ابتدا باید مساحت یک مربع را بیابیم.





این شکل از ۵ مربع برابر تشکیل شده که مساحت کل آن ۱۸۰ مترمربع است. پس مساحت هر مربع ۳۶ مترمربع است. $(۱۸۰ \div ۵ = ۳۶)$

می‌دانیم مساحت یک مربع برابر است با «اندازه‌ی یک ضلع مربع ضرب در خودش» بنابراین اندازه‌ی هر ضلع مربع ۶ متر خواهد بود. محیط این شکل از ۱۲ ضلع مربع تشکیل شده است. پس محیط این شکل برابر است با:

$$۱۲ \times ۶ = ۷۲ \text{ (متر)}$$



مسئله‌ی ۲

یک آسانسور ظرفیت ۱۲ کودک یا ۹ بزرگسال را دارد. اگر ۸ کودک درون آسانسور باشند، حداکثر چند بزرگسال می‌تواند وارد آسانسور شود؟

حل. با طرح زیرمسئله‌های زیر می‌توان مسئله‌ی اصلی را حل کرد:

۱. یک کودک معادل چند بزرگسال است؟

۲. چند کودک دیگر می‌توانند وارد آسانسور شوند؟

۳. این تعداد کودک معادل چند بزرگسال می‌باشند؟

حل زیرمسئله‌ی (۱): چون ۱۲ کودک معادل ۹ بزرگسال می‌باشند پس با توجه به تناسب زیر:

$$\frac{۱۲}{۱} = \frac{۹}{x} \Rightarrow x = \frac{۹ \times ۱}{۱۲} \Rightarrow x = \frac{۳}{۴}$$

یک کودک معادل $\frac{۳}{۴}$ بزرگسال است.

حل زیرمسئله‌ی (۲): آسانسور ظرفیت ۱۲ کودک را دارد. ۸ کودک در آسانسور می‌باشند پس آسانسور ظرفیت ۴ کودک دیگر را دارد.

حل زیرمسئله‌ی (۳): یک کودک معادل $\frac{۳}{۴}$ بزرگسال است. پس ۴ کودک معادل $(۴ \times \frac{۳}{۴})$ بزرگسال است. $۴ \times \frac{۳}{۴} = ۳$

یعنی معادل ۳ بزرگسال.

بنابراین ۳ بزرگسال می‌توانند وارد آسانسور شوند.



مسئله‌ی ۳

چهار دانش‌آموز تصمیم گرفتند یک میهمانی برگزار کنند و توافق کردند که به طور مساوی مخارج آن را پرداخت کنند. سعید ۳۷۰۰ تومان، محمد ۲۱۰۰ تومان، محسن ۷۴۰۰ تومان و مهرداد ۱۲۴۰ تومان برای برگزاری این میهمانی خرج کردند. هر کس باید چه مقداری پول به دیگری بدهد یا از دیگری بگیرد؟





حل. به زیرمسئله‌های زیر توجه کنید:

۱. کل مبلغ خرج شده چقدر است؟

۲. سهم هر کدام چند تومان است؟

۳. چه کسانی باید پول بپردازند و چند تومان؟

۴. چه کسانی باید پول دریافت کنند و چند تومان؟

حل زیر مسئله‌ی (۱): کل مبلغ خرج شده برابر است با:

$$۳۷۰۰ + ۲۱۰۰ + ۷۴۰۰ + ۱۲۴۰ = ۱۴۴۴۰ \text{ (تومان)}$$

حل زیرمسئله‌ی (۲): باید کل مبلغ را بین ۴ نفر تقسیم کنیم:

$$۱۴۴۴۰ \div ۴ = ۳۶۱۰ \text{ (تومان)}$$

حل زیرمسئله‌ی (۳): محمد و مهرداد کم‌تر از ۳۶۱۰ تومان خرج کرده‌اند پس باید مبالغ زیر را پرداخت کنند:

$$\text{تومان محمد} : ۳۶۱۰ - ۲۱۰۰ = ۱۵۱۰$$

$$\text{تومان مهرداد} : ۳۶۱۰ - ۱۲۴۰ = ۲۳۷۰$$

در مجموع $۱۵۱۰ + ۲۳۷۰ = ۳۸۸۰$ تومان به‌دست می‌آید.

