درس اول: مفاهیم اولیهٔ مجموعه (اجتماع، اشتراک و تفاضل)

تست‌های مربوط به این درسنامه: ۱ تا ۱۰

معرفی مجموعه

مجموعه: یکی از مفاهیم تعریف نشده در ریاضیات است، یعنی تا به حال هیچ دانشمندی نتوانسته تعریف دقیق و علمی‌ای برای مجموعه ارائه کند (*نقطه هم تعریف نشدس*). امّا در ریاضیات دوره متوسطهٔ دوم، مجموعه به دسته‌ای از اشیاء گفته می‌شود که اعضای آن دقیقاً مشخص شده باشند، برای مثال $A = \{1,2,3,...,10\}$ یک مجموعه است، ولی {بچه پول‌دارهای ایران} = B مجموعه به حساب نمی‌آید، زیرا دقیقاً نمی‌دانیم برای بچه پول‌دار بودن چقدر پول لازم است.

مجموعه را معمولاً با حروف بزرگ انگلیسی مانند A، B و ... نمایش می‌دهیم و اعضای آن را درون آکولاد می‌گذاریم. برای مثال $A = \{a,b,c\}$ یک مجموعهٔ سه عضوی است که مثلاً a عضو آن است و می‌نویسیم: $a \in A$، ولی d عضو آن نیست، در این حالت می نویسیم: $d \notin A$.

تذکر: سه ویژگی مهم در مجموعه‌ها که دانستن آن بر همگی واجب است:

۱) در مجموعه‌ها، عضوهای تکراری را یک‌بار می‌نویسیم، برای مثال مجموعهٔ $A = \{4,4,5,5,5\}$ هیچ فرقی با مجموعهٔ $A = \{4,5\}$ ندارد.

۲) اگر تمام اعضای مجموعهٔ A در مجموعهٔ B هم باشد، می‌گوییم A زیرمجموعهٔ B است و می‌نویسیم $A \subseteq B$. برای مثال:

$A = \{1,2\}, B = \{2,3\}, C = \{1,2,4\} \Rightarrow A \subseteq C, B \not\subseteq C$

۳) مجموعه‌ای را که هیچ عضوی ندارد تهی می‌نامیم و با $\varnothing$ یا { } نمایش می‌دهیم. همچنین فراموش نکنید که تهی زیرمجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها است.

بعضی‌ها هم هستند که به اشتباه $\varnothing$ را به‌صورت $\{\varnothing\}$ نمایش می‌دهند. (*شما این‌طوری نباشید*) زیرا مجموعهٔ $\{\varnothing\}$ یک مجموعهٔ تک عضوی است.

مثال آموزشی زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $A = \{1,\varnothing,\{2,3\},1\}$ را بنویسید.

پاسخ مجموعهٔ A هیچ فرقی با مجموعهٔ $\{1,\varnothing,\{2,3\}\}$ ندارد (*قبوله؟*). حالا هشت زیرمجموعهٔ مجموعهٔ A را با دقت ببینید:

$A_1 = \varnothing , A_2 = \{1\} , A_3 = \{\varnothing\} , A_4 = \{\{2,3\}\} , A_5 = \{1,\varnothing\} , A_6 = \{1,\{2,3\}\} , A_7 = \{\varnothing,\{2,3\}\} , A_8 = \{1,\varnothing,\{2,3\}\}$

جالب است بدانید که در این مجموعه، تهی هم عضو و هم زیرمجموعهٔ A است.

تست آموزشی اگر $A = \{a,b,\{b\}\}$ و $B = \{a,\{b\}\}$ باشند، کدام گزینه نادرست است؟

۱) $B \subseteq A$ ۲) $\{b\} \subseteq A$ ۳) $B \in A$ ۴) $\varnothing \subseteq A - B$

پاسخ گزینه ۳ به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینهٔ «۱»: با توجه به این‌که همهٔ اعضای B درون A هستند، پس $B \subseteq A$ است. ✓

گزینهٔ «۲»: مجموعهٔ A عضوی به نام b دارد، پس حتماً $\{b\} \subseteq A$ می‌باشد. ✓

گزینهٔ «۳»: این گزینه نادرست است. دقت داشته باشید که اگر مجموعهٔ $B = \{a,\{b\}\}$ بخواهد عضوی از A باشد، دقیقاً خود مجموعهٔ $\{a,\{b\}\}$ باید در مجموعهٔ A باشد که به وضوح این عضو در A حضور ندارد. (*میدونی که* $a,\{b\}$ *هیچ ربطی به* $\{a,\{b\}\}$ *نداره*) ✗

گزینهٔ «۴»: تهی زیرمجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها است. (*تاماااام*) ✓

تست آموزشی اگر $A = \{1,1,2\}$ و $B = \{\{1\},1\}$ باشند، چه تعداد از گزاره‌های زیر درست هستند؟

الف) تعداد اعضای این دو مجموعه برابر است.

ب) تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ A برابر ۸ است.

پ) $\{1\}$ هم عضو و هم زیرمجموعهٔ B است.

ت) دوتا از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ A و B یکسان هستند.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ گزینه ۳ قبل از بررسی تک‌تک گزاره‌ها باید بگوییم مجموعهٔ A یک مجموعهٔ دو عضوی به‌صورت $A = \{1,2\}$ است و همچنین زیرمجموعه‌های دو مجموعهٔ A و B به‌صورت زیر می‌باشند:

$A = \{1,2\} ; A_1 = \varnothing , A_2 = \{1\} , A_3 = \{2\} , A_4 = \{1,2\}$

$B = \{\{1\},1\} ; B_1 = \varnothing , B_2 = \{\{1\}\} , B_3 = \{1\} , B_4 = \{\{1\},1\}$

حالا خیلی راحت می‌توان گفت گزاره‌های (الف)، (پ) و (ت) همگی درست هستند و فقط گزارهٔ (ب) نادرست است، پس پاسخ تست گزینهٔ «۳» می‌باشد.

نکته

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ n عضوی برابر 2^n است.

مثلاً مجموعهٔ $A = \{1,2,3,4\}$، $2^4 = 16$ تا زیرمجموعه دارد. (*باورت نمیشه بشین بنویسشون!!*)

تست آموزشی **اگر مجموعهٔ مرجع $\mathbb{Z}$ و $A \subseteq \mathbb{Z}$ باشد، کدام گزینه همواره درست است؟**

۱ اگر A متناهی باشد، A' متناهی است.
۲ اگر A نامتناهی باشد، A' متناهی است.
۳ اگر A نامتناهی باشد، A' نامتناهی است.
۴ اگر A متناهی باشد، A' نامتناهی است.

پاسخ گزینه ۴ به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینهٔ «۱»: نادرست است. دلیلش هم این است که اگر از مجموعهٔ نامتناهی $\mathbb{Z}$ تعداد متناهی عضو حذف شود، A' نامتناهی می‌شود. ×

گزینهٔ «۲»: نادرست است. برای مثال اگر A مجموعهٔ اعداد زوج باشد، A' مجموعهٔ اعداد فرد می‌شود که هر دو نامتناهی هستند. ×

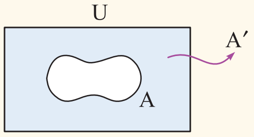
گزینهٔ «۳»: نادرست است. اگر $A = \{\dots,-1,0,2,3,\dots\}$ باشد، $A' = \{1\}$ می‌شود که متناهی است. ×

گزینهٔ «۴»: درست است. ✓

تست‌های مربوط به این درسنامه: ۶۵ تا ۸۹

خواص متمم

برای اینکه این قسمت را خیلی خوب متوجه شوید به عبارت مقابل دقت کنید، «برعکس همه‌چی، می‌شود هیچی و برعکس هیچی می‌شود همه‌چی»،
بنابراین یعنی $U' = \varnothing$ و $\varnothing' = U$. این هم چند رابطهٔ دیگر که برای درک بهترشان حتماً باید سراغ نمودار ون برویم:



$$(A')' = A \ ,\ A \cap A' = \varnothing \ ,\ A \cup A' = U \ ,\ A - A' = A$$

در آخر هم چندتا رابطه که به‌کمک آن‌ها حل تست‌ها خیلی ساده‌تر می‌شود:

۱ $A - B = A \cap B' = A - (A \cap B)$ (تفاضل)

۲ $A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A'$

۳ $(A \cup B)' = A' \cap B' \quad , \quad (A \cap B)' = A' \cup B'$

به این ویژگی قانون دمورگان گفته می‌شود (کارش اینه که همه‌چیو برعکس میکنه).

۴ $A \cap (A' \cup B) = A \cap B \quad , \quad A \cup (A' \cap B) = A \cup B$

به این دو تساوی هم قوانین شبه‌جذب گفته می‌شود.

مثال آموزشی **اگر $U = \{1,2,3,\dots,10\}$ ، $A = \{1,2,3,4\}$ و $B = \{3,4,5,6,7\}$ باشند، هر یک از مجموعه‌های $A' \cap B'$ و $A' \cup B$ را به‌دست آورید.**

پاسخ با توجه به این‌که $U = \{1,2,3,\dots,10\}$ است، پس A' و B' به‌صورت زیر می‌باشند:

$A' = U - A = \{5,6,7,8,9,10\}$ و $B' = U - B = \{1,2,8,9,10\}$

در نتیجه خواستهٔ مسئله، یعنی مجموعه‌های $A' \cap B'$ و $A' \cup B$ را به‌ترتیب به‌دست می‌آوریم. ببینید:

$A' \cap B' = \{5,6,7,8,9,10\} \cap \{1,2,8,9,10\} = \{8,9,10\}$

$A' \cup B = \{5,6,7,8,9,10\} \cup \{3,4,5,6,7\} = \{3,4,5,6,7,8,9,10\}$

مثال آموزشی **اگر $U = \mathbb{N}$ ، $B = \{x \mid x \le 4\}$ و $A = \{x \mid x > 5\}$ باشند، آنگاه مجموعهٔ $(A \cap B')'$ را به‌دست آورید.**

پاسخ روش مستقیم حل مسئله این است که B' یعنی متمم مجموعهٔ B را پیدا کنیم و اشتراک آن را با A به‌دست آوریم. بعد در آخر متمم این مجموعه نسبت به $\mathbb{N}$ را پیدا کنیم. بیایید و از راه بهتری به نام دمورگان مسئله را حل کنیم. دمورگان می‌گوید که $(A \cap B')' = A' \cup B$ است، پس باید متمم A را به‌دست آوریم و سپس اجتماع آن با B را پیدا کنیم. ببینید:

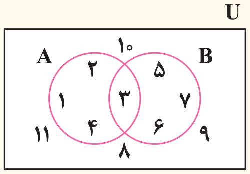
$A' = \mathbb{N} - A = \mathbb{N} - \{x \mid x > 5\} = \{1,2,3,4,5\}, B = \{1,2,3,4\} \Rightarrow A' \cup B = \{1,2,3,4,5\} \cup \{1,2,3,4\} = \{1,2,3,4,5\}$

مثال آموزشی **متمم مجموعهٔ $(B - A)' - B$ را به‌دست آورید.**

پاسخ اول مجموعهٔ داده‌شده را ساده‌تر می‌کنیم. از تفاضل می‌دانیم که $B - A = B \cap A'$ و همچنین با استفاده از ویژگی دمورگان و باز هم تفاضل می‌توان نوشت: $(B \cap A')' - B = (B' \cup A) \cap B'$

خاصیت جذب را که به‌خاطر دارید؟ به‌کمک جذب به‌جای مجموعهٔ $B' \cap (B' \cup A)$ می‌نویسیم B'. در نهایت خواستهٔ مسئله متمم این مجموعه است، یعنی: $(B')' = B$

مثال آموزشی **با توجه به نمودار ون مقابل، مجموعهٔ $A-(B'-A)$ چه عضوهایی دارد؟**



پاسخ روش اول: مطابق نمودار داده‌شده $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ ، $B=\{۳,۵,۶,۷\}$ و $U=\{۱,۲,\ldots,۱۱\}$ می‌باشند، پس $B'=\{۱,۲,۴,۸,۹,۱۰,۱۱\}$ و با جای‌گذاری مجموعه‌های به‌دست آمده در $A-(B'-A)$ می‌توان نوشت:

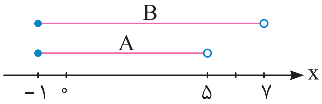
$$\{۱,۲,۳,۴\}-(\underbrace{\{۱,۲,۴,۸,۹,۱۰,۱۱\}-\{۱,۲,۳,۴\}}_{\{۸,۹,۱۰,۱۱\}})=\{۱,۲,۳,۴\}=A$$

روش دوم: به کمک ویژگی های گفته شده در مورد مجموعه‌ها می‌توان نوشت: $A-(B'-A)=A-(B'\cap A')=A\cap(B'\cap A')'\overset{\text{دمورگان}}{=\!=}A\cap(B\cup A)\overset{\text{جذب}}{=\!=}A=\{۱,۲,۳,۴\}$

تست آموزشی **اگر $A=[-۱,۵]$ ، $B=[-۱,۷)$ و $A'\cap B'=[-۲,-۱)\cup[۷,۹)$ باشد، مجموعهٔ مرجع کدام است؟**

۱) $(-۲,۹)$ ۲) $[-۲,۹)$ ۳) $(-۲,۹]$ ۴) $[-۲,۹]$

پاسخ گزینه ۲ با توجه به این‌که $A=[-۱,۵]$ و $B=[-۱,۷)$ است، ابتدا $A\cup B$ را به کمک محور مقابل تعیین می‌کنیم:



$$A\cup B=[-۱,۵)\cup[-۱,۷)=[-۱,۷)$$

از طرفی مطابق قاعدهٔ دمورگان، $A'\cap B'=(A\cup B)'$ است، پس مجموعهٔ مرجع را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که متمم $[-۱,۷)$ برابر $[-۲,-۱)\cup[۷,۹)$ باشد. حالا با توجه به این‌که اجتماع یک مجموعه و متمم آن برابر با مجموعهٔ مرجع است، مجموعهٔ مرجع را تعیین می‌کنیم:

$$U=[-۱,۷)\cup[-۲,-۱)\cup[۷,۹)=[-۲,۹)$$

تست آموزشی **اگر $A\cup(B-A)=B$ باشد، آنگاه ....**

۱) $A\subseteq B$ ۲) $B\subseteq A$ ۳) $A\subseteq B'$ ۴) $B=\varnothing$

پاسخ گزینه ۱ مجموعهٔ $B-A$ همان $B\cap A'$ است، حالا به‌کمک ویژگی شبه‌جذب می‌توان نوشت:

$$A\cup(B-A)=A\cup(B\cap A')=A\cup B=B$$

از طرفی وقتی $A\cup B$ برابر B شود، یعنی A زیرمجموعه‌ای از B است $(A\subseteq B)$.

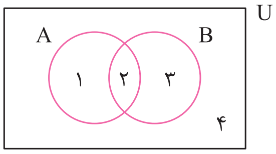
تست آموزشی **حاصل عبارت $(B\cup A)\cap((B-A)'\cap A')$ کدام است؟**

۱) $\varnothing$ ۲) $B-A$ ۳) B ۴) $A-B$

پاسخ گزینه ۱ روش اول: $B-A$ برابر $B\cap A'$ است. حالا به‌کمک قانون دمورگان به‌جای $(B\cap A')'$ ، می‌نویسیم $B'\cup A$. پس داریم:

$$(B\cup A)\cap((B'\cup A)\cap A')\overset{\text{شبه جذب}}{=\!=\!=}(B\cup A)\cap(A'\cap B')\overset{\text{دمورگان}}{=\!=\!=}(B\cup A)\cap(A\cup B)'=\varnothing$$

روش دوم: به کمک نمودار مقابل، داریم:



$$(B\cup A)\cap((B-A)'\cap A')=(\{۲,۳\}\cup\{۱,۲\})\cap(\{۳\}'\cap\{۳,۴\})$$

$$\overset{\{۳\}'=\{۱,۲,۴\}}{=\!=\!=\!=}\{۱,۲,۳\}\cap(\{۱,۲,۴\}\cap\{۳,۴\})=\{۱,۲,۳\}\cap\{۴\}=\varnothing$$

این هم یک تست بامزه!

