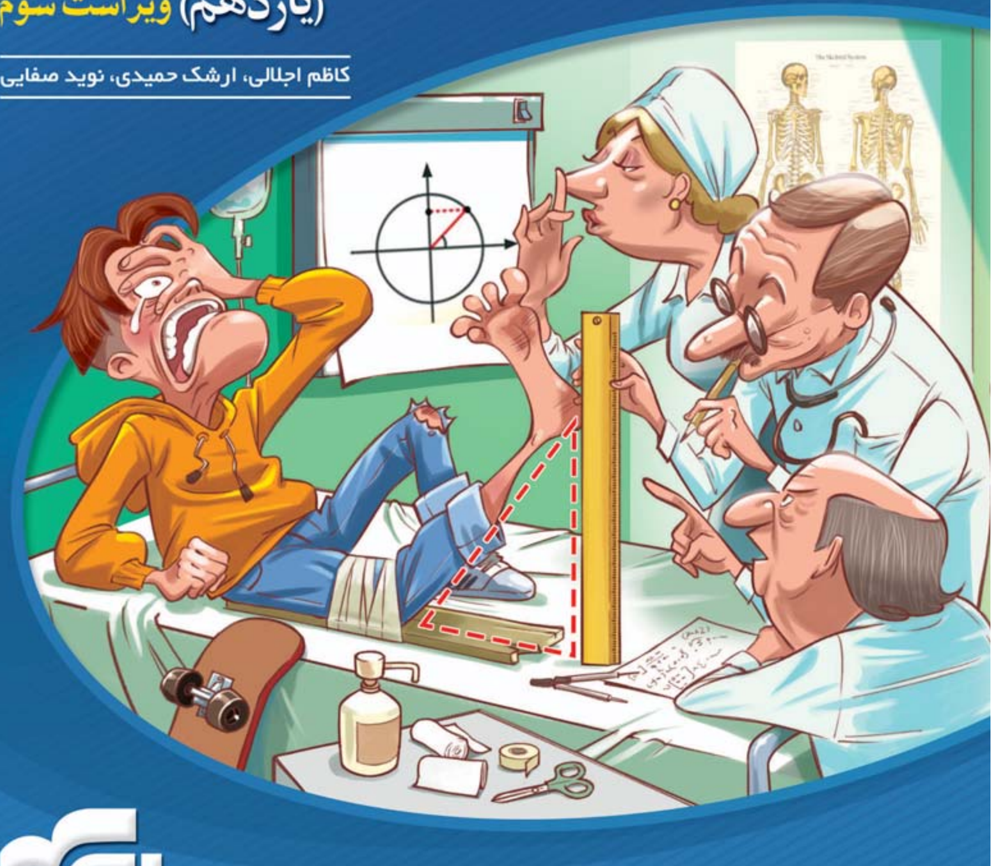
درس‌نامه + پرسش‌های چهارگزینه‌ای + پاسخ‌های کاملاً تشریحی

ریاضی ۲ تجربی

(یازدهم) ویراست سوم

کاظم اجلالی، ارشک حمیدی، نوید صفایی



نشر الگو

مجموعه کتاب‌های یازدهم نشر الگو ویژهٔ رشتهٔ تجربی:

- ریاضی ۲ تجربی (تست و سه‌بعدی)
- فیزیک ۲ تجربی (تست و سه‌بعدی)
- ریاضیات پایه (تجربی)
- شیمی ۲ (تست)
- ریاضی ۲ (تمام)
- جمع‌بندی شیمی یازدهم
- جامع زیست‌شناسی ۲
- جامع ریاضیات تجربی + موج آزمون
- موج آزمون ریاضی (رشتهٔ تجربی)

- درس‌نامه‌ای شامل نکات کلیدی و مرور مطالب مهم
- تقسیم مطالب و پرسش‌های چهارگزینه‌ای بر اساس درس‌های کتاب درسی
- دسته‌بندی پرسش‌های چهارگزینه‌ای در سه سطح ساده، متوسط و دشوار
- ۵۱۸ پرسش چهارگزینه‌ای در درس‌نامه‌ها
- ۲۳۵۵ پرسش چهارگزینه‌ای در پایان درس‌نامه‌ها
- پوشش سؤالات کنکور سراسری سال‌های اخیر
- پاسخ‌های کاملاً تشریحی برای همهٔ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

شما می‌توانید سؤالات خود را از طریق کانال تلگرام ریاضی الگو به آدرس زیر با انتشارات در میان بگذارید:

(رشتهٔ ریاضی) https://t.me/olgoo_riaziaat_riazi

(رشتهٔ تجربی) https://t.me/olgoo_riaziaat_tajrobi

نشر الگو
www.olgoobooks.ir

9786007950593

پیشگفتار

به نام خدا

این کتاب را بر اســاس محتوای کتاب درســی ریاضی پایهٔ یازدهم و با هدف آموزش عمیق‌تر مفاهیم درسی و کسب مهارت در حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای نوشته‌ایم. بنابراین، کتاب حاضر مکمل کتاب درسی است و رویکرد آن آموزش نکات و مطالبی است که برای حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای مفیدند.

هر فصل کتاب به چند درس و هر درس به چند بخش تقسیم شده است. در ابتدای هر بخش، ضمن مرور نکات مربوط به آن، روش‌های اصلی حل پرســش‌های چهارگزینه‌ای را با آوردن نمونه‌هایی از این پرســش‌ها آموزش داده‌ایم. پس از آن، تعداد زیادی پرسش چهارگزینه‌ای آورده‌ایم و راه‌حل آن‌ها را در انتهای کتاب گنجانده‌ایم. در انتخاب این پرسش‌ها به تنوع و فراوانی اهمیت داده‌ایم. به این ترتیب، با مطالعهٔ این کتاب، تقریباً هر آنچه را که برای حل پرســش‌های چهارگزینه‌ای و کســب آمادگی برای شرکت در آزمون‌های مختلف نیاز دارید به‌دست خواهید آورد.

در این ویراست ساختار کتاب و محتوای آن تغییرات زیادی کرده است:

- درس‌نامه‌ها کامل‌تر شده‌اند؛
- تعداد زیادی پرسش چهارگزینه‌ای اضافه شده است؛
- هرجا که لازم بوده است، پاسخ‌ها بازنویسی و راه‌حل‌های جدید اضافه شده‌اند.

هر درس کتاب به چند بخش جدید تقسیم شده است که موضوع و حجم مطالب آن متناسب با تدریس یک جلسه تدریس معلم در کلاس است. پرسش‌های چهارگزینه‌ای هر بخش هم در انتهای آن بخش آمده است تا دسترسی به آن‌ها ساده‌تر باشد. همچنین پرســش‌های هر بخش را به ســه سطح تقسیم کرده‌ایم: در سطح اول پرسش‌هایی ساده و مفهومی را آورده‌ایم که با حل آن‌ها مفاهیم آن مبحث مرور می‌شــوند. این پرســش‌ها کمتر در آزمون‌ها دیده می‌شــوند ولی برای تسلط بر مفاهیم درس، حل آن‌ها ضروری اســت. در ســطح دوم پرسش‌هایی را آورده‌ایم که سطح دشواری آن‌ها متوسط است و در آزمون‌های آزمایشی و کنکور سراســری بیشــتر این نوع پرسش‌ها مطرح می‌شود. تعداد این پرسش‌ها بسیار بیشتر از پرسش‌های سطح اول است و حل آن‌ها به تمام دانش‌آموزان توصیه می‌شود. در سطح سوم پرسش‌هایی را آورده‌ایم که سطح دشواری آن‌ها بالاتر از پرسش‌های سطح دوم است. تعداد این پرسش‌ها زیاد نیست و حل آن‌ها به دانش‌آموزان مستعد و سخت‌کوش توصیه می‌شود. این پرسش‌ها ممکن است در آزمون‌های آزمایشی و کنکور سراسری مطرح شوند ولی فراوانی آن‌ها کم است.

در انتهای هر درس، ســؤالات کنکورهای سراســری متناســب با آن درس را آورده‌ایم و در انتهای هر فصل، ســه آزمون از مباحث آن فصل قرار داده‌ایم تا بتوانید با حل آن‌ها میزان تسلط خود بر مطالب فصل را محک بزنید.

وظیفهٔ خود می‌دانیم از همکاران عزیزمان در نشر الگو، خانم عاطفه ربیعی (ویراست اول و دوم)، دکترین آریس آقانیانس (ویراســت‌های دوم و سوم) و ابوالفضل علی‌بمانی (ویراست سوم) برای ویراستاری علمی، خانم فاطمه احدی برای صفحه‌آرایی کتاب و خانم ســکینه مختار مدیر واحد ویراســتاری و حروفچینی تشــکر و قدردانی کنیم.

مؤلفــان

فهرست

فصل ششم: حد و پیوستگی

فصل هفتم: آمار و احتمال

فصل هشتم: پاسخ‌های تشریحی

فصل نهم: پاسخنامهٔ کلیدی

درس اول / بخش اول: توابع گویا

مفاهیم اولیهٔ تابع

هر **تابع** از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که به هر عضو A دقیقاً یک عضو از B را نسبت می‌دهد. A را **دامنهٔ** این تابع و B را **هم‌دامنهٔ** این تابع می‌نامند. مجموعه عضوهایی از B را که به عضوی از A نسبت داده شده‌اند **برد** این تابع می‌نامند. بنابراین برد تابع زیرمجموعه‌ای از هم‌دامنهٔ تابع است. دامنهٔ تابع f را با D_f و برد آن را با R_f نمایش می‌دهیم. برای نشان دادن اینکه f تابعی با دامنهٔ A و هم‌دامنهٔ B است می‌نویسیم $f:A\to B$ (بخوانید f تابعی از A به B است).

ضابطهٔ تابع

می‌توان تابع را ماشینی در نظر گرفت که در ازای هر ورودی یک خروجی تحویل می‌دهد. ورودی‌ها از دامنهٔ تابع داده می‌شوند و خروجی‌ها در برد هستند. در ضمن، به ازای هر ورودی دقیقاً یک خروجی وجود دارد، البته ممکن است چند ورودی مختلف خروجی یکسان داشته باشند. اگر x عضوی از دامنهٔ تابع f و y خروجی این تابع به ازای x باشند، می‌نویسیم $y=f(x)$. به عملیاتی که ماشین تابع روی ورودی انجام می‌دهد تا آن را به خروجی تبدیل کند، **ضابطهٔ تابع** می‌گویند.

تست ۱

در تابع f با دامنهٔ $\mathbb{R}$ و ضابطهٔ $f(x)=x^۲(۲-x)^۲$، حاصل $f(۱+x)-f(۱-x)$ کدام است؟

۱) صفر   ۲) $۴x$ ۳) $۲x^۲$ ۴) $۴x^۲$

راه‌حل در ضابطهٔ تابع به جای x مقدارهای $۱+x$ و $۱-x$ را قرار می‌دهیم:

$f(۱+x)=(۱+x)^۲(۱-x)^۲,\quad f(۱-x)=(۱-x)^۲(۱+x)^۲$

بنابراین $f(۱+x)-f(۱-x)=۰$.

تست ۲

اگر $D_f=\mathbb{R}$ و $f(x)+xf(۲)=x^۳+۱$، حاصل $f(-۲)$ کدام است؟

۱) -۷ ۲) -۱ ۳) ۹   ۴) ۳

راه‌حل در تساوی داده شده قرار می‌دهیم $x=۲$:

$x=۲\Rightarrow f(۲)+۲f(۲)=۸+۱\Rightarrow f(۲)=۳$

بنابراین

$f(x)+۳x=x^۳+۱\Rightarrow f(x)=x^۳-۳x+۱\Rightarrow f(-۲)=-۸+۶+۱=-۱$

تست ۳

اگر $D_f=\mathbb{R}$ و $f(x+۱)=x^۳+۳x^۲+۳x$، مقدار $f(\sqrt[۳]{۲})$ کدام است؟

۱) ۲   ۲) ۱   ۳) $\sqrt[۳]{۴}$ ۴) $\sqrt[۳]{۲}$

راه‌حل تساوی داده شده را به‌صورت $f(x+۱)=(x+۱)^۳-۱$ می‌نویسیم. اکنون اگر فرض کنیم $x+۱=\sqrt[۳]{۲}$، یعنی $x=\sqrt[۳]{۲}-۱$، به‌دست می‌آید

$f(\sqrt[۳]{۲})=(\sqrt[۳]{۲})^۳-۱=۱$

تابع گویا

اگر $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای باشند و $Q(x)$ چندجمله‌ای ثابت صفر نباشد، به تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ و دامنهٔ $D_f=\{x|Q(x)\neq ۰\}$ **تابع گویا** می‌گوییم.

مثال: تابع‌های زیر گویا هستند:

الف) $f(x)=\dfrac{۱}{x}$, $D_f=\mathbb{R}-\{۰\}$ ب) $f(x)=\dfrac{x}{x-۱}$, $D_f=\mathbb{R}-\{۱\}$ پ) $f(x)=\dfrac{x-۱}{x^۲+۱}$, $D_f=\mathbb{R}$

تست ۴

اگر $f(x)=\frac{x^2}{x^2-1}$ و $D_f=\mathbb{R}-\{\pm 1\}$، حاصل $f(\frac{1}{x})$ کدام است؟

۱) $\frac{x^2}{1-x^2}$ ۲) $\frac{1}{1-x^2}$ ۳) $\frac{1-x^2}{x^2}$ ۴) $\frac{x^2-1}{x^2}$

راه‌حل می‌توان نوشت

$$f(\frac{1}{x})=\frac{(\frac{1}{x})^2}{(\frac{1}{x})^2-1}=\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}-1}=\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1-x^2}{x^2}}=\frac{1}{1-x^2}$$

تست ۵

اگر $D_f=\mathbb{R}-\{1,\frac{1}{3}\}$ و $f(\frac{x-1}{x+1})=\frac{x+1}{x-2}$، مقدار $f(\frac{1}{2})$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل اگر معادلهٔ $\frac{x-1}{x+1}=\frac{1}{2}$ را حل کنیم، به‌دست می‌آید $x=3$. بنابراین اگر در تساوی داده شده قرار دهیم $x=3$، به‌دست می‌آید

$$f(\frac{2}{4})=\frac{4}{1}\Rightarrow f(\frac{1}{2})=4$$

تست ۶

اگر $f(\frac{x-1}{2x+1})=\frac{2x-1}{x+1}$، آن‌گاه $f(x)$ برای هر $x\in\mathbb{R}-\{2,\frac{1}{2}\}$ کدام است؟

۱) $\frac{4x+1}{x+1}$ ۲) $\frac{2x+1}{1-x}$ ۳) $\frac{1}{2x-1}$ ۴) $\frac{4x+1}{2-x}$

راه‌حل فرض می‌کنیم $t=\frac{x-1}{2x+1}$، بنابراین

$$2tx+t=x-1 \Rightarrow (2t-1)x=-t-1 \Rightarrow x=\frac{t+1}{1-2t}$$

در نتیجه

$$f(t)=\frac{2(\frac{t+1}{1-2t})-1}{\frac{t+1}{1-2t}+1}\xrightarrow[\text{را در } (1-2t) \text{ ضرب می‌کنیم}]{\text{صورت و مخرج کسر}}\frac{2t+2-1+2t}{t+1+1-2t}=\frac{4t+1}{2-t}\Rightarrow f(x)=\frac{4x+1}{2-x}$$

پیدا کردن دامنهٔ تابع از روی ضابطه

وقتی می‌خواهیم یک تابع را معرفی کنیم، باید دامنهٔ آن را نیز مشخص کنیم. مثلاً دامنهٔ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x-2$ می‌تواند $\mathbb{R}$ یا $[1,2]$ یا $\{0,1,2,3\}$ یا هر مجموعهٔ دلخواه دیگری باشد. ولی اگر دامنهٔ تابع f را معین نکردیم و فقط ضابطهٔ آن را نوشتیم، قرارداد می‌کنیم که دامنهٔ تابع f را مجموعهٔ تمام مقادیری از x در نظر بگیریم که $f(x)$ به‌ازای آن‌ها بامعنی است. مثلاً اگر ضابطهٔ تابع f را به صورت $f(x)=\frac{1}{x}$ معرفی کنیم، دامنهٔ تابع f را طبق این قرارداد مجموعهٔ $\mathbb{R}-\{0\}$ در نظر می‌گیریم، زیرا عبارت $\frac{1}{x}$ فقط به‌ازای $x=0$ بامعنی نیست.

دامنهٔ توابع گویا

برای پیدا کردن دامنهٔ توابع گویا، همهٔ مقادیری که مخرج را صفر می‌کنند، پیدا می‌کنیم و مجموعهٔ آن‌ها را از $\mathbb{R}$ کم می‌کنیم.

مثال: می‌خواهیم دامنهٔ تابع گویای $f(x)=\frac{x+2}{x^3-x}$ را پیدا کنیم. ابتدا عددهایی را پیدا می‌کنیم که مخرج را صفر می‌کنند. توجه کنید که

$$x^3-x=0\Rightarrow x(x^2-1)=0\Rightarrow x(x-1)(x+1)=0\Rightarrow x=0\ ,\ x=-1\ ,\ x=1$$

بنابراین باید مجموعهٔ $\{0,-1,1\}$ را از $\mathbb{R}$ کم کنیم تا دامنهٔ تابع f به‌دست بیاید، پس $D_f=\mathbb{R}-\{0,-1,1\}$.

تست ۷

مجموع اعدادی که در دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-3x+1}$ قرار ندارند، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل اعدادی که جواب معادلهٔ $x^2-3x+1=0$ باشند، در دامنهٔ تابع f قرار ندارند. مجموع این اعداد برابر ۳ است.

تست ۸

دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{2x-1}{x^2+kx+1}$ **به ازای کدام مقدار** k **برابر** $\mathbb{R}$ **است؟**

۱) $k=2$ ۲) $k=5$ ۳) $k=-3$ ۴) $k=\frac{1}{2}$

راه‌حل اگر دامنهٔ این تابع $\mathbb{R}$ باشد، باید مخرج $f(x)$ به‌ازای تمام مقادیر حقیقی x مخالف صفر باشد، پس

$$x^2+kx+1=0 \xrightarrow{\Delta<0} \Delta=k^2-4<0 \Rightarrow k^2<4 \Rightarrow |k|<2 \Rightarrow -2<k<2$$

با توجه به مقادیر داده شده گزینهٔ (۴) درست است.

تست ۹

اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x-1}{2x^2+ax+b}$ **به‌صورت** $\mathbb{R}-\{-2\}$ **باشد، حاصل** $a+b$ **کدام است؟** $(a^2\geq 8b)$

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۲۰ ۴) ۲۴

راه‌حل فقط عدد -2 در دامنهٔ تابع قرار ندارد، پس تنها ریشهٔ مخرج $f(x)$ عدد -2 است. بنابراین عبارت مخرج مضربی از $(x+2)^2$ است. با توجه به ضریب x^2 در مخرج $f(x)$، این عبارت $2(x+2)^2$ است و در نتیجه

$$2(x+2)^2=2x^2+ax+b \Rightarrow 2x^2+8x+8=2x^2+ax+b \Rightarrow a=8\ , b=8 \Rightarrow a+b=16$$

تست ۱۰

دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x}{2x^2+ax+b}$ **به صورت** $\mathbb{R}-\{-3,1\}$ **است. مقدار** $a-b$ **کدام است؟**

۱) ۱۰ ۲) -10 ۳) ۲ ۴) -2

راه‌حل $x=-3$ و $x=1$ ریشه‌های مخرج کسر ضابطهٔ تابع هستند، یعنی

$$2(-3)^2+a(-3)+b=0 \Rightarrow b=3a-18\ , \quad 2(1)^2+a(1)+b=0 \Rightarrow b=-a-2$$

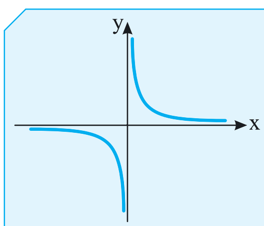
بنابراین

$$3a-18=-a-2 \Rightarrow 4a=16 \Rightarrow a=4 \Rightarrow b=-6 \Rightarrow a-b=10$$

تابع گویای $f(x)=\frac{1}{x}$

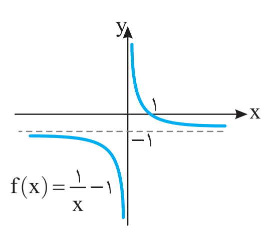
نمودار تابع گویای $f(x)=\frac{1}{x}$ **که دامنهٔ آن** $\mathbb{R}-\{0\}$ **است، به شکل مقابل است.**

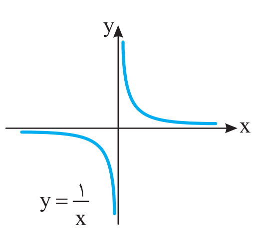
از روی این نمودار معلوم است که برد تابع f مجموعهٔ $\mathbb{R}-\{0\}$ **است.**



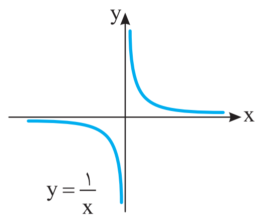
مثال: برای رسم نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{x}-1$ کافی است نمودار تابع $y=\frac{1}{x}$ را یک واحد به سمت پایین منتقل کنیم.

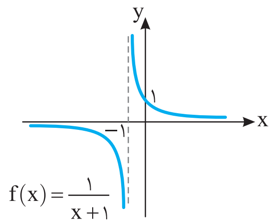
$D_f=\mathbb{R}-\{0\}$
$R_f=\mathbb{R}-\{-1\}$





مثال: برای رسم نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x+۱}$ کافی است نمودار تابع $y=\frac{۱}{x}$ را یک واحد به سمت چپ منتقل کنیم.



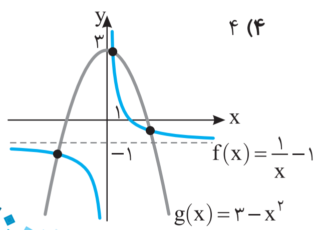


$D_f=\mathbb{R}-\{-۱\}$
$R_f=\mathbb{R}-\{۰\}$

تست ۱۱ نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}-۱$ در چند نقطه نمودار تابع $g(x)=۳-x^۲$ را قطع می‌کند؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

راه‌حل اگر نمودار تابع $y=\frac{۱}{x}$ را یک واحد به پایین منتقل کنیم، نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}-۱$ به‌دست می‌آید که مطابق شکل مقابل در سه نقطه نمودار تابع $g(x)=۳-x^۲$ را قطع می‌کند.



تابع هموگرافیک

به تابعی گویا که ضابطهٔ آن به‌صورت $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ (با شرط $c\neq ۰$ و $ad\neq bc$) و دامنهٔ آن برابر $\mathbb{R}-\{-\frac{d}{c}\}$ است، تابع هموگرافیک می‌گویند. برد تابع f برابر $\mathbb{R}-\{\frac{a}{c}\}$ است.

نکته

- اگر $c=۰$ و $d\neq ۰$، آن‌گاه تابع $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ تابع خطی $f(x)=\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}$ است.
- اگر $c\neq ۰$ و $ad=bc$، آن‌گاه تابع $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ تابع ثابت $f(x)=\frac{a}{c}$ است.

تست ۱۲ اگر تابع $f(x)=\frac{۲x-k^۲}{kx+۴}$ تابعی ثابت باشد، مقدار $f(x)$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) ۱   ۴) ۲

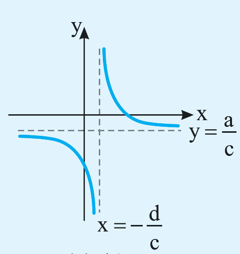
راه‌حل چون f تابعی ثابت است، پس $k\times k=(-k^۲)\times ۲\times ۴$. بنابراین $k^۳=-۸$، یعنی $k=-۲$. در نتیجه $f(x)=\frac{۲x-۴}{-۲x+۴}=-۱$.

رسم نمودار تابع هموگرافیک

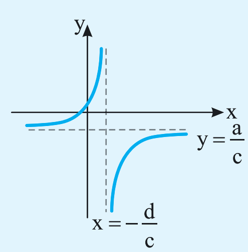
برای رسم نمودار تابع هموگرافیک $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

۱) ابتدا خط‌های $x=-\frac{d}{c}$ و $y=\frac{a}{c}$ را به‌صورت خط‌چین رسم می‌کنیم.

۲) اگر $ad-bc<۰$، نمودار تابع f به‌صورت شکل (۱) و اگر $ad-bc>۰$، نمودار تابع f به‌صورت شکل (۲) است.

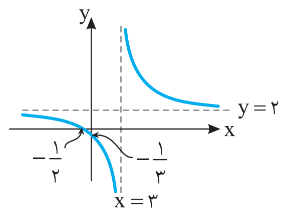


شکل (۱)

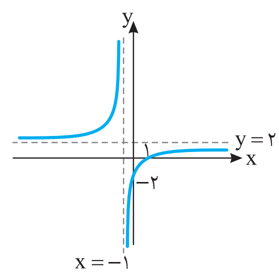


شکل (۲)

مثال: بـرای رسـم نمـودار تابـع $f(x)=\frac{۲x+۱}{x-۳}$، ابتـدا خطهـای $x=۳$ و $y=۲$ را بهصـورت خطچیـن رسـم میکنیـم. چـون $ad-bc=۲(-۳)-۱\times۱=-۷<۰$، پس نمودار تابع f بهصورت زیر است:



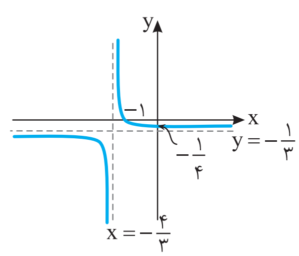
مثال: بـرای رسـم نمـودار تابـع $f(x)=\frac{۲x-۲}{x+۱}$، ابتـدا خطهـای $x=-۱$ و $y=۲$ را بهصـورت خطچیـن رسـم میکنیـم. چـون $ad-bc=۲\times۱-(-۲)\times۱=۴>۰$، پس نمودار تابع f بهصورت زیر است:



تست ۱۳ نمودار تابع $f(x)=\frac{-۱-x}{۳x+۴}$ از کدام ناحیهٔ صفحهٔ مختصات عبور نمی‌کند؟

۱) اول   ۲) دوم   ۳) سوم   ۴) چهارم

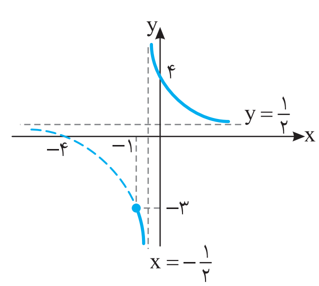
راه‌حل ابتدا توجه کنید که $ad-bc=(-۱)\times۴-(-۱)\times۳=-۱<۰$. پس نمودار تابع f بهصورت زیر است که از ناحیهٔ اول نمیگذرد.



تست ۱۴ اگر $f(x)=\frac{x+۴}{۲x+۱}$ و $D_f=[-۱,+\infty]$، برد تابع f شامل چند عدد صحیح نیست؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

راه‌حل ابتدا توجه کنید که $ad-bc=۱\times۱-۴\times۲=-۷<۰$. پس نمودار تابع f بهصورت زیر است. بنابراین برد تابع f برابر با $(-\infty,-۳]\cup(\frac{۱}{۲},+\infty)$ است، که شامل عددهای صحیح -۲، -۱ و صفر نیست.



توابع گویا

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

سطح ۱

۷۷۹- اگر $\frac{2x+f(x)}{xf(x)-3}=4$، ضابطهٔ تابع f کدام است؟

۱) $f(x)=\frac{2x}{4x+1}$ ۲) $f(x)=\frac{4x+12}{4x-1}$ ۳) $f(x)=\frac{3x-2}{2x+1}$ ۴) $f(x)=\frac{2x+12}{4x-1}$

۷۸۰- اگر $f(x)=\frac{3x-4}{2x+1}$، جواب معادلهٔ $f(2x)=2$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -1 ۳) -2 ۴) -3

۷۸۱- در تابع $f(x)=\frac{8x}{x^2+3}$، اگر $f(a)=-2$، مقدار $f(a+2)$ کدام است؟

۱) ± 1 ۲) ± 2 ۳) ± 4 ۴) صفر

۷۸۲- اگر $f(x-2)=\frac{3x}{2x+5}$، جواب معادلهٔ $f(x)=3$ کدام است؟

۱) -7 ۲) ۱ ۳) صفر ۴) -5

۷۸۳- در تابع $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$، مقدار $f(a)f(-\frac{1}{a})$ به ازای $a\neq 1,-1$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) $(a+1)^2$ ۴) $\frac{1}{(a-1)^2}$

۷۸۴- اگر $f(\frac{x^4-1}{x^4+2})=x^4-x^8+x^{16}$، مقدار $f(\frac{1}{4})$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۴ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

۷۸۵- اگر $f(\frac{3x+4}{5x+2})=\frac{x^2+6x+10}{3x+2}$، مقدار $f(2)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۷۸۶- اگر $f(\frac{x+2}{x-1})=\frac{mx+1}{x+1}$ و $f(4)=3$، مقدار $f(0)$ کدام است؟

۱) -7 ۲) -2 ۳) ۷ ۴) ۲

۷۸۷- اگر $f(\frac{x^2+1}{x})=3x+\frac{3}{x}-4$، مقدار $f(4)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۲

۷۸۸- اگر $f(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1})=x^3+3x+2$، مقدار $f(3)$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۱۰

۷۸۹- چند عدد حقیقی در دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x-1}{x^2-3x+2}$ قرار ندارد؟ کتاب درسی

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

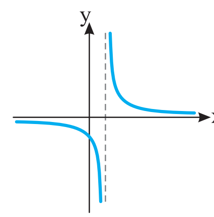
۷۹۰- چند عدد صحیح در دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x+2}{2x^3-5x^2+2x}$ قرار ندارند؟

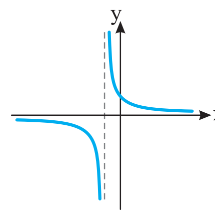
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

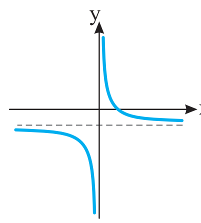
۷۹۱- در تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۱}{x}+۱$ و دامنهٔ $\mathbb{R}-\{۰,۱\}$، مجموع اعدادی که در برد تابع قرار ندارند، کدام است؟ کتاب درسی

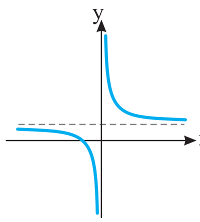
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۹۲- نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x-۱}$ کدام است؟ کتاب درسی

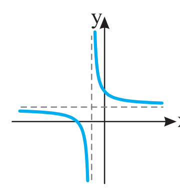
۱) 

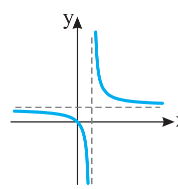
۲) 

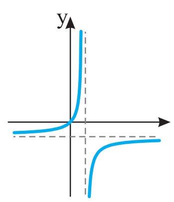
۳) 

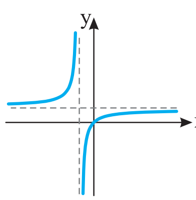
۴) 

۷۹۳- نمودار تابع $f(x)=۱+\frac{۱}{x-۱}$ کدام است؟ کتاب درسی

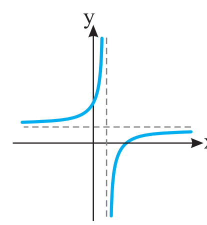
۱) 

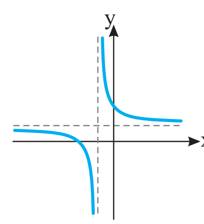
۲) 

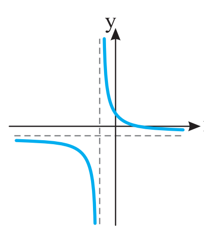
۳) 

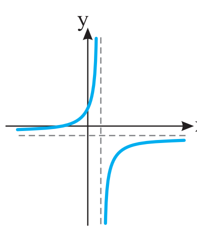
۴) 

۷۹۴- نمودار تابع $y=\frac{x+۲}{x+۱}$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۷۹۵- اگر $f(x)=\frac{۱}{x+۲}$ و $R_f=\mathbb{R}-\{۰,۱,۲\}$، حاصل‌ضرب اعدادی که در دامنهٔ تابع f قرار ندارند، کدام است؟

۱) -۳ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۲ ۴) صفر

۷۹۶- نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x+۳}$ در چند نقطه نمودار تابع $g(x)=|x|$ را قطع می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۹۷- نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x-۲}+۱$ در چند نقطه نمودار تابع $g(x)=x^{۲}$ را قطع می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

سطح ۲

۷۹۸- اگر $f(\frac{۲}{x-۱})=\frac{x+۱}{x-۱}$، ضابطهٔ تابع f برای هر $x\neq ۰$ کدام است؟

۱) $f(x)=\frac{x+۱}{۲}$ ۲) $f(x)=\frac{۱}{x+۱}$ ۳) $f(x)=x+۱$ ۴) $f(x)=\frac{۲}{x+۱}$

۷۹۹- اگر $f(\frac{x+۱}{x-۲})=۲x-۱$، آن‌گاه $f(x)$ برای هر $x\neq ۱$ کدام است؟

۱) $\frac{۳x+۳}{x-۱}$ ۲) $\frac{۳x-۱}{x-۱}$ ۳) $\frac{۲x-۳}{x-۱}$ ۴) $\frac{۵x+۴}{x-۱}$

۸۰۰- چند عدد در دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x+۱}{x^۳-۲x^۲-x+۲}$ قرار ندارند؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) صفر

۸۰۱- چند عدد در دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x^۲+x+۱}{x^۴-۳x^۲+۲}$ قرار ندارند؟

۱) ۲　　۲) ۳　　۳) ۴　　۴) صفر

۸۰۲- سه عدد در دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x}{x^۳+kx^۲+x}$ قرار ندارند. حدود k کدام است؟