حل زیرمسئله‌ی (۴): سعید و محسن بیش‌تر از ۳۶۱۰ تومان خرج کرده‌اند. از مبلغ به‌دست آمده ۹۰ تومان

$$(۳۷۰۰ - ۳۶۱۰ = ۹۰) \text{ به سعید می‌رسد.}$$

بقیه‌ی آن یعنی $۳۷۹۰ - ۹۰ = ۳۸۸۰$ تومان به محسن می‌رسد. محسن ۷۴۰۰ تومان خرج کرده در حالی که باید

$$۳۶۱۰ \text{ تومان خرج می‌کرد. پس } ۷۴۰۰ - ۳۶۱۰ = ۳۷۹۰ \text{ تومان باقی‌مانده به او می‌رسد.}$$



تمرین‌های بخش ۶-۱

فرزاد با $\frac{۲}{۳}$ پول خود می‌تواند ۷ مداد ۶۰۰ تومانی بخرد. او با کل پول خود می‌تواند چند دفتر ۷۰۰ تومانی

بخرد؟





سیروس ۴۰ کیلوگرم پرتقال خرید به قیمت هر کیلوگرم ۱۵۰۰ تومان. سی کیلوگرم آن را به قیمت هر کیلوگرم ۲۵۰۰ تومان و بقیه را به قیمت هر کیلوگرم ۲۰۰۰ تومان فروخت. چند تومان سود کرد؟



مجتبی توپ فوتبالی را در ویتترین یک فروشگاه لوازم ورزشی دیده و دوست دارد آن را بخرد. آقای اصغری پدر مجتبی به او قول داده که اگر پس انداز مجتبی به اندازه $\frac{2}{3}$ قیمت آن توپ فوتبال شود، بقیه پول توپ فوتبال را به او خواهد داد.

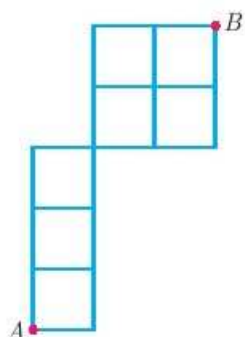


مجتبی هر روز ۵۰۰ تومان پس انداز می کند. او با خود فکر کرد که با پس انداز ۵۲ روز خود و پولی که در آن زمان پدرش قول داده به او بدهد، می تواند توپ فوتبال را بخرد. قیمت این توپ فوتبال چند تومان است؟

مساحت یک مستطیل با مساحت یک مربع برابر است. اگر اندازه ی طول مستطیل ۱۸ متر و محیط مربع ۴۸ متر باشد، محیط مستطیل چند متر است؟



در شکل زیر با حرکت به سمت راست و بالا می خواهیم از نقطه ی A به نقطه ی B برویم. به چند طریق می توان این کار را انجام داد؟



راهبرد حل مسئله ی ساده تر



وقتی «کارل گاوس» در دبستان درس می خواند، روزی معلم برای مشغول کردن دانش آموزان از آن ها خواست مجموع اعداد ۱، ۲، ۳، ...، ۱۰۰ را حساب کنند. گاوس خیلی زود حاصل را به دست آورد و نتیجه را روی تخته سیاه کوچکی که داشت، نوشت و به معلم داد. معلم از دیدن نتیجه ی درست که به این سرعت به دست آمده بود، تعجب کرد. به نظر می رسد کارل گاوس این طور فکر کرده باشد:



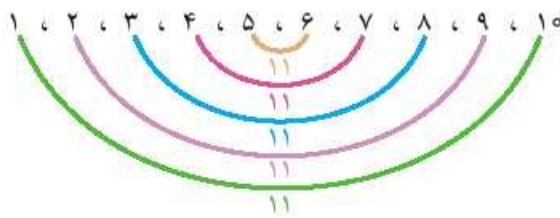


۱. ابتدا تصمیم گرفت «یک روش» پیدا کند. به همین دلیل او سعی کرد با جمع کردن اعداد ۱ تا ۱۰ «روش» مناسب را بیابد. به طور قطع جمع کردن اعداد به روش زیر، روش مناسبی نبود: (کوچک کردن مسئله یا حل مسئله‌ی ساده‌تر)

$$۱ + ۲ = ۳ \quad ۳ + ۳ = ۶ \quad ۶ + ۴ = ۱۰ \quad ۱۰ + ۵ = ۱۵, \dots$$

چون این روش برای اعداد ۱ تا ۱۰۰ کاری خسته کننده و بسیار وقت گیر بود.