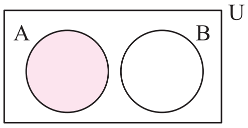
تست آموزشی **برای دو مجموعهٔ A و B، اگر $B-A=B$ باشد، متمم مجموعهٔ $(B'\cap A)\cap(A'\cup B)$ کدام است؟**

۱) A ۲) A' ۳) $\varnothing$ ۴) U

پاسخ گزینه ۴ مطابق آنچه از جبر مجموعه‌ها آموختیم می‌توان نوشت:

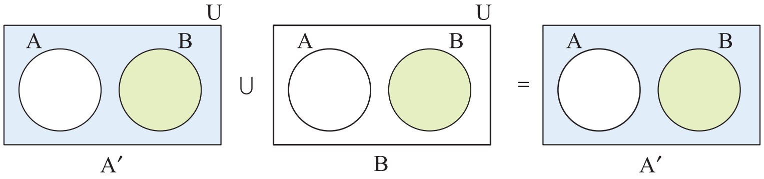
$$B-A=B-(A\cap B)$$

طبق فرض مسئله این مجموعه برابر B است، در نتیجه می‌توان گفت که $A\cap B=\varnothing$ و A و B دو مجموعهٔ جدا از هم هستند. حالا هر یک از عبارات $B'\cap A$ و $A'\cup B$ را به‌دست می‌آوریم:



$$B'\cap A=A\cap B'=A-B\overset{\text{A و B جدا از هم}}{=\!=\!=\!=}A$$

$A'\cup B:$



پس خواستهٔ مسئله، یعنی $(B'\cap A)\cap(A'\cup B)=A\cap A'=\varnothing$ است که متمم آن برابر با مجموعهٔ U می‌باشد.

تست‌های درس سوم

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

۵۱) از بین مجموعه‌های زیر چه تعداد متناهی هستند؟

الف) مجموعهٔ اعداد گویای بین دو عدد ۱ و ۲
ب) مجموعهٔ تمامی مورچه‌های کرهٔ زمین
پ) مجموعهٔ تمام خطوط موازی با خط $y = x$
ت) مجموعهٔ تمامی دایره‌ها به مرکز مبدأ مختصات
ث) مجموعهٔ اتم‌های موجود در کرهٔ زمین

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۲) اگر A مجموعهٔ اعداد اول و B مجموعهٔ اعداد طبیعی فرد باشند، کدام‌یک از مجموعه‌های زیر متناهی است؟

۱) $A \cup B$ ۲) $A \cap B$ ۳) $B - A$ ۴) $A - B$

۵۳) اگر مجموعه‌های $A = \{\frac{4}{x} \mid x \in \mathbb{N}\}$ و $B = \{\frac{x}{4} \mid x \in \mathbb{N}\}$ مفروض باشند، کدام‌یک از مجموعه‌های زیر متناهی است؟

۱) $A - B$ ۲) $B - A$ ۳) $A \cap B$ ۴) $A \cup B$

۵۴) اگر $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 3 - x \le 2x < 6\}$ و $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{-1}{x} > 0\}$ ، در این صورت کدام مجموعهٔ زیر نامتناهی است؟

۱) $A - B$ ۲) $A \cap B$ ۳) $\mathbb{Z} - B$ ۴) $A - \mathbb{Z}$

۵۵) اگر A و B دو مجموعهٔ نامتناهی باشند، چه تعداد از مجموعه‌های زیر قطعاً متناهی است؟

الف) $A - B$
ب) $A \cap B$
پ) $A \cup B$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۵۶) اگر A مجموعه‌ای متناهی باشد، کدام گزینه **نادرست** است؟

۱) اگر $A \subseteq B$ باشد، $A \cup B$ حتماً متناهی است.
۲) اگر $B \subseteq A$ باشد، $B - A$ حتماً نامتناهی است.
۳) اگر $A \subseteq B$ باشد، $B - A$ حتماً متناهی است.
۴) اگر $B \subseteq A$ باشد، $A \cup B$ ممکن است متناهی باشد.

۵۷) اگر $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \le 4\}$ ، مجموعهٔ B کدام باشد تا اجتماع و اشتراک دو مجموعهٔ A و B، غیرتهی و به‌ترتیب نامتناهی و متناهی باشند؟

۱) $B = \{x \in W \mid x + 2 \le 5\}$ ۲) $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid -1 < x < 1\}$ ۳) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 \le x + 1 \le 5\}$ ۴) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x + 2 \le 2\}$

۵۸) اگر $A, B \subseteq \mathbb{N}$ و A متناهی و B نامتناهی باشند، کدام گزینه همواره بی‌پایان است؟

۱) $(A \cap B)'$ ۲) $A - B$ ۳) $A \cup B'$ ۴) $(A \cup B)'$

۵۹) اگر A مجموعهٔ دلخواه و $\mathbb{Z} - A$ متناهی و ناتهی باشد، کدام مجموعهٔ زیر حتماً متناهی است؟

۱) $A - \mathbb{N}$ ۲) $\mathbb{Q} - (\mathbb{Z} - A)$ ۳) $\mathbb{Z} - (A - \mathbb{N})$ ۴) هیچ‌کدام

مجموعهٔ مرجع و متمم یک مجموعه

۶۰) اگر $U = \{1, 2, ..., 9\}$ مجموعهٔ مرجع و مجموعه‌های $A = \{1, 2, 3\}$ ، $B = \{3, 4, 5\}$ و $C = \{1, 4, 7, 8\}$ مفروض باشند، مجموعهٔ $(A' \cap B') \cup C'$ چند عضو دارد؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۶۱) اگر مجموعهٔ اعداد صحیح را به‌عنوان مجموعهٔ مرجع در نظر بگیریم، حاصل $(\mathbb{Z} - W)' \cap \mathbb{N}'$ کدام است؟

۱) $\mathbb{Z}$ ۲) $\mathbb{N}$ ۳) $\{0\}$ ۴) $\varnothing$

۶۲) اگر $\mathbb{R}$ مجموعه مرجع باشد، متمم مجموعهٔ $A = \{2x + 1 \mid -1 < x \le 3\}$ کدام است؟

۱) $(-\infty, 1] \cup (7, +\infty)$ ۲) $(-\infty, -1] \cup (7, +\infty)$ ۳) $(-\infty, 1) \cup [7, +\infty)$ ۴) $(-\infty, -1) \cup [7, +\infty)$

۶۳) اگر مجموعهٔ مرجع به‌صورت $U = (0, +\infty)$ ، $A = [2, +\infty)$ ، $B = \{2x \mid x \le 5\}$ و $C = \{x \mid 1 \le \frac{x}{2} \le 2\}$ باشند، $(B - A') \cap C$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

جدول زیر شامل توضیحات و فرمول‌هایی است که دانستن آن‌ها برای حل تست‌های این بخش الزامی است:

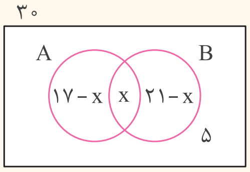
توضیح	فرمول
تعداد اعضایی که حداقل در یکی از دو مجموعهٔ A یا B قرار دارند. $\Longleftrightarrow$	$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
تعداد اعضایی که فقط در A قرار دارند. $\Longleftrightarrow$	$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$
تعداد اعضایی که در A قرار ندارند. $\Longleftrightarrow$	$n(A')=n(U)-n(A)$
تعداد اعضایی که فقط در یکی از دو مجموعهٔ A یا B قرار دارند. $\Longleftrightarrow$	$n(A-B)+n(B-A)=n(A)+n(B)-۲n(A\cap B)$
تعداد اعضایی که در هیچ یک از دو مجموعهٔ A و B قرار ندارند. $\Longleftrightarrow$	$n(A'\cap B')\overset{\text{دمورگان}}{=\!=\!=}n(A\cup B)'=n(U)-n(A\cup B)$

تذکر: یکی از راه‌های خوب در حل تست‌های این بخش، استفاده از نمودار وِن است. توصیه می‌کنیم به این روش خیلی مسلط شوید.

مثال آموزشی در یک کلاس ۳۰ نفری، ۱۷ نفر در تیم والیبال و ۲۱ نفر در تیم فوتبال هستند. ۵ نفر هم هستند که در هیچ‌کدام از دو تیم نیستند. چند نفر عضو هر دو تیم‌اند؟

پاسخ روش اول: والیبالیست‌های کلاس را با A و فوتبالیست‌ها را با B نمایش می‌دهیم، پس $n(A)=۱۷$ و $n(B)=۲۱$. از طرفی تعداد اعضای دانش‌آموزان کلاس یعنی همان $n(U)$ برابر ۳۰ است و چون ۵ نفر در هیچ‌کدام از دو تیم نیستند، پس $n(A\cup B)=۳۰-۵=۲۵$ می‌باشد، پس داریم:

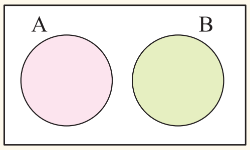
$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\Rightarrow ۲۵=۱۷+۲۱-n(A\cap B)\Rightarrow n(A\cap B)=۳۸-۲۵=۱۳$$



روش دوم: این مدل مثال‌ها به‌کمک نمودار ون هم قابل حل است. خواستهٔ مسئله تعداد افرادی است که در هر دو رشته فعالیت می‌کنند، پس تعدادشان را x می‌گیریم، همچنین در روش اول گفتیم که $n(A\cup B)=۲۵$ است، پس به کمک نمودار وِن مقابل می‌توان نوشت:

$$(۱۷-x)+(x)+(۲۱-x)=۲۵\Rightarrow ۳۸-x=۲۵\Rightarrow x=۱۳$$

تعداد اعضای دو مجموعهٔ جدا از هم



دو مجموعهٔ A و B را جدا از هم گویند، هرگاه اشتراکی با هم نداشته باشند، که شکل آن به‌صورت مقابل است:

$$A\cap B=\varnothing\Rightarrow n(A\cap B)=۰$$

در نتیجه برای دو مجموعهٔ جدا از هم A و B می‌توان نوشت:

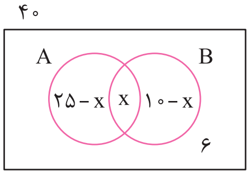
$$\boxed{n(A-B)=n(A)-\underbrace{n(A\cap B)}_{۰}\Rightarrow n(A-B)=n(A)}\quad \text{و}\quad \boxed{n(A\cup B)=n(A)+n(B)-\underbrace{n(A\cap B)}_{۰}\Rightarrow n(A\cup B)=n(A)+n(B)}$$

تست آموزشی در یک ساختمان ۴۰ نفر زندگی می‌کنند. ۲۵ نفر از آن‌ها در امور ورزشی و ۱۰ نفر از آن‌ها در امور هنری فعالیت می‌کنند. اگر ۶ نفر از ساکنین این ساختمان نه در امور هنری و نه در امور ورزشی فعالیت کنند، چند نفر فقط در امور ورزشی فعال‌اند؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۱ ۳) ۲۲ ۴) ۲۴

پاسخ گزینه ۴ روش اول: فعالان در امور ورزشی و هنری را به ترتیب با A و B نمایش می‌دهیم، پس $n(A)=۲۵$ و $n(B)=۱۰$. همچنین از بین ۴۰ نفر ساکن ساختمان ۶ نفر در هیچ‌یک از امور A و B نیستند، پس $n(A\cup B)=۴۰-۶=۳۴$. حالا برای پیدا کردن کسانی که فقط در امور ورزشی هستند باید تعداد اعضای مجموعهٔ $A-B$ را به‌دست آوریم، پس می‌توان نوشت:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\Rightarrow ۳۴=۲۵+۱۰-n(A\cap B)\Rightarrow n(A\cap B)=۳۵-۳۴=۱\Rightarrow n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=۲۵-۱=۲۴$$



روش دوم: به کمک نمودار ون و با فرض آن‌که تعداد کسانی که در هر دو امور فعال‌اند، x است، می‌توان نوشت:

$$(۲۵-x)+(x)+(۱۰-x)=۳۴\Rightarrow ۳۵-x=۳۴\Rightarrow x=۱$$

در نهایت با توجه به نمودار، تعداد کسانی که فقط در امور ورزشی‌اند، برابر است با: $۲۵-x=۲۵-۱=۲۴$

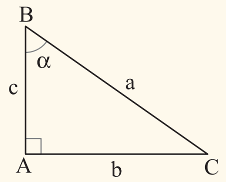
درس اول: نسبت‌های مثلثاتی

تست‌های مربوط به این درسنامه: ۳۱۷ تا ۳۳۲

نسبت‌های مثلثاتی

با شنیدن اسم این فصل یعنی مثلثات، حتماً به یاد مثلث می‌افتیم. کل بدبختی‌هایمان در این فصل از یک مثلث قائم‌الزاویه شروع می‌شود. راستی یادتان باشد که در کنکور، مثلثات خیلی حائز اهمیت است و علاوه بر تست‌های خودش با فصل‌های دیگر هم ترکیب می‌شود!

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، برای زاویهٔ حادهٔ α رابطه‌های زیر برقرار هستند:



$\dfrac{c}{a} = \dfrac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \cos\alpha$ (کسینوسِ آلفا)

$\dfrac{b}{a} = \dfrac{\text{ضلع‌مقابل}}{\text{وتر}} = \sin\alpha$ (سینوسِ آلفا)

$\dfrac{c}{b} = \dfrac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}} = \cot\alpha$ (کتانژانتِ آلفا)

$\dfrac{b}{c} = \dfrac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \tan\alpha$ (تانژانتِ آلفا)

با کمی دقت به نسبت‌های بالا متوجه می‌شویم که $\tan\alpha$ و $\cot\alpha$ معکوس یکدیگر هستند (قبوله؟) همچنین می‌توانیم ثابت کنیم که $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ و $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ است. اثباتش را هم ببینید:

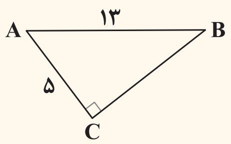
$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\dfrac{\text{ضلع‌مقابل}}{\cancel{\text{وتر}}}}{\dfrac{\text{ضلع مجاور}}{\cancel{\text{وتر}}}} = \frac{\text{ضلع‌مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \tan\alpha \quad , \quad \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\dfrac{\text{ضلع مجاور}}{\cancel{\text{وتر}}}}{\dfrac{\text{ضلع‌مقابل}}{\cancel{\text{وتر}}}} = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع‌مقابل}} = \cot\alpha$$

مثلاً اگر $\sin\alpha = \dfrac{۳}{۵}$ و $\cos\alpha = \dfrac{۴}{۵}$ باشند، $\tan\alpha = \dfrac{\frac{۳}{۵}}{\frac{۴}{۵}} = \dfrac{۳}{۴}$ و در نتیجه $\cot\alpha = \dfrac{۴}{۳}$ می‌باشد.