۱) $|k|<۱$　　۲) $|k|>۲$　　۳) $|k|<۲$　　۴) $۱<|k|<۲$

۸۰۳- اگر $x=-۲$ در دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{۱}{x^۳-ax^۲+۲ax}$ نباشد، دامنهٔ این تابع کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-\{-۲,۰,۱\}$　　۲) $\mathbb{R}-\{-۲,۰,۲\}$　　۳) $\mathbb{R}-\{-۲,-۱,۱\}$　　۴) $\mathbb{R}-\{-۲,-۱,۰\}$

۸۰۴- اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x}{x^۲+mx+۲}$ مجموعهٔ $\mathbb{R}$ باشد، حدود m کدام است؟

۱) $-۲\sqrt{۲}<m<۲\sqrt{۲}$　　۲) $m>۲\sqrt{۲}$　　۳) $-\sqrt{۲}<m<\sqrt{۲}$　　۴) $m>\sqrt{۲}$

۸۰۵- اگر m عددی صحیح و دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{۴}{x^۲+۲x-m+۴}$ مجموعهٔ عددهای حقیقی باشد، بیشترین مقدار ممکن m کدام است؟

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۳

۸۰۶- دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۱}{x^۲-(a^۲+۱)x-b^۲}$ به صورت $\mathbb{R}-\{-۱,۶\}$ است. مقدار $a^۲+b^۲$ کدام است؟

۱) ۶　　۲) ۸　　۳) ۱۰　　۴) ۱۲

۸۰۷- اگر دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x}{۲x^۲-ax+۳b}$ برابر $\mathbb{R}-\{-۱\}$ باشد، مقدار ab کدام است؟

۱) -۲　　۲) $\frac{۴}{۳}$　　۳) ۳　　۴) $-\frac{۸}{۳}$

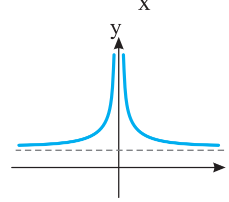
۸۰۸- دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{۱}{m^۲x^۲+x+۱}$ به‌صورت $\mathbb{R}-\{n\}$ است. حاصل‌ضرب مقادیر ممکن برای n کدام است؟

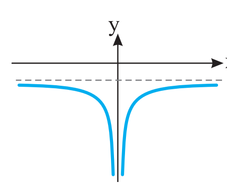
۱) $-\frac{۱}{۴}$　　۲) ۲　　۳) ۴　　۴) $-\frac{۱}{۲}$

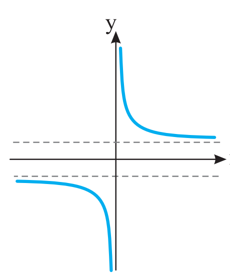
۸۰۹- نمودار تابع $f(x)=\frac{۲x-۱}{x-۱}$ در چند نقطه نمودار تابع $g(x)=۱-x^۲$ را قطع می‌کند؟

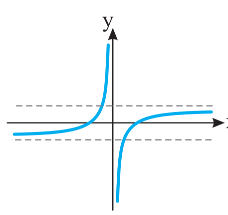
۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) صفر

۸۱۰- نمودار تابع $y=\frac{۱+|x|}{x}$ کدام است؟

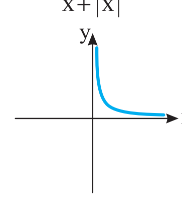
۱)


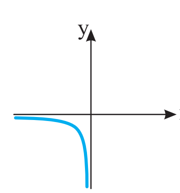
۲)


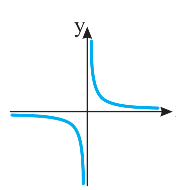
۳)


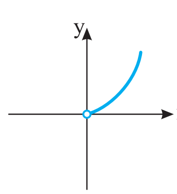
۴)


۸۱۱- نمودار تابع $f(x)=\frac{۲}{x+|x|}$ به کدام صورت است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۸۱۲- برد تابع $f(x)=\frac{۴x+۱}{۲x-۶}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-\{۲\}$ ۲) $\mathbb{R}-\{۳\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{۲,۳\}$ ۴) $\mathbb{R}-\{-۲\}$

۸۱۳- اگر $f(x)=\frac{۶x-۱}{۲x-۴}$ و $D_f=\mathbb{R}-\{۲,۴\}$، مجموع اعدادی که در برد تابع f قرار ندارند، کدام است؟

۱) $\frac{۲۱}{۴}$ ۲) $\frac{۲۳}{۴}$ ۳) $\frac{۲۵}{۴}$ ۴) $\frac{۳۵}{۴}$

۸۱۴- چند عدد صحیح در برد تابع $f(x)=\frac{۳x-۱}{x+۲}$ با دامنهٔ $(-\infty,-۱]-\{-۲\}$ قرار ندارند؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

سطح ۳

۸۱۵- اگر $f(x)=\frac{۱}{x}$، کدام گزینه حاصل $f(a)-f(b)$ را درست نشان می‌دهد؟

۱) $f(\frac{b-a}{ab})$ ۲) $f(\frac{ab}{a-b})$ ۳) $f(\frac{a-b}{ab})$ ۴) $f(\frac{ab}{b-a})$

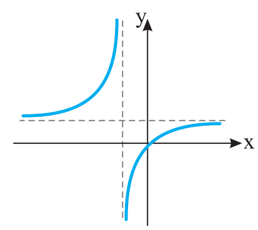
۸۱۶- اگر $f(x)=\frac{x}{x+۲}$، حاصل $f(x-۲)$ برحسب $f(x)$ کدام است؟

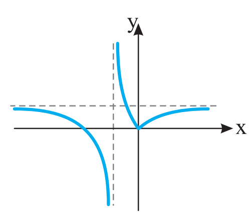
۱) $\frac{۲f(x)+۱}{f(x)}$ ۲) $\frac{f(x)-۲}{f(x)}$ ۳) $\frac{۲f(x)-۱}{f(x)}$ ۴) $\frac{f(x)+۲}{f(x)}$

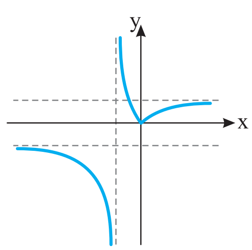
۸۱۷- دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{۱}{x^۳+ax^۲+b}$ برابر $\mathbb{R}-\{۲\}$ است. مجموعهٔ مقادیر ممکن a کدام است؟

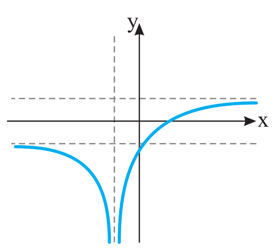
۱) $(-۲,۶)$ ۲) $(۲,۶)$ ۳) $(-۶,۲)$ ۴) $(-۶,-۲)$

۸۱۸- نمودار تابع $f(x)=\frac{|x|}{x+۱}$ به کدام صورت است؟

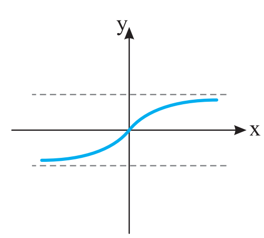
۱)


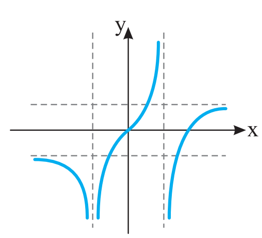
۲)


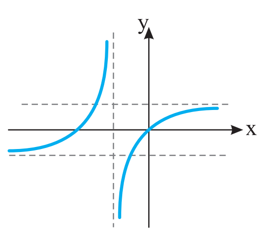
۳)


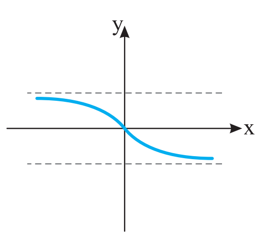
۴)


۸۱۹- نمودار تابع $f(x)=\frac{x}{|x|+۱}$ به کدام صورت است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


درس اول / بخش دوم: توابع رادیکالی

تابع رادیکالی

به تابعی که به هر عدد حقیقی نامنفی، جذر آن را نسبت می‌دهد **تابع رادیکالی** می‌گوییم.

مثال: تابع‌های زیر رادیکالی هستند:

الف) $f(x)=\sqrt{x}$, $D_f=[0,+\infty)$ ب) $f(x)=\sqrt{x-1}$, $D_f=[1,+\infty)$

تست ۱

اگر $f(x)=\sqrt{1-x}$ و $a<0$، حاصل $f(1-a^2)$ کدام است؟

۱) $-a$ ۲) a ۳) $1-a$ ۴) $1+a$

راه‌حل می‌توان نوشت

$$f(1-a^2)=\sqrt{1-(1-a^2)}=\sqrt{1-1+a^2}=\sqrt{a^2}=|a|=-a$$

دامنهٔ توابع رادیکالی

برای پیدا کردن دامنهٔ توابع رادیکالی، مجموعهٔ همهٔ مقادیری را پیدا می‌کنیم که عبارت زیر رادیکال به ازای آن‌ها نامنفی است.

مثال: دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x+3}$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$x+3\geq 0\Rightarrow x\geq -3\Rightarrow D_f=[-3,+\infty)$$

تست ۲

چند عدد صحیح در دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{3x-x^2}$ وجود دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

راه‌حل مقادیری از x را پیدا می‌کنیم که به ازای آن‌ها عبارت زیر رادیکال نامنفی است:

$$3x-x^2\geq 0\Rightarrow x(3-x)\geq 0$$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$3x-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

بنابراین به ازای $x\in[0,3]$ عبارت $3x-x^2$ که زیر رادیکال قرار دارد، نامنفی است، یعنی $D_f=[0,3]$، در نتیجه فقط چهار عدد صحیح صفر، ۱، ۲ و ۳ در دامنهٔ تابع f وجود دارند.

دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$

برحسب اینکه عبارت ax^2+bx+c ثابت، خطی یا درجهٔ دوم باشد، دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$ به‌صورت زیر است:

حالت ۱: $a=b=0$. **در این صورت $f(x)=\sqrt{c}$ و با توجه به علامت c، تابع f مطابق جدول زیر است:**

	$c\geq 0$	$c<0$
D_f	$\mathbb{R}$	$\varnothing$

حالت ۲: $a=0$ و $b\neq 0$. **در این صورت $f(x)=\sqrt{bx+c}$ و با توجه به علامت b، تابع f مطابق جدول زیر است:**

	$b>0$	$b<0$
D_f	$[-\frac{c}{b},+\infty)$	$(-\infty,-\frac{c}{b}]$

- $-\frac{c}{b}$ **ریشهٔ چندجمله‌ای $bx+c$ (عبارت زیر رادیکال) است.**

حالت ۳: $a\neq ۰$. **در این صورت با توجه به علامت a و علامت دلتای عبارت زیر رادیکال، دامنهٔ تابع f مطابق جدول زیر است:**

	$\Delta>۰$	$\Delta=۰$	$\Delta<۰$
$a>۰$	$D_f=(-\infty,x_۱]\cup[x_۲,+\infty)$	$D_f=\mathbb{R}$	$D_f=\mathbb{R}$
$a<۰$	$D_f=[x_۱,x_۲]$	$D_f=\{-\frac{b}{۲a}\}$	$D_f=\varnothing$

- $x_۱$ **و** $x_۲$ **ریشه‌های چندجمله‌ای** $ax^۲+bx+c$ **(عبارت زیر رادیکال) هستند و** $x_۱\le x_۲$.

تست ۳ اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{(a^۲-۱۶)x+a}$ برابر $\mathbb{R}$ باشد، مقدار $f(a)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل ابتدا توجه کنید که عبارت زیر رادیکال یک چندجمله‌ای از درجهٔ حداکثر ۱ است. پس مطابق جدول‌های بالا، اگر ضریب x در عبارت زیر رادیکال برابر صفر نباشد، آن‌گاه دامنهٔ تابع f بازه‌ای است که برابر با $\mathbb{R}$ نیست. بنابراین باید $a^۲-۱۶=۰$، یعنی $a=-۴$ یا $a=۴$. در این صورت $f(x)=\sqrt{a}$، پس $a=-۴$ قابل قبول نیست. بنابراین $a=۴$ و $f(a)=f(۴)=\sqrt{۴}=۲$.

تست ۴ اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{ax+a^۲-۳}$ بازهٔ $(-\infty,۲]$ باشد، مقدار $f(\frac{a}{۳})$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل مطابق جدول‌های بالا، باید a منفی باشد و $x=۲$ ریشهٔ چندجمله‌ای $ax+a^۲-۳$ باشد. در نتیجه

$$a\times ۲+a^۲-۳=۰\Rightarrow a^۲+۲a-۳=۰\Rightarrow a=-۳\ ,\ a=۱$$

چون a باید عددی منفی باشد، پس $a=-۳$. بنابراین $f(x)=\sqrt{-۳x+۶}$. در نتیجه

$$f(\frac{a}{۳})=f(-۱)=\sqrt{-۳(-۱)+۶}=\sqrt{۹}=۳$$

تست ۵ اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{۲x^۲+mx+۸}$ برابر $\mathbb{R}$ باشد، حداکثر مقدار ممکن m کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

راه‌حل برای اینکه دامنهٔ تابع f برابر $\mathbb{R}$ باشد باید عبارت $۲x^۲+mx+۸$ به ازای هر مقدار حقیقی x نامنفی باشد. بنابراین باید ضریب $x^۲$ در این عبارت، مثبت و Δ نامثبت باشد. پس

$$\Delta\le ۰\Rightarrow m^۲-۶۴\le ۰\Rightarrow m^۲\le ۶۴\Rightarrow |m|\le ۸\Rightarrow -۸\le m\le ۸$$

بنابراین حداکثر مقدار ممکن m برابر ۸ است.

تست ۶ اگر دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{(a-۲)x^۲+bx+۶}$ بازهٔ $(-\infty,۲]$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) -۵

راه‌حل باید جواب $(a-۲)x^۲+bx+۶\ge ۰$ به صورت $x\le ۲$ باشد. با توجه به تعیین علامت چندجمله‌ای درجه دوم، ممکن نیست جواب نامعادلهٔ درجه دوم به شکل $x\le ۲$ باشد. بنابراین باید $a-۲=۰$ تا نامعادله به صورت $bx+۶\ge ۰$ درآید. برای اینکه جواب نامعادلهٔ اخیر به صورت $x\le ۲$ باشد، باید ۲ ریشهٔ عبارت $bx+۶$ باشد. یعنی

$$۲b+۶=۰\Rightarrow b=-۳$$

بنابراین $a=۲$، $b=-۳$ و $a+b=-۱$.

دامنهٔ تابع $y=\sqrt{f(x)}$

دامنهٔ تابع $y=\sqrt{f(x)}$ **برابر با مجموعهٔ همهٔ xهایی از دامنهٔ تابع f است که به ازای آن‌ها** $f(x)\ge ۰$. **برای پیدا کردن دامنهٔ تابع** $y=\sqrt{f(x)}$، **اشتراک دامنهٔ تابع f و مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ** $f(x)\ge ۰$ **را پیدا می‌کنیم.**

مثال: می‌خواهیم دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{|x|-۱}$ را پیدا کنیم. توجه کنید که دامنهٔ تابع $f(x)=|x|-۱$ برابر با $\mathbb{R}$ است. همچنین، مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $|x|-۱\geq ۰$ به‌صورت مقابل است:

$$|x|-۱\geq ۰\Rightarrow |x|\geq ۱\Rightarrow x\in(-\infty,-۱]\cup[۱,+\infty)$$

اشتراک این مجموعهٔ جواب‌ها با $\mathbb{R}$ برابر است با $(-\infty,-۱]\cup[۱,+\infty)$. در نتیجه $D_g=(-\infty,-۱]\cup[۱,+\infty)$.

مثال: می‌خواهیم دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{۱-\sqrt{x}}$ را پیدا کنیم. ابتدا توجه کنید که دامنهٔ تابع $f(x)=۱-\sqrt{x}$ برابر با $[۰,+\infty)$ است. از طرف دیگر،

$$۱-\sqrt{x}\geq ۰\Rightarrow \sqrt{x}\leq ۱\Rightarrow x\in[۰,۱]$$

در نتیجه $D_g=[۰,+\infty)\cap[۰,۱]=[۰,۱]$.

تست ۷

چند عدد صحیح در دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{۴-\sqrt{۱-۲x}}$ قرار دارند؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

راه‌حل عبارت‌های زیر رادیکال‌ها باید نامنفی باشند، پس

$$۱-۲x\geq ۰\Rightarrow x\leq \frac{۱}{۲}\ ,\quad ۴-\sqrt{۱-۲x}\geq ۰\Rightarrow ۴\geq\sqrt{۱-۲x}\Rightarrow ۴^۲\geq ۱-۲x\Rightarrow ۲x\geq -۱۵\Rightarrow x\geq -\frac{۱۵}{۲}$$

بنابراین $D_f=[-\frac{۱۵}{۲},\frac{۱}{۲}]$. عددهای صحیح ۰، ۱−، ۲−، ۳−، ۴−، ۵−، ۶− و ۷− در دامنهٔ تابع قرار دارند.

تست ۸

چند عدد صحیح در دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{||x|-۲|-۱}$، قرار ندارند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

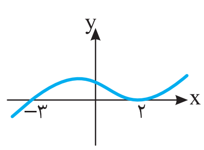
راه‌حل عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد، پس

$$||x|-۲|-۱\geq ۰\Rightarrow ||x|-۲|\geq ۱\Rightarrow |x|-۲\geq ۱\Rightarrow |x|\geq ۳\Rightarrow x\geq ۳ \text{ یا } x\leq -۳ \quad \text{یا} \quad |x|-۲\leq -۱\Rightarrow |x|\leq ۱\Rightarrow -۱\leq x\leq ۱$$

در نتیجه $D_f=(-\infty,-۳]\cup[-۱,۱]\cup[۳,+\infty)$. بنابراین فقط عددهای صحیح ۲ و ۲− در دامنهٔ تابع قرار ندارند.

تست ۹

نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{\frac{f(x)}{۱-x^۲}}$ کدام است؟



۱) $(-\infty,-۳)\cup[-۱,۱]$ ۲) $(-\infty,-۳]\cup(-۱,۱)$

۳) $(-\infty,-۳]\cup(-۱,۱)\cup\{۲\}$ ۴) $(-\infty,-۳]\cup[-۱,۱]$

راه‌حل توجه کنید که $D_g=\{x|\frac{f(x)}{۱-x^۲}\geq ۰, x^۲\neq ۱\}$. در جدول زیر $f(x)$، $۱-x^۲$ و $\frac{f(x)}{۱-x^۲}$ تعیین علامت شده‌اند:

x	$-\infty$		-۳		-۱		۱		۲		$+\infty$
$f(x)$		−	۰	+		+		+	۰	+	
$۱-x^۲$		−		−	۰	+	۰	−		−	
$\frac{f(x)}{۱-x^۲}$		+	۰	−	ت ن	+	ت ن	−	۰	−	

بنابراین $D_g=(-\infty,-۳]\cup(-۱,۱)\cup\{۲\}$.

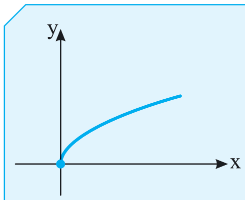
تابع $f(x)=\sqrt{x}$

نمودار تابع ریشهٔ دوم به‌صورت روبه‌رو است.

$f(x)=\sqrt{x}$

$D_f=[\circ,+\infty)$

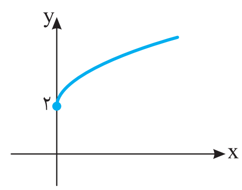
$R_f=[\circ,+\infty)$



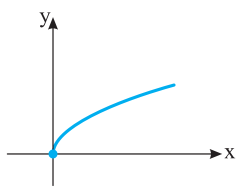
مثال: برای رسم نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}+۲$ کافی است نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را دو واحد به سمت بالا منتقل کنیم.

$D_f=[\circ,+\infty)$

$R_f=[۲,+\infty)$



$f(x)=\sqrt{x}+۲$

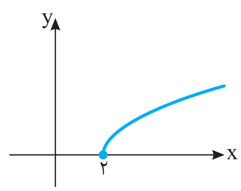


$y=\sqrt{x}$

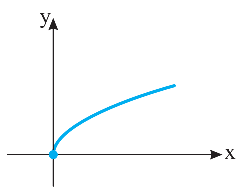
مثال: برای رسم نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x-۲}$ کافی است نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را دو واحد به سمت راست منتقل کنیم.

$D_f=[۲,+\infty)$

$R_f=[\circ,+\infty)$



$f(x)=\sqrt{x-۲}$

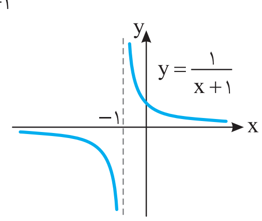


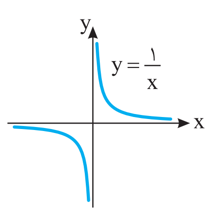
$y=\sqrt{x}$

تست ۱۰ **نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x-۲}$ نمودار تابع $g(x)=\frac{۱}{x+۱}$ را در نقطه‌ای به طول a قطع می‌کند. a در کدام بازه قرار دارد؟**

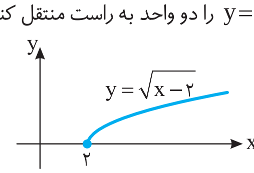
۱) $(۱,\frac{۳}{۲})$ **۲)** $(\frac{۳}{۲},۲)$ **۳)** $(۲,۳)$ **۴)** $(۳,۴)$

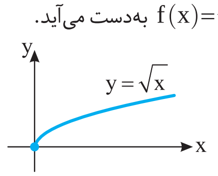
راه‌حل اگر نمودار تابع $y=\frac{۱}{x}$ را یک واحد به چپ منتقل کنیم نمودار تابع $g(x)=\frac{۱}{x+۱}$ به‌دست می‌آید.



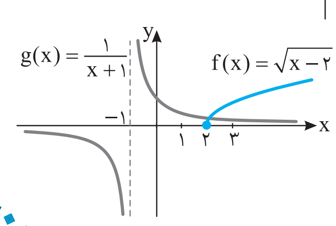


اگر نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را دو واحد به راست منتقل کنیم نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x-۲}$ به‌دست می‌آید.

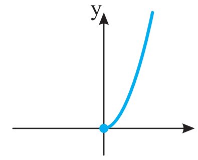


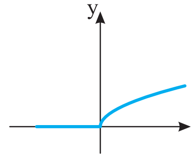


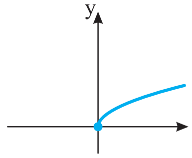
مطابق شکل روبه‌رو نمودارهای توابع f و g در نقطهٔ $x=a$ متقاطع‌اند و $a\in(۲,۳)$.

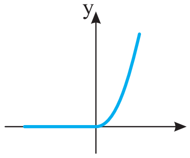


تست ۱۱ نمودار تابع $f(x)=\sqrt{۲x-|x|}$ کدام است؟

۱) 

۲) 

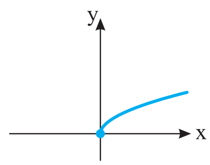
۳) 

۴) 

راه‌حل

ابتـدا توجه کنید که اگر $x<۰$، آن‌گاه $۲x-|x|=۲x-(-x)=۳x<۰$ و اگر $x\geq ۰$، آن‌گاه $۲x-|x|=۲x-x=x\geq ۰$. بنابراین $D_f=[۰,+\infty)$.

از طرف دیگر، اگر $x\geq ۰$، آن‌گاه $f(x)=\sqrt{۲x-|x|}=\sqrt{x}$. در نتیجه نمودار تابع f به‌صورت زیر است:



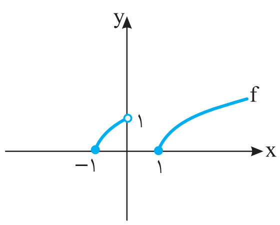
تست ۱۲ نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x-\frac{x}{|x|}}$ چند نقطهٔ مشترک با نمودار تابع $g(x)=\frac{۱}{x}+۱$ دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

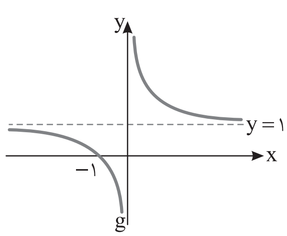
راه‌حل

ابتدا توجه کنید که $x-\frac{x}{|x|}=\begin{cases} x-۱ & x>۰ \\ x+۱ & x<۰ \end{cases}$. چون دامنهٔ تابع f مجموعهٔ مقادیری از x است که به ازای آن‌ها $x-\frac{x}{|x|}\geq ۰$، پـس $D_f=[-۱,۰)\cup[۱,+\infty)$. بنابرایـن $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x-۱} & x\geq ۱ \\ \sqrt{x+۱} & -۱\leq x<۰ \end{cases}$. پس

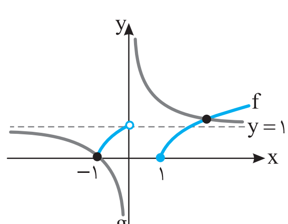
نمودار تابع f به‌صورت مقابل است.



از طرف دیگر نمودار تابع g به‌صورت روبه‌رو است.



اکنون توجه کنید که مطابق شکل مقابل، نمودارهای تابع‌های f و g دو نقطهٔ مشترک دارند.



توابع رادیکالی

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

سطح ۱

۸۲۰- اگر تابع f به‌صورت $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+۲}-۲ & x\geq a\\ -۲x+۴ & x\leq a\end{cases}$ تعریف شود، a چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

۸۲۱- نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x+۲}-۱$ در چند نقطه نمودار تابع $g(x)=|x|$ را قطع می‌کند؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) صفر

۸۲۲- اگر $f(x)=\sqrt{x}+۱$ و $D_f=(۰,+\infty)-\{۴\}$، چند عدد طبیعی در برد تابع f وجود ندارند؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) صفر

۸۲۳- اگر $f(x)=\sqrt{x+۱}+۲$ و $D_f=[۰,۳]$، مجموع اعداد صحیحی که در برد تابع f قرار دارند، کدام است؟ کتاب درسی

۱) ۶　　۲) ۷　　۳) ۸　　۴) ۹

۸۲۴- دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{۵-|x-۳|}$ کدام است؟

۱) $[-۲,۸]$　　۲) $(-۲,۸)$　　۳) $[-۸,۲]$　　۴) $(-۸,۲)$

۸۲۵- چند عدد صحیح در دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{۲-|x+۱|}$ قرار دارند؟

۱) ۴　　۲) ۵　　۳) ۶　　۴) ۷

۸۲۶- چند عدد صحیح در دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{|x-۱|-۳}$ قرار ندارند؟

۱) ۳　　۲) ۴　　۳) ۵　　۴) ۶

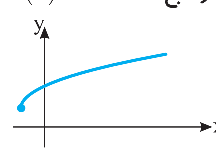
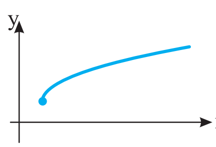
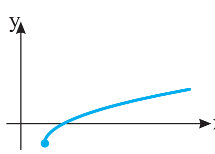
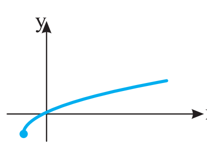
۸۲۷- دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{-x^۲+۲x-۱}$ کدام است؟ کتاب درسی

۱) $(-\infty,۱)$　　۲) $[۱,+\infty)$　　۳) $\{۱\}$　　۴) $[۰,۱]$

۸۲۸- دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{۴x-x^۲-۳}$ بازهٔ $[a,b]$ است. مقدار $۲a+b$ کدام است؟ کتاب درسی

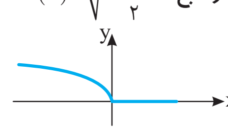
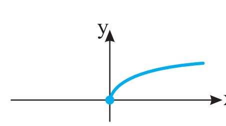
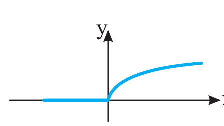
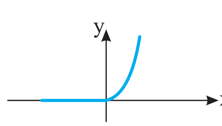
۱) ۳　　۲) ۴　　۳) ۵　　۴) ۶

۸۲۹- نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x-۱}+۱$ کدام است؟ کتاب درسی

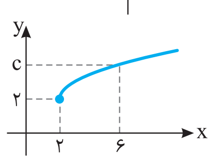
۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

سطح ۲

۸۳۰- نمودار تابع $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+|x|}{۲}}$ کدام است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۸۳۱- نمودار تابع $f(x)=a+\sqrt{x+b}$ در شکل مقابل رسم شده است. حاصل $a+b+c$ کدام است؟



۱) ۱۰　　۲) ۶
۳) ۴　　۴) ۲

۸۳۲- دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{۹-|x^۲-۴|}$ کدام است؟

۱) $[-\sqrt{۱۳},\sqrt{۱۳}]$　　۲) $[-۳,\sqrt{۱۳}]$　　۳) $[-۱,\sqrt{۱۳}]$　　۴) $[-۴,۵]$

۸۳۳- دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{\frac{x-۱}{x}-\frac{x}{x-۱}}$ کدام است؟

۱) $(-\infty,۰)\cup(\frac{۱}{۲},۱)$ ۲) $(-\infty,۰]\cup(\frac{۱}{۲},۱)$ ۳) $(-\infty,۰)\cup[\frac{۱}{۲},۱)$ ۴) $[\frac{۱}{۲},۱)$

۸۳۴- دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{\frac{۱}{x^۲}-\frac{۱}{x}-۲}$ کدام است؟

۱) $[-۱,۰)$ ۲) $(-\infty,-۱]\cup[۲,+\infty)$ ۳) $[-۱,\frac{۱}{۲}]-\{۰\}$ ۴) $[-\frac{۱}{۲},۱)-\{۰\}$

۸۳۵- دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{\frac{x^۲-۲x+۸}{-x^۲+۲x+۸}}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}-(-۲,۴)$ ۳) $\mathbb{R}-[-۲,۴]$ ۴) $(-۲,۴)$

۸۳۶- چند عدد صحیح در دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{x^۴-۹x^۲}$ قرار ندارند؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۸۳۷- چند عدد صحیح در دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{x^۲-|x+۶|}$ قرار ندارند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۳۸- اگر $f(x)=\sqrt{x^۲-۲ax+a+۲}$ و $D_f=\mathbb{R}$، حدود a کدام است؟

۱) $(-۱,۲)$ ۲) $[-۱,۲]$ ۳) $(۱,۲)$ ۴) $(-۲,-۱)$

۸۳۹- تابع $f(x)=\sqrt{ax^۲+bx+۲a^۲}$ در تمام نقاط بازهٔ $[-۳,۲]$ تعریف می‌شود و در تمام نقاط مجموعهٔ $\mathbb{R}-[-۳,۲]$ تعریف نمی‌شود. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۴ ۳) -۶ ۴) صفر

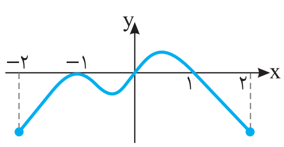
۸۴۰- دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{-۲x^۲+۸x+m}$ فقط می‌تواند مجموعه‌ای یک‌عضوی باشد. مقدار m کدام است؟

۱) ۸ ۲) -۸ ۳) ۴ ۴) -۴

۸۴۱- تابع $f(x)=\sqrt{(a+۲)x^۲+ax+b}$ در بازهٔ $(-\infty,۳]$ تعریف می‌شود و در بقیهٔ اعداد تعریف نمی‌شود. مقدار b کدام است؟

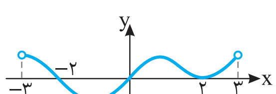
۱) -۲ ۲) -۳ ۳) ۶ ۴) ۴

۸۴۲- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. در دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{-x^۳f(x)}$ چند عدد صحیح وجود دارد؟



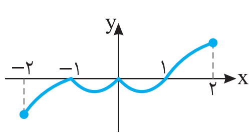
۱) ۲ ۲) ۳
۳) ۴ ۴) ۵

۸۴۳- نمودار تابع f به شکل مقابل است. دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{\frac{۴-x^۲}{f(x)}}$ کدام است؟



۱) $(۰,۲)$ ۲) $(۰,۳)$
۳) $(-۲,۲)$ ۴) $(-۳,-۲)\cup(۲,۳)$

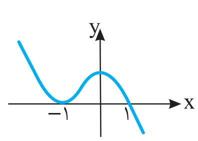
۸۴۴- نمودار تابع f به شکل مقابل است. دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{\frac{f(x)}{x^۲-x}}$ کدام است؟



۱) $(۰,۲]-\{۱\}$ ۲) $(-۱,۲]-\{۱\}$
۳) $(۰,۲]\cup\{-۱\}$ ۴) $(۰,۱)\cup(۱,۲]\cup\{-۱\}$

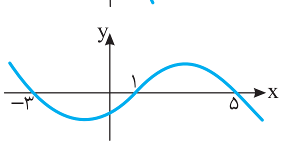
سطح ۳

۸۴۵- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{x-f(x+۱)}$ کدام است؟



۱) $[۰,+\infty)$ ۲) $(-\infty,۰]$
۳) $[۱,+\infty)$ ۴) $[-۱,+\infty)$

۸۴۶- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. حاصل‌جمع عددهای صحیحی که در دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{f(x-۲)f(x+۲)}$ نیستند، کدام است؟



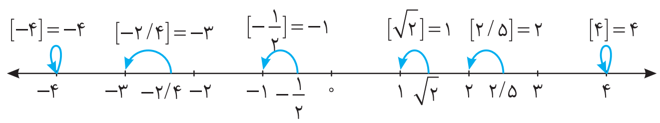
۱) ۱۱ ۲) ۱۶
۳) ۹ ۴) ۷

درس اول / بخش سوم: جزء صحیح یک عدد حقیقی

جزء صحیح یک عدد حقیقی

جزء صحیح هر عدد حقیقی، بزرگ‌ترین عدد صحیحی است که از این عدد کوچک‌تر یا با آن برابر است. جزء صحیح عدد حقیقی x را با $[x]$ نشان می‌دهیم.

مثال:



نکـتـه

برای اینکه جزء صحیح عدد حقیقی x را پیدا کنیم، باید عددی صحیح مانند n پیدا کنیم که $n\le x<n+۱$. در این صورت $[x]=n$.