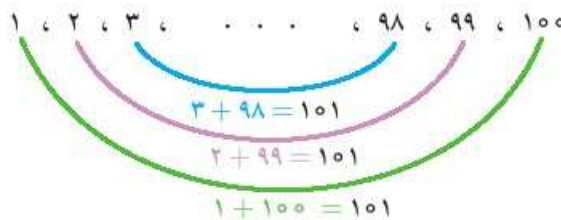
۲. سعی کرد اعداد را با ترتیب دیگری جمع کند. او عدد ۱ را با ۱۰ جمع کرد، حاصل ۱۱ شد. سپس ۲ را با ۹ جمع کرد، حاصل باز هم ۱۱ شد. بعد عدد ۳ را با ۸ جمع کرد، حاصل باز هم ۱۱ شد.



به این ترتیب اعداد ۱ تا ۱۰ در ۵ گروه دوتایی دسته‌بندی شدند که حاصل جمع اعداد هر گروه ۱۱ بود. پس

$$\text{مجموع اعداد ۱ تا ۱۰ برابر بود با: } ۵ \times ۱۱ = ۵۵$$

۳. با این تجربه، به راحتی مجموع اعداد ۱ تا ۱۰۰ را به دست آورد.



به این ترتیب اعداد ۱ تا ۱۰۰ در ۵۰ گروه دوتایی دسته‌بندی شدند که حاصل جمع دو عدد هر گروه ۱۰۱ بود. پس مجموع اعداد ۱ تا ۱۰۰ برابر بود با:

$$۵۰ \times ۱۰۱ = ۵۰۵$$

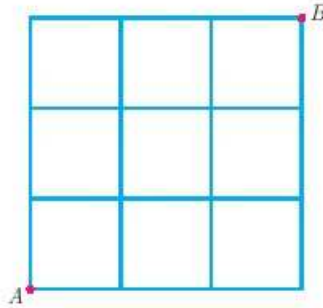
اگر با مسئله‌ی سختی مواجه شدیم گاهی می‌توانیم با تبدیل آن به مسئله‌ی ساده‌تر، روش حل آن را پیدا کنیم. گاوس از این روش استفاده کرد و با جایگزینی «یک عدد کوچک‌تر به جای یک عدد بزرگ‌تر» مسئله‌ای آسان‌تر ساخت و مسئله را با اعداد کوچک‌تر حل کرد و از روش حل آن برای حل مسئله‌ی اصلی استفاده کرد. گاهی با استفاده از چندین مثال با «اعداد کوچک‌تر» و پیدا کردن «روش» حل آن، می‌توان مسئله را حل کرد.



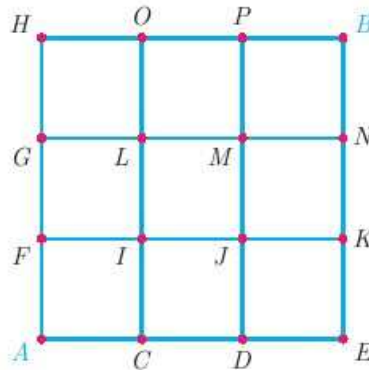


مسئله‌ی ۱

می‌خواهیم با حرکت بر روی خط‌ها در جهت «راست» و «بالا» از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B برویم، چند مسیر از A به B وجود دارد؟



حل. به مسئله‌های ساده‌تر فکر کنیم:



۱. برای رفتن از A به J چند راه وجود دارد؟
۲. برای رفتن از A به L چند راه وجود دارد؟
۳. برای رفتن از A به M چند راه وجود دارد؟
۴. برای رفتن از A به K چند راه وجود دارد؟
۵. برای رفتن از A به N چند راه وجود دارد؟

حل (۱): مسیرهای رفتن از A به J به صورت زیر است:

- ۱) $A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow J$ ۲) $A \rightarrow C \rightarrow I \rightarrow J$ ۳) $A \rightarrow F \rightarrow I \rightarrow J$

۳ راه وجود دارد.