نتیجه: همین اول کار این سه فرمول را با دقت حفظ کنید که جلوتر بدجوری به درد می‌خورد:

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{۱}{\cot\alpha}} \quad , \quad \boxed{\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} \quad , \quad \boxed{\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

مثال آموزشی **در شکل مقابل، حاصل $\dfrac{\tan\hat{A} + \cot\hat{B}}{\cos\hat{A} + \sin\hat{B}}$ را به‌دست آورید.**



پاسخ قبل از هرکاری به کمک قضیهٔ فیثاغورس، اندازهٔ ضلع BC را به‌دست می‌آوریم:

$$AB^۲ = AC^۲ + BC^۲ \Rightarrow (۱۳)^۲ = (۵)^۲ + BC^۲ \Rightarrow BC^۲ = ۱۶۹ - ۲۵ = ۱۴۴ \Rightarrow BC = ۱۲$$

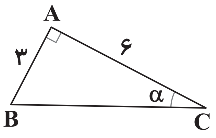
حالا طبق مطالب گفته شده در مورد نسبت‌های مثلثاتی، حاصل عبارت خواسته شده را پیدا می‌کنیم:

$$\cos\hat{A} = \frac{AC}{AB} = \frac{۵}{۱۳} \ , \ \sin\hat{B} = \frac{AC}{AB} = \frac{۵}{۱۳} \qquad \tan\hat{A} = \frac{BC}{AC} = \frac{۱۲}{۵} \ , \ \cot\hat{B} = \frac{BC}{AC} = \frac{۱۲}{۵}$$

در نهایت می‌توان نوشت:

$$\frac{\tan\hat{A} + \cot\hat{B}}{\cos\hat{A} + \sin\hat{B}} = \frac{\frac{۱۲}{۵} + \frac{۱۲}{۵}}{\frac{۵}{۱۳} + \frac{۵}{۱۳}} = \frac{\frac{۲۴}{۵}}{\frac{۱۰}{۱۳}} = \frac{۳۱۲}{۵۰} = \frac{۱۵۶}{۲۵}$$

تست آموزشی **در شکل زیر $\sin\alpha + \cos\alpha$ کدام است؟**



۱) $\dfrac{۲\sqrt{۵}}{۵}$
۲) $\dfrac{۳\sqrt{۵}}{۵}$
۳) $\dfrac{۴\sqrt{۵}}{۵}$
۴) $\dfrac{\sqrt{۵}}{۵}$

تست‌های مربوط به این درسنامه: ۴۳۲ تا ۴۶۱

فرمول‌های مثلثاتی

در اینجا می‌خواهیم همهٔ فرمول‌های مثلثاتی که در حل تست‌ها به آن‌ها نیاز می‌شود را برایتان بیاوریم. فرمول‌های مهم‌تر را هم اثبات می‌کنیم:

① $\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha=۱$ ⟵ $\sin^{۲}\alpha=۱-\cos^{۲}\alpha$ ، $\cos^{۲}\alpha=۱-\sin^{۲}\alpha$

② $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ، $\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ ⟵ $\tan\alpha\times\cot\alpha=۱$

③ $۱+\tan^{۲}\alpha=\frac{۱}{\cos^{۲}\alpha}$

④ $۱+\cot^{۲}\alpha=\frac{۱}{\sin^{۲}\alpha}$

اثبات موارد (۳) و (۴) بالا را هم به کمک فرمول اصلی یعنی $\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha=۱$ بلد باشید که خالی از لطف نیست:

(۳) اثبات: $\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha=۱\xrightarrow{\div\cos^{۲}\alpha}\frac{\sin^{۲}\alpha}{\cos^{۲}\alpha}+\frac{\cancel{\cos^{۲}\alpha}^{\,۱}}{\cancel{\cos^{۲}\alpha}}=\frac{۱}{\cos^{۲}\alpha}\Rightarrow\tan^{۲}\alpha+۱=\frac{۱}{\cos^{۲}\alpha}\Rightarrow۱+\tan^{۲}\alpha=\frac{۱}{\cos^{۲}\alpha}$ ✓

(۴) اثبات: $\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha=۱\xrightarrow{\div\sin^{۲}\alpha}\frac{\cancel{\sin^{۲}\alpha}^{\,۱}}{\cancel{\sin^{۲}\alpha}}+\frac{\cos^{۲}\alpha}{\sin^{۲}\alpha}=\frac{۱}{\sin^{۲}\alpha}\Rightarrow۱+\cot^{۲}\alpha=\frac{۱}{\sin^{۲}\alpha}$ ✓

تست آموزشی اگر $\cot\alpha=-\frac{۱}{۴}$ و α در ناحیهٔ دوم باشد، $\cos\alpha$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{۱۱}}{۱۷}$ ۲) $-\frac{\sqrt{۱۳}}{۱۷}$ ۳) $-\frac{\sqrt{۱۵}}{۱۷}$ ۴) $-\frac{\sqrt{۱۷}}{۱۷}$

پاسخ گزینه ۴ روش اول: می‌دانیم $۱+\cot^{۲}\alpha=\frac{۱}{\sin^{۲}\alpha}$ است، پس داریم:

$$۱+\cot^{۲}\alpha=\frac{۱}{\sin^{۲}\alpha}\xrightarrow{\cot\alpha=-\frac{۱}{۴}}۱+(-\frac{۱}{۴})^{۲}=\frac{۱}{\sin^{۲}\alpha}\Rightarrow۱+\frac{۱}{۱۶}=\frac{۱}{\sin^{۲}\alpha}\Rightarrow\frac{۱۷}{۱۶}=\frac{۱}{\sin^{۲}\alpha}$$

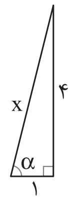
$$\Rightarrow\sin^{۲}\alpha=\frac{۱۶}{۱۷}\Rightarrow\sin\alpha=\pm\frac{۴}{\sqrt{۱۷}}\xrightarrow{\alpha\ \text{در ناحیه دوم}}\sin\alpha=\frac{۴}{\sqrt{۱۷}}$$

حالا با کمک گرفتن از فرمول $\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha=۱$ ، به راحتی $\cos\alpha$ را پیدا می‌کنیم، ببینید:

$$\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha=۱\xrightarrow{\sin\alpha=\frac{۴}{\sqrt{۱۷}}}(\frac{۴}{\sqrt{۱۷}})^{۲}+\cos^{۲}\alpha=۱\Rightarrow\frac{۱۶}{۱۷}+\cos^{۲}\alpha=۱$$

$$\Rightarrow\cos^{۲}\alpha=\frac{۱}{۱۷}\Rightarrow\cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{۱۷}}{۱۷}\xrightarrow{\alpha\ \text{در ناحیه دوم}}\cos\alpha=-\frac{\sqrt{۱۷}}{۱۷}$$

روش دوم: یک مثلث قائم‌الزاویه به شکل مقابل در نظر می‌گیریم و با توجه به این‌که $\cot\alpha=-\frac{۱}{۴}$ است، می‌توان نوشت:



$$x^{۲}=(۱)^{۲}+(۴)^{۲}\Rightarrow x^{۲}=۱۷\Rightarrow x=\sqrt{۱۷}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}=\frac{۱}{x}=\frac{۱}{\sqrt{۱۷}}\times\frac{\sqrt{۱۷}}{\sqrt{۱۷}}=\frac{\sqrt{۱۷}}{۱۷}$$

حواستان باشد که α در ناحیهٔ دوم است، پس $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{۱۷}}{۱۷}$ می‌باشد.

تست آموزشی حاصل عبارت $\frac{(۱+\tan^{۲}x)(۱+\cot^{۲}x)}{۱-\sin^{۲}x-\cos^{۴}x}$ کدام است؟

۱) $\cot^{۴}x$ ۲) $\tan^{۴}x$ ۳) $(\frac{۱}{\sin x\cos x})^{۲}$ ۴) $(\frac{۱}{\sin x\cos x})^{۴}$

پاسخ گزینه ۴ روش اول: با استفاده از اتحادهای $۱+\tan^{۲}x=\frac{۱}{\cos^{۲}x}$ ، $۱+\cot^{۲}x=\frac{۱}{\sin^{۲}x}$ و $\cos^{۲}x=۱-\sin^{۲}x$ می‌توان نوشت:

$$\frac{(۱+\tan^{۲}x)(۱+\cot^{۲}x)}{(۱-\sin^{۲}x)-\cos^{۴}x}=\frac{(\frac{۱}{\cos^{۲}x})(\frac{۱}{\sin^{۲}x})}{\cos^{۲}x-\cos^{۴}x}=\frac{(\frac{۱}{\cos^{۲}x})(\frac{۱}{\sin^{۲}x})}{\cos^{۲}x(۱-\cos^{۲}x)}=\frac{(\frac{۱}{\cos^{۲}x})(\frac{۱}{\sin^{۲}x})}{\cos^{۲}x(\sin^{۲}x)}=\frac{۱}{\sin^{۴}x\cos^{۴}x}=(\frac{۱}{\sin x\cos x})^{۴}$$

تست‌های درس اول

ریشهٔ n اُم

۵۲۷ کدام گزینه به‌درستی محاسبه **نشده** است؟

۱) $\sqrt[۵]{-۳۲}=-۲$ ۲) $\sqrt[۴]{۲۵۶}=۴$ ۳) $\sqrt[۳]{\frac{۱}{۸}}=\sqrt{\frac{۱}{۴}}$ ۴) $\sqrt[۵]{۱۰۲۴}=\sqrt[۴]{۱۶}$

۵۲۸ مقدار $\sqrt[۳]{۲-\sqrt{۹۶-\sqrt[۳]{-۶۴}}}$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۳ ۳) -۴ ۴) -۵

۵۲۹ مقدار $\sqrt[۳]{۰/۰۵۴\sqrt[۵]{-\frac{۱}{۳۲}}}$ کدام است؟

۱) $-۰/۲$ ۲) $۰/۲$ ۳) $-۰/۳$ ۴) $۰/۳$

۵۳۰ کدام گزینه **نادرست** است؟

۱) ریشه‌های چهارم عدد ۱۶ به اندازهٔ ۴ واحد با هم اختلاف دارند.

۲) عدد $\sqrt{۲}$ دو ریشهٔ دوم دارد که قرینهٔ هم هستند.

۳) اگر $a=\sqrt[۴]{۶۲۵}$ باشد، a می‌تواند ۵ یا ۵- باشد.

۴) عدد $-\sqrt{۲}$ یک ریشه سوم منفی دارد.

۵۳۱ کدام عدد زیر، ریشهٔ چهارم **ندارد**؟ *(برگرفته از کتاب درسی)*

۱) $\frac{\pi}{۳}-\frac{۳}{\pi}$ ۲) $\frac{۲}{-\pi+\sqrt{۲۴}}$ ۳) $\frac{\pi}{\sqrt{۳۲}}+\frac{\sqrt[۳]{۳۲}}{\sqrt[۵]{\pi}}-$ ۴) $\frac{\sqrt{\pi-\frac{\pi}{۳}}}{\frac{\pi}{۳}+\pi}$

۵۳۲ کدام عدد ریشهٔ چهارم $۲۸-۱۶\sqrt{۳}$ است؟ *(برگرفته از کتاب درسی)*

۱) $۱-\sqrt{۲}$ ۲) $۱-\sqrt{۳}$ ۳) $۲-\sqrt{۳}$ ۴) $۲-\sqrt{۱۳}$

۵۳۳ اگر $\sqrt[۵]{b^۳}=a^۳$ باشد، ریشهٔ پنجم b کدام است؟

۱) $\sqrt[۵]{a}$ ۲) $a^۵$ ۳) $\sqrt[۱۰]{a}$ ۴) a

تعیین حدود ریشهٔ n اُم

۵۳۴ کدام گزینه همیشه درست است؟ *(برگرفته از کتاب درسی)*

۱) هر عدد نامنفی، دو ریشهٔ دوم مختلف دارد.

۲) اگر m ریشهٔ مرتبه دوم n باشد، $-m$ هم ریشهٔ مرتبه دوم n است.

۳) تنها ریشهٔ دوم عدد $۵-۲\sqrt{۶}$، عدد $\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$ است.

۴) ریشهٔ سوم عدد ۱۰۲ بین دو عدد ۳ و ۴ است.

۵۳۵ کدام عدد بین دو عدد صحیح ۲ و ۳ قرار **ندارد**؟

۱) $\sqrt{۷}$ ۲) $\sqrt[۳]{۲۱}$ ۳) $\sqrt[۴]{۱۴}$ ۴) $\sqrt[۵]{۳۵}$

۵۳۶ عدد $\sqrt[۳]{۲۰۰}$ بین دو عدد صحیح متوالی قرار دارد. مجموع این دو عدد کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۹ ۳) ۱۱ ۴) ۱۳

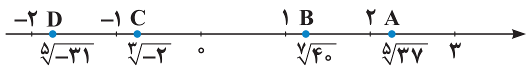
۵۳۷ اگر k یک عدد صحیح باشد و $k<-\sqrt[۴]{۱۲۰}<k+۱$ باشد، k کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۳ ۳) -۴ ۴) -۵

۵۳۸ ریشهٔ پنجم عدد ۷۰- به کدام عدد نزدیک‌تر است؟ *(برگرفته از کتاب درسی)*

۱) -۲ ۲) -۳ ۳) -۱ ۴) -۴

۵۳۹ با توجه به شکل زیر، کدام گزینه **نادرست** است؟ *(برگرفته از کتاب درسی)*



۱) A ۲) B ۳) C ۴) D

۵۴۰ $\sqrt[۳]{-\sqrt{۲۰۰}}$ بین دو عدد صحیح متوالی قرار می‌گیرد. مجموع این دو عدد صحیح کدام است؟

۱) -۳ ۲) -۹ ۳) -۵ ۴) -۷

۶۶۲ حاصل عبارت $\dfrac{a^6+1}{(a+\frac{1}{a})(a^2+\frac{1}{a^2}-1)}$ کدام است؟

۱) a^6 ۲) a^2 ۳) a^3 ۴) a^5

۶۶۳ اگر $x=2(1+\frac{1}{x})$ باشد، حاصل $\dfrac{x^3+8}{2x+4}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۶۶۴ اگر $x^3+y^3-2=0$ باشد، حاصل $\dfrac{y^2+y+1}{x^2+x+1}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{x}{y}$ ۲) $-\dfrac{x}{y}$ ۳) $\dfrac{x-1}{y-1}$ ۴) $\dfrac{1-x}{y-1}$

اتحاد جمله مشترک

۶۶۵ اگر $x^2+5x=1$ باشد، حاصل $(x-2)(x+1)(x+4)(x+7)$ کدام است؟

۱) ۶۵- ۲) ۷۰- ۳) ۶۵ ۴) ۷۰

۶۶۶ اگر $x+\frac{2}{x}=4$ باشد، حاصل $(x-5)(x-3)(x-1)(x+1)$ کدام است؟

۱) ۳- ۲) ۵- ۳) ۶- ۴) ۷-

این هم سه تا تست از اتحادهای فرعی‌تر

۶۶۷ برای سه عدد a، b و c اگر $a+b+c=7$ ، $abc=12$ و $a^2+b^2+c^2=17$ باشند، حاصل $a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}$ کدام است؟

۱) ۲/۵ ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) $\dfrac{4}{3}$

۶۶۸ اگر a، b و c سه عدد مخالف صفر باشند که مجموعشان برابر صفر است، مقدار عبارت $\dfrac{a^2}{bc}+\dfrac{b^2}{ac}+\dfrac{c^2}{ab}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۱-

۶۶۹ پس از بسط دادن عبارت $(1+2x+3x^2+4x^3)^2$ ، ضریب چند تا از عبارت‌ها فرد است؟

۱) ۱۲ ۲) ۹ ۳) ۲ ۴) ۵

تجزیه

۶۷۰ در تجزیهٔ عبارت x^3-5x^2+4x کدام عامل وجود **ندارد**؟

۱) x ۲) $x-1$ ۳) $x-2$ ۴) $x-4$

۶۷۱ در تجزیهٔ عبارت x^5-16x کدام عامل وجود **ندارد**؟

۱) $x-2$ ۲) $x+2$ ۳) x^2+2 ۴) x^2+4

۶۷۲ در تجزیهٔ عبارت x^5-5x^3-36x ، کدام عامل وجود **ندارد**؟

۱) x^2+4 ۲) $x-3$ ۳) $x+3$ ۴) $x-9$

۶۷۳ اگر $x^2+1=(\sqrt[3]{x^2}+1)(A+B+1)$ باشد، AB کدام است؟ (A و B برحسب x هستند.)

۱) x ۲) $-x$ ۳) x^2 ۴) $-x^2$

۶۷۴ در تجزیهٔ عبارت $2x^2+3x+1$ کدام عامل وجود دارد؟

۱) $x-1$ ۲) $2x-1$ ۳) $2x+1$ ۴) $x-2$

۶۷۵ در تجزیهٔ عبارت x^4+64 کدام عامل وجود دارد؟ (آزمون‌های گاج)

۱) x^2+8 ۲) x^2-8 ۳) x^2+4x+8 ۴) x^2+4x+4

۶۷۶ در تجزیهٔ عبارت x^4+2x^3-x-2 کدام عامل وجود **ندارد**؟

۱) $x-1$ ۲) $x+2$ ۳) x^2+x+1 ۴) x^2-x+1

البته اینجوری هم قابل محاسبه است که $\frac{-\Delta}{۴a}=۱$ ، ببینید:

$$y_S=\frac{-\Delta}{۴a}=-\frac{(-m)^۲-۴(-۲m)(-۲)}{۴(-۲m)}=-\frac{m^۲-۱۶m}{-۸m}=\frac{m^۲-۱۶m}{۸m}=\frac{\cancel{m}(m-۱۶)}{۸\cancel{m}}=\frac{m-۱۶}{۸}\xrightarrow{y_S=۱}\frac{m-۱۶}{۸}=۱\Rightarrow m-۱۶=۸\Rightarrow m=۲۴$$

نتیجه: خط افقی $y=k$ ، تنها می‌تواند در رأس سهمی به سهمی مماس شود و لاغیر.