تست ۱

مقدار $[-۱۰\sqrt{۲}]+[۱۰\sqrt{۳}]$ برابر کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) صفر

راه‌حل ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt{۲}\simeq ۱/۴۱\Rightarrow -۱۰\sqrt{۲}\simeq -۱۴/۱\Rightarrow -۱۵<-۱۰\sqrt{۲}<-۱۴\Rightarrow [-۱۰\sqrt{۲}]=-۱۵$$

$$\sqrt{۳}\simeq ۱/۷۳\Rightarrow ۱۰\sqrt{۳}\simeq ۱۷/۳\Rightarrow ۱۷<۱۰\sqrt{۳}<۱۸\Rightarrow [۱۰\sqrt{۳}]=۱۷$$

بنابراین مقدار مورد نظر برابر است با $-۱۵+۱۷=۲$.

تست ۲

حاصل $[x^۳]+[۲x]$ به ازای $x=-\sqrt{۲}$ کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۶ ۳) -۵ ۴) -۸

راه‌حل ابتدا $x=-\sqrt{۲}$ را در عبارت قرار می‌دهیم:

$$[(-\sqrt{۲})^۳]+[۲(-\sqrt{۲})]=[-\sqrt{۸}]+[-۲\sqrt{۲}]=[-۲\sqrt{۲}]+[-۲\sqrt{۲}]=۲[-۲\sqrt{۲}]$$

با توجه به مقدار تقریبی $\sqrt{۲}$ به‌دست می‌آید

$$۱<\sqrt{۲}<۱/۵\Rightarrow ۲<۲\sqrt{۲}<۳\Rightarrow -۳<-۲\sqrt{۲}<-۲\Rightarrow [-۲\sqrt{۲}]=-۳\Rightarrow ۲[-۲\sqrt{۲}]=-۶$$

تست ۳

مقدار $[۴\sin ۴۰^\circ]$ برابر کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

راه‌حل ابتدا توجه کنید که

$$\sin ۳۰^\circ<\sin ۴۰^\circ<\sin ۴۵^\circ\Rightarrow \frac{۱}{۲}<\sin ۴۰^\circ<\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow ۲<۴\sin ۴۰^\circ<۲\sqrt{۲}\simeq ۲/۸$$

بنابراین $[۴\sin ۴۰^\circ]=۲$.

ویژگی‌های جزء صحیح

فرض کنید x عددی حقیقی باشد. در این صورت

۱) اگر x عددی صحیح باشد، آن‌گاه $[x]=x$ و برعکس.

۲) اگر n عددی صحیح باشد و $n\le x<n+۱$، آن‌گاه $[x]=n$ و برعکس.

۳) $x-۱<[x]\le x$ و $[x]\le x<[x]+۱$.

۴) $۰\le x-[x]<۱$.

۵) اگر n عددی صحیح باشد، آن‌گاه $[x+n]=[x]+n$ و برعکس.

۶) $[-x]=\begin{cases}-[x] & x\in\mathbb{Z}\\ -[x]-۱ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$ (این تساوی به‌صورت $[-x]+[x]=\begin{cases}۰ & x\in\mathbb{Z}\\ -۱ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$ نیز بیان می‌شود).

نکته

اگر x و y دو عدد حقیقی دلخواه باشند، آن‌گاه در حالت کلی نابرابری‌های زیر برقرارند:

۱) $[x+y]\neq[x]+[y]$ ۲) $[x-y]\neq[x]-[y]$ ۳) $[xy]\neq[x][y]$ ۴) $[\frac{x}{y}]\neq\frac{[x]}{[y]}$

توجه کنید که برای برخی از مقادیر x و y ممکن است هر کدام از نابرابری‌های بالا به تساوی تبدیل شوند. مثلاً اگر $x=۱/۲$ و $y=۲/۳$، آن‌گاه

$$[x+y]=[۱/۲+۲/۳]=[۳/۵]=۳=۱+۲=[۱/۲]+[۲/۳]=[x]+[y]$$

تست ۴

مقدار عبارت $A=[\sqrt[۳]{۱}]+[\sqrt[۳]{۲}]+\cdots+[\sqrt[۳]{۳۰}]$ **کدام است؟**

۱) ۴۸ ۲) ۵۷ ۳) ۵۹ ۴) ۴۷

راه‌حل می‌دانیم $\sqrt[۳]{۱}=۱$، $\sqrt[۳]{۸}=۲$ و $\sqrt[۳]{۲۷}=۳$. بنابراین

$$[\sqrt[۳]{۱}]=[\sqrt[۳]{۲}]=\cdots=[\sqrt[۳]{۷}]=۱,\quad [\sqrt[۳]{۸}]=[\sqrt[۳]{۹}]=\cdots=[\sqrt[۳]{۲۶}]=۲,\quad [\sqrt[۳]{۲۷}]=[\sqrt[۳]{۲۸}]=[\sqrt[۳]{۲۹}]=[\sqrt[۳]{۳۰}]=۳$$

پس $A=۷\times۱+۱۹\times۲+۴\times۳=۵۷$.

تست ۵

اگر $x^۲+x<۰$، **حاصل** $[x]+[x^۲]+\cdots+[x^{۱۰}]$ **کدام است؟**

۱) ۱۰ ۲) -۱۰ ۳) ۵ ۴) -۵

راه‌حل ابتدا با حل نامعادله، محدودهٔ x را می‌یابیم:

$$x^۲+x<۰\Rightarrow x(x+۱)<۰\Rightarrow -۱<x<۰$$

اگر عددی بین ۱− و صفر باشد، به توان هر عدد فردی برسد در همان محدوده باقی می‌ماند، ولی اگر به توان عددی زوج برسد عددی بین صفر و ۱ می‌شود، یعنی

$$-۱<x<۰\Rightarrow\begin{cases}۰<x^{۲k}<۱\Rightarrow[x^{۲k}]=۰\\ -۱<x^{۲k+۱}<۰\Rightarrow[x^{۲k+۱}]=-۱\end{cases}\Rightarrow[x]+[x^۲]+\cdots+[x^{۱۰}]=۵\times۰+۵\times(-۱)=-۵$$

تست ۶

اگر $[x]=۳$ **و** $[y]=۵$، **حاصل** $[x+y]$ **چند عدد صحیح می‌تواند باشد؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل توجه کنید که $[x]=۳$ نتیجه می‌دهد $۳\leq x<۴$ و $[y]=۵$ نتیجه می‌دهد $۵\leq y<۶$. اگر این دو نابرابری را با هم جمع کنیم به دست می‌آید $۸\leq x+y<۱۰$، بنابراین $[x+y]$ یکی از عددهای صحیح ۸ یا ۹ است.

تست ۷

اگر $[\frac{۱-۴x}{۳}]=-۲$، **مقدار** $[-x]$ **کدام است؟**

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

راه‌حل چون $[\frac{۱-۴x}{۳}]=-۲$، پس

$$-۲\leq\frac{۱-۴x}{۳}<-۱\Rightarrow-۶\leq۱-۴x<-۳\Rightarrow-۷\leq-۴x<-۴\Rightarrow-\frac{۷}{۴}\leq-x<-۱\Rightarrow[-x]=-۲$$

تست ۸

اگر n عددی طبیعی باشد، مقدار $[\sqrt[۳]{n^۳+۳n^۲}]$ **برابر کدام است؟**

۱) n ۲) $n+۱$ ۳) $n-۱$ ۴) $۲n-۱$

راه‌حل **راه‌حل اول** از نابرابری $n^۳<n^۳+۳n^۲<(n+۱)^۳$، نتیجه می‌گیریم $n<\sqrt[۳]{n^۳+۳n^۲}<n+۱$، بنابراین $[\sqrt[۳]{n^۳+۳n^۲}]=n$.

راه‌حل دوم چون تساوی به ازای هر عدد طبیعی n باید برقرار باشد، پس مثلاً به ازای $n=۲$ باید تساوی برقرار باشد. اگر $n=۲$، آن‌گاه $[\sqrt[۳]{n^۳+۳n^۲}]=[\sqrt[۳]{۲۰}]=۲$. از طرف دیگر فقط عبارت گزینهٔ (۱) به ازای $n=۲$ برابر ۲ می‌شود.

تست ۹

اگر x عددی غیرصحیح باشد، حاصل $[x^{۲}-۱]+[۲-x^{۲}]$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) صفر یا ۱− ۴) صفر یا ۱

راه‌حل می‌دانیم عدد صحیح را می‌توان از داخل جزء صحیح بیرون آورد، پس $[x^{۲}-۱]+[۲-x^{۲}]=[x^{۲}]-۱+۲+[-x^{۲}]=[x^{۲}]+[-x^{۲}]+۱$

می‌دانیم $[a]+[-a]$ بـه ازای مقدارهـای صحیـح a برابر صفر و برای مقدارهای غیرصحیح a برابر ۱− اسـت. اگر x عددی غیرصحیح باشـد، $x^{۲}$ می‌تواند صحیح باشد (مثل $x=\sqrt{۲}$) یا غیرصحیح باشد (مثل $x=\frac{۱}{۲}$). بنابراین $[x^{۲}]+[-x^{۲}]+۱$ می‌تواند برابر صفر یا ۱ باشد.

حل معادله‌های شامل جزء صحیح

- **اگر k عدد صحیحی باشد، مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $[x]=k$ بازهٔ $[k,k+۱)$ است.**
- **اگر k عدد غیرصحیحی باشد، معادلهٔ $[x]=k$ جواب ندارد.**

مثال: الف) مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $[x]=۳$ بازهٔ $[۳,۴)$ است.

ب) معادلهٔ $[x]=\frac{۱}{۲}$ جواب ندارد، زیرا سمت چپ آن عددی صحیح و سمت راست آن عددی غیرصحیح است.

تست ۱۰

مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $[\frac{۲x+۱}{۳}]=۲$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

راه‌حل ابتدا مجموعهٔ جواب‌های معادله را پیدا می‌کنیم. توجه کنید که

$$[\frac{۲x+۱}{۳}]=۲\Rightarrow ۲\le\frac{۲x+۱}{۳}<۳\Rightarrow ۶\le ۲x+۱<۹\Rightarrow ۵\le ۲x<۸\Rightarrow \frac{۵}{۲}\le x<۴$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ مورد نظر بازهٔ $[\frac{۵}{۲},۴)$ است، که تنها عدد صحیح در آن ۳ است.

تست ۱۱

معادلهٔ $m=[x-۱]+۲[x]$ جواب دارد. مقدار m کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

راه‌حل ابتدا معادله را به‌صورت مقابل می‌نویسیم: $[x]-۱+۲[x]=m\Rightarrow ۳[x]=m+۱\Rightarrow [x]=\frac{m+۱}{۳}$

اگر $\frac{m+۱}{۳}$ عدد صحیحی باشد، آن‌گاه معادلهٔ بالا جواب دارد. با توجه به گزینه‌های داده شده، به ازای $m=۲$ مقدار $\frac{m+۱}{۳}$ صحیح است.

تست ۱۲

مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $[x+۱]+\big[x-[x]\big]=۲$ به‌صورت $[a,b)$ است. مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل ابتدا توجه کنید که $[x+۱]+\big[x-[x]\big]=۲\Rightarrow [x]+۱+[x]-[x]=۲\Rightarrow [x]=۱$

در نتیجه $۱\le x<۲$، پس $a=۱$ و $b=۲$. بنابراین $b-a=۱$.

تست ۱۳

مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $[۴-x]+[x-۳]=۰$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ ۳) $\mathbb{Z}$ ۴) $[۰,+\infty)$

راه‌حل می‌توان نوشت $[۴-x]+[x-۳]=۰\Rightarrow ۴+[-x]+[x]-۳=۰\Rightarrow [x]+[-x]=-۱\Rightarrow x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$

تست ۱۴

مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $[x]^{۲}-۳[x]+۲=۰$ بازهٔ $[a,b)$ است. مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل اگر فرض کنیم $[x]=t$، معادلهٔ مورد نظر به‌صورت مقابل درمی‌آید: $t^{۲}-۳t+۲=۰\Rightarrow (t-۱)(t-۲)=۰$

در نتیجه $t=۱\Rightarrow [x]=۱\Rightarrow x\in[۱,۲)\ ,\quad t=۲\Rightarrow [x]=۲\Rightarrow x\in[۲,۳)$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر است با $[۱,۲)\cup[۲,۳)=[۱,۳)$. پس $a=۱$ و $b=۳$. در نتیجه $b-a=۲$.

تست ۱۵

معادلهٔ $[x^2]+[2x]-x=6$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

راه‌حل

ابتدا توجه کنید از معادلهٔ داده شده نتیجه می‌شود $[x^2]+[2x]=x+6$. سمت چپ این معادله عددی صحیح است، پس سمت راستش، یعنی $x+6$ نیز عددی صحیح است. بنابراین x هم عددی صحیح است. بنابراین x^2 و $2x$ نیز عددهایی صحیح‌اند. در نتیجه $[x^2]=x^2$ و $[2x]=2x$ و معادله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$x^2+2x-x=6\Rightarrow x^2+x-6=0\Rightarrow(x-2)(x+3)=0\Rightarrow x=2, x=-3$$

هر دو این عددها در معادلهٔ مورد نظر صدق می‌کنند. بنابراین معادلهٔ مورد نظر دو جواب دارد.

تست ۱۶

مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $4[x]=3x$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) $\frac{10}{3}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{8}{3}$

راه‌حل

چون $[x]$ عددی صحیح است، پس

$$[x]=k\ (k\in\mathbb{Z})\Rightarrow 4k=3x\Rightarrow x=\frac{4k}{3}=0,\pm\frac{4}{3},\pm\frac{8}{3},\pm4,\dots$$

از طرف دیگر، $x-1<[x]\le x$ ، پس $[x]=\frac{3x}{4}\Rightarrow x-1<\frac{3x}{4}\le x\Rightarrow 0\le x<4$

تنها عددهای $x=0,\frac{4}{3},\frac{8}{3}$ در این محدوده قرار دارند. پس مجموع جواب‌ها برابر ۴ است.

حل نامعادله‌های شامل جزء صحیح

فرض کنید k عددی صحیح باشد. در این صورت

$$[x]>k\Rightarrow x\ge k+1,\quad [x]\ge k\Rightarrow x\ge k$$

$$[x]<k\Rightarrow x<k,\quad [x]\le k\Rightarrow x<k+1$$

مثال: مجموعهٔ جواب‌های نامعادله‌های $-1<[x]\le 2$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$[x]>-1\Rightarrow x\ge 0,\quad [x]\le 2\Rightarrow x<3$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله‌های مورد نظر اشتراک مجموعه‌های $[0,+\infty)$ و $(-\infty,3)$ است، که برابر است با $[0,3)$.

تست ۱۷

مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $2[x+1]+[x]>3$ کدام است؟

۱) $(\frac{1}{3},+\infty)$ ۲) $(\frac{1}{3},1]$ ۳) $(1,+\infty)$ ۴) $[1,+\infty)$

راه‌حل

ابتدا توجه کنید که $[x+1]=[x]+1$. بنابراین نامعادلهٔ مورد نظر را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$2([x]+1)+[x]>3\Rightarrow 3[x]+2>3\Rightarrow [x]>\frac{1}{3}$$

چون $[x]$ عددی صحیح و بزرگ‌تر از $\frac{1}{3}$ است، پس $[x]\ge 1$. بنابراین $x\ge 1$ ، یعنی مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر برابر $[1,+\infty)$ است.

تست ۱۸

مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $3[x]-[x]^2\ge 0$ بازهٔ $[a,b)$ است. طول این بازه کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل

ابتدا توجه کنید که $3[x]-[x]^2\ge 0\Rightarrow [x](3-[x])\ge 0$

بنابراین $0\le[x]\le 3$. اکنون می‌توان نوشت $[x]\ge 0\Rightarrow x\in[0,+\infty),\quad [x]\le 3\Rightarrow x\in(-\infty,4)$

بنابراین $x\in[0,+\infty)\cap(-\infty,4)=[0,4)$. پس مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر بازهٔ $[0,4)$ است که طول آن برابر است با $4-0=4$.

جزء صحیح یک عدد حقیقی

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

سطح ۱

۸۴۷- مقدار $[-۲۰/۹]$ کدام است؟ کتاب درسی

۱) -۱۹ ۲) -۲۰ ۳) -۲۱ ۴) -۲۲

۸۴۸- اگر $x^{۳}=۲۰$، مقدار $[-x]$ کدام است؟

۱) -۳ ۲) -۲ ۳) -۱ ۴) -۴

۸۴۹- حاصل $[\frac{۱}{۲}]+[\frac{۲}{۲}]+\cdots+[\frac{۲۰}{۲}]$ چقدر است؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۱۱۰ ۳) ۱۳۰ ۴) ۱۲۰

۸۵۰- مقدار عبارت $A=[\sqrt{۲}]+[\sqrt{۳}]+\cdots+[\sqrt{۲۰}]$ کدام است؟

۱) ۵۲ ۲) ۵۳ ۳) ۵۴ ۴) ۵۵

۸۵۱- مقدار عبارت $A=[\sqrt[۳]{۲}]+[\sqrt[۳]{۳}]+\cdots+[\sqrt[۳]{۶۳}]$ کدام است؟

۱) ۱۵۵ ۲) ۱۵۶ ۳) ۱۵۷ ۴) ۱۵۸

۸۵۲- اگر $\frac{۱}{۳}<x<\frac{۲}{۳}$، مقدار عبارت $[۳x]-[\frac{۲}{۳x}]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) صفر

۸۵۳- اگر $[x]=۲$، مجموعهٔ مقدارهای $[۳x-۵]$ کدام است؟ کتاب درسی

۱) $\{۱,۲,۳\}$ ۲) $\{۱,۲,۳,۴\}$ ۳) $\{۲,۳,۴\}$ ۴) $\{۲,۳\}$

۸۵۴- اگر $[\frac{۵-x}{۲}]=-۳$، حدود x کدام است؟

۱) $(۹,۱۱]$ ۲) $(-۱۱,۱۱)$ ۳) $[-۱۱,-۹]$ ۴) $[۹,۱۱)$

۸۵۵- اگر $[۳x-۲]=۱$، مقدار $[۲x-۳]$ کدام است؟ کتاب درسی

۱) فقط -۱ ۲) -۲ ۳) -۱ یا صفر ۴) فقط صفر

۸۵۶- مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $[۲x-\frac{۱}{۲}]=۳$ بازهٔ $[a,b)$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۵۷- اگر $۲[x+۲]-[x-۱]=۷$، حدود x کدام است؟

۱) $۱\le x<۲$ ۲) $۲\le x<۳$ ۳) $۳\le x<۴$ ۴) $۴\le x<۵$

سطح ۲

۸۵۸- مقدار $[\sqrt[۳]{۲+\sqrt[۳]{۲+\sqrt[۳]{۲}}}]$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۸۵۹- مقدار عبارت $A=[-\sqrt{۱۰}]+[-\sqrt{۹}]+[-\sqrt{۸}]+\cdots+[\sqrt{۱۰}]$ کدام است؟

۱) -۵ ۲) -۶ ۳) -۷ ۴) -۸

۸۶۰- اگر $[\sqrt{x}]=9$ و $[\sqrt{y}]=12$، بیشترین مقدار $[x+y]$ کدام است؟

۱) ۲۲۵ ۲) ۲۴۲ ۳) ۲۵۶ ۴) ۲۶۸

۸۶۱- اگر $[x]=[y]=2$، حاصل $[\frac{2x+3y}{5}]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۲ یا ۳

۸۶۲- اگر $[x]=2$، عبارت $[x^2-4x]$ چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۶۳- اگر $[x^2+x]=-1$، مقدار $[x^{10}]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۸۶۴- اگر $[x^2-2x]=-1$، مقدار $[\frac{x^5}{32}]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۸۶۵- اگر $[x^2-5x]=[x^2-7x]=-1$، مقدار $[x^2-6x+1]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) صفر ۴) -2

۸۶۶- اگر $[3x]=-2$، مقدار عبارت $A=[x]+[x^2]+[x^3]+\cdots+[x^{10}]$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۵ ۳) -5 ۴) ۳

۸۶۷- اگر $[x^2]=0$ و $x\neq 0$، مقدار عبارت $A=[-x^4]+[-x^6]+\cdots+[-x^{20}]$ کدام است؟

۱) -8 ۲) -9 ۳) -10 ۴) -12

۸۶۸- اگر n عددی طبیعی باشد، حاصل $[\sqrt{n^2+2n}]$ کدام است؟

۱) $n-1$ ۲) n ۳) $n+1$ ۴) $n+2$

۸۶۹- اگر n عددی طبیعی باشد، حاصل $[\sqrt{n^2+4n+1}]$ کدام است؟

۱) n ۲) $n+1$ ۳) $n+2$ ۴) $n+3$

۸۷۰- اگر n عددی طبیعی باشد، حاصل $[\sqrt[3]{n^3+3n^2+1}]$ کدام است؟

۱) $n-1$ ۲) n ۳) $n+1$ ۴) $n+2$

۸۷۱- اگر $[x+[x-3]]=1$، حدود x کدام است؟

۱) $(1,2)$ ۲) $[2,3)$ ۳) $(1,3)$ ۴) $[2,4)$

۸۷۲- اگر $[x+[x]]=3[x]+1$، مقدار $[x^3]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) -2 ۴) صفر

۸۷۳- معادلهٔ $2[x]=x+1$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۸۷۴- اگر $[x+2]+[3-x]=x$، چند مقدار مختلف برای x وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۸۷۵- مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $[-2x]+[1-2x]+[3-2x]=1$ کدام است؟

۱) $(0,\frac{1}{3}]$ ۲) $(0,\frac{1}{2}]$ ۳) $(0,1)$ ۴) $(0,\frac{1}{4}]$

۸۷۶- مجموع جواب‌های معادلهٔ $3|x|+2[x]=1$ که در بازهٔ $(-2,1)$ قرار دارند، کدام است؟

۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{5}{3}$ ۳) $-\frac{7}{3}$ ۴) صفر

۸۷۷- مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $[x+\frac{۱}{۳}]+[x+\frac{۷}{۳}]=۴$ بازهٔ $[a,b)$ است. مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) $-\frac{۴}{۳}$ ۴) $-\frac{۵}{۳}$

۸۷۸- اگر معادلهٔ $[x+۲[x]]+[x-۲]=k$ جواب داشته باشد، k کدام عدد می‌تواند باشد؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۸۷۹- مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $[x]^۲-۳[x]+۲=۰$ بازهٔ $[a,b)$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۸۰- مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $۲[x]^۲+[x-۱]=۰$ کدام است؟

۱) $[-۱,-\frac{۱}{۲}]$ ۲) $[-۱,۰)$ ۳) $[-۲,۰)$ ۴) $[-۲,-۱]$

۸۸۱- مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $[\frac{۲[x]+۱}{۳}]=۳$ کدام است؟

۱) $[۵,۶)$ ۲) $[۴,۵)$ ۳) $[۴,۶)$ ۴) $[۴,۷)$

۸۸۲- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $۳\leq[x]\leq۴$ به‌صورت $[a,b)$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۸۸۳- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $|[۲x+۳]|<۱$ کدام است؟

۱) $[-\frac{۳}{۲},-\frac{۱}{۲})$ ۲) $(-۲,-۱)$ ۳) $[-\frac{۳}{۲},-۱)$ ۴) $(-۲,-\frac{۳}{۲}]$

۸۸۴- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $[۲x]\leq۲x-۱$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $(۰,۱)$ ۳) $(\frac{۱}{۲},۱)$ ۴) $\varnothing$

سطح ۳

۸۸۵- اگر a عدد طبیعی باشد و $[\sqrt{۱۰۰}]=[\sqrt{۱۰۱}]=\cdots=[\sqrt{۱۰۰+a}]$، بیشترین مقدار a کدام است؟

۱) ۲۱ ۲) ۲۰ ۳) ۱۹ ۴) ۲۲

۸۸۶- معادلهٔ $[۲x^۲]-[۴x]=x-۲$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۸۸۷- معادلهٔ $x^۲+[x]=۳-[-x]$ چند جواب دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) صفر

۸۸۸- اگر مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $[x-۳]-[-x]=-۲$ بازهٔ (a,b) باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۸۸۹- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $[x]^۲-۲[x]\leq۳$ بازهٔ $[a,b)$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

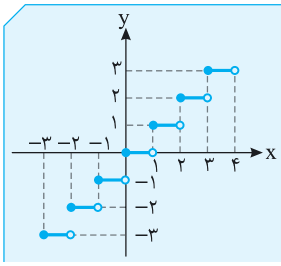
۱) ۳ ۲) ۲ ۳) -۳ ۴) -۲

درس اول / بخش چهارم: تابع جزء صحیح

تابع جزء صحیح

به تابعی که به هر عدد حقیقی جزء صحیح آن را نسبت می‌دهد، **تابع جزء صحیح** می‌گوییم.

$$f(x)=[x]$$
$$D_f=\mathbb{R}$$
$$R_f=\mathbb{Z}$$



تست ۱

اگر x عددی غیرصحیح باشد و $f(x)=[x]$، حاصل $f(f(x)-x)$ کدام است؟

۱) صفر یا -۱ ۲) فقط -۱ ۳) فقط ۱ ۴) صفر یا ۱

راه‌حل می‌دانیم حاصل $[x]$ همواره عددی صحیح است و عددهای صحیح را می‌توان از جزء صحیح به بیرون منتقل کرد، پس

$$f(f(x)-x)=[[x]-x]=[x]+[-x]$$

تابع $y=[x]+[-x]$ به ازای همهٔ عددهای غیرصحیح برابر -۱ است. بنابراین $f(f(x)-x)=-۱$.

تست ۲

دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{۱}{۲[x]-۶}$ کدام است؟

۱) $[۴,+\infty)$ ۲) $(-\infty,۳)$ ۳) $\mathbb{R}$ ۴) $\mathbb{R}-[۳,۴)$

راه‌حل توجه کنید که $D_f=\{x|۲[x]-۶\neq ۰\}$. از طرف دیگر،

$$۲[x]-۶=۰\Rightarrow[x]=۳\Rightarrow ۳\le x<۴\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-[۳,۴)$$

تست ۳

دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{۳-۲[-x]}$ کدام است؟

۱) $(۲,+\infty)$ ۲) $[-۱,+\infty)$ ۳) $(-۲,+\infty)$ ۴) $[\frac{۵}{۲},+\infty)$

راه‌حل باید $۳-۲[-x]\ge ۰$، یعنی $۲[-x]\le ۳$، در نتیجه $[-x]\le\frac{۳}{۲}$. چون $[-x]$ عددی صحیح است و $[-x]\le\frac{۳}{۲}$، پس $[-x]\le ۱$، اما می‌دانیم اگر n عددی صحیح باشد و $[x]\le n$، آن‌گاه $x<n+۱$، بنابراین

$$[-x]\le ۱\Rightarrow -x<۲\Rightarrow x>-۲\Rightarrow D_f=(-۲,+\infty)$$

تست ۴

چند عدد صحیح در دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{۲[x]-[x]^۲}$ قرار دارند؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) ۴

راه‌حل توجه کنید که $D_f=\{x|۲[x]-[x]^۲\ge ۰\}$. اگر فرض کنیم $[x]=t$، آن‌گاه

$$۲[x]-[x]^۲\ge ۰\Rightarrow ۲t-t^۲\ge ۰\Rightarrow ۰\le t\le ۲$$

بنابراین $۰\le[x]\le ۲$، پس $۰\le x<۳$، یعنی $D_f=[۰,۳)$ و سه عدد صحیح ۰، ۱ و ۲ در دامنهٔ تابع f قرار دارند.

تست ۵

اگر $f(x)=۳[x]+۱$ و $D_f=[-۱,۲]$، مجموع اعدادی که در برد تابع f قرار دارند، کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

راه‌حل ابتدا توجه کنید که

$$-۱\le x<۰\Rightarrow[x]=-۱\Rightarrow f(x)=-۳+۱=-۲,\quad ۰\le x<۱\Rightarrow[x]=۰\Rightarrow f(x)=۰+۱=۱$$
$$۱\le x<۲\Rightarrow[x]=۱\Rightarrow f(x)=۳+۱=۴,\quad x=۲\Rightarrow[x]=۲\Rightarrow f(x)=۶+۱=۷$$

بنابراین برد تابع f مجموعهٔ $\{-۲,۱,۴,۷\}$ است و مجموع اعداد واقع در برد این تابع برابر ۱۰ است.

تست ۶

برد تابع $f(x)=۱-x+[x]$ کدام است؟

۱) $(۰,۱]$ ۲) $[۰,۱]$ ۳) $[۰,۱)$ ۴) $(۰,۱)$

راه‌حل توجه کنید که برای هر x حقیقی نابرابری $۰\le x-[x]<۱$ برقرار است. بنابراین

$$-۱<-x+[x]\le ۰\Rightarrow ۰<۱-x+[x]\le ۱\Rightarrow ۰<f(x)\le ۱\Rightarrow R_f=(۰,۱]$$

تست ۷

برد تابع $f(x)=[۳x]-۳[x]$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

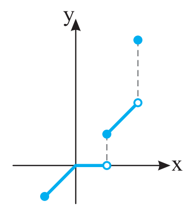
راه‌حل اگر k عددی صحیح باشد، آن‌گاه $[x]+k=[x+k]$. بنابراین $f(x)=[۳x]-۳[x]=[۳x-۳[x]]=[۳(x-[x])]$. از طرف دیگر، $۰\le x-[x]<۱$ ، پس $۰\le ۳(x-[x])<۳$. بنابراین مقادیر f یکی از عددهای ۰، ۱ یا ۲ هستند.

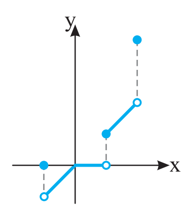
رسم نمودار توابع شامل جزء صحیح

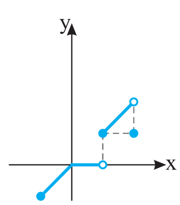
برای رســم نمودار توابع شــامل جزء صحیح، ابتدا به کمک بازه‌بندی، به‌جای جزء صحیح در ضابطهٔ تابع عدد صحیح برابر آن را قرار می‌دهیم، سپس نمودار را رسم می‌کنیم.

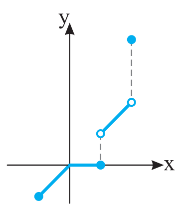
تست ۸

نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=|x|[x]$ و دامنهٔ $[-۱,۲]$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

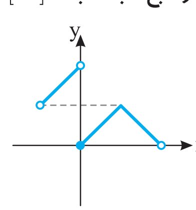
راه‌حل توجه کنید که

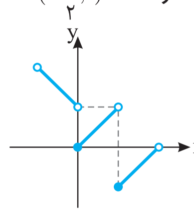
$$f(x)=|x|\times[x]=\begin{cases}۲\times ۲ & x=۲\\ x\times ۱ & ۱\le x<۲\\ x\times ۰ & ۰\le x<۱\\ (-x)\times(-۱) & -۱\le x<۰\end{cases}=\begin{cases}۴ & x=۲\\ x & ۱\le x<۲\\ ۰ & ۰\le x<۱\\ x & -۱\le x<۰\end{cases}$$

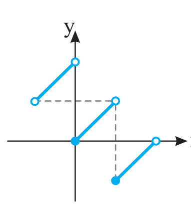
پس نمودار این تابع در گزینهٔ (۱) به‌صورت صحیح رسم شده است.

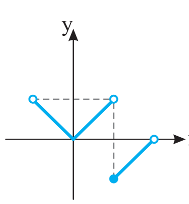
تست ۹

نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x-[۲x]$ و دامنهٔ $(-\frac{۱}{۲},۱)$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

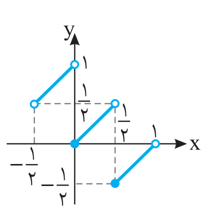
راه‌حل ابتدا توجه کنید که اگر $-\frac{۱}{۲}<x<۱$ ، آن‌گاه $-۱<۲x<۲$. بنابراین

$$-۱<۲x<۰\Rightarrow[۲x]=-۱\Rightarrow f(x)=x+۱,\quad -\frac{۱}{۲}<x<۰$$

$$۰\le ۲x<۱\Rightarrow[۲x]=۰\Rightarrow f(x)=x,\quad ۰\le x<\frac{۱}{۲}$$

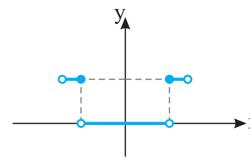
$$۱\le ۲x<۲\Rightarrow[۲x]=۱\Rightarrow f(x)=x-۱,\quad \frac{۱}{۲}\le x<۱$$

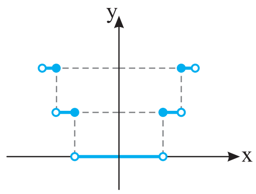
بنابراین نمودار تابع f به‌صورت مقابل است.

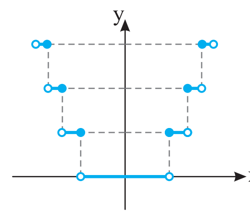


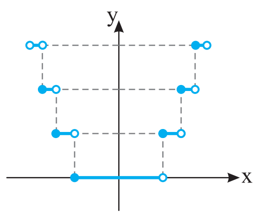
تست ۱۰

نمودار تابع $f(x)=[x^۲]$ **با دامنهٔ** $(-۲,۲)$ **کدام است؟**

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

راه‌حل

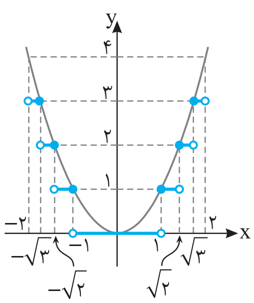
ابتدا توجه کنید که از $-۲<x<۲$ نتیجه می‌شود $۰\le x^۲<۴$. بنابراین ضابطهٔ تابع را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$۰\le x^۲<۱ \Rightarrow f(x)=۰\,,\ -۱<x<۱\,,\qquad ۱\le x^۲<۲ \Rightarrow f(x)=۱\,,\ -\sqrt{۲}<x\le -۱ \text{ یا } ۱\le x<\sqrt{۲}$$

$$۲\le x^۲<۳ \Rightarrow f(x)=۲,\ -\sqrt{۳}<x\le -\sqrt{۲} \text{ یا } \sqrt{۲}\le x<\sqrt{۳}$$

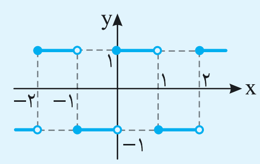
$$۳\le x^۲<۴ \Rightarrow f(x)=۳,\ -۲<x\le -\sqrt{۳} \text{ یا } \sqrt{۳}\le x<۲$$

بنابراین نمودار تابع به شکل روبه‌رو است.