حل (۲): مانند قسمت قبل ۳ راه وجود دارد.

حل (۳): برای رسیدن به M یا از J باید به M برسیم یا از L .

در انتهای مسیرهای حل (۱) بعد از رسیدن به J می‌توان « $\rightarrow M$ » را اضافه کرد و در انتهای مسیرهای حل (۲) هم به همین ترتیب پس برای رسیدن از A به M ، شش راه وجود دارد. ($3 + 3 = 6$)

حل (۴): مسیرهای رفتن از A به K به صورت زیر است:

- ۱) $A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow K$ ۲) $A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow J \rightarrow K$
 ۳) $A \rightarrow C \rightarrow I \rightarrow J \rightarrow K$ ۴) $A \rightarrow F \rightarrow I \rightarrow J \rightarrow K$





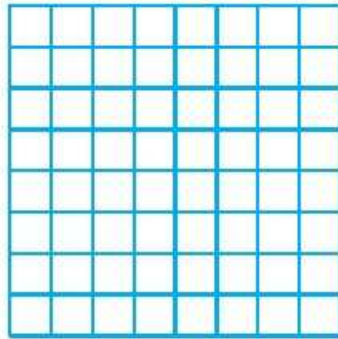
۴ راه وجود دارد.

حل (۵): برای رسیدن به N یا باید از K به N برسیم یا از M . برای رفتن از A به K چهار تا راه وجود دارد و برای رفتن از A به M شش راه وجود دارد. برای رسیدن از A به N ده راه وجود دارد. $(۴ + ۶ = ۱۰)$.
تعداد راه‌های رسیدن از A به P هم مانند رسیدن از A به N ده راه می‌باشد و با همین شیوه تعداد راه‌های رسیدن از A به B برابر است با ۲۰ راه.



مسئله ۲

در جدول مقابل چند مربع وجود دارد؟



حل. به مسئله‌های ساده‌تر نیز توجه کنید.

۱. در جدول ۲×۲ مقابل چند مربع وجود دارد؟

در این شکل تعداد مربع‌های ۱×۱ برابر است با: ۴

و تعداد مربع‌های ۲×۲ برابر است با: ۱

پس تعداد کل مربع‌ها برابر است با: $۱ + ۴ = ۵$

۲. در جدول ۳×۳ مقابل چند مربع وجود دارد؟

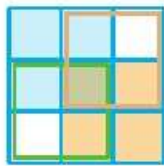
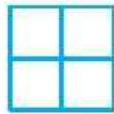
در این شکل تعداد مربع‌های ۱×۱ برابر است با: ۹

و تعداد مربع‌های ۲×۲ برابر است با: ۴

و تعداد مربع‌های ۳×۳ برابر است با: ۱

پس تعداد کل مربع‌ها برابر است با: $۱ + ۴ + ۹ = ۱۴$

(مربع‌های ۲×۲ در شکل مشخص شده‌اند.)



کشف الگوی حل:





مشخص است که در یک جدول 1×1 تعداد مربع‌ها برابر است با: ۱
 و در یک جدول 2×2 تعداد مربع‌ها برابر است با: $1 + 4$
 و در یک جدول 3×3 تعداد مربع‌ها برابر است با: $1 + 4 + 9$
 این عبارتها را می‌توان به صورت زیر هم نوشت:

$$1 = (1 \times 1)$$

$$1 + 4 = (1 \times 1) + (2 \times 2)$$

$$1 + 4 + 9 = (1 \times 1) + (2 \times 2) + (3 \times 3)$$

حتماً الگوی حل را یافته‌اید. در یک جدول 8×8 تعداد مربع‌ها برابر است با:

$$(1 \times 1) + (2 \times 2) + (3 \times 3) + (4 \times 4) + (5 \times 5) + (6 \times 6) + (7 \times 7) + (8 \times 8) =$$

$$1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 = 204$$



تمرین‌های بخش ۷-۱

۱ اگر ۱۲ نقطه را دوبه‌دو به هم وصل کنیم، چند پاره‌خط به وجود می‌آید؟

۲ یک ۲۰ ضلعی چند قطر دارد؟

۳ مجموع اعداد فرد ۱، ۳، ۵، ۷، ... و ۱۳۹۳ چند است؟

۴ رقم یکان عدد حاصل در عبارت $3 \times 3 \times 3 \times \dots \times 3$ چند است؟
۵ ۱۳۹۴