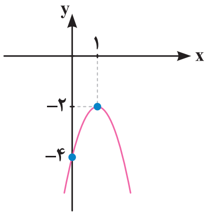
نکته

ظاهر جدید سهمی

با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای، سهمی $y=ax^۲+bx+c$ را می‌توانیم به شکل $y=a(x-k)^۲+h$ نمایش دهیم. اتفاق جالب و خوب در این حالت این است که رأس سهمی به صورت $S(k,h)$ می‌باشد.

برای مثال، رأس سهمی $y=-۲(x-۱)^۲-۲$ برابر با $S(۱,-۲)$ است، چراکه با توجه به رابطهٔ $y=a(x-k)^۲+h$ ، $k=۱$ و $h=-۲$ می‌باشد.

این هم نمودارش:

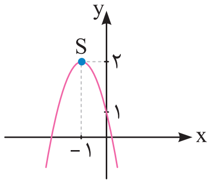


توجه کنید که با قرار دادن $x=۰$ ، عرض از مبدأ سهمی برابر $y=-۲-۲=-۴$ به‌دست می‌آید.

تست آموزشی **نمودار سهمی $y=-(x+۱)^۲+۲$ از کدام ناحیه‌ها نمی‌گذرد؟**

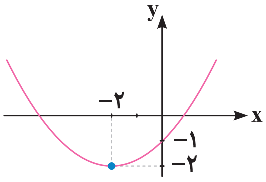
۱) اول
۲) دوم
۳) سوم
۴) از همهٔ ناحیه‌ها می‌گذرد

پاسخ گزینهٔ ۴ با مطابقت دادن $y=-(x+۱)^۲+۲$ با $y=a(x-k)^۲+h$ متوجه می‌شویم که $a=-۱$ ، $k=-۱$ و $h=۲$ هستند، پس دهانهٔ سهمی رو به پایین است و رأس آن $S(-۱,۲)$ می‌باشد. نمودار این سهمی به صورت مقابل می‌باشد:



دقت کنید که مقدار عبارت $y=-(x+۱)^۲+۲$ به‌ازای $x=۰$ برابر ۱ است، یعنی سهمی محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند و به‌راحتی دیده می‌شود که این سهمی از همهٔ ناحیه‌ها عبور می‌کند.

تست آموزشی **معادلهٔ سهمی زیر کدام است؟**



۱) $y=\frac{۱}{۴}(x+۲)^۲-۲$
۲) $y=\frac{۱}{۲}(x+۴)^۲-۲$
۳) $y=\frac{۱}{۲}(x+۲)^۲-۲$
۴) $y=\frac{۱}{۴}(x-۲)^۲-۲$

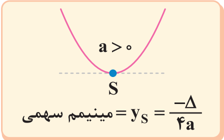
پاسخ گزینهٔ ۱ رأس سهمی داده شده $S(-۲,-۲)$ است، پس با توجه به اینکه رأس سهمی را داریم بهتر است سراغ رابطهٔ $y=a(x-k)^۲+h$ برویم. تا اینجای کار معادلهٔ سهمی به شکل $y=a(x+۲)^۲-۲$ در می‌آید. حالا با توجه به اینکه سهمی از نقطهٔ $(۰,-۱)$ می‌گذرد، می‌توان نوشت:

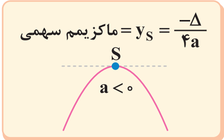
$$y=a(x+۲)^۲-۲\xrightarrow{(۰,-۱)\text{ روی سهمی است}}-۱=a(۰+۲)^۲-۲\Rightarrow -۱=۴a-۲\Rightarrow ۱=۴a\Rightarrow a=\frac{۱}{۴}$$

در نتیجه معادلهٔ سهمی به‌صورت $y=\frac{۱}{۴}(x+۲)^۲-۲$ می‌باشد.

نکته

احتمالاً تا همین الان متوجه شده‌اید که بیشترین یا کمترین مقدار سهمی، همان عرض رأس سهمی یعنی $y_S=\frac{-\Delta}{۴a}$ است:

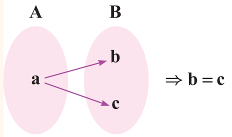




خلاصه اینکه یادتان باشد که هر وقت خواستید در یک سهمی ماکزیمم یا مینیمم را پیدا کنید، سراغ $\frac{-\Delta}{۴a}$ بروید.

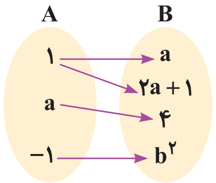
نکته

در نمودار پیکانی یک تابع، اگر از عضوی دو پیکان به‌صورت زیر خارج شود، در این صورت حتماً خواهیم داشت:



$\Rightarrow b = c$

تست آموزشی **اگر نمودار پیکانی مقابل، تابع باشد، $a \times b$ کدام می‌تواند باشد؟**



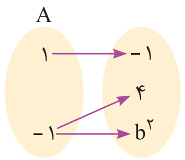
۱) -۴ ۲) ۱

۳) -۲ ۴) ۸

پاسخ گزینه ۳ طراح می‌گوید که نمودار پیکانی داده شده تابع است، پس حتماً خروجی‌های عدد ۱ با هم برابر هستند و در نتیجه داریم:

$a = ۲a + ۱ \Rightarrow a = -۱$

پس ظاهر جدید نمودار پیکانی بالا، به صورت زیر در می‌آید، از طرفی با توجه به تابع بودن این رابطه، خروجی‌های ۱- هم باید برابر باشند، داریم:



$b^۲ = ۴ \Rightarrow b = \pm ۲$

در نهایت خواستهٔ مسئله یعنی $a \times b$ برابر $-۲ = (۲) \times (-۱)$ یا $۲ = (-۲) \times (-۱)$ می‌باشد.

۲) **جدول:** این نوع نمایش خیلی با نمودار پیکانی فرقی ندارد. در اینجا یک جدول دو سطری داریم که اعداد سطر اول با اعداد سطر دوم در رابطه می‌باشند. در این دیدگاه برای تابع بودن رابطه، نباید هیچ عضوی از سطر اول به دو عضو (یا بیشتر) از سطر دوم نسبت داده شود. برای مثال جدول زیر تابع نیست، چراکه عضو ۵ در سطر اول به دو عدد مختلف ۴ و ۱ در سطر دوم نسبت داده شده است.

x	۵	۲	۵	۶
y	۱	۷	۴	۰

۳) **زوج مرتب:** هر دوتایی به شکل (a,b) را زوج مرتب می‌گوییم و در آن a را مؤلفهٔ اول و b را مولفهٔ دوم می‌نامیم. توجه داشته باشید که مؤلفه‌های اول و دوم در زوج مرتب‌ها اجازهٔ جابه‌جا شدن ندارند. برای مثال دو زوج مرتب $(۱,۴)$ و $(۴,۱)$ یکی نیستند.

هر رابطه را می‌توان به شکل مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها نمایش داد. در این صورت این رابطه زمانی تابع است که مؤلفه‌هایِ اولِ زوج مرتب‌ها تکراری نباشد. مثلاً رابطهٔ $R_۱ = \{(۱,۲),(۲,۵),(۱,۶)\}$ تابع نیست؛ زیرا عدد ۱ مولفهٔ اول تکراری این رابطه می‌باشد.

نکته

اگر مؤلفه‌های اول دو زوج مرتب با هم برابر باشند، برای تابع بودن رابطه، باید مؤلفه‌های دوم نظیرشان نیز یکسان باشند. مثلاً اگر رابطهٔ $R_۲ = \{(۱,a),(۱,۲),(۲,۴)\}$ بخواهد تابع باشد، a متهم به ۲ بودن است.

تست آموزشی **رابطهٔ $R = \{(۴,a),(a,۲),(۴,a^۲),(۰,۳)\}$ به‌ازای کدام مقدار a تابع است؟**

۱) ۱ و صفر ۲) صفر ۳) ۱ ۴) هیچ مقدار a

پاسخ گزینه ۳ در زوج مرتب‌ها، مولفهٔ اول تکراری ۴ دیده می‌شود، پس برای تابع بودن باید مؤلفه‌های دوم نظیرشان با هم برابر باشند، داریم:

$a = a^۲ \Rightarrow a^۲ - a = ۰ \Rightarrow a(a-۱) = ۰ \Rightarrow a = ۰ \ , \ a = ۱$

حالا باید بررسی کنیم که aهای به‌دست آمده تابع بودن رابطه را تضمین می‌کنند یا نه، پس باید aها را در رابطه چک کنیم:

$a = ۱ : R = \{(۴,۱),(۱,۲),(۴,۱),(۰,۳)\}$ ✓ تابع است

$a = ۰ : R = \{(۴,۰),(۰,۲),(۴,۰),(۰,۳)\}$ × تابع نیست

مؤلفهٔ اول یکسان و مؤلفهٔ دوم متفاوت

۱۱۵۹ با ارقام صحیح از صفر تا ۵، چند عدد چهار رقمی با ارقام متمایز می‌توان نوشت که با عدد ۲ شروع **نشود**؟

۱) ۱۹۰ ۲) ۲۴۰ ۳) ۲۲۵ ۴) ۲۶۰

۱۱۶۰ در چند عدد سه رقمی، هیچ دو رقم متوالی یکسان **نمی‌باشند**؟

۱) ۲۷۹ ۲) ۹۲۷ ۳) ۷۲۹ ۴) ۷۹۲

۱۱۶۱ با ارقام ۰، ۲، ۳ و ۷ چند عدد سه‌رقمی فرد با ارقام غیر تکراری می‌توان نوشت؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۸

۱۱۶۲ چند عدد چهار رقمی زوج با ارقام $\{۰,۱,۲,...,۹\}$ می‌توان نوشت؟ (تکرار ارقام مجاز است.) *(برگرفته از کتاب درسی)*

۱) ۵۰۰۰ ۲) ۴۵۰۰ ۳) ۳۲۴۰ ۴) ۸۱۰۰

۱۱۶۳ چند عدد پنج رقمی زوج با ارقام متمایز می‌توان ساخت؟ *(برگرفته از کتاب درسی)*

۱) ۱۳۷۷۶ ۲) ۱۵۱۲۰ ۳) ۱۴۲۸۰ ۴) ۱۲۴۱۶

۱۱۶۴ چند عدد چهار رقمی با ارقام فرد و متمایز، بزرگ‌تر از ۳۰۰۰ وجود دارد؟ *(تجربی داخل ۹۰)*

۱) ۷۲ ۲) ۸۴ ۳) ۹۶ ۴) ۱۰۰

۱۱۶۵ در چند عدد چهار رقمی بزرگ‌تر از ۲۰۰۰، هیچ‌یک از ارقام ۵ و ۶ وجود **ندارد**؟

۱) ۷۶۷ ۲) ۳۰۷۲ ۳) ۱۵۳۶ ۴) ۳۰۷۱

۱۱۶۶ چند عدد سه رقمی با ارقام ۱، ۲، ۵، ۷ و ۹ بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت، به‌طوری که از ۵۲۱ بزرگتر باشند؟

۱) ۳۲ ۲) ۳۴ ۳) ۳۳ ۴) ۳۵

۱۱۶۷ تعداد اعداد چهار رقمی با ارقام متمایز که هم از ۴۵۰۰ بزرگ‌تر بوده و هم شامل ارقام ۳، ۷ و ۸ **نباشد**، کدام است؟

۱) ۴۲۰ ۲) ۴۶۰ ۳) ۴۸۰ ۴) ۵۴۰

۱۱۶۸ با استفاده از ارقام ۰، ۱، ۲، ۵، ۶، ۸ و ۹ چند عدد چهار رقمی مضرب ۵ و بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت؟

۱) ۲۲۰ ۲) ۱۴۰ ۳) ۲۴۰ ۴) ۲۸۰

۱۱۶۹ چند عدد سه رقمی بدون تکرار وجود دارد که شامل رقم ۶ و فاقد رقم ۳ باشد؟

۱) ۱۰۵ ۲) ۱۵۴ ۳) ۱۴۵ ۴) ۱۵۰

۱۱۷۰ چند عدد سه رقمی مضرب ۳ و بدون تکرار ارقام با رقم‌های ۵، ۴، ۳، ۲ و ۱ می‌توان ساخت؟

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۳۰ ۴) ۳۶

۱۱۷۱ چند عدد سه رقمی با ارقام متمایز وجود دارد که مضرب ۴ باشند؟

۱) ۱۳۰ ۲) ۱۴۰ ۳) ۱۵۰ ۴) ۱۶۰

۱۱۷۲ چند عدد سه رقمی با ارقام متمایز می‌توان نوشت، به‌طوری که مجموع ارقام آن‌ها ۶ باشد؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۴ ۳) ۱۶ ۴) ۲۱

۱۱۷۳ چند عدد سه رقمی متقارن داریم که زوج باشند؟ (عددی که از چپ و راست یکسان خوانده شود را متقارن می‌گوییم. اعداد مانند ۲۱۲، ۷۲۷ و ...)

۱) ۱۸ ۲) ۳۶ ۳) ۴۰ ۴) ۴۲

سه تا تست ترکیبی جالب از تابع و شمارش...

۱۱۷۴ تعداد توابع از مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳\}$ به مجموعهٔ $B=\{a,b,c,d\}$ کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۲۷ ۳) ۶۴ ۴) ۸۱

۱۱۷۵ تعداد توابع از مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ به مجموعهٔ $B=\{a,b,c\}$ به‌طوری‌که $f(۱)\neq a$ چندتا است؟

۱) ۸۱ ۲) ۶۴ ۳) ۵۴ ۴) ۲۷

۱۱۷۶ چند تابع از مجموعهٔ $A=\{a,b,c,d\}$ به $B=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ می‌توان نوشت که شامل زوج مرتب $(a,۳)$ باشد، ولی شامل $(c,۲)$ **نباشد**؟

۱) ۷۵ ۲) ۲۰ ۳) ۱۰۰ ۴) ۲۵

جایگشت یک در میان

۱۱۹۱ در چند جایگشت از ارقام {۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷} ، ارقام زوج و فرد یک در میان قرار می‌گیرند؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۴۴ ۳) ۳۶۰ ۴) ۴۸۰

۱۱۹۲ با حروف $\{a,g,h,i,t,u\}$ ، چند کلمهٔ شش حرفی می‌توان ساخت به‌طوری‌که حروف صدادار و بی‌صدا یک در میان قرار بگیرند؟

۱) ۳۶ ۲) ۷۲ ۳) ۲۴ ۴) ۴۸

۱۱۹۳ با جابه‌جایی ارقام عدد «۲۷۳۵۳۶۳» چند عدد هفت رقمی می‌توان تشکیل داد به‌طوری که رقم‌های ۳ یک در میان باشند؟

۱) ۲۴ ۲) ۴۸ ۳) ۱۶ ۴) ۳۲

جایگشت چند شیء که قرار است کنار هم باشند یا نباشند

۱۱۹۴ تعداد جایگشت‌های حروف کلمهٔ «LAGRANGE» به‌طوری که حروف یکسان کنار هم باشند، کدام است؟

۱) ۳۶۰ ۲) ۵۴۰ ۳) ۷۲۰ ۴) ۱۴۴۰

۱۱۹۵ با حروف کلمهٔ «KORDAN» چند کلمهٔ ۶ حرفی می‌توان نوشت به‌طوری‌که در آن‌ها حروف کلمهٔ «KORD» کنار هم باشد؟

۱) ۱۲۴ ۲) ۱۴۴ ۳) ۱۵۴ ۴) ۱۶۴

۱۱۹۶ در چند جایگشت از حروف کلمهٔ «SQUARE» حروف صدادار جلوتر از حروف بی‌صدا قرار می‌گیرند؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۸ ۳) ۳۶ ۴) ۲۴

جایگشت تقدم و تأخر

۱۱۹۷ شش نفر به چند طریق می‌توانند وارد یک اتاق شوند به‌طوری که محمد قبل از حامد وارد اتاق شود؟

۱) ۲۴۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۷۲۰ ۴) ۳۶۰

۱۱۹۸ ۷ سخنران در یک همایش فرهنگی شرکت کرده‌اند. در چند حالت علی قبل از رضا و رضا قبل از حسین سخنرانی خود را شروع می‌کند؟

۱) ۴۲۰ ۲) ۸۴۰ ۳) ۴۸۰ ۴) ۲۴۰

۱۱۹۹ ۵ نفر پشت سرهم سوار اتوبوس می‌شوند. به چند طریق این عمل ممکن است به‌طوری که فرد A قبل از B و فرد B بعد از C سوار اتوبوس شوند؟

۱) ۴۰ ۲) ۶۰ ۳) ۲۰ ۴) ۸۰

۱۲۰۰ پنج نفر به نام‌های a ، b ، c ، d و e قرار است، در یک همایش سخنرانی کنند. ترتیب سخنرانی این افراد به چند طریق ممکن است، اگر بین a و b فقط یک نفر سخنرانی کند؟

۱) ۲۴ ۲) ۳۶ ۳) ۵۴ ۴) ۶۰

تست‌های این قسمت برای مطالعهٔ بیشتر و محبان ریاضی است.