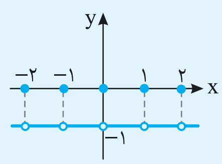


نمودار برخی تابع‌های معروف شامل جزء صحیح

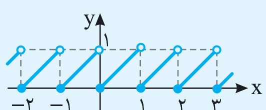
نمودار چند تابع معروف شامل جزء صحیح به‌صورت زیر است.



$y=(-۱)^{[x]}$



$y=[x]+[-x]$



$y=x-[x]$

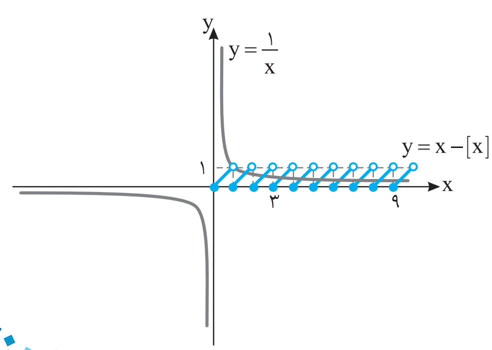
تست ۱۱

معادلهٔ $x-[x]=\frac{۱}{x}$ **در بازهٔ** $[۳,۹)$ **چند جواب دارد؟**

۱) ۵   ۲) ۶   ۳) ۷   ۴) ۸

راه‌حل

هر جواب معادلهٔ مورد نظر طول یکی از نقطه‌های برخورد نمودارهای تابع‌های $y=x-[x]$ و $y=\frac{۱}{x}$ است. نمودارهای این تابع‌ها را در شکل مقابل رسم کرده‌ایم. از روی این شکل معلوم می‌شود که تعداد نقطه‌های برخورد این نمودارها در بازهٔ $[۳,۹)$ برابر ۶ تاست.



تابع جزء صحیح

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

سطح ۱

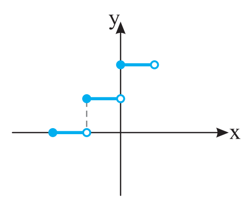
۸۹۰- اگر $f(x)=\left|[۵x]+[۷x]\right|$، مقدار $f(-\frac{۱}{۲})$ کدام است؟

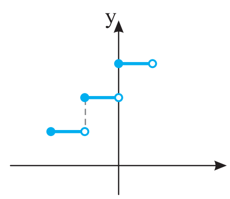
۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

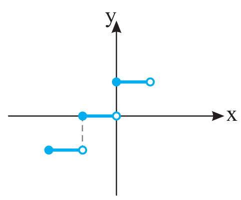
۸۹۱- اگر $f(x)=\left|[x+۳]\right|+[|x+۲|]$، مقدار $f(-\pi)$ کدام است؟

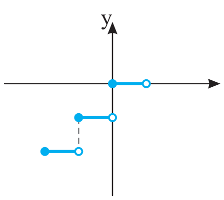
۱) صفر ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۸۹۲- نمودار تابع $f(x)=[x]+۳$ با دامنهٔ $[-۲,۱)$ کدام است؟ کتاب درسی

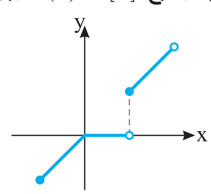
۱)


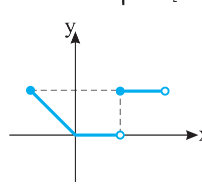
۲)


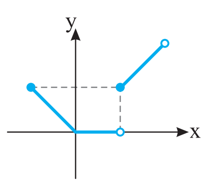
۳)


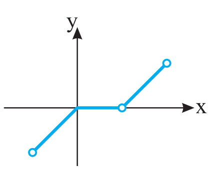
۴)


۸۹۳- نمودار تابع $f(x)=x[x]$ روی بازهٔ $[-۱,۲)$ کدام است؟

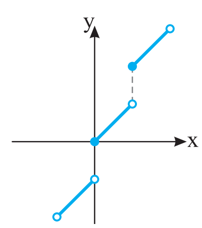
۱)


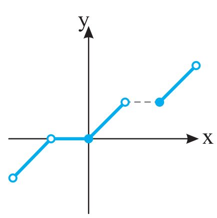
۲)


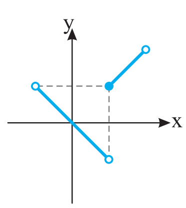
۳)


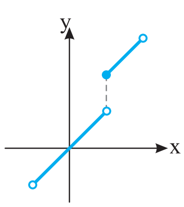
۴)


۸۹۴- نمودار تابع $f(x)=x+[x]$ روی بازهٔ $(-۱,۲)$ کدام است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


سطح ۲

۸۹۵- اگر $f(x)=۴x-[x]-[۳x]$، حاصل $f(x+۱)$ کدام است؟

۱) $f(x)$ ۲) $-f(x)$ ۳) $f(x)-۱$ ۴) $-f(x)+۱$

۸۹۶- اگر $f(x)=[x]-[\frac{x}{۲}+\frac{۱}{۲}]$، حاصل $f(x+۲)-f(x)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) $[x]$ ۴) $[\frac{x}{۲}]$

۸۹۷- اگر $f(x)=x(-۱)^{[x]}$ و $x\notin\mathbb{Z}$، حاصل $f(-x)$ کدام است؟

۱) $f(x)$ ۲) $-f(x)$ ۳) $xf(x)$ ۴) $-xf(x)$

۸۹۸- اگر $f(x)=x-۴[x]+[۲x]$، حاصل $f(f(x))$ کدام است؟

۱) $[x]$ ۲) x ۳) $۲x$ ۴) $[۲x]$

۸۹۹- دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{۱}{[\frac{x}{۳}]-۲}$ به‌صورت $\mathbb{R}-[a,b)$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱

۹۰۰- دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{۱}{x-[x]}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{Z}$ ۲) $\mathbb{N}$ ۳) $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ ۴) $\mathbb{R}-\mathbb{N}$

۹۰۱- دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{۱}{[۴-x]+[x-۳]}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{N}$ ۲) $\mathbb{Z}$ ۳) $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ ۴) $\mathbb{R}-\mathbb{N}$

۹۰۲- مجموع عددهای صحیحی که در دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{۱}{[|x+۱|-۲]-۵}$ نیستند، چقدر است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) ۱

۹۰۳- دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{۴[x]-[x]^۲}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۹۰۴- برد تابع $f(x)=[x]-|x|$ با دامنهٔ $[-۱,۲)$ کدام است؟

۱) $[-۲,۰]-\{-۱\}$ ۲) $(-۱,۱]$ ۳) $[-۲,۰]$ ۴) $[-۲,-۱)$

۹۰۵- برد تابع $f(x)=۲[x]-۲x$ کدام است؟

۱) $(-۲,۰]$ ۲) $[۰,۲)$ ۳) $[-۲,۰]$ ۴) $(-\frac{۳}{۲},\frac{۱}{۲})$

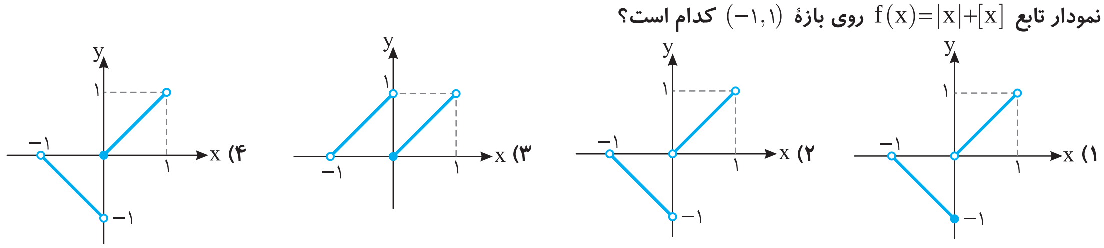
۹۰۶- برد تابع $f(x)=\sqrt{[x]-x}$ چند عضو دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

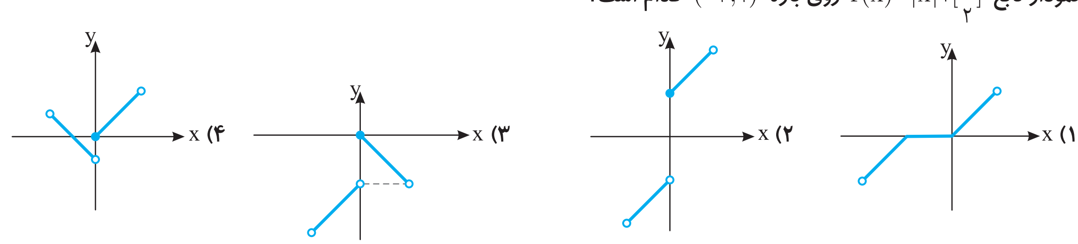
۹۰۷- کدام خط نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x+[x]$ و دامنهٔ $(-۲,۱)$ را قطع نمی‌کند؟

۱) $y=-\frac{۷}{۲}$ ۲) $y=-\frac{۵}{۲}$ ۳) $y=-۲$ ۴) $y=\frac{۱}{۲}$

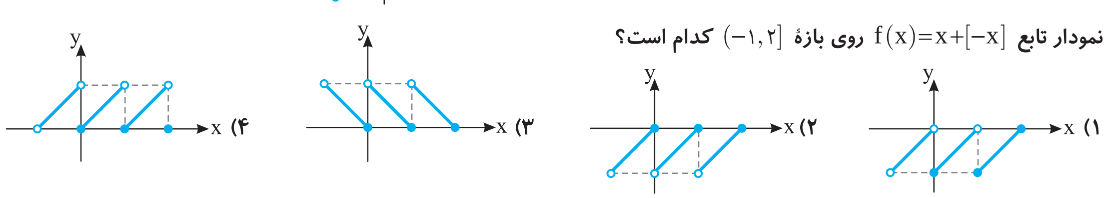
۹۰۸- نمودار تابع $f(x)=|x|+[x]$ روی بازهٔ $(-۱,۱)$ کدام است؟



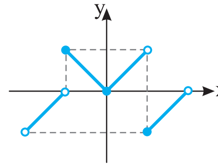
۹۰۹- نمودار تابع $f(x)=|x|+[\frac{x}{۲}]$ روی بازهٔ $(-۲,۲)$ کدام است؟

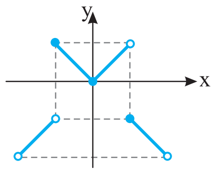


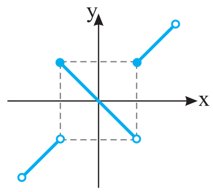
۹۱۰- نمودار تابع $f(x)=x+[-x]$ روی بازهٔ $(-۱,۲]$ کدام است؟

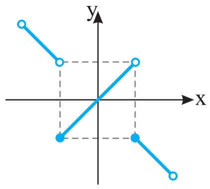


۹۱۱- نمودار تابع $f(x)=x(-۱)^{[x]}$ روی بازهٔ $(-۲,۲)$ کدام است؟

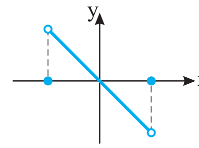
۱) 

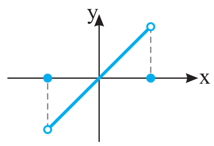
۲) 

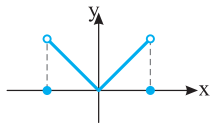
۳) 

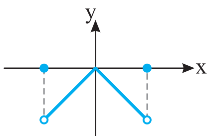
۴) 

۹۱۲- نمودار تابع $f(x)=x[[x]-x]$ روی بازهٔ $[-۱,۱]$ کدام است؟

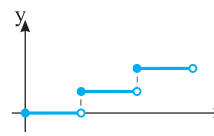
۱) 

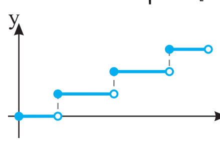
۲) 

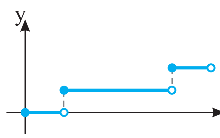
۳) 

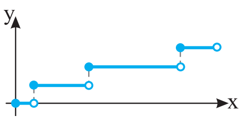
۴) 

۹۱۳- نمودار تابع $f(x)=[\sqrt{x}]$ روی بازهٔ $[۰,۱۱)$ کدام است؟

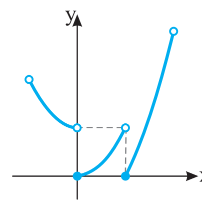
۱) 

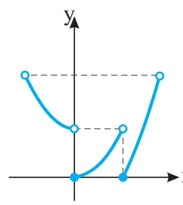
۲) 

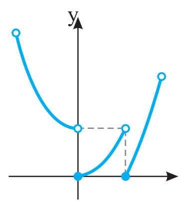
۳) 

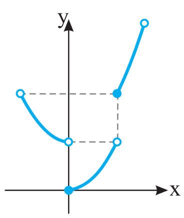
۴) 

۹۱۴- نمودار تابع $f(x)=x^۲-[x]$ روی بازهٔ $(-۱,۲)$ کدام است؟

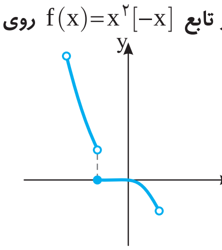
۱) 

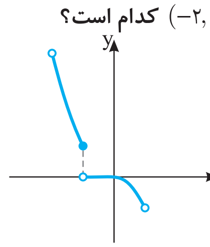
۲) 

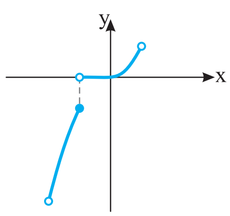
۳) 

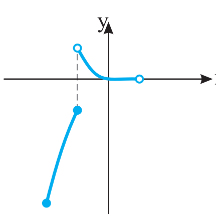
۴) 

۹۱۵- نمودار تابع $f(x)=x^۲[-x]$ روی بازهٔ $(-۲,۱)$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

سطح ۳

۹۱۶- برد تابع $f(x)=[۳[x]-x]-[x+[x]]$ چند عضو دارد؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) نامتناهی

۹۱۷- کدام عدد در برد تابع $f(x)=x-\frac{۱}{۲}[۲x]$ قرار ندارد؟

۱) $\frac{۱}{۲}$　　۲) $\frac{۱}{۳}$　　۳) $\frac{۱}{۴}$　　۴) صفر

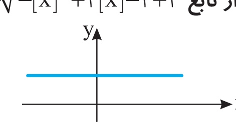
۹۱۸- برد تابع $f(x)=x-۳[\frac{x}{۳}]$ کدام است؟

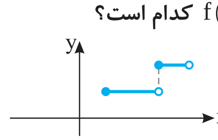
۱) $[۰,۱)$　　۲) $[۰,۳)$　　۳) $[۰,\frac{۱}{۳})$　　۴) $[۰,۲)$

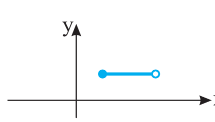
۹۱۹- برد تابع $f(x)=|۴x-[۴x]-۲|$ کدام است؟

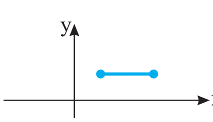
۱) $[۰,۱]$　　۲) $[۰,۲]$　　۳) $(۱,۲]$　　۴) $[۱,۲)$

۹۲۰- نمودار تابع $f(x)=\sqrt{-[x]^۲+۳[x]-۲}+۱$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

درس اول / بخش پنجم: تساوی دو تابع

تساوی دو تابع

دو تابع f و g را **برابر (مساوی)** می‌نامیم، به شرطی که

۱) $D_f = D_g$

۲) به ازای هر x از دامنهٔ دو تابع $f(x)=g(x)$.

در این صورت می‌نویسیم $f=g$.

نکته

اگر دو تابع f و g برابر باشند، آن‌گاه بردهای آن‌ها نیز برابرند. ولی اگر دامنه‌های دو تابع f و g با هم و بردهای دو تابع f و g نیز با هم برابر باشند، این دو تابع لزوماً برابر نیستند.

مثال: تابع‌های زیر برابرند:

$$f(x)=\frac{x^3+3x}{x^2+3}\ ,\quad g(x)=x$$

در واقع دامنهٔ هر دو تابع مجموعهٔ $\mathbb{R}$ است و چون

$$f(x)=\frac{x^3+3x}{x^2+3}=\frac{x(x^2+3)}{x^2+3}=x\quad (\text{همواره } x^2+3\neq 0)$$

پس ضابطهٔ دو تابع هم یکسان است.

مثال: تابع‌های f و g را به‌صورت زیر در نظر بگیرید

$$f=\{(1,2),(3,4)\}\ ,\quad g=\{(1,4),(3,2)\}$$

این دو تابع برابر نیستند، زیرا $f(1)=2\neq 4=g(1)$، درحالی‌که $D_f=D_g$ و $R_f=R_g$.

مثال: تابع‌های زیر برابر نیستند:

$$f(x)=\frac{x}{x}\ ,\quad g(x)=1$$

توجه کنید که $D_f=\mathbb{R}-\{0\}$ و $D_g=\mathbb{R}$، پس دامنهٔ تابع‌های f و g برابر نیست.

تست ۱ اگر تابع‌های $f=\{(1,2),(2,6),(a,4)\}$ و $g=\{(3,4),(1,b),(2,bc)\}$ برابر باشند، مقدار $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

راه‌حل ابتدا توجه کنید که $D_f=\{1,2,a\}$ و $D_g=\{1,2,3\}$. بنابراین $D_f=D_g$، پس $a=3$. از طرف دیگر

$$f(1)=g(1)\Rightarrow 2=b$$

$$f(2)=g(2)\Rightarrow 6=bc\xrightarrow{b=2}6=2c\Rightarrow c=3$$

پس $a+b+c=8$.

تست ۲

کدام دو تابع با هم برابرند؟

۱) $f(x)=\dfrac{x^۲}{x}$ و $g(x)=x$

۲) $f(x)=\dfrac{x^۲-۱}{x-۱}$ و $g(x)=x+۱$

۳) $f(x)=\dfrac{x^۳+x}{x^۲+۱}$ و $g(x)=x$

۴) $f(x)=\dfrac{x^۳-۴x}{x-۲}$ و $g(x)=x^۲+۲x$

راه‌حل

تابع‌های $f(x)=\dfrac{x^۳+x}{x^۲+۱}$ و $g(x)=x$ برابرند، زیرا $D_f=D_g=\mathbb{R}$ و $f(x)=\dfrac{x^۳+x}{x^۲+۱}=\dfrac{x(x^۲+۱)}{x^۲+۱}=x=g(x)$. در بقیهٔ گزینه‌ها دامنهٔ دو تابع داده شده، برابر نیستند.

گزینهٔ (۱) $D_f=\mathbb{R}-\{۰\}, D_g=\mathbb{R} \Rightarrow D_f \neq D_g$

گزینهٔ (۲) $D_f=\mathbb{R}-\{۱\}, D_g=\mathbb{R} \Rightarrow D_f \neq D_g$

گزینهٔ (۴) $D_f=\mathbb{R}-\{۲\}, D_g=\mathbb{R} \Rightarrow D_f \neq D_g$

تست ۳

کدام دو تابع با هم برابر نیستند؟

۱) $f(x)=\sqrt{x^۴}$ و $g(x)=x^۲$

۲) $f(x)=\sqrt{۲x+|x|}$ و $g(x)=\sqrt{۳x}$

۳) $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=\sqrt{۲x-|x|}$

۴) $f(x)=\sqrt{x}^۲$ و $g(x)=\sqrt{x^۲}$

راه‌حل

گزینه‌ها را یکی‌یکی بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱) $D_f=D_g=\mathbb{R}$ و $f(x)=\sqrt{x^۴}=|x^۲|=x^۲=g(x)$. پس دو تابع برابرند.

گزینهٔ (۲) $D_f=D_g=[۰,+\infty)$ و اگر $x\geq ۰$، آن‌گاه $f(x)=\sqrt{۲x+|x|}=\sqrt{۲x+x}=\sqrt{۳x}=g(x)$. پس دو تابع برابرند.

گزینهٔ (۳) $D_f=D_g=[۰,+\infty)$ و اگر $x\geq ۰$، آن‌گاه $g(x)=\sqrt{۲x-|x|}=\sqrt{۲x-x}=\sqrt{x}=g(x)$. پس دو تابع برابرند.

گزینهٔ (۴) $D_f=\mathbb{R}$ و $D_g=[۰,+\infty)$. پس دامنهٔ تابع‌های f و g برابر نیست، یعنی این دو تابع برابر نیستند.

تست ۴

تابع $f(x)=[\dfrac{۱}{x^۲+۱}]$ با کدام‌یک از توابع زیر برابر است؟

۱) $g(x)=۰$

۲) $h(x)=[\dfrac{۱}{x^۲+۲}]$

۳) $k(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{|x|}-۱ & x\neq ۰\\ ۱ & x=۰\end{cases}$

۴) $t(x)=\begin{cases}۰ & x\neq ۰\\ ۱ & x=۰\end{cases}$

راه‌حل

دامنهٔ همهٔ توابع داده شده برابر $\mathbb{R}$ است. بنابراین کافی است تساوی ضابطه‌ها را بررسی کنیم. توجه کنید که $f(۰)=[\dfrac{۱}{۰+۱}]=۱$ و اگر $x\neq ۰$، آن‌گاه

$$x^۲>۰ \Rightarrow x^۲+۱>۱>۰ \Rightarrow ۰<\dfrac{۱}{x^۲+۱}<۱ \Rightarrow [\dfrac{۱}{x^۲+۱}]=۰ \Rightarrow f(x)=۰$$

بنابراین تابع f به‌صورت $f(x)=\begin{cases}۰ & x\neq ۰\\ ۱ & x=۰\end{cases}$ است. بنابراین تابع f با تابع t برابر است. دقت کنید که $h(x)=۰$ و $k(x)=\begin{cases}۰ & x>۰\\ ۱ & x=۰\\ -۲ & x<۰\end{cases}$.

تست ۵

اگر دو تابع $f(x)=\dfrac{۷}{x-۳}$ و $g(x)=\dfrac{ax+b}{x^۲+cx+d}$ با هم مساوی باشند، مقدار $|ad-bc|$ کدام است؟

۱) ۷۵

۲) ۶۳

۳) ۵۱

۴) ۶۵

راه‌حل

برای اینکه دو تابع برابر باشند باید ضابطهٔ تابع g به‌صورت $g(x)=\dfrac{a(x-۳)}{(x-۳)^۲}$ باشد، که دامنهٔ دو تابع برابر $\mathbb{R}-\{۳\}$ شود. بنابراین

$$x^۲+cx+d=(x-۳)^۲ \Rightarrow x^۲+cx+d=x^۲-۶x+۹ \Rightarrow c=-۶, d=۹, \quad g(x)=\dfrac{ax+b}{(x-۳)^۲}=\dfrac{۷}{x-۳} \Rightarrow ax+b=۷(x-۳)=۷x-۲۱$$

پس $a=۷$، $b=-۲۱$ و در نتیجه

$$ad-bc=۶۳-۱۲۶=-۶۳ \Rightarrow |ad-bc|=۶۳$$

تساوی دو تابع

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

سطح ۱

۹۲۱- اگر تابع‌های $f=\{(۱,a),(۲,۲a+b),(c,۳)\}$ و $g=\{(۱,۴),(۲,۵),(۴,۳)\}$ مساوی باشند، مقدار $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۹۲۲- تابع $f(x)=\dfrac{x^{۳}+x}{x^{۲}+۱}$ با کدام تابع زیر مساوی است؟ کتاب درسی

۱) $g(x)=\dfrac{x^{۲}-x}{x-۱}$ ۲) $h(x)=\dfrac{x^{۲}+x}{x+۱}$ ۳) $k(x)=\dfrac{x^{۳}+۲x}{x^{۲}+۲}$ ۴) $t(x)=\dfrac{x^{۳}-x}{x^{۲}-۱}$

۹۲۳- تابع $f(x)=[x-[x]]$ با کدام تابع زیر برابر است؟

۱) $g(x)=۰$ ۲) $h(x)=۲[x]$ ۳) $k(x)=\begin{cases} ۰ & x\in\mathbb{Z} \\ ۱ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$ ۴) $t(x)=\begin{cases} ۰ & x\in\mathbb{Z} \\ -۱ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$

۹۲۴- تابع $f(x)=[x+۴]+|x+۳|$ روی بازهٔ $[-۵,-۴)$ با کدام تابع مساوی است؟

۱) $g(x)=-x-۵$ ۲) $h(x)=-x-۴$ ۳) $k(x)=x-۴$ ۴) $t(x)=x-۵$

سطح ۲

۹۲۵- تابع $f(x)=\dfrac{x^{۳}-۱}{x^{۲}+x+۱}$ با کدام تابع زیر مساوی است؟ کتاب درسی

۱) $g(x)=\dfrac{x^{۲}-۱}{x+۱}$ ۲) $h(x)=\dfrac{x^{۳}+۱}{x^{۲}-x+۱}$ ۳) $k(x)=\dfrac{x^{۳}-x^{۲}}{x^{۲}}$ ۴) $t(x)=\dfrac{x^{۳}-x^{۲}+x-۱}{x^{۲}+۱}$

۹۲۶- اگر $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^{۲}-mx+۳}{۳-x} & x\neq ۳ \\ n & x=۳\end{cases}$ با یک تابع خطی برابر باشد، مقدار $m+n$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۲۷- کدام تابع با تابع $f(x)=x-۲+|x-۴|$ برابر است؟

۱) $g(x)=\begin{cases} ۲ & x<۴ \\ ۲x+۶ & x\geq ۴\end{cases}$ ۲) $h(x)=\begin{cases} ۲ & x<۴ \\ ۶-۲x & x\geq ۴\end{cases}$ ۳) $k(x)=\begin{cases} ۲ & x<۴ \\ ۲x-۶ & x\geq ۴\end{cases}$ ۴) $t(x)=\begin{cases} ۴ & x<۴ \\ ۲x-۶ & x\geq ۴\end{cases}$

۹۲۸- تابع $f(x)=|x|(x-|x|)$ با کدام تابع زیر برابر است؟

۱) $g(x)=|x|(x+|x|)$ ۲) $h(x)=x(x+|x|)$ ۳) $k(x)=|x(x-|x|)|$ ۴) $t(x)=x(|x|-x)$

۹۲۹- تابع $f(x)=۲+|x+۳|-|x-۱|$ با کدام تابع زیر برابر است؟

۱) $g(x)=\begin{cases} x-۱ & x<-۳ \\ x+۴ & -۳\leq x\leq ۱ \\ ۴ & x>۱\end{cases}$ ۲) $h(x)=\begin{cases} -۲ & x<-۳ \\ ۲x+۴ & -۳\leq x\leq ۱ \\ ۶ & x>۱\end{cases}$ ۳) $k(x)=\begin{cases} x & x<-۳ \\ ۲x+۴ & -۳\leq x\leq ۱ \\ ۱-x & x>۲\end{cases}$ ۴) $t(x)=\begin{cases} ۲x-۲ & x<۲ \\ x+۱ & x>۲\end{cases}$

۹۳۰- تابع $f(x)=\left|\frac{x}{|x|}-\frac{|x-1|}{x-1}-1\right|$ با کدام تابع زیر برابر است؟

۱) $g(x)=1$ ۲) $h(x)=\frac{x^2-x}{x^2-x}$ ۳) $k(x)=\frac{2(x^2-x)}{x^2-x}$ ۴) $t(x)=\frac{x}{|x|}+\frac{|x-1|}{x-1}$

۹۳۱- تابع $f(x)=\begin{cases}-x^2+2x-3 & x<0\\ 0 & x=0\\ x^2+2x+3 & x>0\end{cases}$ با کدام تابع زیر مساوی است؟

۱) $g(x)=(x^2+3)\frac{|x|}{x}+2x$ ۲) $h(x)=x^2\frac{|x|}{x}+3$

۳) $k(x)=\begin{cases}(x^2+3)\frac{|x|}{x}+2x & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ ۴) $t(x)=\begin{cases}x^2\frac{|x|}{x}+3 & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$

۹۳۲- دو تابع با ضابطه‌های $f(x)=\frac{5}{x-2}$ و $g(x)=\frac{ax+b}{x^2+cx+4}$ با هم برابرند. مقدار abc کدام است؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۲۰۰ ۳) -100 ۴) -200

۹۳۳- دو تابع با ضابطه‌های $f(x)=\frac{x-a}{x-1}$ و $g(x)=\frac{x^2-1}{x^2-bx+c}$ با هم برابرند. مقدار $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۳۴- تابع $f(x)=\frac{bx+1}{8x+2b}$ با تابع $g(x)=c, x\neq a$ مساوی است. حاصل $\frac{ab}{c}$ کدام است؟

۱) ± 1 ۲) ± 2 ۳) ± 4 ۴) ± 8

۹۳۵- نمودار تابع $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^3-1}$ در چند نقطه نمودار تابع $g(x)=x^2-2$ را قطع می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۳۶- نمودار تابع $f(x)=\frac{x+1}{x^2-1}$ خط $y=k$ را قطع نمی‌کند. مجموع مقادیر ممکن برای k کدام است؟

۱) -2 ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

سطح ۳

۹۳۷- کدام‌یک از تابع‌های زیر با تابع $f(x)=\left|x-|x-|x||\right|$ برابر است؟

۱) $g(x)=\begin{cases}3x & x<0\\ -x & x\geq 0\end{cases}$ ۲) $h(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ -x & x\geq 0\end{cases}$ ۳) $k(x)=\begin{cases}-3x & x<0\\ x & x\geq 0\end{cases}$ ۴) $t(x)=\begin{cases}x & x\leq 0\\ -3x & x>0\end{cases}$

۹۳۸- تابع $f(x)=\frac{1}{[x]+[-x]}$ با کدام تابع زیر برابر است؟

۱) $g(x)=\frac{|x-[x]|}{[x]-x}$ ۲) $h(x)=[x-[x]]-1$ ۳) $k(x)=-1$ ۴) $t(x)=\frac{x+[x]}{x-[x]}$

۹۳۹- کدام دو تابع مساوی‌اند؟

۱) $f(x)=x-[x]$ و $g(x)=x+[-x]$ ۲) $f(x)=[x]+[-x]$ و $g(x)=0$

۳) $f(x)=(-1)^{[x]}$ و $g(x)=(-1)^{[-x]}$ ۴) $f(x)=[x+3[x]]$ و $g(x)=4[x]$

۹۴۰- تابع $f(x)=-x[\frac{x}{x^2+1}]$ با کدام تابع زیر برابر است؟

۱) $g(x)=[\frac{x^2}{x^2+1}]+x$ ۲) $h(x)=[\frac{-x^2}{x^2+1}]$ ۳) $k(x)=x[\frac{-x}{x^2+1}]+x$ ۴) $t(x)=x^2[\frac{1}{x^2+1}]$

کنکور سراسری

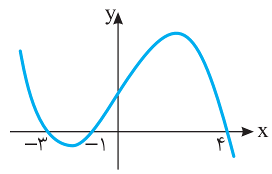
۹۴۱- برای هر عدد طبیعی $n>2$، حاصل $[\sqrt{4n^2-3n+1}]-2[\sqrt{n^2-2n}]$ کدام است؟ تجربی ۹۱

۱) ۲　۲) ۱　۳) ۳　۴) ۴

۹۴۲- اگر $f(x)=x-[x]$، برد تابع $g(x)=f(2x-3)-2f(x)$ کدام است؟ ریاضی خارج ۹۲

۱) $[-1,0]$　۲) $[0,1]$　۳) $\{-1,0\}$　۴) $\{0,1\}$

۹۴۳- شکل روبه‌رو نمودار تابع $y=f(x-2)$ است. دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟ تجربی خارج ۹۴



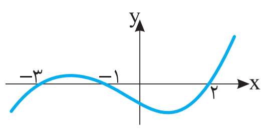
۱) $[-1,1]\cup[0,6]$　۲) $[-3,1]\cup[0,2]$

۳) $[-5,-3]\cup[-1,2]$　۴) $[-5,-3]\cup[0,2]$

۹۴۴- اگر $f(2x-3)=4x^2-14x+13$ باشد، ضابطهٔ $f(x)$، برابر کدام است؟ تجربی ۹۷

۱) x^2-x+3　۲) x^2-2x-1　۳) x^2-2x+1　۴) x^2-x+1

۹۴۵- شکل مقابل، نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)$ است. دامنهٔ تابع غیرنقطه‌ای $y=\sqrt{(x+1)f(x)}$، کدام است؟ ریاضی خارج ۹۷



۱) $[-3,2]$　۲) $[-1,+\infty)$

۳) $(-\infty,-1]$　۴) $\mathbb{R}-(-3,2)$

۹۴۶- نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x}$ را در امتداد محور xها، ۱۲ واحد در جهت مثبت و سپس در امتداد محور yها، ۲ واحد در جهت مثبت، انتقال می‌دهیم، فاصلهٔ نقطهٔ برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f، از مبدأ مختصات، کدام است؟ تجربی ۹۹

۱) $4\sqrt{15}$　۲) $6\sqrt{7}$　۳) $4\sqrt{17}$　۴) $6\sqrt{10}$

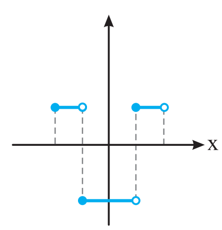
۹۴۷- اگر $f(x)=2x-[2x]$ و $g(x)=-x^2+4x$، برد تابع $y=g(f(x))$، کدام است؟ تجربی ۹۹ با تغییر

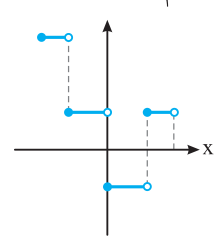
۱) $[0,2)$　۲) $[0,3)$　۳) $[0,4)$　۴) $[1,4)$

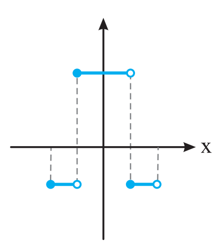
۹۴۸- اگر $f(x)=[x]-x$ و $g(x)=\frac{1-2x}{x+1}$ باشند، برد تابع $y=g(f(x))$، کدام است؟ تجربی خارج ۹۹ با تغییر

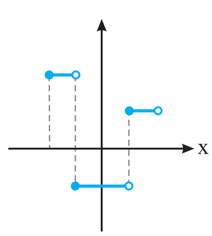
۱) $[-1,1)$　۲) $(-1,1]$　۳) $[1,+\infty)$　۴) $(-\infty,1]$

۹۴۹- نمودار تابع $y=2|[3x]|-1$ به‌ازای $-\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{2}$، کدام است؟ تجربی ۱۴۰۰

۱)


۲)


۳)


۴)


۹۵۰- اگر $\frac{4-2x}{3x+1}\ge 0$ باشد، مجموعهٔ مقادیر $[3x]$ چند عضو دارد؟ تجربی ۱۴۰۱

۱) ۵　۲) ۶　۳) ۷　۴) ۸

۹۵۱- اگر $-2<\frac{1-3x}{x+1}<0$ باشد، مجموعهٔ مقادیر $[\frac{x}{2}]$ چند عضو دارد؟ تجربی خارج ۱۴۰۱

۱) ۱　۲) ۲　۳) ۳　۴) ۴

۹۵۲- نمودار تابع $y=\frac{2}{x^2-3x+2}$، به‌ازای چند مقدار صحیح بین دو خط افقی $y=0$ و $y=-2$ واقع می‌شود؟ ریاضی ۱۴۰۲ (نوبت اول)

۱) ۱　۲) ۳　۳) ۴　۴) صفر

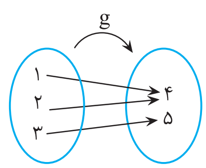
فصل سوم

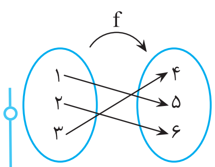
درس دوم / بخش اول: تابع یک‌به‌یک

تابع یک‌به‌یک

تابع f را یک‌به‌یک می‌نامند، به شرطی که به هر دو عضو متمایز از دامنهٔ آن، دو عضو متمایز از برد f نظیر شوند.