۵ حاصل عبارت $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2048}$ را به دست آورید.

۶ اندازه‌ی ضلع مربعی را یک سانتی‌متر افزایش دادیم؛ مساحت آن ۱۳۹۳ سانتی‌متر مربع افزایش پیدا کرد. اندازه‌ی ضلع مربع در ابتدا، چند سانتی‌متر بود؟





راهبرد روش‌های نمادین



مسئله ۱

مسعود هر ماه مقدار مشخصی پول از پدرش می‌گیرد. اکنون او ۲۴۰ تومان پول دارد. اگر طی ۳ ماه آینده پول‌هایی را که پدرش به او می‌دهد را هم پس‌انداز کند، کل پول او ۶۰۰۰ تومان خواهد شد. پدرش هر ماه چند تومان به او می‌دهد؟ حل. اگر مقدار پولی را که مسعود هر ماه از پدرش می‌گیرد با نماد \square نشان دهیم، می‌توانیم این مسئله را به صورت زیر بنویسیم:

$$3 \times \square + 240 = 6000$$

چگونه می‌توان عددی را که باید به جای \square قرار گیرد، به دست آورد؟

۱. می‌توانیم با حدس زدن و آزمایش دادن، جواب را پیدا کرد.

۲. در فصل سوم با معادله و روش حل آن آشنا می‌شوید. می‌توانید به کمک آن، مسئله را حل کنید.

۳. می‌توانیم $3 \times \square$ را به عنوان یک عدد، در نظر بگیریم و از خود بپرسیم:

کدام عدد است که اگر با ۲۴۰ جمع شود، عدد ۶۰۰۰ به دست می‌آید و به آسانی بفهمیم که عدد مورد نظر ۵۷۶۰ است. (زیرا $6000 - 240 = 5760$) بنابراین:

$$3 \times \square = 5760$$

پس از خود بپرسیم: کدام عدد است که اگر در ۳ ضرب شود عدد ۵۷۶۰ به دست می‌آید و با یک تقسیم عدد مورد نظر را بیابیم.

$$5760 \div 3 = 1920$$

بنابراین مقدار پولی را که مسعود هر ماه از پدرش می‌گیرد ۱۹۲۰ تومان است.

چنانچه مشاهده کردید به کمک نمادهای جبری توانستیم مسئله را به یک «معادله» تبدیل کنیم. بسیاری از مسئله‌های ریاضی را می‌توان به معادله تبدیل کرد.



مسئله ۲

سیامک با خود فکر که ۲۶ سال دیگر سن او سه برابر سن کنونی او خواهد بود. او اکنون چند سال دارد؟



حل. سن کنونی سیامک را \square در نظر می‌گیریم. در این صورت مسئله به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$\square + 26 = 3 \times \square$$

۱. با راهبرد حدس زدن و آزمایش کردن می‌توان پاسخ را یافت.

$$3 \times \square = \square + \square + \square$$

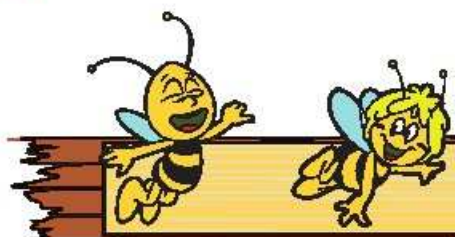
۲. می‌دانیم:

در این صورت:

$$\square + 26 = 3 \times \square \Rightarrow \square + 26 = \square + \square + \square$$

$$\Rightarrow 26 = \square + \square \Rightarrow \square = 13$$

یعنی سن کنونی سیامک ۱۳ سال می‌باشد.