جایگشت با تکرار

۱۲۰۱ چند عدد شش رقمی با ارقام {۵ , ۴ , ۴ , ۳ , ۳ , ۳} می‌توان ساخت؟

۱) ۵۰ ۲) ۶۰ ۳) ۷۰ ۴) ۸۰

۱۲۰۲ چند عدد پنج رقمی با ارقام {۰ , ۲ , ۲ , ۳ , ۳} می‌توان نوشت؟

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۴۸ ۴) ۹۶

۱۲۰۳ با ارقام {۰ , ۰ , ۰ , ۳ , ۳ , ۳} چند عدد زوج شش رقمی می‌توان نوشت؟

۱) ۲۴ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) ۱۸

تست آموزشی **در بیمارستان کسری تهران، روزانه ۱۵ نوزاد متولد می‌شود. احتمال آن‌که حداکثر ۱۳ نفر از آن‌ها پسر باشد، چند برابر عدد $(۲^{۱۱}-۱)$ است؟**

۱) $\frac{۱}{۲^{۱۳}}$ ۲) $\frac{۱}{۲^{۱۵}}$ ۳) $\frac{۱}{۲^{۱۱}}$ ۴) $\frac{۱}{۲^{۱۰}}$

پاسخ گزینهٔ ۳ تعداد کل حالات برای به دنیا آمدن فرزندان با توجه به آن‌که پسر هستند یا دختر، $۲^{۱۵}$ حالت می‌شود. $(n(S)=۲^{۱۵})$. از طرفی چون محاسبهٔ احتمال حداکثر ۱۳ پسر کار وقت‌گیری است، از روش متمم استفاده می‌کنیم. به این‌صورت که حالات نامطلوب یعنی حالاتی که ۱۴ تا از فرزندان یا ۱۵ تا از آن‌ها پسر باشد، را محاسبه می‌کنیم:

$$n(A')=\underbrace{\binom{۱۵}{۱۴}}_{۱۴\text{ پسر}}+\underbrace{\binom{۱۵}{۱۵}}_{۱۵\text{ پسر}}=۱۵+۱=۱۶$$

در نتیجه $P(A')=\frac{n(A')}{n(S)}=\frac{۱۶}{۲^{۱۵}}=\frac{۲^{۴}}{۲^{۱۵}}=\frac{۱}{۲^{۱۱}}$ می‌باشد و احتمال مطلوب مسئله $P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۱}{۲^{۱۱}}=\frac{۱}{۲^{۱۱}}\times(۲^{۱۱}-۱)$ است.

تست آموزشی **در جعبه‌ای ۳ مهرهٔ سفید، ۵ مهرهٔ آبی و ۲ مهرهٔ سبز داریم. دو مهره به تصادف خارج می‌کنیم. احتمال این‌که حداقل یکی از مهره‌ها سفید باشد، کدام است؟**

۱) $\frac{۸}{۱۵}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۱۵}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ گزینهٔ ۱ روش اول: می‌خواهیم از بین ۱۰ مهرهٔ متمایز درون جعبه ۲ تا از آن‌ها را به تصادف برداریم، پس $n(S)=\binom{۱۰}{۲}=۴۵$، از طرفی می‌خواهیم حداقل یکی از مهره‌ها سفید باشد، بنابراین تعداد حالات مطلوب برابر است با:

$$n(A)=\underbrace{\binom{۳}{۲}}_{\text{هر ۲ مهره سفید}}+\underbrace{\binom{۳}{۱}\binom{۵}{۱}}_{\text{۱ مهره سفید و ۱ مهره آبی}}+\underbrace{\binom{۳}{۱}\binom{۲}{۱}}_{\text{۱ مهره سفید و ۱ مهره سبز}}=۳+۱۵+۶=۲۴$$

در نتیجه احتمال مطلوب برابر $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲۴}{۴۵}=\frac{۸}{۱۵}$ می‌باشد.

روش دوم: برای حل این مسئله می‌توانیم از اصل متمم استفاده کنیم. تعداد حالات نامطلوب، تعداد حالاتی است که هیچ مهرهٔ سفیدی خارج نشود، یعنی هر ۲ مهره از مهره‌های آبی و سبز $(۲+۵=۷)$ انتخاب شوند. پس می‌توان نوشت:

$$n(A')=\binom{۷}{۲}=\frac{۷\times۶}{۲}=۲۱\Rightarrow P(A')=\frac{n(A')}{n(S)}=\frac{۲۱}{۴۵}=\frac{۷}{۱۵}$$

در نهایت $P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۷}{۱۵}=\frac{۸}{۱۵}$ می‌باشد.

تست آموزشی **در جعبه‌ای ۴ مداد قرمز و ۳ مداد آبی متمایز وجود دارد. ۳ مداد متوالیاً و بدون جای‌گذاری از جعبه خارج می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که مداد خارج شدهٔ اول و دوم آبی باشد؟**

۱) $\frac{۴}{۳۵}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۶}{۳۵}$ ۴) $\frac{۱}{۷}$

پاسخ گزینهٔ ۴ می‌خواهیم از بین ۷ مداد متمایز، ۳ مداد را متوالیاً و بدون جای‌گذاری خارج کنیم به‌طوری که مداد خارج شدهٔ اول و دوم آبی باشد، پس می‌توان نوشت:

$$n(S)=\binom{۷}{۱}\binom{۶}{۱}\binom{۵}{۱}=۲۱۰\quad,\quad n(A)=\underbrace{\binom{۳}{۱}\binom{۲}{۱}}_{\text{۲ تای اول آبی}}\underbrace{\binom{۴}{۱}}_{\text{سومی قرمز}}+\underbrace{\binom{۳}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۱}{۱}}_{\text{۳ تا پشت سر هم آبی}}=۲۴+۶=۳۰$$

البته خفن‌ترها $n(A)$ را به‌صورت زیر می‌نویسند:

$$n(A)=\underbrace{\binom{۳}{۱}\binom{۲}{۱}}_{\text{۲ تای اول آبی}}\underbrace{\binom{۵}{۱}}_{\text{۱ مهره از بین ۵ مهره دیگر}}=۳۰$$

در نتیجه احتمال پیشامد A برابر $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳۰}{۲۱۰}=\frac{۱}{۷}$ است.

تست آموزشی **در جایگشت‌های حروف کلمهٔ «جهانگردی»، چقدر احتمال دارد دو حرف «د» و «ج» کنار هم نباشند؟**

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۸}$

پاسخ گزینهٔ ۱ برای حل این مسئله از اصل متمم کمک می‌گیریم. تعداد کل جایگشت‌های این کلمهٔ ۸ حرفی، !۸ می‌باشد. از طرفی تعداد حالت نامطلوب مسئله، تعداد حالاتی است که دو حرف «د» و «ج» کنار هم باشند که برای محاسبهٔ آن، داریم:

جایگشت دو حرف درون بسته

$\boxed{\text{د، ج}}$، ه، ا، ن، گ، ر، ی $\Rightarrow n(A')=۷!\times۲!\Rightarrow P(A')=\frac{n(A')}{n(S)}=\frac{۲!\times۷!}{۸!}=\frac{۲\times۷!}{۸\times۷!}=\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴}$

پس احتمال مطلوب $P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۴}$ می‌باشد.

سکه و فرزند

۱۳۲۸ در پرتاب چهار سکه با هم، احتمال این‌که دقیقاً سه سکه «رو» یا دقیقاً سه سکه «پشت» بیاید، کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۱۶}$ ۲) $\frac{۷}{۱۶}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۳۲۹ در پرتاب پنج سکهٔ سالم، با کدام احتمال، حداقل ۳ بار «پشت» ظاهر می‌شود؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۱۶}$

۱۳۳۰ سکه‌ای را آن‌قدر پرتاب می‌کنیم تا «رو» ظاهر شود. با کدام احتمال، در کمتر از ۵ پرتاب، «رو» ظاهر می‌شود؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۷}{۸}$ ۴) $\frac{۱۵}{۱۶}$

۱۳۳۱ در یک بیمارستان ۵ نوزاد در یک روز متولد شده‌اند. با کدام احتمال حداقل دو نفر از آن‌ها دختر هستند؟

۱) $\frac{۵}{۱۶}$ ۲) $\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۷}{۱۶}$ ۴) $\frac{۱۳}{۱۶}$

۱۳۳۲ در یک خانوادهٔ ۵ فرزندی، احتمال آن‌که حداقل یکی از فرزندان خانواده دختر باشد از احتمال این‌که حداکثر یکی از فرزندان دختر باشد، چقدر بیشتر است؟ *(برگرفته از کتاب درسی)*

۱) $\frac{۱۹}{۳۲}$ ۲) $\frac{۲۱}{۳۲}$ ۳) $\frac{۲۵}{۳۲}$ ۴) $\frac{۳۱}{۳۲}$

۱۳۳۳ خانواده‌های A و B هر کدام دارای ۳ فرزند هستند. احتمال آن‌که تعداد دخترهای خانوادهٔ A از تعداد دخترهای خانوادهٔ B بیشتر باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱۷}{۳۲}$ ۲) $\frac{۷}{۳۲}$ ۳) $\frac{۹}{۳۲}$ ۴) $\frac{۱۱}{۳۲}$

کیسه و مهره

۱۳۳۴ از ۱۲ کتاب که ۵ عدد آن‌ها در مورد ادبیات و ۷ عدد آن‌ها در مورد تاریخ است، به‌طور تصادفی ۵ کتاب انتخاب کرده‌ایم. احتمال این‌که ۳ کتاب ادبیات و ۲ کتاب تاریخ انتخاب شده باشد، کدام است؟ *(ریاضی خارج ۹۱)*

۱) $\frac{۱۵}{۶۶}$ ۲) $\frac{۱۷}{۶۶}$ ۳) $\frac{۳۵}{۱۳۲}$ ۴) $\frac{۳۷}{۱۳۲}$

۱۳۳۵ در ظرفی ۴ مهرهٔ سفید و ۵ مهره سیاه موجود است. به تصادف ۳ مهره از ظرف خارج می‌کنیم. با کدام احتمال، مهره‌های خارج شده هم‌رنگ‌اند؟ *(تجربی خارج ۹۲)*

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۳}{۱۴}$ ۳) $\frac{۲}{۹}$ ۴) $\frac{۵}{۱۴}$

۱۳۳۶ در کیسه‌ای ۵ مهرهٔ سفید، ۴ مهرهٔ سیاه و ۳ مهرهٔ آبی وجود دارد. ۳ مهره به تصادف از کیسه بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال، رنگ مهره‌های خارج شده متفاوت است؟ *(تجربی داخل ۹۶)*

۱) $\frac{۵}{۲۲}$ ۲) $\frac{۳}{۱۱}$ ۳) $\frac{۷}{۱۲}$ ۴) $\frac{۴}{۱۱}$

۱۳۳۷ از کیسه‌ای شامل ۶ مهرهٔ آبی و ۴ مهرهٔ قرمز، ۲ مهره خارج می‌کنیم. اگر A پیشامد «هم‌رنگ بودن مهره‌ها» و B پیشامد «غیر هم‌رنگ بودن مهره‌ها» باشد، $\frac{P(B)}{P(A)}$ کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۱۵}$ ۲) $\frac{۸}{۱۵}$ ۳) $\frac{۸}{۷}$ ۴) $\frac{۷}{۸}$

۱۳۳۸ در کیسه‌ای ۴ مهرهٔ سفید، ۳ مهرهٔ سیاه و ۲ مهرهٔ قرمز وجود دارد. به تصادف ۳ مهره از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال، فقط یکی از مهره‌ها سفید است؟ *(تجربی خارج ۹۵)*

۱) $\frac{۸}{۲۱}$ ۲) $\frac{۱۷}{۴۲}$ ۳) $\frac{۱۰}{۲۱}$ ۴) $\frac{۹}{۱۴}$

۱۳۳۹ کیسه‌ای دارای ۵ مهرهٔ قرمز، ۴ مهرهٔ آبی و ۳ مهرهٔ زرد است. از این کیسه ۶ مهره را به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آنکه در بین مهره‌های انتخابی، مهره آبی وجود نداشته باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳۳}$ ۲) $\frac{۱}{۳۲}$ ۳) $\frac{۱}{۱۶}$ ۴) $\frac{۱}{۱۵}$

۱۳۴۰ در آزمایشگاهی ۵ موش سالم و ۳ موش بیمار داریم. اگر دو موش از لانهٔ خود فرار کنند، با چه احتمالی یکی از موش‌های فراری، بیمار است؟

۱) $\frac{۱۷}{۲۸}$ ۲) $\frac{۱۳}{۲۸}$ ۳) $\frac{۱۵}{۲۸}$ ۴) $\frac{۱۵}{۲۴}$

فصل اول: مجموعه، الگو و دنباله

۱ | ۱ می‌دانیم تکرار و ترتیب اعضاء در مجموعه‌ها بی‌اثر است، درواقع $\{a,a,b\}$ ، $\{a,b\}$ و $\{b,a\}$ همگی یکی هستند، پس مجموعهٔ A به‌صورت زیر قابل نمایش است:

$$A=\{a,b,\{a,b\},\{b,a\},\{a,a,b\}\}=\{a,b,\{a,b\}\}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید این مجموعه، ۳ عضو دارد.

۲ | ۳ تمام گزینه‌ها سه عضوی می‌باشند، به‌جز گزینهٔ «۳» که دو عضوی است. ببینید:

گزینهٔ «۱»: $\{\{x,\{x\},\varnothing\}, x,\{x\}\}\Rightarrow$ ۳ عضو

گزینهٔ «۲»: $\{\varnothing,\{\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\},\{\{x\}\}\}\Rightarrow$ ۳ عضو

گزینهٔ «۳»: $\{\{x\},\underbrace{\{\varnothing,\{y\}\},\{\{y\},\varnothing\}}_{\text{تکراری}}\}\Rightarrow$ ۲ عضو

گزینهٔ «۴»: $\{\{x,\{\varnothing\}\},\{x\},\varnothing\}\Rightarrow$ ۳ عضو

حواستان باشد که تکرار و ترتیب در مجموعه‌ها مهم نیست و در گزینهٔ «۳» دو عضو $\{\varnothing,\{y\}\}$ و $\{\{y\},\varnothing\}$ باهم فرقی ندارند.

۳ | ۴ اعضای مجموعهٔ A عددهایی به شکل $y=5-3x$ هستند که در آن‌ها $x\in\mathbb{N}$ می‌باشد. درواقع برای مشاهدهٔ بعضی از اعضای این مجموعه به x عددهای طبیعی ۱، ۲، ۳ و ... را می‌دهیم تا yهایشان را پیدا کنیم. ببینید:

$$x=1: y=5-3(1)=2\ ,\ x=2: y=5-3(2)=5-6=-1\ ,\ x=3: y=5-3(3)=5-9=-4\ ,\ x=4: y=5-3(4)=5-12=-7$$

در نتیجه بعضی از اعضای مجموعهٔ A به‌صورت $A=\{2,-1,-4,-7,...\}$ هستند که حاصل‌ضرب دو عضو بزرگتر این مجموعه برابر $2\times(-1)=-2$ است.

۴ | ۳ مجموعهٔ A یک مجموعهٔ تک عضوی است که تنها عضو آن هم $\varnothing$ است ($\{\varnothing\}$ عضو A نیست) و زیرمجموعه‌های آن $\varnothing$ و $\{\varnothing\}$ می‌باشند. در نتیجه تنها گزینهٔ نادرست، گزینهٔ «۳» است.

۵ | ۲ خیلی واضح است که $A=\{2\}$ عضو مجموعهٔ $B=\{3,5,\{2\}\}$ و مجموعهٔ B، عضو مجموعهٔ $C=\{\{\{2\},3,5\},2\}$ است، پس گزینه‌های «۱» و «۳» درست هستند. از طرفی همگی قبول داریم که مجموعهٔ A زیرمجموعهٔ مجموعهٔ C است (قبوله؟)، پس گزینهٔ «۴» هم درست است.