مثال: تابع‌های f و g با نمودارهای پیکانی روبه‌رو را در نظر بگیرید:
از روی این نمودارها معلوم است که به هر عضو از دامنهٔ f عضوی متمایز از بقیهٔ عضوها در برد f نظیر شده است، اما در مورد تابع g چنین نیست، زیرا عضوهای ۱ و ۲ از دامنهٔ g هر دو به عضو ۴ از برد g نظیر شده‌اند. تابع f یک‌به‌یک است، ولی تابع g یک‌به‌یک نیست.





تست ۱ **کدام تابع یک‌به‌یک است؟**

۱) $\{(2,3),(4,2),(1,3)\}$ **۲)** $\{(1,4),(2,5),(3,1),(5,4)\}$

۳) $\{(1,-1),(2,1),(3,-1),(4,2)\}$ **۴)** $\{(1,-2),(-2,1),(-1,3),(3,2)\}$

راه‌حل تابع گزینهٔ (۱) به دلیل وجود دو زوج مرتب $(2,3)$ و $(1,3)$، تابع گزینهٔ (۲) به دلیل وجود دو زوج مرتب $(1,4)$ و $(5,4)$ و تابع گزینهٔ (۳) به دلیل وجود دو زوج مرتب $(1,-1)$ و $(3,-1)$ یک‌به‌یک نیستند. تابع گزینهٔ (۴) یک‌به‌یک است.

معیار جبری یک‌به‌یک بودن تابع

تابع f یک‌به‌یک است، به شرطی که به ازای هر دو عضو دلخواه از دامنهٔ f مانند x_1 و x_2، $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

به طور معادل، تابع f یک‌به‌یک است، به شرطی که به ازای هر دو عضو دلخواه از دامنهٔ f مانند x_1 و x_2، $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$

نکته

معمولاً استفاده از معیار دوم برای اثبات یک‌به‌یک بودن تابع ساده‌تر است.

مثال: الف) تابع f با دامنهٔ $\mathbb{R}$ و ضابطهٔ $f(x)=2x-1$ یک‌به‌یک است، زیرا اگر x_1 و x_2 دو عدد حقیقی باشند،

$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow 2x_1-1=2x_2-1 \Rightarrow 2x_1=2x_2 \Rightarrow x_1=x_2$$

ب) تابع f با دامنهٔ $\mathbb{R}$ و ضابطهٔ $f(x)=x^2$ یک‌به‌یک نیست، زیرا $f(1)=f(-1)$، اما $1 \neq -1$.

پ) تابع f با دامنهٔ $[0,+\infty)$ و ضابطهٔ $f(x)=x^2$ یک‌به‌یک است، زیرا

$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1^2=x_2^2 \Rightarrow x_1=x_2 \qquad (\text{چون } x_1,x_2 \geq 0)$$

تست ۲ **اگر f تابعی یک‌به‌یک با دامنهٔ $\mathbb{R}$ باشد، مجموع جواب‌های معادلهٔ $f(x^2-2x)=f(3x-4)$ کدام است؟**

۱) ۲ **۲)** ۳ **۳)** ۴ **۴)** ۵

راه‌حل با توجه به اینکه تابع f یک‌به‌یک است، از تساوی $f(x^2-2x)=f(3x-4)$ نتیجه می‌شود $x^2-2x=3x-4$. مجموع جواب‌های معادلهٔ $x^2-5x+4=0$ را می‌خواهیم که برابر ۵ است.

تست ۳

تابع $f=\{(a+b,۱),(۲,۳),(۴,۱),(a-b,۳),(۵,۶)\}$ یک‌به‌یک است. مقدار $\frac{a}{b}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

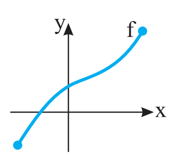
راه‌حل چون زوج مرتب‌های $(۴,۱)$ و $(a+b,۱)$ در تابع وجود دارند، پس $a+b=۴$ و چون زوج مرتب‌های $(۲,۳)$ و $(a-b,۳)$ در تابع وجود دارند، پس $a-b=۲$.
بنابراین

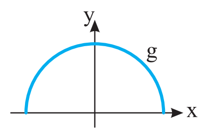
$$\begin{cases} a+b=۴ \\ a-b=۲ \end{cases} \Rightarrow a=۳, b=۱ \Rightarrow \frac{a}{b}=۳$$

معیار هندسی یک‌به‌یک بودن تابع

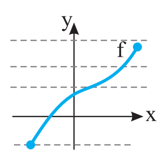
تابع f یک‌به‌یک است، به شرطی که هر خط موازی محور x ، نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

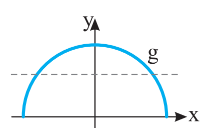
مثال: الف) تابع‌های f و g را که نمودار آن‌ها در شکل زیر رسم شده است در نظر بگیرید.



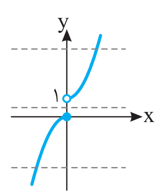


هر خط موازی محور x نمودار f را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند، بنابراین تابع f یک‌به‌یک است. اما چون خطی موازی محور x وجود دارد که نمودار تابع g را در دو نقطه قطع کرده است، پس تابع g یک‌به‌یک نیست.





ب) تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲+۱ & x>۰ \\ -x^۲ & x\leq ۰ \end{cases}$ را در نظر بگیرید. نمودار این تابع در شکل زیر رسم شده است. از روی این نمودار معلوم است که f تابعی یک‌به‌یک است.

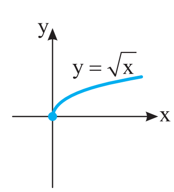


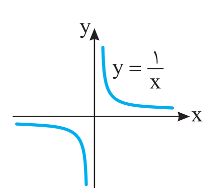
تست ۴

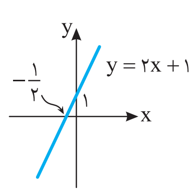
کدام تابع یک‌به‌یک نیست؟

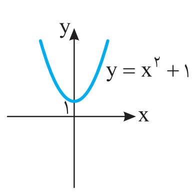
۱) $y=\sqrt{x}$ ۲) $y=\frac{۱}{x}$ ۳) $y=۲x+۱$ ۴) $y=x^۲+۱$

راه‌حل نمودار تابع‌های داده شده به‌صورت زیر است:







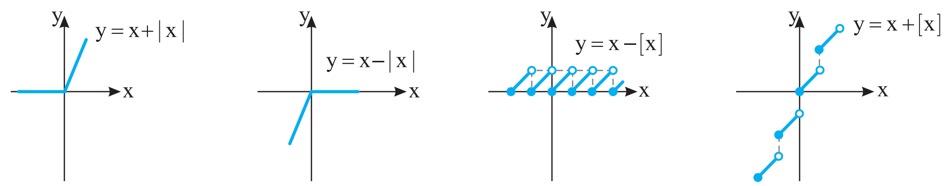


واضح است که خطوطی مانند $y=۲$ ، $y=۳$ و ... نمودار تابع $y=x^۲+۱$ را در دو نقطه قطع می‌کنند، پس این تابع یک‌به‌یک نیست.

تست ۵ کدام‌یک تابعی یک‌به‌یک است؟

۱) $y=x+[x]$ ۲) $y=x-[x]$ ۳) $y=x-|x|$ ۴) $y=x+|x|$

راه‌حل نمودار تابع‌ها به شکل زیر است:



واضح است که تابع $y=x+[x]$ یک‌به‌یک است.

استفاده از مثال نقض در بررسی یک‌به‌یک بودن تابع

برای اینکه ثابت کنیم تابعی یک‌به‌یک نیست، کافی است دو عدد مانند $x_۱$ و $x_۲$ در دامنهٔ تابع پیدا کنیم که $x_۱ \neq x_۲$ اما $f(x_۱)=f(x_۲)$. توجه کنید که برای پیدا کردن عددهای $x_۱$ و $x_۲$ می‌توانیم عددی مانند k پیدا کنیم که معادلهٔ $f(x)=k$ دست‌کم دو جواب داشته باشد.

مثال: تابع $f(x)=x-\sqrt{x}$ یک‌به‌یک نیست. در حقیقت معادلهٔ $f(x)=۰$ دو جواب دارد:

$$f(x)=۰ \Rightarrow x-\sqrt{x}=۰ \Rightarrow x=۰, x=۱$$

یعنی زوج‌های مرتب $(۰,۰)$ و $(۱,۰)$ در تابع f وجود دارند.

تست ۶ کدام تابع یک‌به‌یک نیست؟

۱) $y=x-\sqrt[۳]{x}$ ۲) $y=x+\sqrt{x}$ ۳) $y=x\sqrt{x}$ ۴) $y=\frac{x}{\sqrt{x}}$

راه‌حل تابع $f(x)=x-\sqrt[۳]{x}$ یک‌به‌یک نیست. زیرا $f(-۱)=f(۰)=f(۱)=۰$. بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.

یک‌به‌یک بودن تابع هموگرافیک

تابع هموگرافیک $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ یک‌به‌یک است.

نکته

- **اگر $c=۰$ ، $a\neq۰$ و $d\neq۰$ ، آن‌گاه تابع $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}$ خطی و یک‌به‌یک است.**
- **اگر $c\neq۰$ و $ad=bc$ ، آن‌گاه تابع $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}$ ثابت است و یک‌به‌یک نیست.**

تست ۷ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{kx+۲}{x+k-۱}$ یک‌به‌یک است. مقدار k کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) ±۲ ۲) $۲,-۱$ ۳) $-۲,۱$ ۴) ±۱

راه‌حل توجه کنید که تابع f فقط در صورتی یک‌به‌یک نیست که ثابت باشد، یعنی

$$k(k-۱)-۲=۰ \Rightarrow k^۲-k-۲=۰ \Rightarrow k=-۱ \ , \ k=۲$$

نکته

اگر بخواهیم یک‌به‌یک بودن تابعی را روی یک بازه (یا یک مجموعه) بررسی کنیم، ابتدا دامنهٔ تابع را به آن بازه (یا آن مجموعه) محدود می‌کنیم. یعنی فرض می‌کنیم دامنهٔ تابع آن بازه (یا آن مجموعه) است.

یک‌به‌یک بودن تابع درجهٔ دوم

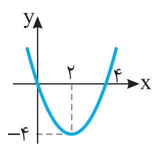
تابع درجهٔ دوم $f(x)=ax^۲+bx+c$ روی بازهٔ $[-\frac{b}{۲a},+\infty)$ و روی بازهٔ $(-\infty,-\frac{b}{۲a}]$ یک‌به‌یک است، ولی روی $\mathbb{R}$ یک‌به‌یک نیست.

تست ۸

تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x^۲-۴x$ و دامنهٔ $[m,+\infty)$ یک‌به‌یک است. حداقل مقدار m کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

راه‌حل



نمودار تابع $y=x^۲-۴x$ به شکل مقابل است. واضح است که اگر دامنهٔ تابع را به $x\geq ۲$ محدود کنیم تابع یک‌به‌یک خواهد بود. البته اگر دامنهٔ تابع را مثلاً $[۴,+\infty)$ بگیریم، هم تابع یک‌به‌یک خواهد بود. پس حداقل مقدار m برای اینکه تابع با دامنهٔ $[m,+\infty)$ یک‌به‌یک باشد، برابر ۲ است.

یک‌به‌یک بودن تابع‌های چندضابطه‌ای

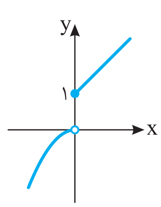
اگر تابع g با دامنهٔ $D_۱$ و تابع h با دامنهٔ $D_۲$ یک‌به‌یک باشند و اشتراک برد تابع g با برد تابع h تهی باشد، آن‌گاه تابع f که به‌صورت $f(x)=\begin{cases} g(x) & x\in D_۱ \\ h(x) & x\in D_۲ \end{cases}$ تعریف می‌شود، یک‌به‌یک است.

تست ۹

کدام تابع یک‌به‌یک است؟

۱) $f(x)=\begin{cases} x+۱ & x\geq ۰ \\ x^۲ & x<۰ \end{cases}$ ۲) $f(x)=\begin{cases} x-۱ & x\geq ۰ \\ -x^۲ & x<۰ \end{cases}$ ۳) $f(x)=\begin{cases} x+۱ & x\geq ۰ \\ -x^۲ & x<۰ \end{cases}$ ۴) $f(x)=\begin{cases} x-۱ & x\geq ۰ \\ x^۲ & x<۰ \end{cases}$

راه‌حل



نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x+۱ & x\geq ۰ \\ -x^۲ & x<۰ \end{cases}$ به‌صورت روبه‌رو است که توسط هر خط موازی محور طول‌ها حداکثر در یک نقطه قطع می‌شود. پس این تابع یک‌به‌یک است. توجه کنید که توابع $g(x)=x+۱, x\geq ۰$ و $h(x)=-x^۲, x<۰$ توابعی یک‌به‌یک هستند و برد تابع g با برد تابع h عضو مشترک ندارند: $R_g=[۱,+\infty)$، $R_h=(-\infty,۰)$

در گزینهٔ (۱)، $f(۰)=f(-۱)=۱$، در گزینهٔ (۲)، $f(۰)=f(-۱)=-۱$ و در گزینهٔ (۴)، $f(۲)=f(-۱)=۱$. بنابراین توابع این گزینه‌ها یک‌به‌یک نیستند.

تست ۱۰

تابع $f(x)=\begin{cases} \frac{۱}{x} & x\geq ۲ \\ k-x & x<۲ \end{cases}$ یک‌به‌یک است. حدود k کدام است؟

۱) $k\geq ۲$ ۲) $k\leq ۳$ ۳) $k\geq \frac{۵}{۲}$ ۴) $k\geq ۳$

راه‌حل

توجه کنید که اگر $x\geq ۲$، آن‌گاه تابع $g(x)=\frac{۱}{x}$ یک‌به‌یک است، و اگر $x<۲$، آن‌گاه تابع $h(x)=k-x$ یک‌به‌یک است. پس اگر اشتراک برد این تابع‌ها تهی باشد، تابع f یک‌به‌یک خواهد بود.

$$x\geq ۲\Rightarrow ۰<\frac{۱}{x}\leq \frac{۱}{۲}\Rightarrow ۰<g(x)\leq \frac{۱}{۲}\Rightarrow R_g=(۰,\frac{۱}{۲}],\quad x<۲\Rightarrow -x>-۲\Rightarrow k-x>k-۲\Rightarrow h(x)>k-۲\Rightarrow R_h=(k-۲,+\infty)$$

اگر بخواهیم $R_g\cap R_h=\varnothing$، باید $k-۲\geq \frac{۱}{۲}$. بنابراین $k\geq \frac{۵}{۲}$.

تابع یک‌به‌یک

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

سطح ۱

۹۵۳- کدام تابع یک‌به‌یک است؟ کتاب درسی

۱) $\{(۲,۲),(۳,۴),(۵,۱),(۷,۲)\}$ ۲) $\{(۱,۲),(۲,۲),(۳,۴),(۴,۶)\}$ ۳) $\{(۱,۳),(۲,۴),(۵,۷),(۶,۱)\}$ ۴) $\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۳)\}$

۹۵۴- کدام تابع یک‌به‌یک نیست؟ کتاب درسی

۱) $\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۴)\}$ ۲) $\{(۱,-۱),(-۱,۲),(۳,۵)\}$ ۳) $\{(۲,۴),(-۲,۵),(۳,۶)\}$ ۴) $\{(۱,-۱),(-۱,۱),(۲,-۱)\}$

۹۵۵- حداقل چند زوج مرتب از تابع $f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۴),(۴,۲),(۵,۱),(۶,۴)\}$ باید حذف کنیم تا تبدیل به تابعی یک‌به‌یک شود؟ کتاب درسی

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

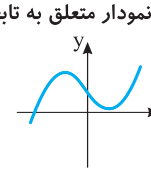
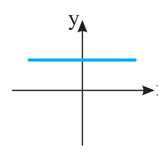
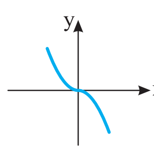
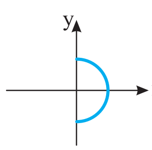
۹۵۶- اگر تابع $f=\{(۲a,۱),(۲,۳),(b,۱),(۲b,۳)\}$ یک‌به‌یک باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{۵}{۲}$

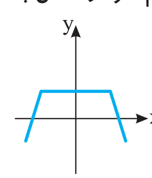
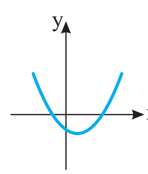
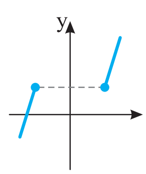
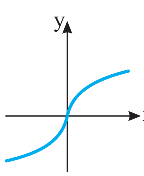
۹۵۷- تابع $f=\{(a^۲,۱),(۴,۱),(۲a+b,۲),(۶,۲),(a,b)\}$ یک‌به‌یک است. مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) -۱۲ ۲) -۱۰ ۳) -۶ ۴) صفر

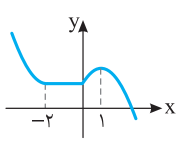
۹۵۸- کدام نمودار متعلق به تابعی یک‌به‌یک است؟ کتاب درسی

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۹۵۹- کدام نمودار متعلق به تابعی یک‌به‌یک است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۹۶۰- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. این تابع روی کدام بازه یک‌به‌یک است؟ کتاب درسی



۱) $[۰,+\infty)$ ۲) $(-\infty,۰]$
۳) $[-۲,۰]$ ۴) $[۰,۱]$

۹۶۱- اگر $A=\{a,b,c,d\}$ و $B=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$، چند تابع یک‌به‌یک از A به B می‌توان نوشت؟

۱) ۶۴ ۲) ۹۶ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۲۵

۹۶۲- کدام تابع یک‌به‌یک است؟

۱) $y=x^۲$ ۲) $y=|x|$ ۳) $y=x|x|$ ۴) $y=[x]$

۹۶۳- کدام تابع یک‌به‌یک نیست؟

۱) $y=\sqrt{x+۱}$ ۲) $y=۲x+۳$ ۳) $y=\frac{۱}{x-۱}$ ۴) $y=x-[x]$

۹۶۴- تابع $f(x)=x^۲-۶x$ روی کدام بازه یک‌به‌یک است؟

۱) $[۲,+\infty)$ ۲) $[۳,+\infty)$ ۳) $(-\infty,۴]$ ۴) $(-\infty,۶]$

۹۶۵- تابع $f(x)=|۲x-۴|+|۸-۴x|$ روی کدام بازه یک‌به‌یک نیست؟

۱) $[۲,۴]$ ۲) $(۲,+\infty)$ ۳) $(۴,+\infty)$ ۴) $[۱,۴]$

سطح ۲

۹۶۶- کدام تابع یک‌به‌یک است؟

۱) $y=x^2-2x$ ۲) $y=1-|x|$ ۳) $y=[x]-x$ ۴) $y=\sqrt{\sqrt{x}-1}$

۹۶۷- کدام تابع یک‌به‌یک نیست؟

۱) $y=x-\sqrt{x}$ ۲) $y=x+\sqrt{x}$ ۳) $y=x\sqrt{x}$ ۴) $y=\frac{x}{\sqrt{x}}$

۹۶۸- کدام تابع یک‌به‌یک است؟

۱) $f(x)=\frac{x}{|x|}$ ۲) $f(x)=\frac{x^2}{|x|}$ ۳) $f(x)=x|x|$ ۴) $f(x)=x^2|x|$

۹۶۹- کدام تابع یک‌به‌یک است؟

۱) $f(x)=x+|x|$ ۲) $f(x)=x-|x|$ ۳) $f(x)=2x+|x|$ ۴) $f(x)=x+2|x|$

۹۷۰- کدام تابع یک‌به‌یک است؟

۱) $f(x)=x^2, x\leq 1$ ۲) $f(x)=-x^2, x\geq -1$ ۳) $f(x)=1-x^2, x\leq 0$ ۴) $f(x)=x-x^2, x\geq 0$

۹۷۱- کدام تابع یک‌به‌یک است؟

۱) $f(x)=x^2+2x$ ۲) $f(x)=2x-x^2$ ۳) $f(x)=(x-3)(|x+1|+1)$ ۴) $f(x)=\frac{x|x^2-1|}{x^2-1}$

۹۷۲- کدام تابع یک‌به‌یک است؟

۱) $f(x)=x^3+x+1$ ۲) $f(x)=x^3-x$ ۳) $f(x)=x^3+x^2|x|$ ۴) $f(x)=x^3-2x^2$

۹۷۳- تابع $f(x)=-x^2+3x+2$ روی بازهٔ $[-1,a]$ یک‌به‌یک است. حداکثر مقدار ممکن a کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۹۷۴- تابع $f(x)=x^2+4x-1$ با دامنهٔ $(-\infty,k]$ یک‌به‌یک است. حداکثر مقدار ممکن k کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲− ۳) ۴ ۴) ۴−

۹۷۵- تابع $f(x)=-x^2+kx$ با دامنهٔ $(-\infty,3]$ یک‌به‌یک است. حداقل مقدار ممکن k کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۳− ۳) ۶ ۴) ۶−

۹۷۶- تابع $f(x)=\frac{x+k}{kx+1}$ یک‌به‌یک است. k کدام عدد نمی‌تواند باشد؟

۱) ۱− ۲) ۲ ۳) ۲− ۴) صفر

۹۷۷- اگر تابع $f(x)=\frac{ax+3}{x-2}$ یک‌به‌یک نباشد، مقدار $f(3)$ کدام است؟

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $-\frac{3}{4}$

۹۷۸- به ازای چند مقدار مختلف k تابع $f(x)=\frac{k^3x+1}{kx+4}$ یک‌به‌یک نیست؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۷۹- کدام تابع یک‌به‌یک است؟

۱) $f(x)=\begin{cases} x+2 & x\geq 0 \\ x+3 & x<0 \end{cases}$ ۲) $f(x)=\begin{cases} x+1 & x\geq 0 \\ 2-x & x<0 \end{cases}$ ۳) $f(x)=\begin{cases} x-2 & x\geq 0 \\ 1-x & x<0 \end{cases}$ ۴) $f(x)=\begin{cases} 1-x & x\geq 0 \\ 2-x & x<0 \end{cases}$

۹۸۰- تابع $f(x)=|x-1|-|x-3|$ روی بازهٔ $[a,b]$ یک‌به‌یک است. حداکثر مقدار ممکن $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۸۱- کدام تابع یک‌به‌یک است؟

۱) $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & x<0 \\ x^2+1 & x\geq 0 \end{cases}$ ۲) $f(x)=\begin{cases} 1-x^2 & x<0 \\ x^2+1 & x\geq 0 \end{cases}$ ۳) $f(x)=\begin{cases} 1-x^2 & x<0 \\ x^2 & x\geq 0 \end{cases}$ ۴) $f(x)=\begin{cases} -x^2 & x<0 \\ x^2-1 & x\geq 0 \end{cases}$

۹۸۲- تابع $f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{x}{|x|} & x\neq 0 \\ k & x=0 \end{cases}$ یک‌به‌یک است. حدود k کدام است؟

۱) $-1\leq k\leq 1$
۲) $-2<k<2$
۳) $-\frac{1}{2}<k<\frac{1}{2}$
۴) $-\frac{3}{2}<k<\frac{3}{2}$

۹۸۳- اگر تابع $f(x)=\begin{cases} 2x+4 & x\geq 1 \\ 3x+k & x<1 \end{cases}$ یک‌به‌یک باشد، حداکثر مقدار ممکن k کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۹۸۴- اگر تابع $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x\geq 1 \\ 2x+k & x<1 \end{cases}$ یک‌به‌یک باشد، حدود k کدام است؟

۱) $k>1$
۲) $k\leq 1$
۳) $k>0$
۴) $k\leq 0$

۹۸۵- تابع $f(x)=\begin{cases} 1-\sqrt{x} & x>0 \\ 2k-x & x\leq 0 \end{cases}$ یک‌به‌یک است. حدود k کدام است؟

۱) $k\geq \frac{1}{2}$
۲) $k\leq \frac{1}{2}$
۳) $k\geq 1$
۴) $k\leq 1$

۹۸۶- تابع $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x+1} & -1\leq x<3 \\ k+\sqrt{x} & x\geq 3 \end{cases}$ یک‌به‌یک است. حداقل مقدار ممکن k کدام است؟

۱) $2-\sqrt{3}$
۲) $1+\sqrt{3}$
۳) ۲
۴) $\sqrt{3}-1$

۹۸۷- تابع $f(x)=\begin{cases} x+m & x\leq 3 \\ mx+2 & x>3 \end{cases}$ یک‌به‌یک است. مجموعهٔ مقدارهای m کدام است؟

۱) $(0,\frac{1}{2}]$
۲) $[\frac{1}{2},1)$
۳) $[\frac{1}{2},+\infty)$
۴) $\mathbb{R}$

سطح ۳

۹۸۸- اگر f تابعی یک‌به‌یک با دامنهٔ $\mathbb{R}$ باشد، مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $f(x^3+1)-f(x^2+1)=0$ چند عضو دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۹۸۹- اگر f تابعی یک‌به‌یک باشد، معادلهٔ $f(x^4+1)-f(2x^2)=0$ چند جواب دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۹۹۰- کدام تابع یک‌به‌یک است؟

۱) $f(x)=\begin{cases} x & |x|\leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & |x|>1 \end{cases}$
۲) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & |x|\leq 1 \\ -\dfrac{1}{x} & |x|>1 \end{cases}$
۳) $f(x)=\begin{cases} x^2 & |x|\leq 1 \\ |x| & |x|>1 \end{cases}$
۴) $f(x)=\begin{cases} x^2 & |x|\leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & |x|>1 \end{cases}$

۹۹۱- کدام تابع یک‌به‌یک است؟

۱) $f(x)=\begin{cases} x^2-2x & x\geq 1 \\ -x^2+2x & x<1 \end{cases}$
۲) $f(x)=\begin{cases} x^2-2x & x\geq 2 \\ -x^2+2x & x\leq 0 \end{cases}$
۳) $f(x)=\begin{cases} x^2-2x & x\geq 1 \\ -x^2+2x & x\leq -1 \end{cases}$
۴) $f(x)=\begin{cases} x^2-2x & x\leq 0 \\ -x^2+2x & x\geq 2 \end{cases}$

۹۹۲- تابع $f(x)=|x^2-4|-x^2+4x$ روی بازهٔ $(-\infty,a]$ یک‌به‌یک است. حداکثر مقدار a کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) -2
۴) ۴

۹۹۳- تابع $f(x)=\begin{cases} 2x & x>2 \\ mx+1 & -1\leq x\leq 2 \\ x & x<-1 \end{cases}$ یک‌به‌یک است. مجموعهٔ مقادیر m کدام است؟

۱) $(0,1)$
۲) $[-\frac{3}{2},0)$
۳) $[-1,\frac{3}{2}]-\{0\}$
۴) $(-3,2)-\{0\}$

درس دوم / بخش دوم: تابع وارون

وارون تابع

رابطه‌ای که از عوض کردن جای دو مؤلفهٔ هر زوج مرتب تابع f به‌دست می‌آید، وارون تابع f نامیده می‌شود.

مثال: اگـر $f=\{(۱,۲),(۳,۴),(۷,۲)\}$، آن‌گاه وارون تابـع f برابر $\{(۲,۱),(۴,۳),(۲,۷)\}$ اسـت. توجـه کنید که وارون تابـع f خودش تابع نیست، زیرا زوج‌های مرتب $(۲,۱)$ و $(۲,۷)$ با مؤلفه‌های اول برابر و مؤلفه‌های دوم نابرابر عضو این رابطه هستند.

تابع وارون

اگر وارون تابع f خودش تابع باشد، آن را تابع وارون تابع f می‌نامیم و با $f^{-۱}$ نشان می‌دهیم. توجه کنید که

$$f^{-۱}=\{(y,x)|(x,y)\in f\}$$

مثال: اگر $f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۴)\}$، آن‌گاه وارون تابع f برابر با $\{(۲,۱),(۳,۲),(۴,۳)\}$ است، که خودش تابع است، پس

$$f^{-۱}=\{(۲,۱),(۳,۲),(۴,۳)\}$$

تست ۱

اگر $f=\{(۱,۲),(۳,۴),(۵,۳),(۶,۱)\}$، مقدار $f^{-۱}(۱)-f^{-۱}(۳)$ کدام است؟

۱) ۱ **۲)** -۱ **۳)** ۲ **۴)** -۲

راه‌حل توجه کنید که $f^{-۱}=\{(۲,۱),(۴,۳),(۳,۵),(۱,۶)\}$، بنابراین $f^{-۱}(۱)-f^{-۱}(۳)=۶-۵=۱$.

تست ۲

اگر $f=\{(۱,۲),(۲,۵),(۰,۳),(۴,-۱)\}$ و $g=\{(۲,۳),(-۱,۴),(۴,۱),(۳,۰)\}$، مقدار $g(f^{-۱}(۵))$ کدام است؟

۱) ۱ **۲)** ۳ **۳)** ۴ **۴)** صفر

راه‌حل تابع $f^{-۱}$ را پیدا می‌کنیم: $f^{-۱}=\{(۲,۱),(۵,۲),(۳,۰),(-۱,۴)\}$. در نتیجه $g(f^{-۱}(۵))=g(۲)=۳$.

تابع وارون‌پذیر

اگر وارون تابع f خودش تابع باشد، می‌گوییم تابع f وارون‌پذیر است.

شرط وارون‌پذیری تابع

تابع f فقط وقتی وارون‌پذیر است که یک‌به‌یک باشد.

تست ۳

کدام تابع وارون‌پذیر است؟

۱) $\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۲)\}$ **۲)** $\{(۴,۱),(۳,۲),(-۲,۱)\}$ **۳)** $\{(۱,۳),(۲,۴),(۳,۲)\}$ **۴)** $\{(۱,-۱),(-۱,۱),(۳,-۱)\}$

راه‌حل تابع گزینهٔ (۳) یک‌به‌یک است، بنابراین وارون‌پذیر است. تابع گزینه‌های دیگر یک‌به‌یک نیستند، پس وارون‌پذیر نیستند.

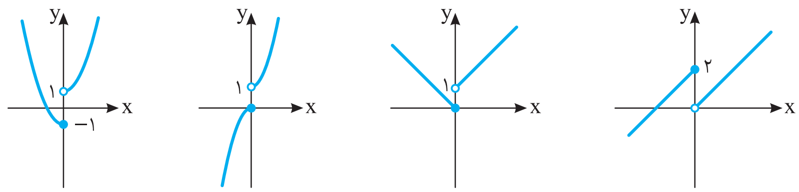
تست ۴

کدام تابع وارون‌پذیر است؟

۱) $f(x)=\begin{cases} x+۲ & x\leq ۰ \\ x & x>۰ \end{cases}$ **۲)** $f(x)=\begin{cases} -x & x\leq ۰ \\ x+۱ & x>۰ \end{cases}$ **۳)** $f(x)=\begin{cases} -x^{۲} & x\leq ۰ \\ x^{۲}+۱ & x>۰ \end{cases}$ **۴)** $f(x)=\begin{cases} x^{۲}-۱ & x\leq ۰ \\ x^{۲}+۱ & x>۰ \end{cases}$

راه‌حل

نمودارهای تابع‌های گزینه‌ها به شکل‌های زیر است



گزینهٔ (۱) گزینهٔ (۲) گزینهٔ (۳) گزینهٔ (۴)

از روی این نمودارها معلوم است که فقط تابع گزینهٔ (۳) یک‌به‌یک است، پس وارون‌پذیر است.

نقاط متناظر توابع f و $f^{-۱}$

فرض کنید تابع f وارون‌پذیر باشد.