تمرین‌های بخش ۸-۱

۱. محیط زمینی به شکل مستطیل ۶۸ متر است. اگر طول این زمین ۴ متر بیش‌تر از عرض آن باشد، مساحت این زمین چند مترمربع است؟

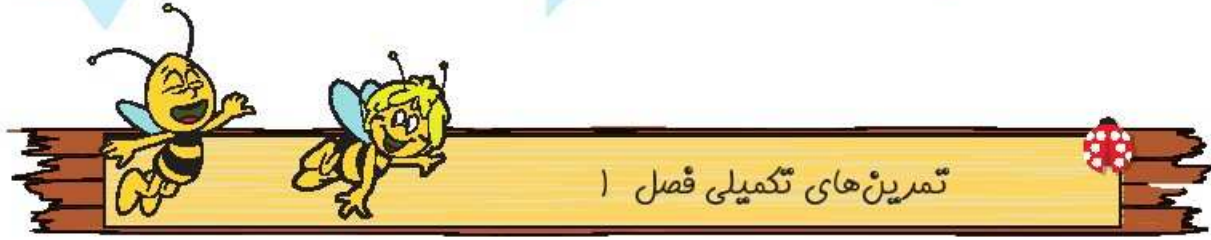
۲. عددی را ۷ برابر کرده و سپس به عدد حاصل ۵ واحد اضافه می‌کنیم؛ عدد حاصل ۱۲۴ شد. عدد مورد نظر چند است؟

۳. فاطمه ۱۰۰۰ تومان و سعید ۱۲۰۰ تومان پول دارند. فاطمه روزی ۲۰۰ تومان و سعید روزی ۱۵۰ تومان پس‌انداز می‌کنند. پس از چند روز پول آن‌ها مساوی می‌شود؟

۴. وحید ۳۸ سال و دخترش ۸ سال دارد. پس از چند سال سن وحید سه برابر سن دخترش می‌شود؟

۵. مجموع سه عدد صحیح متوالی ۱۳۸ است. آن سه عدد را بیابید.





علی و دوستانش برای تفریح به شهر بازی رفتند. جلوی یکی از اسباب‌بازی‌ها ایستادند. فردی که بلیط می‌فروخت گفت: با هر بلیط می‌توانید ۵ تیر شلیک کنید و اگر تیر شما به هدف بخورد، ۲ تیر دیگر جایزه می‌گیرید. علی یک بلیط خرید و از ۵ شلیک، ۳ تا را به هدف زد. او اکنون چند بار دیگر می‌تواند شلیک کند؟ رضا یک بلیط خرید و با همان یک بلیط ۲۱ بار شلیک کرد. رضا چند بار به هدف زده است؟

میانگین تمامی درس‌های مریم غیر از ریاضی $\frac{11}{6}$ است. اگر نمره‌ی مریم در درس ریاضی ۲۰ بشود، میانگین تمامی درس‌های او ۱۳ می‌شود. تعداد درس‌های مریم چند تا است؟

با توجه به رابطه‌ی بین اعداد زیر، هشتمین عدد چند است؟

۳، ۱۰، ۳۱، ۹۴، ۲۸۳، ...

با توجه به رابطه‌ی بین اعداد زیر، صدمین عدد چند است؟

۷، ۱۰، ۱۳، ۱۶، ۱۹، ...

به چند طریق می‌توان جدول زیر را با عددهای ۱، ۲، ۳ و ۴ پر کرد؛ به طوری که در هیچ سطر و ستونی عدد تکراری نداشته باشیم؟

		۳	۴
	۳	۴	
	۴		

یک خط صفحه را به دو ناحیه تقسیم می‌کند:

ناحیه‌ی ۱

ناحیه‌ی ۲





دو خط صفحه را حداکثر به چهار ناحیه تقسیم می‌کند:



۵ خط، صفحه را حداکثر به چند ناحیه تقسیم می‌کند؟

از چپ به راست، عددها را از ۱ تا ۱۳۹۳ پشت سر هم می‌نویسیم. عددی که به دست می‌آید، چند رقم دارد؟

۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱۰۱۱۱۲۱۳...۱۳۹۲۱۳۹۳

در یک آزمون ۲۰ سوالی، اگر به سوالی پاسخ درست داده شود ۵ نمره تعلق می‌گیرد و اگر پاسخ غلط داده شود ۲ نمره کم می‌شود. مثلاً اگر کسی ۱۶ سوال را به درستی پاسخ دهد و ۳ سوال را غلط جواب دهد و ۱ سوال را پاسخ ندهد، نمره‌ی او ۷۴ می‌شود. زیرا:

$$(۱۶ \times ۵) - (۳ \times ۲) = ۸۰ - ۶ = ۷۴$$

این آزمون در یک مدرسه برگزار شد؛ در پایان مشخص شد که هیچ دو نفری، نمره‌ی یکسان کسب نکرده‌اند. این مدرسه حداکثر چند دانش‌آموز ممکن است داشته باشد؟

در کنار خیابانی درخت‌هایی با فاصله‌های برابر وجود دارند. حمید از درخت اول تا درخت ششم را در ۶۰ ثانیه طی می‌کند. او با همین سرعت فاصله‌ی درخت اول تا شانزدهم را در چند ثانیه طی خواهد کرد؟

حاصل ضرب دو عدد طبیعی ۵۶ و مجموع آن دو عدد ۱۸ است. آن دو عدد را بیابید.

از یک جعبه پرتقال، بار اول نصف پرتقال‌ها به اضافه‌ی ۱ پرتقال را برداشتیم. بار دوم از پرتقال‌های باقی‌مانده، نصف پرتقال‌ها به اضافه‌ی ۲ پرتقال را برداشتیم. بار سوم از پرتقال‌های باقی‌مانده، نصف پرتقال‌ها به اضافه‌ی ۵ پرتقال را برداشتیم. دیگر هیچ پرتقالی در جعبه نمانده است. در آغاز چند پرتقال در جعبه بود؟

در مربع جادویی زیر، مجموع اعداد واقع در هر سطر، هر ستون و هر قطر با هم برابر است. x و y را پیدا کنید.

۱۵		
y		۱۸
۱۹		x





سربازان هیتلر در یک بازداشتگاه، ۱۶ اسیر جنگی را دور یک سکوی دایره‌ای شکل نگه داشته‌اند. این افراد به ترتیب از شماره‌ی ۱ تا ۱۶ شماره‌گذاری شده‌اند. فرمانده با شلیک ۱ گلوله فرد شماره‌ی ۱ را کشت و پس از آن با شمارش آن‌ها، وقتی به پنجمین اسیر می‌رسید، او را می‌کشت. شماره‌ی آخرین اسیری که کشته می‌شود چند است؟



در سال ۱۳۹۳ روز اول مهر، سه‌شنبه است. آخرین سه‌شنبه‌ی سال، چندم اسفند است؟



اگر سن ۹ سال قبل فاطمه را با سن ۲ سال قبل او جمع کنیم، سن ۳ سال بعد او به دست می‌آید. فاطمه اکنون چند ساله است؟



در جدول زیر عددی که در هر خانه نوشته می‌شود برابر است با مجموع دو عدد خانه‌های بالایی آن. در این صورت x را بیابید.



۱۵	۹	x	۳۴
۲۴			
			۱۰۰

سه وزنه‌ی ۱، ۳ و ۶ کیلوگرمی و یک ترازوی دوکفه‌ای در اختیار داریم. به کمک آن‌ها چند جسم با وزن‌های مختلف را می‌توان وزن کرد؟



در عمل ضرب مقابل هر حرف به جای یک رقم قرار گرفته است و دو حرف متفاوت نشان دهنده‌ی دو رقم متفاوت می‌باشند. مشخص کنید به جای هر حرف چه رقمی باید قرار گیرد؟



$$\begin{array}{r}
 ab \\
 \times ba \\
 \hline
 cde \\
 + ef \\
 \hline
 gfe
 \end{array}$$





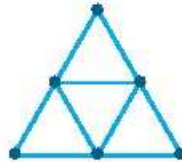
۱۹ آقای A در کشوری زندگی می کند که اسکناس های ۶ و ۱۱ دلاری وجود دارد! او برای پرداخت ۱۲۳ دلار، حداقل چند اسکناس باید پردازد؟