در آخر حواستان باشد که $A=\{2\}\in C$ نیست ولی $2\in C$ می‌باشد.

۶ | ۲ می‌دانیم در مجموعه تکرار و ترتیب اعضا تأثیری ندارد، پس مجموعهٔ A به‌صورت زیر قابل نمایش است:

$$A=\{1,2,3,\{1,3\},\{3,1\}\}=\{1,2,3,\{1,3\}\}$$

زیرمجموعه‌های A که شامل عضو $\{1,3\}$ باشند ولی ۲ را ندارند به‌صورت زیر می‌باشد:

$$A_1=\{\{1,3\}\}\ ,\ A_2=\{1,\{1,3\}\}\ ,\ A_3=\{3,\{1,3\}\}\ ,\ A_4=\{1,3,\{1,3\}\}$$

تعداد زیرمجموعه‌های خواسته شده ۴ تا است.

۷ | ۴ این مجموعه ۴ زیرمجموعه دارد، پس دو عضوی است که آن دو عضو هم ۱ و ۱- هستند (هله؟). پس برای دو عضو دیگر آن، یعنی $x-y$ و $2x+y$ چهار حالت رخ می‌دهد. ببینید:

حالت اول: $\begin{cases}2x+y=1\\x-y=-1\end{cases}\Rightarrow 3x=0\Rightarrow x=0\ ,\ y=1\Rightarrow -2x+\frac{y}{2}=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

حالت دوم: $\begin{cases}2x+y=-1\\x-y=1\end{cases}\Rightarrow 3x=0\Rightarrow x=0\ ,\ y=-1\Rightarrow -2x+\frac{y}{2}=0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$

حالت سوم: $\begin{cases}2x+y=-1\\x-y=-1\end{cases}\Rightarrow 3x=-2\Rightarrow x=-\frac{2}{3}\ ,\ y=\frac{1}{3}\Rightarrow -2x+\frac{y}{2}=\frac{4}{3}+\frac{1}{6}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$

حالت چهارم: $\begin{cases}2x+y=1\\x-y=1\end{cases}\Rightarrow 3x=2\Rightarrow x=\frac{2}{3}\ ,\ y=\frac{-1}{3}\Rightarrow -2x+\frac{y}{2}=\frac{-4}{3}-\frac{1}{6}=\frac{-9}{6}=-\frac{3}{2}$

با توجه به مقادیر به‌دست آمده برای عبارت $-2x+\frac{y}{2}$ ، بیشترین مقدار آن برابر $\frac{3}{2}$ است.

۲۷ | ۴ تک تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ «۱»: اشتراک $\mathbb{Q}$ با $\mathbb{N}$ می‌شود $\mathbb{N}$ که زیرمجموعهٔ W یا همان اعداد حسابی است. ✓

گزینه‌های «۲» و «۳»: قبول دارید که $\mathbb{Q}'-\mathbb{R}$ و $\mathbb{Q}\cap\mathbb{Q}'$ هر دو تهی هستند و تهی زیرمجموعهٔ همهٔ مجموعه‌هاست؟ اگر موافقید باید بگوییم که این گزینه‌ها هم درست هستند. ✓

گزینهٔ «۴»: مجموعهٔ $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ شامل همهٔ عددهای حقیقی به‌جز اعداد صحیح است مثلاً $\frac{1}{2}$، $\sqrt{2}$ و ... (اوکی؟)، پس این مجموعه زیرمجموعهٔ $\mathbb{Q}$ نیست و این گزینه نادرست است. ×

۲۸ | ۴ به بررسی تک‌تک گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینهٔ «۱»: مجموعهٔ $\mathbb{Z}-\mathbb{N}$ شامل عددهای صحیح منفی و صفر است که اگر این مجموعه را از $\mathbb{Q}$ کم کنیم، همهٔ اعداد گویا به‌جز عددهای صحیح و منفی را داریم، مثلاً عددهایی مانند $\pm\frac{1}{2}$ که در آخر اگر این مجموعه را منهای $\mathbb{N}$ کنیم، بی‌شمار عدد از جمله $\pm\frac{1}{2}$ و ... را دارد، پس این مجموعه غیرتهی است. ×

گزینهٔ «۲»: $\mathbb{Q}'$ و $\mathbb{Z}$ هیچ اشتراکی ندارند، پس $\mathbb{Q}'-\mathbb{Z}=\mathbb{Q}'$ است و در نهایت چون دو مجموعهٔ $\mathbb{Q}'-\mathbb{Z}=\mathbb{Q}'$ و $\mathbb{N}$ از هم مجزا هستند، پس $(\mathbb{Q}'-\mathbb{Z})-\mathbb{N}=\mathbb{Q}'-\mathbb{Z}=\mathbb{Q}'$ است که این مجموعه بی‌شمار عضو دارد. ×

گزینهٔ «۳»: تنها عضو مجموعهٔ $W-\mathbb{N}$، صفر است و مجموعهٔ $\mathbb{Q}-\mathbb{Z}$ شامل عضو صفر نیست، پس مجموعهٔ $(W-\mathbb{N})-(\mathbb{Q}-\mathbb{Z})$ همان تک عضوی $\{0\}$ می‌باشد که مجموعه‌ای غیرتهی است. ×

گزینهٔ «۴»: دو مجموعهٔ $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Q}'$ هیچ اشتراکی ندارند، پس $\mathbb{Q}-\mathbb{Q}'$ همان مجموعهٔ اعداد گویا یعنی $\mathbb{Q}$ می‌باشد که اگر این مجموعه را از مجموعهٔ اعداد صحیح کم کنیم عضوی باقی نمی‌ماند و حاصل $\varnothing$ می‌شود. ✓

۲۹ | ۳ همان‌طور که می‌دانیم $W\subseteq\mathbb{N}$ است، پس $W\cap\mathbb{N}=\mathbb{N}$ و همچنین $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$ پس $\mathbb{Q}\cup\mathbb{R}=\mathbb{R}$ می‌باشد. خلاصه اینکه سادهٔ شدهٔ عبارت داده شده برابر با $(\mathbb{N}-\mathbb{R})\cup\mathbb{Q}'$ است، حالا با توجه به این‌که $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{R}$، می‌توان نوشت:

$$(\mathbb{N}-\mathbb{R})\cup\mathbb{Q}' \xrightarrow[\mathbb{N}-\mathbb{R}=\varnothing]{\mathbb{N}\subseteq\mathbb{R}} \varnothing\cup\mathbb{Q}'=\mathbb{Q}'$$

تنها گزینهٔ درست، گزینهٔ «۳» یعنی $\mathbb{R}-\mathbb{Q}=\mathbb{Q}'$ است.

۳۰ | ۴ تنها گزینهٔ درست، گزینهٔ «۴» است. برای نشان دادن درستی این گزینه، فرض می‌کنیم $\alpha=\sqrt{2}+1$ باشد، ببینید:

$$\sqrt{2}(\alpha-1)=\sqrt{2}(\sqrt{2}+1-1)=\sqrt{2}(\sqrt{2})=2$$

حالا نادرستی سایر گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ «۱»: $\alpha=\sqrt{2}\ ,\ \beta=2\sqrt{2}\Rightarrow\alpha\times\beta=\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=4\in\mathbb{Q}$ ×

گزینهٔ «۲»: $\alpha=0\ ,\ \beta=\sqrt{2}\Rightarrow\alpha\times\beta=0\in\mathbb{Q}$ ×

گزینهٔ «۳»: در مورد این گزینه هم که طبق گفته‌هایمان در درسنامه می‌دانیم جمع یک عدد گنگ با یک عدد گویا حتماً عددی گنگ است. ×

۳۱ | ۱ شاید برایتان جالب باشد که همهٔ عددهای داده شده، امکان گویا شدن دارند. ببینید:

$$\alpha+2\beta:\alpha=2\sqrt{2}\ ,\ \beta=-\sqrt{2}\Rightarrow\alpha+2\beta=2\sqrt{2}-2\sqrt{2}=0\in\mathbb{Q}\ \checkmark$$

$$\alpha\beta:\alpha=\sqrt{2}\ ,\ \beta=2\sqrt{2}\Rightarrow\alpha.\beta=(\sqrt{2})(2\sqrt{2})=4\in\mathbb{Q}\ \checkmark$$

$$\alpha\sqrt{\beta}:\alpha=\sqrt[4]{2^3}\ ,\ \beta=\sqrt{2}\Rightarrow\alpha\sqrt{\beta}=\sqrt[4]{2^3}\times\sqrt{\sqrt{2}}=\sqrt[4]{2^3}\times\sqrt[4]{2}=\sqrt[4]{2^4}=2\in\mathbb{Q}\ \checkmark$$

احتمالاً پیداکردن دو عدد گنگ α و β که جواب $\alpha\sqrt{\beta}$ را گویا کند، برایتان کمی غیرقابل باور است. (درست می‌گم؟)

۳۲ | ۲ با فرض گنگ بودن α، ممکن است $\alpha^2-2\alpha$ گویا شود. برای این‌کار به‌کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای می‌توان نوشت:

$$\alpha^2-2\alpha=(\alpha-1)^2-1$$

حالا مثلاً اگر $\alpha=\sqrt{2}+1$ باشد، پس داریم:

$$\alpha^2-2\alpha=(\sqrt{2}+1-1)^2-1=2-1=1\in\mathbb{Q}$$

حالا برویم و برای بقیهٔ گزینه‌ها مثال نقض بزنیم:

گزینهٔ «۱»: با فرض $\alpha=\beta=\sqrt{2}$ حاصل $\frac{\alpha}{2\beta}=\frac{1}{2}$ می‌شود که عددی گویا است. ×

گزینهٔ «۳»: با فرض $\alpha=\sqrt{2}$ و $\beta=\sqrt[4]{2}$ داریم:

$$\alpha\beta^2=(\sqrt{2})\times(\sqrt[4]{2})^2=\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2\in\mathbb{Q}\ \times$$

گزینهٔ «۴»: با فرض $\alpha=\sqrt{2}$ و $\beta=2-\sqrt{2}$، مقدار $\alpha+\beta=(\sqrt{2})+(2-\sqrt{2})=2$ گویا است. ×

حالا به بررسی تک‌تک گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینهٔ «۱»: $A-B=\{۱,۲\}$ (متناهی) ×
گزینهٔ «۲»: $A\cap B=\varnothing$ (متناهی) ×
گزینهٔ «۳»: $\mathbb{Z}-B=\{۰,۱,۲,...\}$ (نامتناهی) ✓
گزینهٔ «۴»: $A-\mathbb{Z}=\varnothing$ (متناهی) ×

۵۵ | ۱ اجتماع دو مجموعهٔ نامتناهی، قطعاً نامتناهی است، پس $A\cup B$ نامتناهی است. برای دو مجموعهٔ دیگر نیز می‌توانیم مثال‌هایی بزنیم که نامتناهی باشند:

الف) $A-B$: فرض کنیم $A=\mathbb{Z}$ و $B=\mathbb{N}$ باشد در این‌صورت $A-B=\{...,-۳,-۲,-۱,۰\}$ است که مجموعه‌ای نامتناهی می‌باشد.

ب) $A\cap B$: فرض کنیم $A=\mathbb{Z}$ و $B=\mathbb{N}$ باشد، در این‌صورت $A\cap B=\mathbb{N}$ می‌شود که نامتناهی است.

۵۶ | ۲ هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ «۱»: A متناهی است و $B\subseteq A$ است، پس B هم متناهی است و در نتیجه $A\cup B$ قطعاً متناهی است. ✓

گزینهٔ «۲»: $A\subseteq B$ است، B می‌تواند متناهی هم باشد که در این‌صورت $B-A$ متناهی می‌شود. برای مثال اگر $A=\{۱\}$ و $B=\{۱,۲\}$ باشند، $B-A=\{۲\}$ می‌باشد. ×

گزینهٔ «۳»: $B\subseteq A$ است و A متناهی است، پس B هم متناهی است و در نتیجه $B-A=\varnothing$ می‌شود که به‌وضوح مجموعه‌ای متناهی است. ✓

گزینهٔ «۴»: فرض کنیم $A=\{۱\}$ و $B=\{۱,۲\}$ باشد، در این‌صورت $A\cup B$ متناهی می‌شود. ✓

۵۷ | ۳ مجموعهٔ A برابر با $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ است. حالا به بررسی تک تک گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینهٔ «۱»: مجموعهٔ B را با توجه به شرط داده شده به‌دست می‌آوریم:

$$x+۲\le ۵\Rightarrow x\le ۳\xrightarrow{x\in W}B=\{۰,۱,۲,۳\}$$

در این‌صورت هم اجتماع و هم اشتراک دو مجموعهٔ A و B متناهی خواهد شد. ×

گزینهٔ «۲»: در این حالت $A\cap B$ برابر با تهی خواهد بود. چراکه هیچ یک از اعضای مجموعهٔ A، در مجموعهٔ B قرار ندارد. ×

گزینهٔ «۳»: مجموعهٔ B را با توجه به شرط داده‌شده پیدا می‌کنیم:

$$۴\le x+۱\le ۵\xrightarrow{-۱}۳\le x\le ۴\xrightarrow{x\in\mathbb{R}}B=[۳,۴]$$

در این صورت اجتماع دو مجموعه، نامتناهی و اشتراک آن‌ها متناهی خواهد شد، ببینید:

$A\cup B=[۳,۴]\cup\{۱,۲\}$ (نامتناهی) ، $A\cap B=\{۳,۴\}$ (متناهی) ✓

گزینهٔ «۴»: برای پیدا کردن مجموعهٔ B با توجه به شرط داده شده می‌توان نوشت:

$$x+۲\le ۲\Rightarrow x\le ۰\xrightarrow{x\in\mathbb{Z}}B=\{...,-۳,-۲,-۱,۰\}$$

در این‌صورت اجتماع دو مجموعه، نامتناهی است اما اشتراک دو مجموعه برابر با تهی است. ×

۵۸ | ۱ می‌دانیم که اشتراک مجموعهٔ متناهی A و مجموعهٔ نامتناهی B حتماً یک مجموعهٔ متناهی است، یعنی $A\cap B$ مجموعه‌ای متناهی می‌باشد و در نتیجه متمم آن نسبت به مجموعهٔ مرجع، یعنی $\mathbb{N}$ حتماً یک مجموعهٔ نامتناهی (بی‌پایان) است و پاسخ تست گزینهٔ «۱» می‌باشد.

مثال نقض برای سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ «۲»: $A=\{۱\},B=\{۳,۴,۵,...\}\Rightarrow A-B=\{۱\}$ ×

گزینهٔ «۳»: $A=\{۱\},B=\{۳,۴,۵,...\}\Rightarrow B'=\{۱,۲\}\Rightarrow A\cup B'=\{۱,۲\}$ ×

گزینهٔ «۴»: $A=\{۱\},B=\{۳,۴,۵,...\}\Rightarrow A\cup B=\{۱,۳,۴,۵,...\}\Rightarrow (A\cup B)'=\{۲\}$ ×

۵۹ | ۴ مجموعهٔ $\mathbb{Z}-A$ متناهی است، پس حتماً A نامتناهی بوده است. همهٔ موارد آمده در گزینه‌های «۱»، «۲» و «۳» با مجموعهٔ $A=\mathbb{Z}-\{۰\}$ نقض می‌شود، ببینید:

گزینهٔ «۱»: $A-\mathbb{N}=(\mathbb{Z}-\{۰\})-\mathbb{N}=\{...,-۳,-۲,-۱\}$ نامتناهی ×

گزینهٔ «۲»: $\underbrace{\mathbb{Q}}_{\text{نامتناهی}}-\underbrace{(\mathbb{Z}-A)}_{\text{متناهی}}=$ نامتناهی ×

واضح است که اگر تعدادی متناهی عضو از یک مجموعهٔ نامتناهی حذف شود، باز هم مجموعهٔ حاصل نامتناهی باقی می‌ماند.

گزینهٔ «۳»: $\mathbb{Z}-(A-\mathbb{N})=\mathbb{Z}-((\mathbb{Z}-\{۰\})-\mathbb{N})=\mathbb{Z}-\{...,-۳,-۲,-۱\}=\{۰,۱,۲,...\}$ نامتناهی ×

پاسخ تست گزینهٔ «۴» است.