- **اگر** $f(a)=b$، **آن‌گاه** $f^{-۱}(b)=a$.
- **اگر نقطهٔ** (a,b) **روی نمودار تابع f باشد، آن‌گاه نقطهٔ** (b,a) **روی نمودار تابع** $f^{-۱}$ **است.**

تست ۵

اگر $f=\{(۳,۴),(۴,۵),(-۱,۷),(۷,۳)\}$ **و** $f^{-۱}(f^{-۱}(a))=۳$، **مقدار a کدام است؟**

۱) ۳ **۲)** ۴ **۳)** ۵ **۴)** ۷

راه‌حل

اگر فرض کنیم $f^{-۱}(a)=b$، تساوی داده شده به‌صورت $f^{-۱}(b)=۳$ درمی‌آید. پس $f(۳)=b$ و در نتیجه $b=۴$. بنابراین

$$f^{-۱}(a)=۴\Rightarrow f(۴)=a\Rightarrow a=۵$$

تست ۶

اگر $f(x)=x^{۳}+x$، **مقدار** $f(۱)+f^{-۱}(۲)$ **کدام است؟**

۱) ۲ **۲)** ۳ **۳)** ۴ **۴)** ۵

راه‌حل

توجه کنید که $f(۱)=۲$، پس $f^{-۱}(۲)=۱$. به این ترتیب، $f(۱)+f^{-۱}(۲)=۳$.

تست ۷

اگر نمودار تابع وارون تابع $f(x)=x^{۳}+۲x+۲m$ **از نقطهٔ** $(m,۱)$ **عبور کند، مقدار** $f^{-۱}(-۶)$ **کدام است؟**

۱) صفر **۲)** ۱ **۳)** -۳ **۴)** -۳۷

راه‌حل

چون نمودار تابع $f^{-۱}$ از $(m,۱)$ عبور می‌کند، پس

$$f^{-۱}(m)=۱\Rightarrow f(۱)=m\Rightarrow ۱+۲+۲m=m\Rightarrow m=-۳\Rightarrow f(x)=x^{۳}+۲x-۶$$

فرض کنید $f^{-۱}(-۶)=a$. در این صورت

$$f(a)=-۶\Rightarrow a^{۳}+۲a-۶=-۶\Rightarrow a^{۳}+۲a=۰\Rightarrow a(a^{۲}+۲)=۰\Rightarrow a=۰\Rightarrow f^{-۱}(-۶)=۰$$

دامنه و برد تابع وارون

فرض کنید تابع f وارون‌پذیر باشد. در این صورت $D_{f^{-۱}}=R_f$ **و** $R_{f^{-۱}}=D_f$.

تست ۸

برد تابع وارون تابع $f(x)=x+\sqrt{x^{۲}+۱}$ **کدام است؟**

۱) $[۰,+\infty)$ **۲)** $(۱,+\infty)$ **۳)** $[۱,+\infty)$ **۴)** $\mathbb{R}$

راه‌حل

توجه کنید برد تابع $f^{-۱}$ برابر با دامنهٔ تابع f است. از طرف دیگر، $D_f=\{x|x^{۲}+۱\geq ۰\}=\mathbb{R}$. بنابراین $R_{f^{-۱}}=D_f=\mathbb{R}$.

تست ۹

اگر $f(x)=۲-۳x$ و برد تابع f بازهٔ $[-۱,۲]$ باشد، برد تابع $f^{-۱}$ کدام است؟

۱) $[۰,۱]$ ۲) $[-۱,۲]$ ۳) $[-\frac{۱}{۲},۱]$ ۴) $[-۱,۰]$

راه‌حل برد تابع $f^{-۱}$ با دامنهٔ تابع f برابر است. بنابراین کافی است دامنهٔ تابع f را حساب کنیم. برد تابع f بازهٔ $[-۱,۲]$ است، یعنی $-۱\leq f(x)\leq ۲$. پس

$$-۱\leq ۲-۳x\leq ۲\Rightarrow -۳\leq -۳x\leq ۰\Rightarrow ۰\leq x\leq ۱$$

یعنی دامنهٔ تابع f بازهٔ $[۰,۱]$ است و در نتیجه $R_{f^{-۱}}=[۰,۱]$.

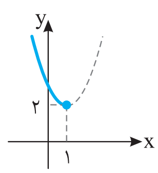
تست ۱۰

اگر $D_f=(-\infty,۱]$ و $f(x)=x^۲-۲x+۳$، دامنهٔ تابع $f^{-۱}$ کدام است؟

۱) $[۱,+\infty)$ ۲) $[۲,+\infty)$ ۳) $(-\infty,۱]$ ۴) $(-\infty,۲]$

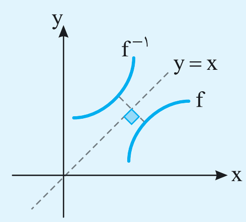
راه‌حل دامنهٔ تابع $f^{-۱}$ برابر با برد تابع f است. مطابق شکل مقابل برد تابع f برابر است با $[۲,+\infty)$. بنابراین

$$D_{f^{-۱}}=R_f=[۲,+\infty)$$



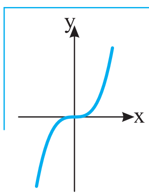
رابطهٔ نمودارهای توابع f و $f^{-۱}$

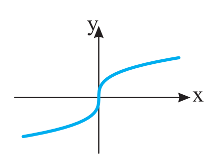
فرض کنید تابع f وارون‌پذیر باشد. در این صورت نمودار تابع $f^{-۱}$ قرینهٔ نمودار تابع f نسبت به خط $y=x$ است.

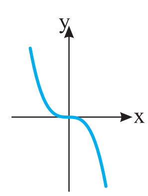


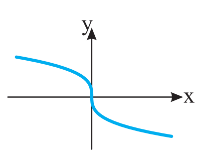
تست ۱۱

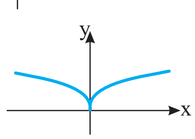
نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $f^{-۱}$ کدام است؟



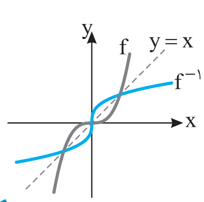
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

راه‌حل باید نمودار تابع f را نسبت به خط $y=x$ قرینه کنیم، که نمودار گزینهٔ (۱) به‌دست می‌آید.



نقاط مشترک نمودارهای توابع f و $f^{-۱}$

فرض کنید تابع f وارون‌پذیر باشد. اگر نمودارهای تابع‌های f و $f^{-۱}$ در نقطهٔ (a,b) مشترک باشند، آن‌گاه $f(a)=b$ و $f(b)=a$.

توجه کنید که در این صورت نقطهٔ (b,a) نیز یک نقطهٔ مشترک نمودارهای این دو تابع است.

تست ۱۲ نمودار تابع $f(x)=a+bx^{۳}$ نمودار تابع وارون خود را در نقطهٔ $(۱,۰)$ قطع می‌کند. مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) -۳

راه‌حل نقطهٔ $(۱,۰)$ روی نمودار هر دو تابع f و $f^{-۱}$ است، پس

$$f(۱)=۰\Rightarrow a+b=۰\Rightarrow a=-b\ ,\quad f^{-۱}(۱)=۰\Rightarrow f(۰)=۱\Rightarrow a=۱$$

بنابراین $b=-۱$ و $a-b=۲$.

پیدا کردن ضابطهٔ تابع وارون

برای پیدا کردن ضابطهٔ تابع وارون تابع وارون‌پذیر f، از تساوی $y=f(x)$، x را برحسب y پیدا می‌کنیم و سپس با تبدیل y به x، ضابطهٔ $f^{-۱}$ را به‌دست می‌آوریم.

مثال: برای پیدا کردن ضابطهٔ تابع وارون تابع $f(x)=۲x-۳$، ابتدا از تساوی $y=۲x-۳$ استفاده می‌کنیم و x را برحسب y پیدا می‌کنیم:

$$y=۲x-۳\Rightarrow ۲x=y+۳\Rightarrow x=\frac{y+۳}{۲}$$

اکنون به جای x قرار می‌دهیم y و به جای y قرار می‌دهیم x:

$$y=\frac{x+۳}{۲}$$

بنابراین ضابطهٔ تابع وارون تابع f به‌صورت $f^{-۱}(x)=\frac{x+۳}{۲}$ است.

تست ۱۳ تابع وارون تابع $f(x)=۳-۴x$ به‌صورت $f^{-۱}(x)=ax+b$ است. مقدار $\frac{b}{a}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) -۳ ۳) ۳ ۴) $-\frac{۱}{۳}$

راه‌حل ابتدا از تساوی $y=۳-۴x$، x را برحسب y به‌دست می‌آوریم

$$۴x=۳-y\Rightarrow x=\frac{۳-y}{۴}=\frac{۳}{۴}-\frac{۱}{۴}y$$

بنابراین تابع وارون تابع f به‌صورت $f^{-۱}(x)=-\frac{۱}{۴}x+\frac{۳}{۴}$ است. پس $a=-\frac{۱}{۴}$ و $b=\frac{۳}{۴}$. در نتیجه $\frac{b}{a}=-۳$.

تست ۱۴ اگر $f(x)=x+۱$ و $D_f=[۰,۱]$، معادلهٔ $f^{-۱}(x)+x^{۲}=۰$ در بازه‌ای که تابع $f^{-۱}$ تعریف می‌شود، چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

راه‌حل ابتدا توجه کنید که برد تابع f بازهٔ $[۱,۲]$ است. پس تابع $f^{-۱}$ به‌صورت زیر است

$$y=x+۱\Rightarrow x=y-۱\Rightarrow f^{-۱}(x)=x-۱\ ,\quad D_{f^{-۱}}=[۱,۲]$$

اکنون معادلهٔ $f^{-۱}(x)+x^{۲}=۰$ را بررسی می‌کنیم

$$x^{۲}+x-۱=۰\Rightarrow x=\frac{-۱\pm\sqrt{۵}}{۲}$$

جواب‌های این معادله در صورتی قابل قبول هستند که در دامنهٔ تابع $f^{-۱}$ قرار داشته باشند. هیچ‌کدام از اعداد $\frac{-۱-\sqrt{۵}}{۲}$ و $\frac{-۱+\sqrt{۵}}{۲}$ در بازهٔ $[۱,۲]$ قرار ندارند، پس معادلهٔ مورد نظر جواب ندارد.

تست ۱۵

تابع f با ضابطهٔ $f(x)=|x|-|x-۲|$ و دامنهٔ $[a,b]$ وارون‌پذیر است. ضابطهٔ تابع f^{-1} کدام است؟

۱) $f^{-1}(x)=\frac{x-۲}{۲}$ ۲) $f^{-1}(x)=\frac{x+۲}{۲}$ ۳) $f^{-1}(x)=\frac{۲x+۱}{۳}$ ۴) $f^{-1}(x)=\frac{۲x-۱}{۳}$

راه‌حل توجه کنید که

$$x<۰\Rightarrow f(x)=-x+x-۲=-۲\ ,\quad ۰\le x\le ۲\Rightarrow f(x)=x+x-۲=۲x-۲\ ,\quad x>۲\Rightarrow f(x)=x-x+۲=۲$$

بنابراین اگر دامنهٔ تابع f بازهٔ $[۰,۲]$ یا هر زیرمجموعه‌ای از این بازه باشد، آن‌گاه تابع f وارون‌پذیر است و وارون آن به‌صورت زیر است

$$y=۲x-۲\Rightarrow x=\frac{y+۲}{۲}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+۲}{۲}$$

تست ۱۶

ضابطهٔ تابع وارون تابع $f(x)=۲-\sqrt{x-۱}$ کدام است؟

۱) $f^{-1}(x)=x^۲-۴x+۵\ ,\ x\le ۲$ ۲) $f^{-1}(x)=-x^۲+۴x-۵\ ,\ x\le ۲$

۳) $f^{-1}(x)=-x^۲+۴x-۵\ ,\ x\ge ۱$ ۴) $f^{-1}(x)=x^۲-۴x+۵\ ,\ x\ge ۱$

راه‌حل x را برحسب y پیدا می‌کنیم:

$$y=۲-\sqrt{x-۱}\Rightarrow \sqrt{x-۱}=۲-y\xrightarrow{۲-y\ge ۰} x-۱=۴+y^۲-۴y\Rightarrow x=y^۲-۴y+۵$$

چون $۲-y\ge ۰$، پس $y\le ۲$، یعنی $R_f=(-\infty,۲]$ و در نتیجه

$$f^{-1}(x)=x^۲-۴x+۵\ ,\ D_{f^{-1}}=(-\infty,۲]$$

تست ۱۷

ضابطهٔ تابع وارون تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x^۲-۴x$ و دامنهٔ $(-\infty,۲)$ کدام است؟

۱) $f^{-1}(x)=۲-\sqrt{x+۴}$ ۲) $f^{-1}(x)=۲+\sqrt{x+۴}$ ۳) $f^{-1}(x)=۲-\sqrt{x-۴}$ ۴) $f^{-1}(x)=۲+\sqrt{x-۴}$

راه‌حل **راه‌حل اول** ضابطهٔ تابع وارون را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=x^۲-۴x\Rightarrow y=(x-۲)^۲-۴\Rightarrow (x-۲)^۲=y+۴\Rightarrow |x-۲|=\sqrt{y+۴}$$

چون $x<۲$، پس $x-۲<۰$. در نتیجه

$$-(x-۲)=\sqrt{y+۴}\Rightarrow x=۲-\sqrt{y+۴}\Rightarrow f^{-1}(x)=۲-\sqrt{x+۴}$$

راه‌حل دوم چون نقطهٔ $(۱,-۳)$ عضو تابع است، پس نقطهٔ $(-۳,۱)$ باید عضو تابع وارون باشد.

در گزینهٔ (۱)، $f^{-1}(-۳)=۱$ در گزینهٔ (۲)، $f^{-1}(-۳)=۳$

در گزینهٔ (۳)، $f^{-1}(-۳)$ تعریف نمی‌شود. در گزینهٔ (۴)، $f^{-1}(-۳)$ تعریف نمی‌شود.

پس ضابطهٔ f^{-1} در گزینهٔ (۱) آمده است.

تست ۱۸

اگر $f(x)=\frac{۲x-۱}{x+۳}$، معادلهٔ $f(x)=f^{-1}(x)$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

راه‌حل ضابطهٔ f^{-1} را پیدا می‌کنیم:

$$y=\frac{۲x-۱}{x+۳}\Rightarrow yx+۳y=۲x-۱\Rightarrow (y-۲)x=-۳y-۱\Rightarrow x=\frac{۳y+۱}{۲-y}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{۳x+۱}{۲-x}$$

اکنون معادلهٔ $f(x)=f^{-1}(x)$ را حل می‌کنیم:

$$\frac{۲x-۱}{x+۳}=\frac{۳x+۱}{۲-x}\Rightarrow ۴x-۲x^۲-۲+x=۳x^۲+x+۹x+۳\Rightarrow ۵x^۲+۵x+۵=۰\Rightarrow x^۲+x+۱=۰\ ,\ \Delta<۰$$

بنابراین معادله جواب ندارد.

تابع وارون تابع‌های چندضابطه‌ای

تابــع وارون تابع وارون‌پذیر $f(x)=\begin{cases} g(x) & x\in D_1 \\ h(x) & x\in D_2 \end{cases}$ به‌صورت $f^{-1}(x)=\begin{cases} g^{-1}(x) & x\in R_1 \\ h^{-1}(x) & x\in R_2 \end{cases}$ اسـت کـه R_1 برد تابع g با دامنهٔ D_1 و R_2 برد تابع h با دامنهٔ D_2 است.

تست ۱۹

ضابطهٔ تابع وارون تابع $f(x)=\begin{cases} 3x+4 & x\leq 1 \\ 2x+5 & x>1 \end{cases}$ کدام است؟

۱) $f^{-1}(x)=\begin{cases} \frac{x-4}{3} & x\leq 1 \\ \frac{x-5}{2} & x>1 \end{cases}$
۲) $f^{-1}(x)=\begin{cases} \frac{x-4}{3} & x\leq 7 \\ \frac{x-5}{2} & x>7 \end{cases}$
۳) $f^{-1}(x)=\begin{cases} \frac{x-5}{2} & x\leq 7 \\ \frac{x-4}{3} & x>7 \end{cases}$
۴) $f^{-1}(x)=\begin{cases} \frac{x-5}{2} & x\leq 1 \\ \frac{x-4}{3} & x>1 \end{cases}$

راه‌حل توجه کنید که اگر $g(x)=3x+4$ و $x\leq 1$، آن‌گاه $g(x)\leq 7$ و $g^{-1}(x)=\frac{x-4}{3}$. اگر $h(x)=2x+5$ و $x>1$، آن‌گاه $h(x)>7$ و $h^{-1}(x)=\frac{x-5}{2}$. بنابراین $f^{-1}(x)=\begin{cases} \frac{x-4}{3} & x\leq 7 \\ \frac{x-5}{2} & x>7 \end{cases}$.

نکته

تابع وارون برخی توابع با خود آن‌ها برابر است.

- تابع چندجمله‌ای درجهٔ اول $f(x)=ax+b$ در دو حالت زیر با تابع وارونش برابر است.

الف) $a=1$ و $b=0$ ب) $a=-1$

- تابع $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ در حالتی که وارون‌پذیر است و $a=-d$ با تابع وارونش برابر است.

تست ۲۰

اگر تابع‌های $f(x)=mx+m+2$ و f^{-1} برابر باشند، مقدار $f(m)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -1 ۴) -2

راه‌حل دو حالت ممکن است وجود داشته باشد.

حالت اول: $m=1$ و $m+2=0$، که امکان‌پذیر نیست.

حالت دوم: $m=-1$. در این صورت

$f(x)=-x+1 \Rightarrow f(m)=f(-1)=2$

نکته

تابع وارون‌پذیر f فقط وقتی با تابع وارونش برابر است که نمودار تابع f نسبت به خط $y=x$ متقارن باشد.

تست ۲۱

اگر نمودار تابع $f(x)=\frac{a^2x-16}{x-2a}$ نسبت به خط $y=x$ متقارن باشد، مقدار $f(a+4)$ کدام است؟

۱) -2 ۲) ۲ ۳) -4 ۴) ۴

راه‌حل باید تساوی $a^2=2a$ برقرار باشد تا تابع f با تابع وارونش برابر باشد. پس $a=0$ یا $a=2$.

اگر $a=0$، آن‌گاه $f(x)=\frac{-16}{x}$ و در نتیجه $f(a+4)=f(4)=-4$.

اگر $a=2$، آن‌گاه $f(x)=\frac{4x-16}{x-4}=4$ و تابع f وارون‌پذیر نیست.

تابع وارون

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

سطح ۱

۹۹۴- کدام تابع وارون‌پذیر است؟ کتاب درسی

۱) $\{(۱,۲),(۳,-۱),(۴,۲),(۵,۱)\}$ ۲) $\{(۳,۱),(۴,۲),(۵,۱),(۶,-۱)\}$

۳) $\{(۱,۲),(۳,۴),(۵,-۱),(۶,۷)\}$ ۴) $\{(۱,-۱),(-۱,۲),(۳,-۱),(۴,۲)\}$

۹۹۵- تابع وارون تابع $f=\{(۱,۲),(-۱,-۲),(۲,-۱),(-۲,۱)\}$ کدام است؟ کتاب درسی

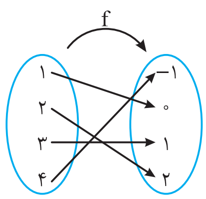
۱) $f^{-۱}=\{(۱,-۱),(۲,-۲),(-۱,۱),(-۲,۲)\}$ ۲) $f^{-۱}=\{(۲,۱),(-۲,-۱),(-۱,۲),(۱,-۲)\}$

۳) $f^{-۱}=\{(۱,\frac{۱}{۲}),(-۱,-\frac{۱}{۲}),(۲,-\frac{۱}{۲}),(-۲,\frac{۱}{۲})\}$ ۴) $f^{-۱}=\{(۱,\frac{۱}{۲}),(-۱,-\frac{۱}{۲}),(\frac{۱}{۲},-۱),(-\frac{۱}{۲},۱)\}$

۹۹۶- اگر $f=\{(-۶,۳),(-۱,-۱),(۳,-۶),(۴,-۳)\}$، مقدار $f^{-۱}(۳)+f^{-۱}(-۳)$ کدام است؟ کتاب درسی

۱) صفر ۲) -۱ ۳) -۲ ۴) -۳

۹۹۷- نمودار پیکانی تابع f در شکل روبه‌رو رسم شده است. مقدار $f^{-۱}(۰)+f^{-۱}(۲)+f(۳)$ کدام است؟



۱) ۲ ۲) ۳

۳) ۴ ۴) ۵

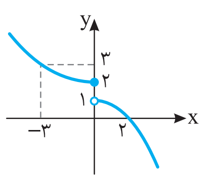
۹۹۸- اگر $f=\{(۱,۲),(۲,a),(۳,۱),(a+۳,۴)\}$ و $f^{-۱}(a)+f^{-۱}(۴)=۸$، مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) ۳

۹۹۹- اگر $f=\{(۳,۲),(۲,۳),(۴,-۱),(۵,۶)\}$، $g=\{(۲,۴),(۳,۲),(۱,۵),(۵,-۱)\}$ و $f^{-۱}(a)+g^{-۱}(۲)=۶$، مقدار $g(a)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) -۱

۱۰۰۰- نمودار تابع $f^{-۱}$ در شکل مقابل رسم شده است. اگر $f(۳m-۹)=۲$، مقدار m کدام است؟



۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$

۳) $\frac{۱۱}{۳}$ ۴) ۳

۱۰۰۱- نمودار تابع وارون تابع $f(x)=x+\sqrt{x-۱}$ از کدام نقطه می‌گذرد؟

۱) $(۱,۱۱)$ ۲) $(۱,۹)$ ۳) $(۹,۱۱)$ ۴) $(۱۱,۹)$

۱۰۰۲- اگر $f(x)=\frac{x}{x-۱}$، آن‌گاه $f^{-۱}(۳)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۵}{۲}$

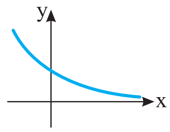
۱۰۰۳- اگر $f(x)=\begin{cases} x+۳ & x<۱ \\ ۳x+۱ & x\ge ۱ \end{cases}$، مقدار $f^{-۱}(۷)+f^{-۱}(-۱)$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

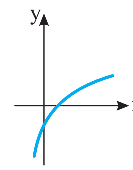
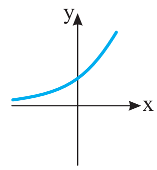
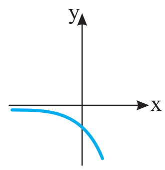
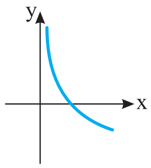
۱۰۰۴- اگر $f(x)=\frac{-a}{x-۳}+۲$ و $f^{-۱}(۴)=۵$، مقدار a کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۲ ۳) -۸ ۴) -۶

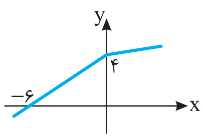
کتاب درسی



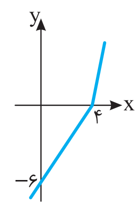
۱۰۰۵- نمودار تابع f به شکل مقابل است. نمودار تابع f^{-1} کدام است؟

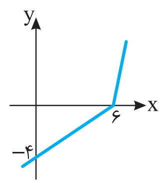
۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

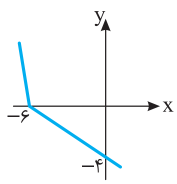
کتاب درسی

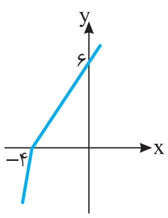


۱۰۰۶- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع وارون تابع f کدام است؟

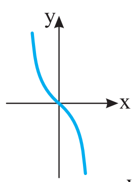
۱) 

۲) 

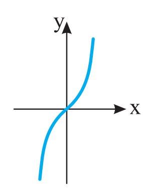
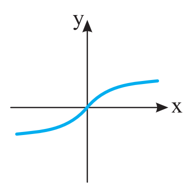
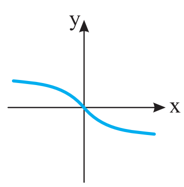
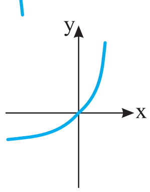
۳) 

۴) 

کتاب درسی



۱۰۰۷- نمودار تابع f^{-1} به شکل مقابل است. نمودار تابع f کدام است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۱۰۰۸- اگر نمودار تابع وارون‌پذیر f از ناحیه‌های دوم و چهارم صفحهٔ مختصات عبور کند، نمودار تابع f^{-1} از کدام ناحیه‌ها عبور می‌کند؟

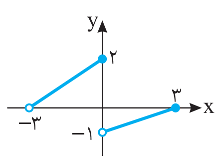
۱) اول و دوم ۲) دوم و چهارم ۳) اول و سوم ۴) سوم و چهارم

۱۰۰۹- نمودار تابع f در ناحیه‌های اول و دوم صفحهٔ مختصات قرار دارد. نمودار تابع f^{-1} در کدام ناحیه‌ها قرار دارد؟

۱) اول و دوم ۲) دوم و چهارم ۳) اول و چهارم ۴) دوم و سوم

۱۰۱۰- نمودار تابع f به شکل مقابل است. نمودار تابع f^{-1} در چند نقطه این نمودار را قطع می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲
۳) ۳ ۴) صفر



کتاب درسی

۱۰۱۱- اگر $f(x)=\frac{۱-۲x}{۵}$، آن‌گاه ضابطهٔ تابع وارون تابع f کدام است؟

۱) $f^{-1}(x)=\frac{-۵x-۱}{۲}$ ۲) $f^{-1}(x)=\frac{۵x-۱}{۲}$ ۳) $f^{-1}(x)=\frac{۱+۵x}{۲}$ ۴) $f^{-1}(x)=\frac{۱-۵x}{۲}$

کتاب درسی

۱۰۱۲- اگر $f^{-1}(x)=\frac{۳x+۲}{۴}$، آن‌گاه ضابطهٔ تابع f کدام است؟

۱) $f(x)=\frac{۲x+۴}{۳}$ ۲) $f(x)=\frac{۴x+۲}{۳}$ ۳) $f(x)=\frac{۴x-۲}{۳}$ ۴) $f(x)=۴x-۲$

۱۰۱۳- اگر $f(x)=۲x-۵$، جواب معادلهٔ $۳x-f^{-1}(x)=۱$ کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{۵}{۷}$ ۳) $\frac{۷}{۵}$ ۴) $-\frac{۵}{۳}$

سطح ۲

۱۰۱۴- کدام تابع وارون‌پذیر نیست؟

۱) $y=\sqrt{x+1}$ ۲) $y=1+\sqrt{x}$ ۳) $y=|\sqrt{x}|$ ۴) $y=\sqrt{|x|}$

۱۰۱۵- کدام تابع وارون‌پذیر است؟

۱) $f(x)=\begin{cases} x+1 & x\le 0 \\ x-1 & x>0 \end{cases}$ ۲) $f(x)=\begin{cases} -x-1 & x\le 0 \\ x+1 & x>0 \end{cases}$ ۳) $f(x)=\begin{cases} -x^2+1 & x\le 0 \\ x^2-1 & x>0 \end{cases}$ ۴) $f(x)=\begin{cases} -x^2-1 & x\le 0 \\ x^2+1 & x>0 \end{cases}$

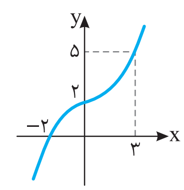
۱۰۱۶- اگر تابع $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & x>0 \\ 3x+k & x\le 0 \end{cases}$ **وارون‌پذیر باشد، حدود k کدام است؟**

۱) $k\le 0$ ۲) $k\ge 0$ ۳) $k\le 2$ ۴) $k\ge 2$

۱۰۱۷- کدام تابع وارون‌پذیر نیست؟

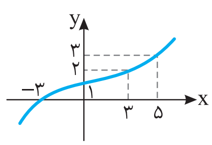
۱) $f(x)=x|x|$ ۲) $f(x)=2x-|x|$ ۳) $f(x)=2x+|x|$ ۴) $f(x)=x-2|x|$

۱۰۱۸- نمودار تابع $y=f(x+1)$ در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $\dfrac{f(-1)+f^{-1}(5)}{f(1)}$ کدام است؟



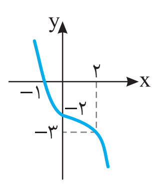
۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱/۵

۱۰۱۹- نمودار تابع $y=f(x-3)$ در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $\dfrac{f^{-1}(3)+f^{-1}(2)}{f^{-1}(0)+f(0)}$ کدام است؟



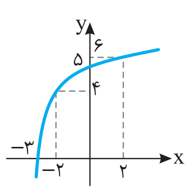
۱) -2 ۲) -1 ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۱۰۲۰- نمودار تابع $y=f(3x+1)$ در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $\dfrac{f(-2)+1}{f^{-1}(-2)+f^{-1}(-3)}$ کدام است؟



۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۱۰۲۱- نمودار تابع $y=1+f(1+2x)$ در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $\dfrac{f^{-1}(-1)+f(-3)}{f(1)-f^{-1}(5)}$ کدام است؟



۱) ۹ ۲) $\frac{15}{2}$ ۳) $\frac{10}{3}$ ۴) ۲

۱۰۲۲- اگر $f(x)=x^3+3x+1$، مقدار $f(-1)+f^{-1}(-3)$ کدام است؟

۱) -3 ۲) -4 ۳) -5 ۴) -6

۱۰۲۳- اگر نمودار تابع وارون تابع $f(x)=x^3+x+a$ از نقطهٔ $(3,2)$ عبور کند، مقدار $f(3)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱۰ ۳) ۱۹ ۴) ۲۳

۱۰۲۴- اگر $f(x)=x^3+6x^2+12x$، مقدار $f^{-1}(-8)$ کدام است؟

۱) -4 ۲) -3 ۳) -2 ۴) -1

۱۰۲۵- اگر $f(x)=x\sqrt{x-1}$، مقدار $f^{-1}(10)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۱۰

۱۰۲۶- اگر $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+۵}+۲}$، مقدار $f^{-۱}(۱)$ کدام است؟

۱) $\frac{-۱-\sqrt{۱۳}}{۲}$ ۲) $\frac{-۱-\sqrt{۱۷}}{۲}$ ۳) $\frac{-۱+\sqrt{۱۳}}{۲}$ ۴) $\frac{-۱+\sqrt{۱۷}}{۲}$

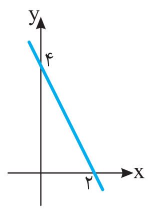
۱۰۲۷- اگر $f^{-۱}(\sqrt{x}+۱)=x^{۳}+۱$، مقدار $f(۶۵)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰۲۸- اگر $f(۲x+۱)=۲-mx$ و $f^{-۱}(۵)=۳$، مقدار m کدام است؟

۱) -۳ ۲) -۲ ۳) -۱ ۴) صفر

۱۰۲۹- نمودار تابع f در شکل مقابل آمده است. حاصل $\frac{f(۶)}{f^{-۱}(۶)}$ کدام است؟



۱) ۸
۲) ۴
۳) -۴
۴) -۸

۱۰۳۰- f تابعی خطی است، $f(۱)=۳$ و $f^{-۱}(۱۱)=۳$. مقدار $f(-۳)$ کدام است؟

۱) -۱۶ ۲) -۱۳ ۳) -۱۰ ۴) -۷

۱۰۳۱- f تابعی خطی است، $f^{-۱}(۲)=۱$ و $f^{-۱}(۳)=۲$، مقدار $f(۷)$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۱۰۳۲- اگر $f(x+۱)=۳x-۱$، مقدار $f^{-۱}(۲)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) -۱

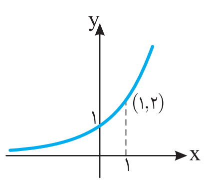
۱۰۳۳- اگر $f(x-۱)=mx+۶$ و $f^{-۱}(۱)=۴$، مقدار m کدام است؟

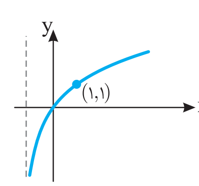
۱) -۱ ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) ۲

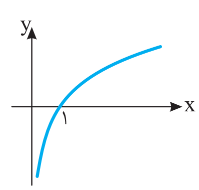
۱۰۳۴- اگر تابع‌های f و g وارون‌پذیر باشند، $f(۲x-۱)=g(۳x)-۱$ و $f^{-۱}(۲)=۳$، مقدار $g(۶)$ کدام است؟

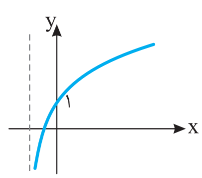
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

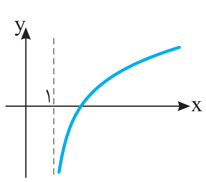
۱۰۳۵- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=f^{-۱}(x+۱)$ کدام است؟



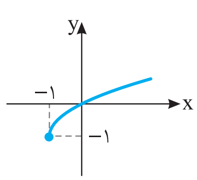
۱)


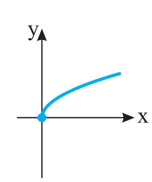
۲)


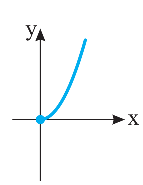
۳)


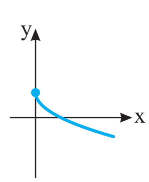
۴)


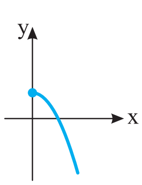
۱۰۳۶- اگر نمودار تابع f به شکل مقابل باشد، نمودار تابع $y=f^{-۱}(x-۱)+۱$ کدام است؟



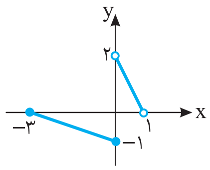
۱)


۲)


۳)


۴)


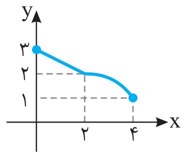
۱۰۳۷- نمودار تابع f به شکل مقابل است، معادلهٔ $f(x)=f^{-1}(x)$ چند جواب دارد؟



۱) ۱ ‏ ۲) ۲

۳) ۳ ‏ ۴) صفر

۱۰۳۸- نمودار تابع f به شکل مقابل است. مساحت ناحیهٔ محصور بین نمودار f، نمودار f^{-1} و محورهای مختصات کدام است؟