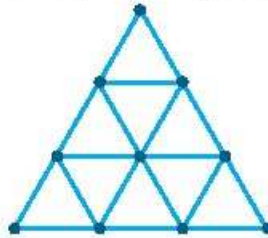
۲۰ یک جدول 5×4 را در نظر بگیرید که ۲۰ خانه دارد. می خواهیم خانه های این جدول را رنگ آمیزی کنیم به طوری که هیچ دو خانه ای مجاوری هم رنگ نباشند. (دو خانه که در یک ضلع مشترک باشند مجاور نامیده می شوند.) حداقل چند رنگ لازم داریم؟



۲۱ اگر هر ضلع یک مثلث را به دو قسمت مساوی تقسیم کنیم و مطابق شکل به هم وصل کنیم ۴ مثلث کوچک پدید می آید.



اگر هر ضلع را به سه قسمت مساوی تقسیم کنیم ۹ مثلث کوچک پدید می آید.



اگر هر ضلع را به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم، چند مثلث کوچک پدید خواهد آمد؟

۲۲ در دنباله ای اعداد زیر، عدد بعدی چند است؟



۲۷۷ ، ۹۸ ، ۷۲ ، ۱۴ ، ؟

۲۳ حمید، سعید، لیلا و ندا برای تماشای مسابقه ای والیبال به ورزشگاه رفتند و هر کدام از آن ها طرفدار یکی از تیم های A، B، C و D بودند. لیلا کنار برادر خود که طرفدار تیم C است نشسته بود. خواهری که طرفدار تیم D است سمت چپ لیلا نشسته بود. حمید طرفدار تیم های B و C نیست. چه کسی طرفدار تیم B است؟



۲۴ اگر نعل زدن به هر سم یک اسب، ۱۰ دقیقه طول بکشد ۸ آهنگر در چه مدت می توانند پای ۱۲ اسب را نعل کنند؟ (به طور هم زمان نمی توان بیش از یک پای اسب را نعل زد.)





۲۵ اگر بخواهیم یک اسکناس ۱۰۰ تومانی را به سکه‌های ۱۰، ۲۰ و ۵۰ تومانی خرد کنیم، این کار به چند طریق ممکن است؟

۲۶ هفت سکه‌ی یکسان داریم که ۲ تایی آن‌ها تقلبی هستند و از بقیه کمی سبک‌ترند. البته ظاهر همه‌ی سکه‌ها شبیه هم است. یک ترازوی دوکفه‌ای هم در اختیار داریم. حداقل با چند بار وزن کردن می‌توان سکه‌های تقلبی را پیدا کرد؟

۲۷ برای به‌دست آوردن حاصل عبارت‌های زیر، مسئله‌های ساده‌تر بسازید. سپس حاصل عبارت‌ها را به‌دست آورید:

$$۱ + ۳ + ۵ + ۷ + ۹ + \dots + ۱۰۱ =$$

الف.

$$\frac{۱}{۱ \times ۲} + \frac{۱}{۲ \times ۳} + \frac{۱}{۳ \times ۴} + \dots + \frac{۱}{۹۹ \times ۱۰۰} =$$

ب.

۲۸ در یک عدد دورقمی اگر جای رقم‌ها را عوض کنیم، ۶۳ واحد به آن افزوده می‌شود. اختلاف رقم‌های یکان و دهگان این عدد چند است؟

۲۹ حاصل ضرب سه عدد طبیعی که دو تایی آن‌ها با هم برابرند ۲۰ است. این اعداد را بیابید. این مسئله چند جواب دارد؟

۳۰ در یک کلاس ۳۵ نفره، ۱۷ نفر در امتحان فیزیک نمره‌ی ۲۰ گرفته‌اند و ۱۲ نفر در امتحان شیمی نمره‌ی ۲۰ گرفته‌اند. اگر ۳ نفر در هر دو امتحان نمره‌ی ۲۰ گرفته باشند، چند نفر در هیچ یک از دو امتحان نمره‌ی ۲۰ نگرفته‌اند؟