۱) ۷ ‏ ۲) ۶

۳) ۵ ‏ ۴) ۴

۱۰۳۹- اگر $f(x)=x+\sqrt{x^{۲}-x}$، برد تابع f^{-1} کدام است؟

۱) $[۰,۱]$ ‏ ۲) $\mathbb{R}-(۰,۱)$ ‏ ۳) $[-۱,۰]$ ‏ ۴) $\mathbb{R}-(-۱,۰)$

۱۰۴۰- اگر $D_f=(-\infty,\frac{۱}{۲}]$ و $f(x)=x^{۲}-x$، دامنهٔ تابع f^{-1} کدام است؟

۱) $[\frac{۱}{۲},+\infty)$ ‏ ۲) $[-\frac{۱}{۴},+\infty)$ ‏ ۳) $(-\infty,\frac{۱}{۲}]$ ‏ ۴) $(-\infty,-\frac{۱}{۴}]$

۱۰۴۱- اگر برد تابع $f(x)=\frac{۳x-۱}{۴}$ بازهٔ $[-۲,۳]$ باشد، برد تابع f^{-1} کدام است؟

۱) $[-\frac{۷}{۳},\frac{۱۳}{۳}]$ ‏ ۲) $[-۳,\frac{۱۱}{۳}]$ ‏ ۳) $[-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳}]$ ‏ ۴) $[-۳,۲]$

۱۰۴۲- اگر $f(x)=\sqrt{x+۱}$ و $D_f=[-۱,۲]$، دامنهٔ تابع f^{-1} کدام است؟

۱) $[۰,\sqrt{۳}]$ ‏ ۲) $[۰,۳]$ ‏ ۳) $[۱,۳]$ ‏ ۴) $[۲,۳]$

۱۰۴۳- اگر $f(x)=\frac{۱}{x+۱}$ و $D_f=[۰,۲]$، دامنهٔ تابع f^{-1} کدام است؟

۱) $[\frac{۱}{۹},۲]$ ‏ ۲) $[۱,۹]$ ‏ ۳) $[\frac{۱}{۳},۱]$ ‏ ۴) $[۰,\frac{۱}{۲}]$

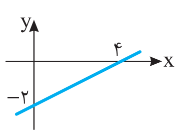
۱۰۴۴- خط $y=۳x-۴$ را نسبت به خط $y=x$ قرینه می‌کنیم. معادلهٔ خط جدید کدام است؟

۱) $y=۴x-۳$ ‏ ۲) $y=۴x+۳$ ‏ ۳) $y=\frac{x+۴}{۳}$ ‏ ۴) $y=\frac{x+۳}{۴}$

۱۰۴۵- خطوط $ax-۴y+b=۰$ و $۴x+(b+۱)y+۳=۰$ نسبت به خط $y=x$ قرینهٔ یکدیگرند. مقدار ab کدام است؟ $(b\neq -۱)$

۱) -۲ ‏ ۲) -۳ ‏ ۳) -۴ ‏ ۴) -۶

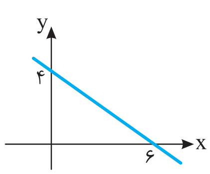
۱۰۴۶- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. ضابطهٔ تابع $y=f^{-1}(x-۱)$ کدام است؟



۱) $y=۲x+۲$ ‏ ۲) $y=۲x+۱$

۳) $y=۲x-۱$ ‏ ۴) $y=۲x-۲$

۱۰۴۷- نمودار تابع $y=f(۱+۲x)$ در شکل مقابل رسم شده است، ضابطهٔ تابع وارون تابع f کدام است؟



۱) $f^{-1}(x)=\frac{۱۳-x}{۲}$ ‏ ۲) $f^{-1}(x)=\frac{۱۲-x}{۳}$

۳) $f^{-1}(x)=\frac{۱۲-۲x}{۳}$ ‏ ۴) $f^{-1}(x)=۱۳-۳x$

۱۰۴۸- اگر $f(x)=a-۳x$ و مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $x^{۲}=f^{-1}(x)$ یک عضو داشته باشد. مقدار a کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۱۲}$ ‏ ۲) $\frac{۱}{۱۲}$ ‏ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ‏ ۴) $-\frac{۱}{۳}$

۱۰۴۹- اگر $f^{-1}(x)=۲x+k$ و معادلهٔ $x^{۲}=f(x)$ جواب نداشته باشد، حدود k کدام است؟

۱) $k>\frac{۱}{۴}$ ‏ ۲) $k>\frac{۱}{۸}$ ‏ ۳) $\frac{۱}{۸}<k<\frac{۱}{۴}$ ‏ ۴) $\frac{۱}{۴}<k<۱$

۱۰۵۰- اگر $f(x)=ax-1$ و معادلهٔ $x^2=f^{-1}(x)$ دو جواب داشته باشد، حدود a کدام است؟

۱) $a\in(-\frac{1}{4},+\infty)$ ۲) $a\in(\frac{1}{4},+\infty)$ ۳) $a\in(-\frac{1}{4},+\infty)-\{0\}$ ۴) $a\in(-\infty,-\frac{1}{4})$

۱۰۵۱- اگر $f(x)=kx-2$ و معادلهٔ $f(x)-x^2=kf^{-1}(x)$ دو جواب داشته باشد، حدود k کدام است؟

۱) $k<-3$ یا $k>5$ ۲) $-3<k<5$ ۳) $k<-1$ یا $k>3$ ۴) $3<k<5$

۱۰۵۲- اگر $f(x)=\begin{cases}7x+2 & x<1\\ 5x+4 & x\geq 1\end{cases}$، ضابطهٔ تابع f^{-1} کدام است؟

۱) $f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{x-2}{7} & x<9\\ \frac{x-4}{5} & x\geq 9\end{cases}$ ۲) $f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{x-2}{7} & x>1\\ \frac{x-4}{5} & x<1\end{cases}$ ۳) $f^{-1}(x)=\begin{cases}x-2 & x>9\\ \frac{x-4}{5} & x<9\end{cases}$ ۴) $f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{x-4}{5} & x<9\\ \frac{x-2}{7} & x\geq 9\end{cases}$

۱۰۵۳- اگر $f(x)=\sqrt{ax+b}$ و نمودار تابع‌های f و f^{-1} در نقطهٔ $(1,2)$ برخورد کنند، حاصل ab کدام است؟

۱) -21 ۲) 10 ۳) -10 ۴) 21

۱۰۵۴- اگر نمودارهای توابع $f(x)=ax^3+b$ و $y=f^{-1}(x)$ در نقطهٔ $(-1,-2)$ متقاطع باشند، مقدار ab کدام است؟

۱) $\frac{13}{49}$ ۲) $\frac{15}{49}$ ۳) $-\frac{15}{49}$ ۴) $-\frac{13}{49}$

۱۰۵۵- نمودار تابع $f(x)=-x^3+ax+b$ در نقطهٔ $(-1,\frac{1}{3})$ نمودار تابع وارونش را قطع می‌کند. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{9}$ ۲) $-\frac{10}{9}$ ۳) $-\frac{2}{3}$ ۴) $-\frac{13}{9}$

۱۰۵۶- اگر نمودار تابع $f(x)=ax+1$ نسبت به نیمساز ربع اول و ربع سوم متقارن باشد، مقدار $f(a)$ کدام است؟

۱) 1 ۲) -1 ۳) -2 ۴) 2

۱۰۵۷- اگر $f(x)=ax+b$، $a\neq 1$ و نمودار تابع‌های f و f^{-1} بر هم منطبق باشند، مجموعهٔ مقدارهای ممکن b کدام است؟

۱) $\{1\}$ ۲) $\{-1\}$ ۳) $\{0\}$ ۴) $\mathbb{R}$

۱۰۵۸- اگر f یک تابع خطی باشد و تساوی $2f^{-1}(x)+f^{-1}(x-1)=6x+4$ به ازای هر مقدار x برقرار باشد، مقدار $f(2)$ کدام است؟

۱) 1 ۲) -1 ۳) 2 ۴) صفر

سطح ۳

۱۰۵۹- تابع f با ضابطهٔ $f(x)=|x+2|+|x-1|$ و دامنهٔ $(-\infty,a]$ وارون‌پذیر است. ضابطهٔ تابع f^{-1} کدام است؟ (a حداکثر مقدار ممکن است.)

۱) $f^{-1}(x)=\frac{-x-1}{2}$ ۲) $f^{-1}(x)=\frac{x+1}{2}$ ۳) $f^{-1}(x)=\frac{x-1}{2}$ ۴) $f^{-1}(x)=\frac{x-1}{4}$

۱۰۶۰- ضابطهٔ تابع وارون تابع $f(x)=3-\sqrt{2-x}$ به‌صورت $f^{-1}(x)=-x^2+ax+b$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) 1 ۲) 2 ۳) -1 ۴) -2

۱۰۶۱- اگر $f(x)=\sqrt{2x-3}$، ضابطهٔ تابع f^{-1} کدام است؟

۱) $f^{-1}(x)=\frac{x^2-3}{2}$ ۲) $f^{-1}(x)=\frac{x^2+3}{2}$ ۳) $f^{-1}(x)=x^2-3$ ۴) $f^{-1}(x)=x^2+3$

۱۰۶۲- ضابطهٔ تابع وارون تابع $f(x)=\frac{2x-1}{x-3}$ کدام است؟

۱) $f^{-1}(x)=\frac{2x+1}{x+3}$ ۲) $f^{-1}(x)=\frac{2x-1}{x+3}$ ۳) $f^{-1}(x)=\frac{3x-1}{x-2}$ ۴) $f^{-1}(x)=\frac{3x+1}{x-2}$

۱۰۶۳- اگر $f^{-1}(x)=\frac{۲+x}{x-۲}$ ، حاصل $f(x+۱)-۲$ کدام است؟

۱) $\frac{x-۴}{x}$ ۲) $\frac{x+۴}{x}$ ۳) $\frac{۳}{x}$ ۴) $\frac{۴}{x}$

۱۰۶۴- ضابطهٔ تابع وارون تابع $f(x)=\frac{x+a}{x+b}$ به‌صورت $f^{-1}(x)=\frac{۲-۳x}{x-۱}$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۰۶۵- اگر $D_f=\mathbb{R}-\{m\}$ ، $R_f=\mathbb{R}-\{-\frac{۱}{۲}\}$ و $f^{-1}(x)=\frac{-۲x+۱}{۴x+n}$ ، مقدار mn کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۰۶۶- اگر $D_f=(-\infty,۰]$ و $f(x)=x^۲-۴$ ، ضابطهٔ تابع وارون تابع f کدام است؟

۱) $f^{-1}(x)=-\sqrt{x+۴}$ ۲) $f^{-1}(x)=\sqrt{x+۴}$ ۳) $f^{-1}(x)=-\sqrt{x+۲}$ ۴) $f^{-1}(x)=\sqrt{x+۲}$

۱۰۶۷- ضابطهٔ تابع وارون تابع $f(x)=-x^۲+۴x\ ,\ x<۲$ کدام است؟

۱) $f^{-1}(x)=۲+\sqrt{۴-x}$ ۲) $f^{-1}(x)=۲+\sqrt{۴+x}$ ۳) $f^{-1}(x)=۲-\sqrt{۴-x}$ ۴) $f^{-1}(x)=۲-\sqrt{۴+x}$

۱۰۶۸- ضابطهٔ تابع وارون تابع $f(x)=x^۲-۶x$ ، $x<۳$ به صورت $f^{-1}(x)=۳+a\sqrt{x+b}$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۱۰۶۹- ضابطهٔ تابع وارون تابع $f(x)=x+۲\sqrt{x}$ کدام است؟

۱) $f^{-1}(x)=x-۲\sqrt{x+۱}$ ۲) $f^{-1}(x)=x+۲-۲\sqrt{x+۱}$ ۳) $f^{-1}(x)=x+۲\sqrt{x+۱}$ ۴) $f^{-1}(x)=x-۲+۲\sqrt{x+۱}$

۱۰۷۰- اگر $f(x)=\begin{cases} x^۲+۲ & x>۰ \\ ۲+x & x\le ۰ \end{cases}$ ، ضابطهٔ وارون تابع f کدام است؟

۱) $f^{-1}(x)=\begin{cases} -\sqrt{x-۲} & x<۰ \\ ۲-x & x\ge ۰ \end{cases}$ ۲) $f^{-1}(x)=\begin{cases} \sqrt{x-۲} & x>۲ \\ ۲-x & x\le ۲ \end{cases}$ ۳) $f^{-1}(x)=\begin{cases} -\sqrt{x-۲} & x\le ۲ \\ ۲-x & x>۲ \end{cases}$ ۴) $f^{-1}(x)=\begin{cases} \sqrt{x-۲} & x>۲ \\ x-۲ & x\le ۲ \end{cases}$

۱۰۷۱- تابع f با ضابطهٔ $f(x)=|x+۲|-|x-۱|-۲x$ و دامنهٔ $\mathbb{R}-[a,b]$ وارون‌پذیر است. ضابطهٔ تابع وارون تابع f کدام است؟ ($b-a$ حداقل مقدار ممکن است.)

۱) $f^{-1}(x)=\begin{cases} \frac{۳-x}{۲} & x<۱ \\ \frac{-x-۳}{۲} & x>۱ \end{cases}$ ۲) $f^{-1}(x)=\begin{cases} \frac{۳-x}{۲} & x<۱ \\ \frac{۳-x}{۴} & x>۱ \end{cases}$ ۳) $f^{-1}(x)=\begin{cases} \frac{x+۳}{۴} & x<۱ \\ \frac{۳+x}{۲} & x>۱ \end{cases}$ ۴) $f^{-1}(x)=\begin{cases} \frac{-x-۳}{۲} & x<-۲ \\ \frac{۳-x}{۲} & x>۱ \end{cases}$

۱۰۷۲- تابع f با ضابطهٔ $f(x)=|x+۲|+۲|x|$ و دامنهٔ $(-\infty,a]$ وارون‌پذیر است. ضابطهٔ تابع f^{-1} کدام است؟ (a حداکثر مقدار ممکن است.)

۱) $f^{-1}(x)=\frac{-x-۲}{۳}, x\ge ۴$ ۲) $f^{-1}(x)=\begin{cases} -x+۲ & ۲\le x\le ۴ \\ \frac{-x-۲}{۳} & x\ge ۴ \end{cases}$ ۳) $f^{-1}(x)=\begin{cases} -x & -۲\le x\le ۰ \\ -x-۲ & x<-۲ \end{cases}$ ۴) $f^{-1}(x)=\begin{cases} -x-۲ & ۲\le x\le ۴ \\ \frac{-x-۲}{۳} & x\le ۲ \end{cases}$

۱۰۷۳- نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x-۱}$ در دو نقطه نمودار تابع وارونش را قطع می‌کند. حاصل‌ضرب طول‌های این نقطه‌ها کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

۱۰۷۴- اگر نمودار تابع $f(x)=\frac{ax+۳}{۲x-۴}$ نسبت به خط $y=x$ متقارن باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰۷۵- به ازای کدام مقدار k نمودار تابع $f(x)=k(۳x-۲|x|)$ بر نمودار تابع وارون آن منطبق است؟

۱) ± ۱ ۲) فقط -۱ ۳) $\pm\frac{۱}{\sqrt{۵}}$ ۴) فقط $-\frac{۱}{\sqrt{۵}}$

کنکور سراسری

۱۰۷۶- ضابطهٔ تابع وارون تابع $y=\frac{x}{۱+|x|}$ کدام است؟ تجربی ۹۱

۱) $y=\frac{x}{۱-|x|}, |x|<۱$
۲) $y=\frac{|x|-۱}{x}, |x|<۱$
۳) $y=\frac{x}{|x|-۱}, |x|>۱$
۴) $y=\frac{۱-|x|}{x}, |x|>۱$

۱۰۷۷- در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{|x|}{x}\sqrt{۱-x^۲}, x^۲\neq ۱$ و $f(۰)=۰$ ضابطهٔ تابع وارون آن برابر کدام است؟ ریاضی خارج ۹۱

۱) $f(x)$
۲) $-f(x)$
۳) $xf(x)$
۴) $-xf(x)$

۱۰۷۸- تابع $f(x)=x^۲+۲x+۱$ با دامنهٔ $(-۱,+\infty)$ مفروض است. نمودارهای دو تابع f و $f^{-۱}$ در چند نقطه متقاطع‌اند؟ ریاضی ۹۲

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) غیرمتقاطع

۱۰۷۹- تابع با ضابطهٔ $f(x)=۲x-|۴-۲x|$ در بازه‌ای وارون‌پذیر است. تابع $f^{-۱}$ در آن بازه کدام است؟ ریاضی خارج ۹۲

۱) $f^{-۱}(x)=\frac{۱}{۴}x+۱, x\geq ۴$
۲) $f^{-۱}(x)=\frac{۱}{۴}x-۱, x\leq ۴$
۳) $f^{-۱}(x)=\frac{۱}{۴}x-۱, x\geq ۴$
۴) $f^{-۱}(x)=\frac{۱}{۴}x+۱, x\leq ۴$

۱۰۸۰- اگر دو خط به معادله‌های $ax+by=۸$ و $۲x-۳y=b$ نسبت به نیمساز ربع‌های اول و سوم متقارن باشند، مقدار $a+b$ کدام است؟ ریاضی خارج ۹۳

۱) ± ۳
۲) ± ۲
۳) -۳ و ۲
۴) -۲ و ۳

۱۰۸۱- دو تابع $f=\{(۲,۵),(۶,۳),(۳,۷),(۴,۱),(۱,۹)\}$ و $g(x)=\frac{x}{x-۱}$ مفروض‌اند. اگر $f^{-۱}(g(۲a))=۶$، مقدار a کدام است؟ تجربی ۹۶

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۳}{۴}$
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) $\frac{۵}{۲}$

۱۰۸۲- ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=\begin{cases} -\sqrt{-x} & x<۰ \\ \sqrt{x} & x\geq ۰ \end{cases}$، کدام است؟ تجربی ۹۶

۱) $-x^۲$
۲) $x^۲$
۳) $x|x|$
۴) $-x|x|$

۱۰۸۳- نمودار تابع $f(x)=\frac{x+۴}{x-۲}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{۲\}$ نمودار وارون خود را با کدام طول قطع می‌کند؟ تجربی خارج ۹۶

۱) -۴ و -۱
۲) ۴ و -۱
۳) -۴ و ۱
۴) ۴ و ۱

۱۰۸۴- قرینهٔ خط به معادلهٔ $۳y-۲x=۴$ را نسبت به خط $y=x$، خط d می‌نامیم. عرض از مبدأ خط d کدام است؟ تجربی ۹۷

۱) -۲
۲) -۱
۳) ۱
۴) ۲

۱۰۸۵- کدام‌یک از تابع‌های زیر، یک‌به‌یک است؟ ریاضی ۹۷

۱) $f(x)=x+\sqrt{x}$
۲) $g(x)=x-\sqrt{x}$
۳) $h(x)=۲x+\frac{۱}{x}$
۴) $p(x)=\frac{x}{x^۲+۱}$

۱۰۸۶- اگر $f(x)=x^۲-۲x-۳; x\geq ۱$، نمودارهای دو تابع $f^{-۱}$ و $g(x)=\frac{x-۹}{۲}$ با کدام طول متقاطع هستند؟ تجربی ۹۸

۱) ۱۲
۲) ۱۵
۳) ۱۸
۴) ۲۱

۱۰۸۷- اگر $f(x)=\frac{۲}{۵}x-۴$ و $g(x)=x^۳+x$، مقدار $g^{-۱}(f^{-۱}(۸))$ کدام است؟ تجربی خارج ۹۸ با تغییر

۱) ۱/۵
۲) ۲
۳) ۲/۵
۴) ۳

۱۰۸۸- اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x)=x+\sqrt{x}$ باشد، مقدار $g(۶)+g(۱۲)$، کدام است؟ تجربی ۹۹

۱) ۱۰
۲) ۱۱
۳) ۱۳
۴) ۱۴

۱۰۸۹- تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x-\frac{۲}{x}$ در دامنهٔ $D_f=(-\infty,۰)$ را در نظر بگیرید. نمودار تابع $f^{-۱}$ نیمساز ناحیهٔ چهارم را با کدام طول، قطع می‌کند؟ تجربی ۹۹

۱) $\frac{۳}{۴}$
۲) ۱
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) ۲

۱۰۹۰- فرض کنید $g(x)$ وارون تابع $f(x)=x+2\sqrt{x}$ باشد. حاصل $g(3)+g(15)$، کدام است؟ تجربی خارج ۹۹

۱) ۱۲ ۲) ۱۱ ۳) ۱۰ ۴) ۸

۱۰۹۱- تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x-\frac{1}{2x}$ بر دامنهٔ $(0,+\infty)$ مفروض است. نمودار تابع f^{-1} نیمساز ناحیهٔ دوم را با کدام طول قطع می‌کند؟ تجربی خارج ۹۹

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $-\frac{3}{4}$ ۳) -1 ۴) $-\frac{1}{2}$

۱۰۹۲- اگر $f(x)=x+\sqrt{x}$ و $g(x)=\frac{9x+6}{1-x}$، مقدار $g^{-1}(f^{-1}(20))$، کدام است؟ ریاضی ۹۹ با تغییر

۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{3}{5}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۱۰۹۳- با فرض $f(x)=x^2-4x+9\,;x\geq 2$ و $g(x)=\frac{3-x}{2}$، حاصل $f^{-1}(g^{-1}(-9))$، کدام است؟ ریاضی خارج ۹۹ با تغییر

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۰۹۴- قرینهٔ نمودار تابع $y=2+\sqrt{x-1}$ را نسبت به خط $y=x$ رسم کرده و سپس نمودار حاصل را ۲ واحد در جهت مثبت محور xها و ۳ واحد در جهت منفی محور yها انتقال می‌دهیم و آن را $y=g(x)$ می‌نامیم. مقدار $g(4)$ کدام است؟ تجربی ۱۴۰۰

۱) ۳ ۲) -3 ۳) -2 ۴) -4

۱۰۹۵- نمودار منحنی $y=\sqrt{4-x}$ را k واحد در راستای قائم و $k-2$ واحد در جهت افقی چنان انتقال می‌دهیم که منحنی جدید وارون تابع خود را در نقطه‌ای با عرض ۱ قطع کند. سپس منحنی حاصل را ۱ واحد در راستای قائم به سمت پایین انتقال می‌دهیم. طول نقطهٔ برخورد منحنی به‌دست آمده با محور xها، کدام است؟ ریاضی ۱۴۰۰

۱) -4 ۲) -3 ۳) ۱ ۴) ۲

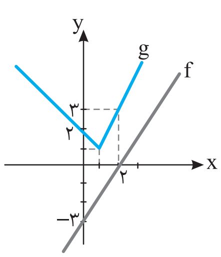
۱۰۹۶- وارون تابع $y=x^3-x+1$ از کدام نقطه عبور می‌کند؟ تجربی ۱۴۰۱

۱) $(-1,-2)$ ۲) $(\frac{5}{8},\frac{1}{2})$ ۳) $(1,2)$ ۴) $(-\frac{1}{2},-\frac{11}{8})$

۱۰۹۷- وارون تابع $y=-3x^3+2x-11$ از کدام نقطه عبور می‌کند؟ تجربی خارج ۱۴۰۱

۱) $(9,-2)$ ۲) $(2,-31)$ ۳) $(-1,10)$ ۴) $(-12,-1)$

۱۰۹۸- با توجه به نمودارهای f و g در شکل مقابل، حاصل $g(f^{-1}(-2))\times g(g(0))$ کدام است؟ تجربی خارج ۱۴۰۱ با تغییر



۱) ۶
۲) ۴
۳) -4
۴) -6

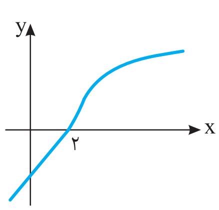
۱۰۹۹- اگر $f(x)=\frac{\sqrt{2x}}{3x-\sqrt{2}}$ باشد، حاصل $f(f(f(\sqrt{2})))$ کدام است؟ ریاضی ۱۴۰۱ با تغییر

۱) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{1}{2}$

۱۱۰۰- اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x)=1+x-2\sqrt{x},\ \ x\geq 1$ باشد، $g(g(1))$ کدام است؟ تجربی ۱۴۰۲ (نوبت اول) با تغییر

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۹ ۴) صفر

۱۱۰۱- اگر $f(x)=|\frac{1}{2}x-1|$ و شکل مقابل نمودار تابع $g(x)$ باشد، معادلهٔ $g(f(g(x+2)))=0$ چند ریشه دارد؟ ریاضی ۱۴۰۲ (نوبت اول) با تغییر



۱) ۱ ۲) ۲
۳) ۳ ۴) ۴

آزمون فصل سوم ۱

۱۲۳۷- چند عدد در دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{1}{x-\frac{1}{x}}$ قرار ندارند؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

۱۲۳۸- چند عدد نامنفی در دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}-x}$ قرار ندارند؟

۱) ۲   ۲) ۳   ۳) ۴   ۴) ۶

۱۲۳۹- اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{x^2+2x+2+m}$ مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد، کمترین مقدار ممکن m کدام است؟

۱) ۳   ۲) ۲   ۳) -1 ۴) -2

۱۲۴۰- مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $[x]-[x+2]+[x+4]=18$ کدام است؟

۱) $[17,18)$ ۲) $[16,18)$ ۳) $[16,17)$ ۴) $[15,17)$

۱۲۴۱- به ازای کدام مقدار k توابع f و g با ضابطه‌های $f(x)=\frac{k}{x}+\frac{1}{x+1}$ و $g(x)=\frac{-1}{x^2+x}$ مساوی‌اند؟

۱) ۱   ۲) -1 ۳) ۲   ۴) -2

۱۲۴۲- دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{\sqrt{[x]-1}}{\sqrt{3-[x]}}$ بازهٔ $[a,b)$ است. مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۲   ۲) ۳   ۳) ۱   ۴) ۴

۱۲۴۳- تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & x\geq 2\\ k-x & x<2\end{cases}$ یک‌به‌یک است. حدود k کدام است؟

۱) $k\geq 2$ ۲) $k\leq 3$ ۳) $k\geq\frac{5}{2}$ ۴) $k\geq 3$

۱۲۴۴- اگر دامنهٔ تابع f بازهٔ $[2,+\infty)$ باشد و $f(x)=x^2-4x+1$، دامنهٔ تابع f^{-1} کدام است؟

۱) $[-3,+\infty)$ ۲) $(-\infty,-3]$ ۳) $[3,+\infty)$ ۴) $(-\infty,3]$

۱۲۴۵- به ازای کدام مقدار k تابع $f(x)=\frac{kx-3}{x+k-2}$ با تابع وارونش مساوی است؟

۱) ۲   ۲) ۱   ۳) -2 ۴) -1

۱۲۴۶- اگر $f=\{(a+b,2),(2,-1),(-1,2),(-2,3)\}$، $g=\{(1,-1),(2,a-b),(3,1),(-3,4)\}$ و $f+g=\{(1,1),(2,1)\}$، مقدار ab کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $-\frac{3}{4}$

آزمون فصل سوم ۲

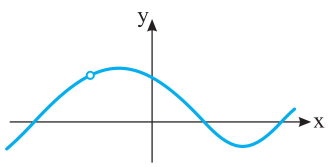
۱۲۴۷- حاصل‌ضرب اعدادی که در دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{1}{x^2-|x-1|}$ قرار ندارند، کدام است؟

۱) 1 ۲) 2 ۳) -1 ۴) -2

۱۲۴۸- دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{3-\sqrt{2x-1}}$ بازهٔ $[a,b]$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) $\frac{7}{2}$ ۲) $\frac{9}{2}$ ۳) $\frac{11}{2}$ ۴) $\frac{13}{2}$

۱۲۴۹- نمودار تابع f به شکل مقابل است. چند عدد در دامنهٔ تابع $y=\dfrac{1}{f(x)}$ قرار ندارند؟



۱) 1 ۲) 2

۳) 3 ۴) 4

۱۲۵۰- معادلهٔ $[x^2]+[x]=x+4$ چند جواب دارد؟

۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) 4

۱۲۵۱- چند عدد صحیح در دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{2[x]-[x]^2}$ قرار دارند؟

۱) 3 ۲) 2 ۳) 5 ۴) 4

۱۲۵۲- در کدام گزینه توابع f و g برابرند؟

۱) $f(x)=\sqrt{x}\sqrt{x+2}$ و $g(x)=\sqrt{x^2+2x}$ ۲) $f(x)=\dfrac{x^3-x}{x+1}$ و $g(x)=x^2-x$

۳) $f(x)=\sqrt{x}\sqrt{2-x}$ و $g(x)=\sqrt{2x-x^2}$ ۴) $f(x)=[2x]$ و $g(x)=2[x]$

۱۲۵۳- تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{kx+2}{x+k-1}$ یک‌به‌یک است. مقدار k کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) ± 2 ۲) $2,-1$ ۳) $-2,1$ ۴) ± 1

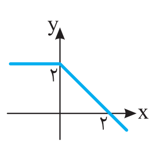
۱۲۵۴- اگر نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=(a+b)x^3+a-b$ نمودار تابع وارونش را در نقطهٔ $(1,0)$ قطع کند، مقدار $a+b$ کدام است؟

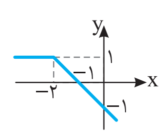
۱) 1 ۲) -1 ۳) 2 ۴) صفر

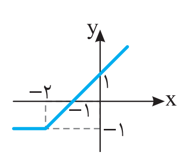
۱۲۵۵- اگر $f(x)=\begin{cases}-6x-5 & x>-2\\ 3-2x & x\leq -2\end{cases}$ و $f^{-1}(-3)+f^{-1}(a)=-3$، مقدار a کدام است؟

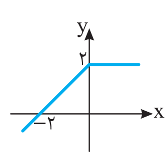
۱) $\frac{25}{3}$ ۲) 5 ۳) $\frac{25}{9}$ ۴) 15

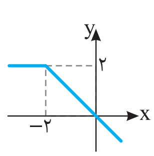
۱۲۵۶- نمودار تابع f در شکل روبه‌رو رسم شده است. نمودار تابع $y=1-f(x+2)$ کدام است؟



۱)


۲)


۳)


۴)


آزمون فصل سوم ۳

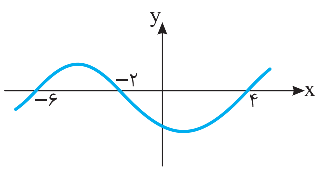
۱۲۵۷- اگر $x=۲$ در دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{۱}{x-\dfrac{a}{x+a}}$ نباشد، حاصل‌جمع مقادیر ممکن برای a کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۴ ۳) -۶ ۴) -۸

۱۲۵۸- چند عدد صحیح در دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt{۱۶-x^{۲}}}{|x+۱|-۲}$ وجود دارد؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۱۲۵۹- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. چند عدد صحیح در دامنهٔ تابع $g(x)=\dfrac{۱}{\sqrt{(-x-۴)f(x)}}$ قرار دارند؟



۱) ۶ ۲) ۵
۳) ۴ ۴) ۳

۱۲۶۰- معادلهٔ $x^{۲}+[x]=۴-[-x]$ چند جواب دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۱۲۶۱- اگر n عددی طبیعی باشد، مقدار $[\sqrt[۳]{n(n+۱)(n+۲)}]$ کدام است؟

۱) $۲n$ ۲) $n-۱$ ۳) n ۴) $n+۱$

۱۲۶۲- اگر توابع $f(x)=\dfrac{bx+۲}{x^{۲}+ax+۴}$ و $g(x)=\dfrac{c}{x+۲}$ برابر باشند، مقدار $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۱۲۶۳- دامنهٔ تابع f بازهٔ $[۲,+\infty)$ و ضابطهٔ آن $f(x)=۴x-x^{۲}$ است. ضابطهٔ $f^{-۱}$ کدام است؟

۱) $f^{-۱}(x)=\sqrt{۴-x}+۲$ ۲) $f^{-۱}(x)=-\sqrt{۴-x}+۲$ ۳) $f^{-۱}(x)=\sqrt{۴+x}-۲$ ۴) $f^{-}(x)=\sqrt{۴+x}+۲$

۱۲۶۴- ضابطهٔ تابع وارون تابع $f(x)=\begin{cases} ۲x+۳ & x\geq ۲ \\ ۳x-۲ & x<۲ \end{cases}$ کدام است؟

۱) $f^{-۱}(x)=\begin{cases} \dfrac{x+۳}{۲} & x\geq ۷ \\ \dfrac{x-۲}{۳} & x<۴ \end{cases}$ ۲) $f^{-۱}(x)=\begin{cases} \dfrac{x-۳}{۲} & x\geq ۲ \\ \dfrac{x+۲}{۳} & x<۲ \end{cases}$ ۳) $f^{-۱}(x)=\begin{cases} \dfrac{x+۳}{۲} & x\geq ۲ \\ \dfrac{x-۲}{۳} & x<۲ \end{cases}$ ۴) $f^{-۱}(x)=\begin{cases} \dfrac{x-۳}{۲} & x\geq ۷ \\ \dfrac{x+۲}{۳} & x<۴ \end{cases}$

۱۲۶۵- اگر $f=\{(۱,۱),(۲,۰),(-۲,۴),(-۱,۱),(۰,\frac{۲\sqrt{۳}}{۳})\}$ و $g(x)=\sqrt{۴-x^{۲}}$، برد تابع $\dfrac{g}{f}$ چند عضو دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۲۶۶- اگر $f(x)=\begin{cases} x+۲ & x<۰ \\ ۱-x & x\geq ۰ \end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases} ۱-x & x\leq ۱ \\ x+۲ & x>۱ \end{cases}$، ضابطهٔ تابع $f\times g$ کدام است؟

۱) $(f\times g)(x)=\begin{cases} -x^{۲}-x+۲ & x\leq ۰ \\ (x-۱)^{۲} & ۰<x<۱ \\ -x^{۲}-x+۲ & x\geq ۱ \end{cases}$ ۲) $(f\times g)(x)=\begin{cases} -x^{۲}-x+۲ & x<۰ \\ (x-۱)^{۲} & ۰\leq x\leq ۱ \\ -x^{۲}-x+۲ & x>۱ \end{cases}$

۳) $(f\times g)(x)=\begin{cases} -x^{۲}-x+۲ & x<۰ \\ (۱-x)^{۲} & x\geq ۰ \end{cases}$ ۴) $(f\times g)(x)=\begin{cases} -x^{۲}-x+۲ & x<۱ \\ (۱-x)^{۲} & x\geq ۱ \end{cases}$

۷۷۹ (۴) تساوی را به شکل مقابل بازنویسی می‌کنیم

$$2x+f(x)=4x\times f(x)-12$$

در نتیجه $(4x-1)\times f(x)=2x+12$ ، بنابراین $f(x)=\frac{2x+12}{4x-1}$.

۷۸۰ (۴) توجه کنید که $f(2x)=\frac{3(2x)-4}{2(2x)+1}=\frac{6x-4}{4x+1}$

بنابراین باید معادلهٔ $\frac{6x-4}{4x+1}=2$ را حل کنیم:

$$\frac{6x-4}{4x+1}=2\Rightarrow 6x-4=2(4x+1)\Rightarrow 6x-4=8x+2\Rightarrow -6=2x\Rightarrow x=-3$$

۷۸۱ (۲) از تساوی داده شده به‌دست می‌آید

$$f(a)=\frac{8a}{a^2+3}=-2$$

بنابراین $8a=-6-2a^2$ ، در نتیجه

$$2a^2+8a+6=0\Rightarrow a^2+4a+3=0\Rightarrow a=-1 \text{ یا } a=-3$$

بنابراین $f(a+2)$ یکی از دو عدد زیر است:

$$a=-1\Rightarrow f(a+2)=f(1)=\frac{8\times1}{1^2+3}=2$$

$$a=-3\Rightarrow f(a+2)=f(-1)=\frac{8\times(-1)}{(-1)^2+3}=-2$$

۷۸۲ (۱) اگر در تساوی $f(x-2)=\frac{3x}{2x+5}$ به جای x قرار دهیم $x+2$ ، به‌دست می‌آید

$$f(x+2-2)=\frac{3(x+2)}{2(x+2)+5}=\frac{3x+6}{2x+9}$$

اکنون اگر معادلهٔ $\frac{3x+6}{2x+9}=3$ را حل کنیم، به‌دست می‌آید $x=-7$.

۷۸۳ (۲) با جای‌گذاری عدد $-\frac{1}{a}$ به جای x در ضابطهٔ تابع به‌دست می‌آید

$$f(-\frac{1}{a})=\frac{-\frac{1}{a}+1}{-\frac{1}{a}-1}=\frac{\frac{-1+a}{a}}{\frac{-1-a}{a}}=\frac{a-1}{-a-1}=\frac{1-a}{a+1}$$

بنابراین $f(a)\times f(-\frac{1}{a})=\frac{a+1}{a-1}\times\frac{1-a}{a+1}=-1$

۷۸۴ (۲) مقدار x^4 را طوری پیدا می‌کنیم که $\frac{x^4-1}{x^4+2}=\frac{1}{4}$ ، یعنی

$$4x^4-4=x^4+2\Rightarrow 3x^4=6\Rightarrow x^4=2$$

بنابراین $x^8=4$ و $x^{16}=16$. با جای‌گذاری این مقادیر در تساوی داده شده، مشخص می‌شود که $f(\frac{1}{4})=2-4+16=14$.

۷۸۵ (۴) ابتدا معادلهٔ $\frac{3x+4}{5x+2}=2$ را حل می‌کنیم:

$$3x+4=2(5x+2)\Rightarrow 3x+4=10x+4\Rightarrow 3x=10x$$

پس $x=0$. اکنون اگر در تساوی $f(\frac{3x+4}{5x+2})=\frac{x^2+6x+10}{3x+2}$ ، به جای x قرار دهیم صفر، به‌دست می‌آید

$$f(\frac{4}{2})=\frac{10}{2}\Rightarrow f(2)=5$$

۷۸۶ (۳) ابتدا x ای را پیدا می‌کنیم که $\frac{x+2}{x-1}=4$. به این‌ترتیب

$$\frac{x+2}{x-1}=4\Rightarrow x+2=4(x-1)\Rightarrow x=2$$

اکنون اگر در تساوی $f(\frac{x+2}{x-1})=\frac{mx+1}{x+1}$ قرار دهیم $x=2$ ، به‌دست می‌آید

$$f(\frac{2+2}{2-1})=\frac{m\times2+1}{2+1}\Rightarrow f(4)=\frac{2m+1}{3}$$

چون $f(4)=3$، پس $\frac{2m+1}{3}=3$ یعنی $m=4$. به این‌ترتیب $f(\frac{x+2}{x-1})=\frac{4x+1}{x+1}$.

اکنون x ای را پیدا می‌کنیم که $\frac{x+2}{x-1}=0$. به این‌ترتیب $x=-2$. در نتیجه $f(\frac{-2+2}{-2-1})=\frac{4\times(-2)+1}{-2+1}$ یعنی $f(0)=7$.

۷۸۷ (۳) توجه کنید که

$$f(\frac{x^2+1}{x})=3x+\frac{3}{x}-4,\quad f(x+\frac{1}{x})=3(x+\frac{1}{x})-4$$

بنابراین، اگر x عددی باشد که $x+\frac{1}{x}=4$ (چنین عددی وجود دارد، زیرا معادلهٔ $x+\frac{1}{x}=4$ معادل است با $x^2-4x+1=0$ ، که دلتای آن مثبت است، پس جواب حقیقی دارد)، آن‌گاه $f(4)=3\times4-4=8$.

۷۸۸ (۳) ابتدا معادلهٔ $\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}=3$ را حل می‌کنیم که به‌صورت $2x^2-4x+2=2(x-1)^2=0$ درمی‌آید و تنها جواب آن $x=1$ است. حال اگر در تساوی فرض مسئله به جای x ، قرار دهیم ۱، آن‌گاه $f(3)=1+3+2=6$

۷۸۹ (۲) توجه کنید که $x^2-3x+2=0\Rightarrow x=1,\quad x=2$

بنابراین دو عدد ۱ و ۲ در دامنهٔ تابع f قرار ندارند.

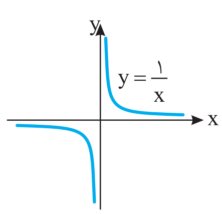
۷۹۰ (۲) ریشه‌های مخرج کسر را به‌دست می‌آوریم

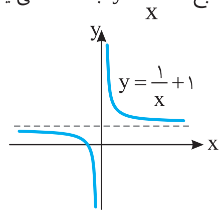
$$2x^3-5x^2+2x=0\Rightarrow x(2x^2-5x+2)=0$$

$$x(2x-1)(x-2)=0\Rightarrow x=0,\quad x=\frac{1}{2},\quad x=2$$

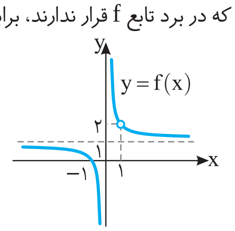
پس دو عدد صحیح $x=0$ و $x=2$ در دامنهٔ تابع قرار ندارند.

۷۹۱ (۳) اگر نمودار تابع $y=\frac{1}{x}$ را یک واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار تابع $y=\frac{1}{x}+1$ به‌دست می‌آید.

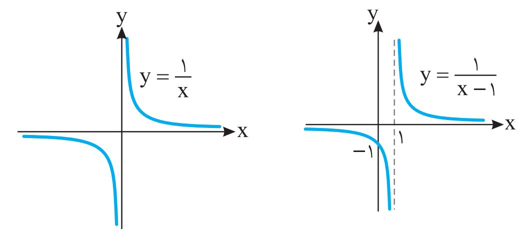




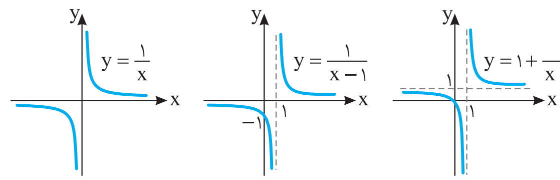
بنابراین نمودار تابع f به‌صورت زیر است و برد این تابع $\mathbb{R}-\{1,2\}$ است و در نتیجه مجموع اعدادی که در برد تابع f قرار ندارند، برابر ۳ است.



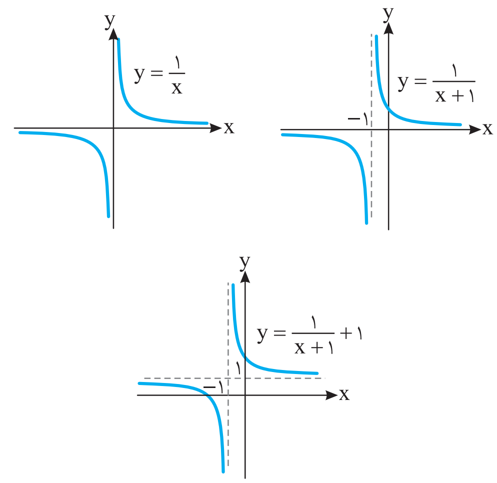
۷۹۲ (۱)



۷۹۳ (۲)



۷۹۴ (۲) ابتـدا ضابطهٔ تابع را به صورت $f(x)=۱+\frac{۱}{x+۱}$ می‌نویسـیم، سپس نمودار را به ترتیب زیر رسم می‌کنیم.

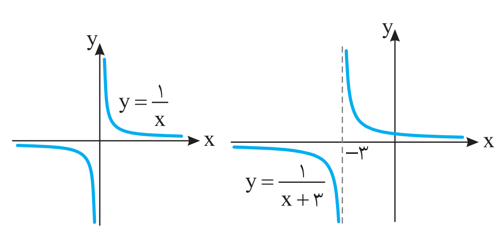


۷۹۵ (۱) معلوم است که $x=-۲$ در دامنهٔ تابع قرار ندارد، اکنون توجه کنید که

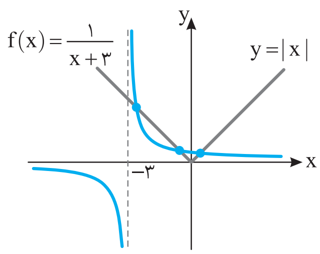
$$\frac{۱}{x+۲}=۰\ (\text{غ.ق.ق})\,,\quad \frac{۱}{x+۲}=۱\Rightarrow x=-۱\,,\quad \frac{۱}{x+۲}=۲\Rightarrow x=\frac{-۳}{۲}$$

بنابراین $D_f=\mathbb{R}-\{-۲,-۱,\frac{-۳}{۲}\}$ و حاصل‌ضرب اعدادی که در دامنهٔ تابع f قرار ندارند، برابر ۳- است.

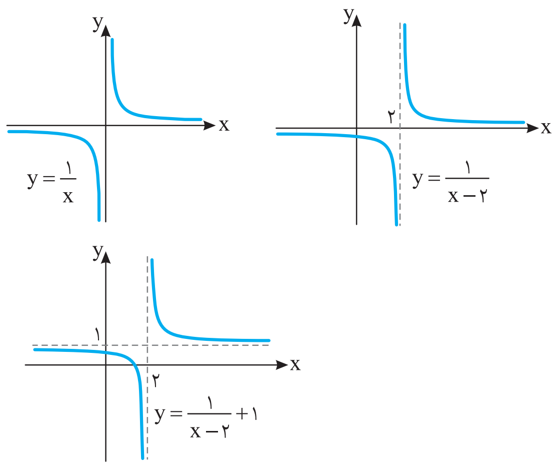
۷۹۶ (۳) اگر نمودار تابع $y=\frac{۱}{x}$ را ســه واحد به چپ منتقل کنیم نمودار تابع $y=\frac{۱}{x+۳}$ به‌دست می‌آید.



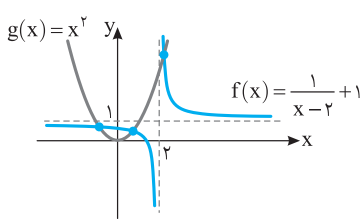
با توجه به شکل زیر، نمودار تابع $y=\frac{۱}{x+۳}$ و نمودار تابع $g(x)=|x|$ در سه نقطه متقاطع‌اند.



۷۹۷ (۳) اگر نمودار تابع $y=\frac{۱}{x}$ را دو واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=\frac{۱}{x-۲}$ به‌دسـت می‌آید و اگر این نمودار را یک واحد به سـمت بالا منتقل کنیم نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x-۲}+۱$ به‌دست می‌آید.



با توجه به شـکل زیر، نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x-۲}+۱$، نمودار تابع $g(x)=x^۲$ را در سه نقطه قطع می‌کند.



۷۹۸ (۳) اگـر فـرض کنیـم $\frac{۲}{x-۱}=t$، آن‌گاه $t\neq ۰$ و $\frac{x-۱}{۲}=\frac{۱}{t}$، پـس $x=\frac{۲}{t}+۱=\frac{۲+t}{t}$. به این ترتیب

$$f(\frac{۲}{x-۱})=\frac{x+۱}{x-۱}\Rightarrow f(t)=\frac{\frac{۲+t}{t}+۱}{\frac{۲+t}{t}-۱}=\frac{۲+۲t}{۲}=t+۱\Rightarrow f(x)=x+۱\,,\,x\neq ۰$$

۷۹۹ (۱) **راه‌حل اول** فرض می‌کنیم $\frac{x+۱}{x-۲}=t$ و در نتیجه

$$tx-۲t=x+۱\Rightarrow tx-x=۲t+۱\Rightarrow (t-۱)x=۲t+۱\Rightarrow x=\frac{۲t+۱}{t-۱}$$

در رابطهٔ داده شده به جای x قرار می‌دهیم $\frac{۲t+۱}{t-۱}$:

$$f(t)=۲(\frac{۲t+۱}{t-۱})-۱=\frac{۴t+۲-t+۱}{t-۱}=\frac{۳t+۳}{t-۱}$$

و در نتیجه $f(x)=\frac{۳x+۳}{x-۱}$.

راه‌حل دوم اگر در رابطهٔ داده شده قرار دهیم $x=-۱$، به‌دست می‌آید $f(۰)=-۳$.
اکنون در توابع داده شده در گزینه‌ها به جای x مقدار صفر را قرار می‌دهیم.
تابعی که در آن $f(۰)=-۳$، فقط تابع گزینهٔ (۱) است.

۸۰۰ (۳) مخرج کسر را مساوی صفر قرار می‌دهیم و ریشه‌های آن را به‌دست می‌آوریم:

$$x^۳-۲x^۲-x+۲=۰\Rightarrow x^۳-x-۲x^۲+۲=۰$$

$$x(x^۲-۱)-۲(x^۲-۱)=۰\Rightarrow (x^۲-۱)(x-۲)=۰$$

$$(x-۱)(x+۱)(x-۲)=۰\Rightarrow x=۱,-۱,۲$$

بنابراین $D_f=\mathbb{R}-\{۱,-۱,۲\}$. پس سه عدد در دامنهٔ تابع قرار ندارند.

۸۰۱ (۳) ریشه‌های مخرج کسر را به‌دست می‌آوریم:

$$x^۴-۳x^۲+۲=۰\Rightarrow (x^۲-۱)(x^۲-۲)=۰$$

$$x^۲=۱\Rightarrow x=\pm۱\,,\quad x^۲=۲\Rightarrow x=\pm\sqrt{۲}$$

بنابراین $D_f=\mathbb{R}-\{\pm۱,\pm\sqrt{۲}\}$ و چهار عدد در دامنهٔ تابع قرار ندارند.

۸۰۲ (۲) ابتدا توجه کنید که

$$x^۳+kx^۲+x=۰\Rightarrow x(x^۲+kx+۱)=۰$$

اگر سه عدد در دامنهٔ تابع f قرار نداشته باشند، باید معادلهٔ $x^۲+kx+۱=۰$ دو جواب داشته باشد که به همراه $x=۰$ سه عددی باشند که در دامنهٔ f قرار ندارند. بنابراین

$$\Delta>۰\Rightarrow k^۲-۴>۰\Rightarrow k^۲>۴\Rightarrow |k|>۲$$

۸۰۳ (۱) عددهایی که مخرج ضابطهٔ تابع را صفر می‌کنند، در دامنهٔ تابع قرار ندارند. پس $x=-۲$ جواب معادلهٔ $x^۳-ax^۲+۲ax=۰$ است.

$$-۸-۴a-۴a=۰\Rightarrow a=-۱$$

بنابراین ضابطهٔ تابع به‌صورت $f(x)=\frac{۱}{x^۳+x^۲-۲x}$ است. دامنهٔ تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$x^۳+x^۲-۲x=۰\Rightarrow x(x^۲+x-۲)=۰\Rightarrow x(x-۱)(x+۲)=۰$$

$$x=۰, x=۱, x=-۲$$

در نتیجه $D_f=\mathbb{R}-\{-۲,۰,۱\}$.

۸۰۴ (۱) برای اینکه دامنهٔ تابع برابر $\mathbb{R}$ باشد، باید مخرج کسر $\frac{x}{x^۲+mx+۲}$ ریشه نداشته باشد. بنابراین

$$\Delta=m^۲-۸<۰\Rightarrow -۲\sqrt{۲}<m<۲\sqrt{۲}$$

۸۰۵ (۳) توجه کنید که $D_f=\{x|x^۲+۲x-m+۴\neq۰\}$. برای اینکه معادلهٔ $x^۲+۲x-m+۴=۰$ جواب نداشته باشد، باید $\Delta<۰$:

$$\Delta=۲^۲-۴(-m+۴)=۴+۴m-۱۶<۰\Rightarrow m<۳$$

چون m عددی صحیح است، پس بیشترین مقدار آن ۲ است.

۸۰۶ (۳) **راه‌حل اول** دو عدد ۶ و ۱− در دامنهٔ تابع قرار ندارند، پس $x=۶$ و $x=-۱$ ریشه‌های مخرج ضابطهٔ تابع هستند

$$x=۶\Rightarrow ۳۶-۶(a^۲+۱)-b^۲=۰\Rightarrow b^۲=۳۰-۶a^۲$$

$$x=-۱\Rightarrow ۱+(a^۲+۱)-b^۲=۰\Rightarrow b^۲=a^۲+۲$$

بنابراین $۳۰-۶a^۲=a^۲+۲\Rightarrow a^۲=۴\Rightarrow b^۲=۶$

در نتیجه $a^۲+b^۲=۱۰$.

راه‌حل دوم معادلهٔ درجهٔ دومی که ۱− و ۶ جواب‌های آن باشد را می‌نویسیم و برابر عبارت مخرج قرار می‌دهیم $x^۲-۵x-۶=x^۲-(a^۲+۱)x-b^۲$، پس

$$b^۲=۶\,,\quad a^۲+۱=۵\Rightarrow a^۲=۴$$

در نتیجه $a^۲+b^۲=۱۰$.

۸۰۷ (۴) شرط محاسبهٔ دامنه به صورت $۲x^۲-ax+۳b\neq۰$ است. چون فقط $x=-۱$ در دامنهٔ تابع قرار ندارد، پس باید معادلهٔ $۲x^۲-ax+۳b=۰$ ریشهٔ مضاعف برابر ۱− داشته باشد. یعنی باید مخرج کسر به صورت $۲(x+۱)^۲$ باشد. بنابراین

$$۲x^۲-ax+۳b=۲(x+۱)^۲\Rightarrow ۲x^۲-ax+۳b=۲x^۲+۴x+۲$$

پس $a=-۴$ و $b=\frac{۲}{۳}$ و در نتیجه $ab=-\frac{۸}{۳}$.

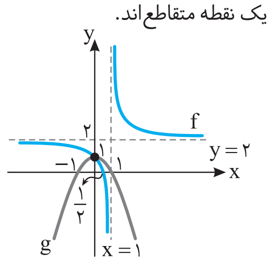
۸۰۸ (۲) چون فقط یک عدد حقیقی در دامنهٔ تابع قرار ندارد، پس معادلهٔ $m^۲x^۲+x+۱=۰$ باید فقط یک جواب داشته باشد. در دو حالت این اتفاق می‌افتد.

حالت اول مخرج ریشهٔ مضاعف داشته باشد: $\Delta=۱-۴m^۲=۰\Rightarrow m=\pm\frac{۱}{۲}$

در این حالت $x=-۲$ ریشهٔ مخرج است. در نتیجه $n=-۲$.

حالت دوم مخرج عبارت درجهٔ اول باشد، یعنی ضریب $x^۲$ برابر صفر باشد: $m=۰$. در این حالت $x=-۱$ ریشهٔ مخرج است. در نتیجه $n=-۱$.
پس حاصل‌ضرب مقادیر ممکن برای n برابر ۲ است.

۸۰۹ (۱) **راه‌حل اول** نمودارهای تابع‌های f و g در شکل زیر رسم شده‌اند.
این نمودارها فقط در یک نقطه متقاطع‌اند.



راه‌حل دوم تعداد نقاط تقاطع نمودارهای توابع f و g برابر با تعداد جواب‌های معادلهٔ $f(x)=g(x)$ است.

$$f(x)=g(x)\Rightarrow\frac{۲x-۱}{x-۱}=۱-x^۲\Rightarrow ۲x-۱=x-x^۳-۱+x^۲$$

$$x^۳-x^۲+x=۰\Rightarrow x(x^۲-x+۱)=۰$$

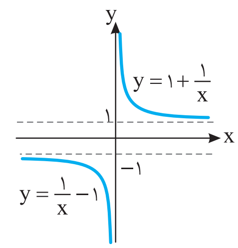
چون معادلهٔ $x^۲-x+۱=۰$ جواب ندارد $(\Delta<۰)$، پس تنها جواب معادله $x=۰$ است و در نتیجه تعداد نقاط تلاقی نمودارها یکی است.

۸۱۰ (۳) ابتدا توجه کنید که دامنهٔ تابع مجموعهٔ $\mathbb{R}-\{۰\}$ است. اکنون ضابطهٔ تابع را به صورت زیر می‌نویسیم

$$x>۰\Rightarrow y=\frac{۱+x}{x}=\frac{۱}{x}+۱$$

$$x<۰\Rightarrow y=\frac{۱-x}{x}=\frac{۱}{x}-۱$$

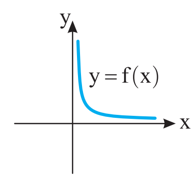
بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است



۸۱۱ (۱) ابتدا توجه کنید که $D_f=(۰,+\infty)$. پس

$$f(x)=\frac{۲}{x+x}=\frac{۱}{x}$$

بنابراین نمودار این تابع به‌صورت زیر خواهد بود:



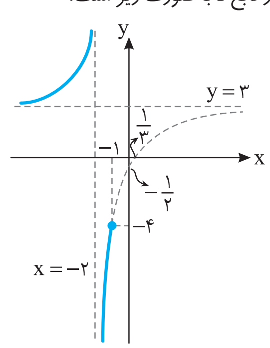
۸۱۲ (۱) می‌دانیم برد تابع هموگرافیک $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ برابر $\mathbb{R}-\{\frac{a}{c}\}$ است. پس برد تابع $f(x)=\frac{۴x+۱}{۲x-۶}$ برابر $\mathbb{R}-\{\frac{۴}{۲}\}$، یعنی $\mathbb{R}-\{۲\}$ است.

۸۱۳ (۴) اگر $D_f=\mathbb{R}-\{۲\}$، آن‌گاه برد تابع $f(x)=\frac{۶x-۱}{۲x-۴}$ برابر $\mathbb{R}-\{\frac{۶}{۲}\}$، یعنی $\mathbb{R}-\{۳\}$ است. اکنون باید ببینیم $x=۴$ که در دامنهٔ تابع f قرار ندارد، باعث حذف چه مقداری از برد تابع f می‌شود. توجه کنید که

$$x=۴\Rightarrow y=\frac{۶x-۱}{۲x-۴}=\frac{۶\times۴-۱}{۲\times۴-۴}=\frac{۲۳}{۴}$$

بنابراین $\frac{۲۳}{۴}$ هم در برد تابع f قرار ندارد. پس $R_f=\mathbb{R}-\{۳,\frac{۲۳}{۴}\}$ و در نتیجه مجموع اعدادی که در برد تابع f قرار ندارند برابر است با $۳+\frac{۲۳}{۴}=\frac{۳۵}{۴}$.

۸۱۴ (۳) نمودار تابع f به‌صورت زیر است.



از روی شکل معلوم است که برد تابع f برابر است با

$$(-\infty,-۴]\cup(۳,+\infty)$$

بنابراین هفت عدد صحیح ±۳، ±۲، ±۱ و صفر در برد تابع f قرار ندارند.

۸۱۵ (۴) می‌توان نوشت

$$f(a)-f(b)=\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b}=\frac{b-a}{ab}=\frac{۱}{\frac{ab}{b-a}}=f(\frac{ab}{b-a})$$

۸۱۶ (۳) اگر در تساوی $f(x)=\frac{x}{x+۲}$ به جای x قرار دهیم $x-۲$، به‌دست می‌آید

$$f(x-۲)=\frac{x-۲}{x}\qquad(۱)$$

از طرف دیگر،

$$f(x)=\frac{x}{x+۲}\Rightarrow xf(x)+۲f(x)=x$$

$$x(۱-f(x))=۲f(x)\Rightarrow x=\frac{۲f(x)}{۱-f(x)}$$

بنابراین از تساوی (۱) نتیجه می‌شود

$$f(x-۲)=\frac{x-۲}{x}=\frac{\frac{۲f(x)}{۱-f(x)}-۲}{\frac{۲f(x)}{۱-f(x)}}=\frac{۲f(x)-۲(۱-f(x))}{۲f(x)}$$

$$=\frac{۲f(x)-۱}{f(x)}$$

۸۱۷ (۱) چون عدد ۲ در دامنهٔ تابع f قرار ندارد، پس $x=۲$ جواب معادلهٔ $x^۳+ax^۲+b=۰$ است. بنابراین

$$۸+۴a+b=۰\Rightarrow b=-۴a-۸$$

از طرف دیگر چون تمام اعداد حقیقی به‌جز ۲ در دامنهٔ تابع f قرار دارند، پس معادلهٔ $x^۳+ax^۲+b=۰$ جواب دیگری ندارد. اکنون توجه کنید که

$$x^۳+ax^۲+b=۰\Rightarrow x^۳+ax^۲-۴a-۸=۰$$

$$(x^۳-۸)+(ax^۲-۴a)=۰\Rightarrow(x-۲)(x^۲+۲x+۴)+a(x-۲)(x+۲)=۰$$

$$(x-۲)(x^۲+۲x+۴+ax+۲a)=۰\Rightarrow(x-۲)(x^۲+(a+۲)x+۲a+۴)=۰$$

پس معادلهٔ $x^۲+(a+۲)x+۲a+۴=۰$ جواب ندارد یا ریشهٔ مضاعف $x=۲$ دارد. اگر این معادله جواب نداشته باشد، آن‌گاه

$$\Delta<۰\Rightarrow(a+۲)^۲-۴(۲a+۴)<۰\Rightarrow(a+۲)^۲-۸(a+۲)<۰$$

$$(a+۲)(a+۲-۸)<۰\Rightarrow(a+۲)(a-۶)<۰\Rightarrow-۲<a<۶$$

اگر این معادله ریشهٔ مضاعف $x=۲$ داشته باشد، آن‌گاه

$$x^۲+(a+۲)x+۲a+۴=(x-۲)^۲=x^۲-۴x+۴$$

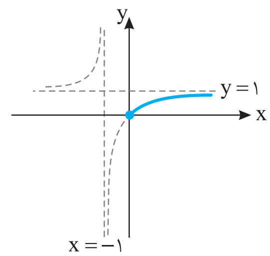
$$\begin{cases}a+۲=-۴\Rightarrow a=-۶\\ ۲a+۴=۴\Rightarrow a=۰\end{cases}$$

چون دو مقدار مختلف برای a به دست آمد، پس حالت داشتن ریشهٔ مضاعف $x=۲$ اتفاق نمی‌افتد. در نتیجه مجموعهٔ مقادیر ممکن a بازهٔ $(-۲,۶)$ است.

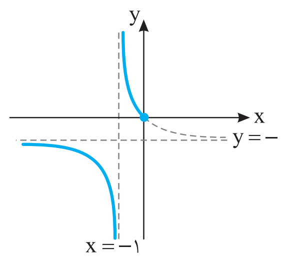
۸۱۸ (۳) ابتدا توجه کنید که $D_f=\mathbb{R}-\{-۱\}$ و

$$f(x)=\frac{|x|}{x+۱}=\begin{cases}\dfrac{x}{x+۱} & x\geq ۰\\[2mm] \dfrac{-x}{x+۱} & x\leq ۰,\ x\neq -۱\end{cases}$$

نمودارهـای تابع‌هـای $y=\dfrac{x}{x+۱}$ و $y=\dfrac{-x}{x+۱}$ در دامنه‌های مربوطه به‌صورت زیر هستند:

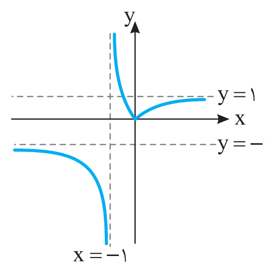


$y=\dfrac{x}{x+۱},\ x\geq ۰$



$y=\dfrac{-x}{x+۱},\ x\leq ۰, x\neq -۱$

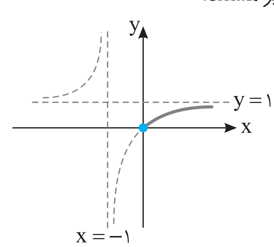
بنابراین نمودار تابع f به‌صورت زیر است.



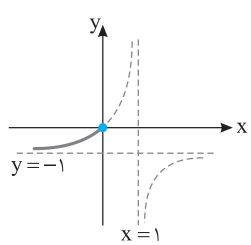
۸۱۹ (۱) ابتدا توجه کنید که $D_f=\mathbb{R}$ و

$$f(x)=\frac{x}{|x|+۱}=\begin{cases}\dfrac{x}{x+۱} & x\geq ۰\\[2mm] \dfrac{x}{-x+۱} & x\leq ۰\end{cases}$$

نمودارهای تابع‌های $y=\dfrac{x}{x+۱}$ و $y=\dfrac{x}{-x+۱}$ در دامنه‌های مربوطه به‌صورت زیر هستند:

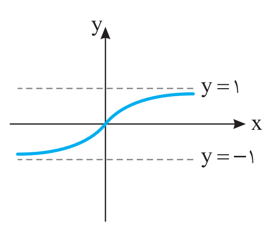


$y=\dfrac{x}{x+۱},\ x\geq ۰$



$y=\dfrac{x}{-x+۱},\ x\leq ۰$

بنابراین نمودار تابع f به‌صورت زیر است.



۸۲۰ (۱) توجـه کنیـد کـه از یک طـرف $f(a)=\sqrt{a+۲}-۲$ و از طرف دیگر $f(a)=-۲a+۴$. بنابراین

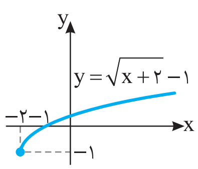
$$\sqrt{a+۲}-۲=-۲a+۴$$

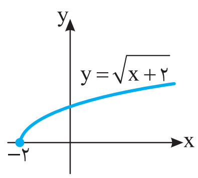
$$\sqrt{a+۲}=-۲a+۶\xrightarrow{a<۳}a+۲=۴a^۲-۲۴a+۳۶$$

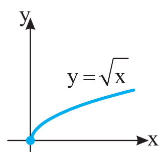
$$۴a^۲-۲۵a+۳۴=۰\Rightarrow(a-۲)(۴a-۱۷)=۰\Rightarrow a=۲,\quad a=\frac{۱۷}{۴}\ (\text{غ.ق.})$$

دقت کنید که اگر $a=\dfrac{۱۷}{۴}$، عبارت سمت راست در معادلهٔ اولیه منفی و عبارت سمت چپ مثبت خواهد بود. بنابراین a فقط می‌تواند مقدار ۲ را داشته باشد.

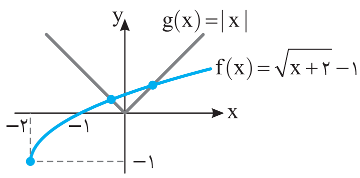
۸۲۱ (۲) اگـر نمـودار تابـع $y=\sqrt{x}$ را دو واحد به چپ و یـک واحد به سمت پایین انتقال دهیم نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x+۲}-۱$ به‌دست می‌آید.



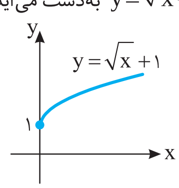


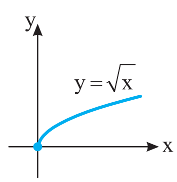


با توجه به شکل زیر، نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x+۲}-۱$، نمودار تابع $g(x)=|x|$ را در دو نقطه قطع می‌کند.

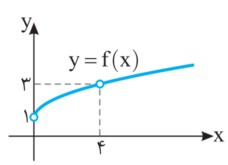


۸۲۲ (۲) اگـر نمـودار تابـع $y=\sqrt{x}$ را یک واحـد به بالا انتقـال دهیم، نمودار تابع $y=\sqrt{x}+۱$ به‌دست می‌آید.

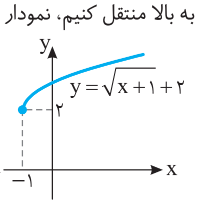


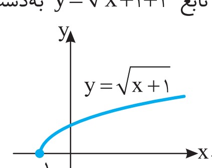


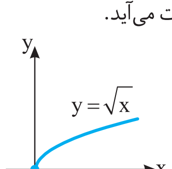
نمـودار تابـع $f(x)=\sqrt{x}+۱$ به‌صـورت مقابـل اسـت. واضـح اسـت کـه $R_f=(۱,+\infty)-\{۳\}$ بنابرایـن دو عـدد طبیعی ۱ و ۳ در برد تابع f قرار ندارند.



۸۲۳ (۲) اگر نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را یک واحد به چپ، سـپس دو واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار تابع $y=\sqrt{x+۱}+۲$ به‌دست می‌آید.







بنابراین نمودار تابع f به‌صورت مقابل است. واضـح اسـت کـه $R_f=[۳,۴]$ و اعـداد صحیـح ۳ و ۴ در برد تابـع f قرار دارند که مجموع آن‌ها برابر ۷ است.