۱۹۷ | **۱** می‌دانیم بین دو جملهٔ t_m و t_n در دنبالهٔ حسابی رابطهٔ $t_m = t_n + (m-n)d$ برقرار است، پس $t_{۱۷} = t_۸ + ۹d$ است و می‌توان نوشت:

$$t_۸ . t_{۱۷} = ۲۴ \Rightarrow t_۸(t_۸+۹d) = ۲۴ \Rightarrow t_۸^۲ + ۹t_۸d = ۲۴$$

از طرفی حاصل‌ضرب جملات یازدهم و چهاردهم ۹۶ است. با توجه به رابطهٔ گفته شده قدرنسبت دنباله را به‌دست می‌آوریم:

$$t_{۱۱}.t_{۱۴} = ۹۶ \Rightarrow (t_۸+۳d)(t_۸+۶d) = ۹۶ \Rightarrow t_۸^۲ + ۹t_۸d + ۱۸d^۲ = ۹۶ \xrightarrow{t_۸^۲+۹t_۸d=۲۴} ۲۴ + ۱۸d^۲ = ۹۶ \Rightarrow ۱۸d^۲ = ۷۲ \Rightarrow d^۲ = ۴ \Rightarrow \begin{cases} d = ۲ \checkmark \\ d = -۲ \times \end{cases}$$

با توجه به اینکه دنباله صعودی است، پس قدرنسبت دنباله مثبت است و $d = ۲$ قابل قبول می‌باشد.

۱۹۸ | **۱** سه جملهٔ دوم دنباله، $a_۴$، $a_۵$ و $a_۶$ و سه جملهٔ سوم دنباله، $a_۷$، $a_۸$ و $a_۹$ هستند، پس طبق فرض مسئله می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} a_۴+a_۵+a_۶ = ۲۰ \\ a_۷+a_۸+a_۹ = ۷۴ \end{cases} \xrightarrow{\text{دومی منهای اولی}} (a_۷+a_۸+a_۹)-(a_۴+a_۵+a_۶) = ۵۴ \Rightarrow \underbrace{(a_۹-a_۶)}_{۳d} + \underbrace{(a_۸-a_۵)}_{۳d} + \underbrace{(a_۷-a_۴)}_{۳d} = ۹d = ۵۴ \Rightarrow d = ۶$$

از طرفی می‌دانیم $a_۴+a_۵+a_۶ = ۳a_۵$ (حله؟)، پس داریم:

$$۳a_۵ = ۲۰ \Rightarrow ۳(a_۱+۴d) = ۲۰ \xrightarrow{d=۶} ۳a_۱ + ۷۲ = ۲۰ \Rightarrow ۳a_۱ = -۵۲ \Rightarrow a_۱ = -\frac{۵۲}{۳}$$

در نهایت خواستهٔ مسئله برابر است با:

$$a_۱+a_۲+a_۳ = a_۱ + a_۱ + d + a_۱ + ۲d = ۳a_۱ + ۳d = ۳(\frac{-۵۲}{۳}) + ۳(۶) = -۵۲ + ۱۸ = -۳۴$$

۱۹۹ | **۳** طبق فرض مسئله مجموع جملات ردیف فرد و زوج به‌ترتیب ۱۳۵ و ۱۵۰ می‌باشند، پس به زبان ریاضی داریم:

$$a_۱+a_۳+a_۵+...+a_{۱۹} = ۱۳۵ \quad , \quad a_۲+a_۴+a_۶+...+a_{۲۰} = ۱۵۰$$

حالا مجموع جملات زوج را منهای مجموع جملات فرد می‌کنیم، از طرفی می‌دانیم اختلاف دو جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ حسابی برابر قدرنسبت است، پس داریم:

$$(a_۲+a_۴+...+a_{۲۰})-(a_۱+a_۳+...+a_{۱۹}) = \overset{d}{(\cancel{a_۲-a_۱})} + \overset{d}{(\cancel{a_۴-a_۳})} + ... + \overset{d}{(\cancel{a_{۲۰}-a_{۱۹}})} = \underbrace{d+d+...+d}_{\text{۱۰ تا}} = ۱۵۰ - ۱۳۵ \Rightarrow ۱۰d = ۱۵ \Rightarrow d = \frac{۱۵}{۱۰} = \frac{۳}{۲}$$

۲۰۰ | **۱** با کمی دقت به دنبالهٔ داده شده، مجموع جملات آن را به صورت $\frac{۱}{۳}(\frac{۵-۲}{۲\times۵}) + \frac{۱}{۳}(\frac{۸-۵}{۵\times۸}) + ... + \frac{۱}{۳}(\frac{۲۰-۱۷}{۱۷\times۲۰})$ می‌نویسیم، حالا با تفکیک کسرهای داده شده داریم:

$$\frac{۱}{۳}(\frac{۱}{۲} - \cancel{\frac{۱}{۵}} + \cancel{\frac{۱}{۵}} - \cancel{\frac{۱}{۸}} + ... + \cancel{\frac{۱}{۱۷}} - \frac{۱}{۲۰}) = \frac{۱}{۳}(\frac{۱۰-۱}{۲۰}) = \frac{۳}{۲۰} = ۰/۱۵$$

۲۰۱ | **۲** ابتدا جملهٔ عمومی دنباله را پیدا می‌کنیم:

$$t_{۴۸} - t_{۲۴} = (۴۸-۲۴)d \xrightarrow{t_{۴۸}-t_{۲۴}=-۲} -۲ = ۲۴d \Rightarrow d = \frac{-۱}{۱۲}$$

$$t_n = t_۱ + (n-۱)d \xrightarrow{t_۱=۲, d=\frac{-۱}{۱۲}} t_n = ۲ + (n-۱)(\frac{-۱}{۱۲}) \Rightarrow t_n = \frac{۱-n}{۱۲} + ۲$$

حالا باید نامعادلهٔ $t_n > ۰$ را حل کنیم، پس می‌توان نوشت:

$$\frac{۱-n}{۱۲} + ۲ > ۰ \Rightarrow \frac{۱-n}{۱۲} > -۲ \xrightarrow{\times ۱۲} ۱-n > -۲۴ \Rightarrow n < ۲۵ \xrightarrow{n\in\mathbb{N}} n \in \{۱,۲,...,۲۴\}$$

بنابراین ۲۴ جملهٔ اول دنباله، مثبت‌اند.

۲۰۲ | **۲** ابتدا جملهٔ عمومی دنباله را به‌صورت مقابل بازنویسی می‌کنیم:

$$t_n = kn^۲ + kn - ۵n^۲ - ۲۱ = (k-۵)n^۲ + kn - ۲۱$$

از طرفی می‌دانیم جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ حسابی از درجه یک است، پس باید مقدار k را به‌گونه‌ای انتخاب کنیم که ضریب $n^۲$ برابر با صفر شود:

$$k - ۵ = ۰ \Rightarrow k = ۵$$

پس جملهٔ عمومی دنباله به‌صورت $t_n = ۵n - ۲۱$ است و برای محاسبهٔ خواستهٔ مسئله باید نامعادله $t_n < ۰$ را حل کنیم:

$$t_n < ۰ \Rightarrow ۵n - ۲۱ < ۰ \Rightarrow ۵n < ۲۱ \Rightarrow n < \underbrace{\frac{۲۱}{۵}}_{=۴/۰۰۰} \xrightarrow{n\in\mathbb{N}} n = ۱,۲,۳,۴$$

در نتیجه این دنباله ۴ جمله منفی دارد.

۲۰۳ | **۲** برای پیدا کردن تعداد جملات دنباله ابتدا قدرنسبت را پیدا می‌کنیم:

$$a_۱ = ۳ \,,\, a_۳ = ۱۱ ; a_۳ = a_۱ + ۲d \Rightarrow ۱۱ = ۳ + ۲d \Rightarrow ۲d = ۸ \Rightarrow d = ۴$$

حالا برای پیدا کردن تعداد جملات می‌توان نوشت:

$$a_n = a_۱ + (n-۱)d \Rightarrow ۲۶۷ = ۳ + (n-۱)۴ \Rightarrow ۲۶۷ = ۳ + ۴n - ۴ \Rightarrow ۲۶۸ = ۴n \Rightarrow n = \frac{۲۶۸}{۴} = ۶۷$$

بنابراین، این دنباله ۶۷ جمله دارد.

۲۰۴ | **۳** از آن جایی که جملهٔ اول دنباله ۱۰ و قدرنسبت آن $d = ۱۶ - ۱۰ = ۶$ است، داریم:

$$a_n = a_۱ + (n-۱)d < ۱۲۰ \xrightarrow[d=۶]{a_۱=۱۰} (n-۱)\times۶ < ۱۱۰ \Rightarrow n-۱ < ۱۸/۳ \Rightarrow n < ۱۹/۳ \Rightarrow n \le ۱۹$$

در نتیجه در این دنباله، ۱۹ جملهٔ کوچکتر از ۱۲۰ داریم.

۴۴۰ | **۴**

ابتدا با توجه به تساوی $\frac{۱+\tan x}{۱-\tan x}=-۳$ ، مقدار $\tan x$ را به‌دست می‌آوریم. پس داریم:

$$\frac{۱+\tan x}{۱-\tan x}=-۳ \Rightarrow ۱+\tan x=-۳+۳\tan x \Rightarrow ۲\tan x=۴ \Rightarrow \tan x=۲$$

از طرفی می‌دانیم $\cot x=\frac{۱}{\tan x}=\frac{۱}{۲}$ می‌باشد، پس برای محاسبهٔ مقدار a می‌توان نوشت:

$$\frac{۵a-۳}{۴}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow ۱۰a-۶=۴ \Rightarrow ۱۰a=۱۰ \Rightarrow a=۱$$

۴۴۱ | **۱**

روش اول: با استفاده از رابطهٔ $\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha=۱$ برای ساده کردن عبارت داده شده می‌توان نوشت:

$$A=\cos^{۲}\alpha(۱+\sin^{۲}\alpha)+\sin^{۴}\alpha=\cos^{۲}\alpha+\underbrace{\sin^{۲}\alpha\cos^{۲}\alpha+\sin^{۴}\alpha}_{\text{فاکتورگیری از } \sin^{۲}\alpha}=\cos^{۲}\alpha+\sin^{۲}\alpha(\underbrace{\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha}_{۱})=\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha=۱$$

روش دوم: به‌ازای $\alpha=۳۰^\circ$ حاصل عبارت داده شده را به‌دست می‌آوریم:

$$\alpha=۳۰^\circ: A=\cos^{۲}۳۰^\circ(۱+\sin^{۲}۳۰^\circ)+\sin^{۴}۳۰^\circ=(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^{۲}(۱+(\frac{۱}{۲})^{۲})+(\frac{۱}{۲})^{۴}=\frac{۳}{۴}(\frac{۵}{۴})+\frac{۱}{۱۶}=\frac{۱۵}{۱۶}+\frac{۱}{۱۶}=\frac{۱۶}{۱۶}=۱$$

۴۴۲ | **۲**

روش اول: ابتدا عبارت $\frac{\sin\alpha\tan\alpha}{\sin\alpha\tan\alpha+\cos\alpha}$ را با استفاده از رابطهٔ $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ساده می‌کنیم. پس داریم:

$$\frac{\sin\alpha(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha})}{\sin\alpha(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha})+\cos\alpha}=\frac{\frac{\sin^{۲}\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha}{\cos\alpha}}\xlongequal{\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha=۱}\frac{\frac{\sin^{۲}\alpha}{\cancel{\cos\alpha}}}{\frac{۱}{\cancel{\cos\alpha}}}=\sin^{۲}\alpha$$

پس پاسخ مسئله $۱-\sin^{۲}\alpha=\cos^{۲}\alpha$ می‌باشد.

روش دوم: حاصل عبارت داده شده را به‌ازای $\alpha=۶۰^\circ$ به‌دست می‌آوریم:

$$\alpha=۶۰^\circ: ۱-\frac{\sin۶۰^\circ\tan۶۰^\circ}{\sin۶۰^\circ\tan۶۰^\circ+\cos۶۰^\circ}=۱-\frac{(\frac{\sqrt{۳}}{۲})(\sqrt{۳})}{(\frac{\sqrt{۳}}{۲})(\sqrt{۳})+\frac{۱}{۲}}=۱-\frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۳}{۲}+\frac{۱}{۲}}=۱-\frac{\frac{۳}{۲}}{۲}=۱-\frac{۳}{۴}=\frac{۱}{۴}$$

پس گزینه‌ای درست است که به‌ازای $\alpha=۶۰^\circ$ برابر $\frac{۱}{۴}$ شود که این اتفاق فقط در گزینهٔ «۲» رخ می‌دهد:

$$\alpha=۶۰^\circ: \cos^{۲}(۶۰^\circ)=(\frac{۱}{۲})^{۲}=\frac{۱}{۴}$$

۴۴۳ | **۴**

روش اول: با توجه به اینکه $۱-\sin x-\cos x=۱-(\sin x+\cos x)$ است، با استفاده از اتحاد مزدوج، رابطهٔ داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\frac{(۱+(\sin x+\cos x))(۱-(\sin x+\cos x))}{\sin^{۲}x}=\frac{۱-(\sin x+\cos x)^{۲}}{\sin^{۲}x}=\frac{۱-(\sin^{۲}x+\cos^{۲}x+۲\sin x\cos x)}{\sin^{۲}x}$$

$$=\frac{۱-(۱+۲\sin x\cos x)}{\sin^{۲}x}=\frac{-۲\sin x\cos x}{\sin^{۲}x}=\frac{-۲\cos x}{\sin x}=-۲\cot x$$

روش دوم: مقدار عبارت $\frac{(۱+\sin x+\cos x)(۱-\sin x-\cos x)}{\sin^{۲}x}$ را به ازای $x=۳۰^\circ$ به‌دست می‌آوریم. پس داریم:

$$\frac{(۱+\sin۳۰^\circ+\cos۳۰^\circ)(۱-\sin۳۰^\circ-\cos۳۰^\circ)}{\sin^{۲}۳۰^\circ}=\frac{(۱+\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲})(۱-\frac{۱}{۲}-\frac{\sqrt{۳}}{۲})}{(\frac{۱}{۲})^{۲}}=\frac{(\frac{۳+\sqrt{۳}}{\cancel{۲}})(\frac{۱-\sqrt{۳}}{\cancel{۲}})}{\frac{۱}{\cancel{۴}}}$$

$$=(۳+\sqrt{۳})(۱-\sqrt{۳})=\cancel{۳}-۳\sqrt{۳}+\sqrt{۳}-\cancel{۳}=-۲\sqrt{۳}$$

پس گزینه‌ای درست است که به‌ازای $x=۳۰^\circ$ برابر $-۲\sqrt{۳}$ باشد و این اتفاق فقط در گزینهٔ «۴» رخ می‌دهد:

$$x=۳۰^\circ: -۲\cot۳۰^\circ=-۲(\sqrt{۳})=-۲\sqrt{۳}\ \checkmark$$

۴۴۴ | **۳**

روش اول: می‌دانیم $۱+\tan^{۲}x=\frac{۱}{\cos^{۲}x}$ و $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ است، پس داریم:

$$A=\frac{۱+\tan^{۲}x}{\tan^{۲}x}=\frac{\frac{۱}{\cancel{\cos^{۲}x}}}{\frac{\sin^{۲}x}{\cancel{\cos^{۲}x}}}=\frac{۱}{\sin^{۲}x}\xlongequal{۱+\cot^{۲}x=\frac{۱}{\sin^{۲}x}}A=\frac{۱}{\sin^{۲}x}=۱+\cot^{۲}x$$

روش دوم: ابتدا عبارت داده شده را تفکیک می‌کنیم، پس داریم:

$$\frac{۱+\tan^{۲}x}{\tan^{۲}x}=\frac{۱}{\tan^{۲}x}+۱\xlongequal{\frac{۱}{\tan^{۲}x}=\cot^{۲}x}\cot^{۲}x+۱$$

روش سوم: با جای‌گذاری $x=۴۵^\circ$ در $A=\frac{۱+\tan^۲ x}{\tan^۲ x}$ داریم:

$$A=\frac{۱+(۱)^۲}{(۱)^۲}=۲$$

حالا گزینه‌ای درست است که به ازای $x=۴۵^\circ$ برابر با ۲ شود:

گزینهٔ «۱»: $\sin^۲(۴۵^\circ)=\frac{۱}{۲}\neq ۲$ ×

گزینهٔ «۲»: $\cos^۲(۴۵^\circ)=\frac{۱}{۲}\neq ۲$ ×

گزینهٔ «۳»: $۱+\cot^۲(۴۵^\circ)=۱+(۱)^۲=۲$ ✓

گزینهٔ «۴»: $۱-\cot^۲(۴۵^\circ)=۱-(۱)^۲=۰\neq ۲$ ×

۴۴۵ | ۳ روش اول: با استفاده از روابط $۱+\cot^۲ x=\frac{۱}{\sin^۲ x}$ و $۱+\tan^۲ x=\frac{۱}{\cos^۲ x}$ می‌توان نوشت:

$$\sin^۲ x(۱+\cot^۲ x)-\cos^۴ x(۱+\tan^۲ x)=\cancel{\sin^۲} x(\frac{۱}{\cancel{\sin^۲} x})-\cos^{\overset{۲}{\cancel{۴}}} x(\frac{۱}{\cancel{\cos^۲} x})=۱-\cos^۲ x=\sin^۲ x$$

روش دوم: حاصل عبارت داده شده را به‌ازای $x=۳۰^\circ$ به‌دست می‌آوریم:

$$x=۳۰^\circ:\sin^۲ ۳۰^\circ(۱+\cot^۲ ۳۰^\circ)-\cos^۴ ۳۰^\circ(۱+\tan^۲ ۳۰^\circ)=\frac{۱}{۴}(۱+۳)-\frac{۹}{۱۶}(۱+\frac{۱}{۳})=\frac{۱}{۴}(۴)-\frac{۹}{۱۶}(\frac{۴}{۳})=۱-\frac{۳}{۴}=\frac{۱}{۴}$$

پس گزینه‌ای درست است که به‌ازای $x=۳۰^\circ$ برابر $\frac{۱}{۴}$ شود که این اتفاق فقط در گزینهٔ «۳» رخ می‌دهد.

$$x=۳۰^\circ:\sin^۲ ۳۰^\circ=(\frac{۱}{۲})^۲=\frac{۱}{۴}$$

۴۴۶ | ۲ روش اول: می‌دانیم $۱+\tan^۲ x=\frac{۱}{\cos^۲ x}$ است، پس داریم:

$$\sin^۲ x-\frac{۱}{۱+\tan^۲ x}-۱=\sin^۲ x-\cos^۲ x-۱$$

حالا با استفاده از رابطهٔ $\sin^۲ x=۱-\cos^۲ x$ می‌توان نوشت:

$$\sin^۲ x-\cos^۲ x-۱=(۱-\cos^۲ x)-\cos^۲ x-۱=\cancel{۱}-\cos^۲ x-\cos^۲ x-\cancel{۱}=-۲\cos^۲ x$$

روش دوم: مقدار $\sin^۲ x-\frac{۱}{۱+\tan^۲ x}-۱$ را به‌ازای $x=۰^\circ$ به‌دست می‌آوریم. پس داریم:

$$x=۰^\circ:\sin^۲ ۰^\circ-\frac{۱}{۱+\tan^۲ ۰^\circ}-۱=۰-\frac{۱}{۱+۰}-۱=-۱-۱=-۲$$

پس گزینه‌ای درست است که به‌ازای $x=۰^\circ$ برابر ۲- شود که این اتفاق فقط در گزینهٔ «۲» رخ می‌دهد، ببینید:

$$x=۰^\circ:-۲\cos^۲(۰)=-۲(۱)^۲=-۲$$

۴۴۷ | ۲ می‌دانیم $۱+\cot^۲ x=\frac{۱}{\sin^۲ x}$ و $۱+\tan^۲ x=\frac{۱}{\cos^۲ x}$ است، پس داریم:

$$\sqrt{\frac{\frac{۱}{\sin^۲ x}}{\frac{۱}{\cos^۲ x}}}=\sqrt{\frac{\cos^۲ x}{\sin^۲ x}}=\sqrt{\cot^۲ x}=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\text{توان دو}}\cot^۲ x=\frac{۱}{۴}$$

برای محاسبهٔ $\sin^۲ x$ می‌توان نوشت:

$$۱+\cot^۲ x=\frac{۱}{\sin^۲ x}\Rightarrow ۱+\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{\sin^۲ x}\Rightarrow \frac{۵}{۴}=\frac{۱}{\sin^۲ x}\Rightarrow \sin^۲ x=\frac{۴}{۵}=۰/۸$$

۴۴۸ | ۴ گفتیم که $۱+\cot^۲ x=\frac{۱}{\sin^۲ x}$، پس می‌توان نوشت:

$$\frac{۱+\cot^۲ x}{\sin x}=۲۷\Rightarrow \frac{\frac{۱}{\sin^۲ x}}{\sin x}=۲۷\Rightarrow \frac{۱}{\sin^۳ x}=۲۷\Rightarrow \sin^۳ x=\frac{۱}{۲۷}\xrightarrow{\sqrt[۳]{\ }}\sin x=\frac{۱}{۳}$$

از طرفی چون $\sin x+\cos x<۰$ است و $\sin x=\frac{۱}{۳}$، پس حتماً $\cos x<۰$ است و در نتیجه انتهای کمان x در ناحیهٔ دوم دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد که برای محاسبهٔ $\tan x$ می‌توان نوشت:

$$۱+\cot^۲ x=\frac{۱}{\sin^۲ x}\Rightarrow ۱+\cot^۲ x=\frac{۱}{\frac{۱}{۹}}\Rightarrow ۱+\cot^۲ x=۹\Rightarrow \cot^۲ x=۸\xrightarrow{\text{x در ربع دوم است}}\cot x=-۲\sqrt{۲}\xrightarrow{\tan x=\frac{۱}{\cot x}}\tan x=\frac{-۱}{۲\sqrt{۲}}$$

۴۴۹ | ۱ روش اول: با استفاده از اتحاد مزدوج و رابطه‌های $\sin^۲ x+\cos^۲ x=۱$ و $۱+\cot^۲ x=\frac{۱}{\sin^۲ x}$ می‌توان نوشت:

$$\cos^۴ x-\sin^۴ x+\frac{۱}{۱+\cot^۲ x}=(\cos^۲ x-\sin^۲ x)\underbrace{(\cos^۲ x+\sin^۲ x)}_{۱}+\frac{۱}{\frac{۱}{\sin^۲ x}}=\cos^۲ x-\sin^۲ x+\sin^۲ x=\cos^۲ x$$

و می‌دانیم که $\cos^۲ x=\frac{۱}{۱+\tan^۲ x}$ می‌باشد.

روش دوم: حاصل عبارت داده شده را به‌ازای $x=۳۰^\circ$ به‌دست می‌آوریم:

$$x=۳۰^\circ:\cos^۴ ۳۰^\circ-\sin^۴ ۳۰^\circ+\frac{۱}{۱+\cot^۲ ۳۰^\circ}=(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۴-(\frac{۱}{۲})^۴+\frac{۱}{۱+(\sqrt{۳})^۲}=\frac{۹}{۱۶}-\frac{۱}{۱۶}+\frac{۱}{۴}=\frac{۹-۱+۴}{۱۶}=\frac{۱۲}{۱۶}=\frac{۳}{۴}$$

پس گزینه‌ای درست است که به‌ازای $x=۳۰^\circ$ برابر $\frac{۳}{۴}$ شود که این اتفاق فقط در گزینهٔ «۱» رخ می‌دهد.

$$x=۳۰^\circ:\frac{۱}{۱+\tan^۲ ۳۰^\circ}=\frac{۱}{۱+(\frac{\sqrt{۳}}{۳})^۲}=\frac{۱}{۱+\frac{۱}{۳}}=\frac{۱}{\frac{۴}{۳}}=\frac{۳}{۴}$$

فصل سوم: توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

۵۲۷ | **۴** به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینهٔ «۱»: می‌دانیم $-32 = (-2)^5$ است، پس $-2 = \sqrt[5]{-32}$ می‌باشد. ✓

گزینهٔ «۲»: می‌دانیم $4^4 = 256$ است، پس $4 = \sqrt[4]{256}$ می‌باشد. ✓

گزینهٔ «۳»: می‌دانیم $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ و $(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$ است، پس $\frac{1}{2} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}}$ می‌باشد. ✓

گزینهٔ «۴»: می‌دانیم $2^4 = 16$ و $4^5 = 1024$ است، پس $2 = \sqrt[4]{16}$ و $4 = \sqrt[5]{1024}$ می‌باشد که این دو عدد با هم برابر نیستند. ×

۵۲۸ | **۱** می‌دانیم $(-4)^3 = -64$ و در نتیجه $-4 = \sqrt[3]{-64}$ است، پس داریم:

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{96-\sqrt[3]{-64}}} = \sqrt[3]{2-\sqrt{96-(-4)}} = \sqrt[3]{2-\sqrt{100}} = \sqrt[3]{2-10} = \sqrt[3]{-8}$$

از طرفی چون $-8 = (-2)^3$ است، پس $-2 = \sqrt[3]{-8}$ می‌باشد.

۵۲۹ | **۳** می‌دانیم $\frac{-1}{32} = (-\frac{1}{2})^5$ است، پس $\frac{-1}{2} = \sqrt[5]{-\frac{1}{32}}$ می‌باشد و داریم:

$$\sqrt[3]{0.054\sqrt[5]{-\frac{1}{32}}} = \sqrt[3]{0.054 \times (-\frac{1}{2})} = \sqrt[3]{-0.027}$$

از طرفی می‌دانیم $-0.027 = \frac{-27}{1000} = (-\frac{3}{10})^3$ است، بنابراین $-0.3 = \sqrt[3]{-0.027}$ می‌باشد.

۵۳۰ | **۳** به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینهٔ «۱»: ریشه‌های چهارم عدد ۱۶ اعداد ۲ و ۲- هستند که اختلاف آن‌ها $2-(-2) = 4$ می‌باشد. ✓

گزینهٔ «۲»: هر عدد مثبت دو ریشهٔ دوم دارد که این دو ریشه قرینهٔ هم هستند، پس این گزینه هم درست است. ✓

گزینهٔ «۳»: گفتیم که جواب رادیکال با فرجهٔ زوج حتماً عددی مثبت است، پس این گزینه نادرست می‌باشد. ×

گزینهٔ «۴»: هر عدد مثبت، یک ریشهٔ سوم مثبت و هر عدد منفی، یک ریشهٔ سوم منفی دارد و در نتیجه این گزینه هم درست است. ✓

۵۳۱ | **۳** همان‌طور که در توضیحات درسنامه گفتیم، عددهای منفی ریشهٔ چهارم ندارند. گزینه‌های «۱» و «۴» خیلی واضح‌اند که مثبت هستند، پس ریشهٔ چهارم دارند.

از طرفی در گزینهٔ «۲» با توجه به آنکه $4 < \sqrt{24} < 5$، پس حاصل $\frac{2}{-\pi+\sqrt{24}}$ عددی مثبت است و در نتیجه این گزینه هم ریشهٔ چهارم دارد. پس پاسخ تست گزینهٔ «۳» است.

۵۳۲ | **۲** گزینه‌ای قابل قبول است که وقتی به توان چهار می‌رسد، جوابش $28-16\sqrt{3}$ شود. پاسخ تست گزینهٔ «۲» است، دلیلش را ببینید:

$$(1-\sqrt{3})^4 = ((1-\sqrt{3})^2)^2 = (1+3-2\sqrt{3})^2 = (4-2\sqrt{3})^2 = 16+12-16\sqrt{3} = 28-16\sqrt{3}$$

اگه دوست دارید می‌تونید بقیهٔ گزینه‌ها رو هم بررسی کنید.

۵۳۳ | **۴** برای خلاص شدن b از رادیکال، طرفین تساوی را به توان ۵ می‌رسانیم، پس داریم:

$$a^3 = \sqrt[5]{b^3} \xrightarrow{\text{توان ۵}} a^{15} = b^3$$

حالا با ریشهٔ سوم گرفتن از طرفین رابطهٔ بالا به تساوی $a^5 = b$ می‌رسیم، در نتیجه ریشهٔ پنجم عدد b برابر a است.

۵۳۴ | **۲** به بررسی تک‌تک گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینهٔ «۱»: عدد صفر نامنفی است که تنها ریشهٔ دوم آن صفر است. ×

گزینهٔ «۲»: اگر m ریشهٔ دوم n باشد، پس $m^2 = n$ است و با توجه به اینکه $(-m)^2 = n$ می‌باشد، پس $-m$ هم ریشهٔ دوم n است. ✓

گزینهٔ «۳»: $5-2\sqrt{6}$ عددی مثبت است چرا که با فرض $\sqrt{6} \simeq 2.4$، حاصل $5-2\sqrt{6}$ تقریباً ۰/۲ می‌باشد، پس دوتا ریشهٔ دوم قرینه دارد، یکی $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ و دیگری $\sqrt{2}-\sqrt{3}$. ×

گزینهٔ «۴»: همگی می‌دانیم $4^3 < 102 < 5^3$، پس ریشهٔ سوم آن بین دو عدد ۴ و ۵ است نه ۳ و ۴. ×

۵۳۵ | **۳** به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینهٔ «۱»: $2^2 < 7 < 3^2 \Rightarrow 2 < \sqrt{7} < 3$ ✓

گزینهٔ «۲»: $2^3 < 21 < 3^3 \Rightarrow 2 < \sqrt[3]{21} < 3$ ✓

گزینهٔ «۳»: $1^4 < 14 < 2^4 \Rightarrow 1 < \sqrt[4]{14} < 2$ ×

گزینهٔ «۴»: $2^5 < 35 < 3^5 \Rightarrow 2 < \sqrt[5]{35} < 3$ ✓

۶۶۵ ۱ با استفاده از اتحاد جمله مشترک و با توجه به این‌که $x^2+5x=1$ است، می‌توان نوشت:

$$(x-2)(x+1)(x+4)(x+7)=\underbrace{(x-2)(x+7)}_{\text{اتحاد جمله مشترک}}\underbrace{(x+1)(x+4)}_{\text{اتحاد جمله مشترک}}=(x^2+5x-14)(x^2+5x+4)\xrightarrow{x^2+5x=1}(1-14)(1+4)=(-13)(5)=-65$$

۶۶۶ ۴ با ضرب طرفین معادلهٔ $x+\frac{2}{x}=4$ در x، داریم:

$$x+\frac{2}{x}=4\xrightarrow{\times(x)}x^2+2=4x\Rightarrow x^2-4x=-2$$

حالا برای محاسبهٔ خواستهٔ مسئله با استفاده از اتحاد جملهٔ مشترک، می‌توان نوشت:

$$(x-5)(x-3)(x-1)(x+1)=(x-5)(x+1)(x-3)(x-1)=(x^2-4x-5)(x^2-4x+3)\xrightarrow{x^2-4x=-2}(-2-5)(-2+3)=(-7)(1)=-7$$

۶۶۷ ۴ طبق اتحاد مربع سه‌جمله‌ای رابطهٔ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$ برقرار می‌باشد. اگر در عبارت $2(ab+ac+bc)$ از abc فاکتور بگیریم، برای محاسبهٔ خواستهٔ مسئله می‌توان نوشت:

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2abc(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a})\Rightarrow(7)^2=17+2(12)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\Rightarrow 24(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})=32\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{32}{24}=\frac{4}{3}$$

توجه داشته باشید $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ همان $a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}$ می‌باشد.

۶۶۸ ۲ یکی از اتحادهایی که سال‌های قبل در کتاب درسی بود و الان نیست، اتحادی به نام اویلر است ولی چون در بعضی از تست‌ها قابل استفاده است در دل این تست توضیح مختصری می‌دهیم. این اتحاد می‌گوید که اگر a، b و c سه عدد حقیقی باشند که مجموعشان صفر شود $(a+b+c=0)$، در این‌صورت داریم:

$$a^3+b^3+c^3=3abc$$

حالا برویم سراغ حل مسئلهٔ خودمان. اول از همه مخرج مشترک می‌گیریم، پس داریم:

$$\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ac}+\frac{c^2}{ab}=\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$$

از طرفی طبق فرض مسئله $a+b+c=0$، پس به کمک اتحاد اویلر $a^3+b^3+c^3=3abc$ و می‌توان نوشت:

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}=\frac{3abc}{abc}=3$$

۶۶۹ ۳ اتحاد مربع چهارجمله‌ای که در درسنامه برایتان آورده‌ایم را به‌خاطر دارید؟ به کمک این اتحاد، عبارت $(1+2x+3x^2+4x^3)^2$ را بسط می‌دهیم، پس داریم:

$$(1+2x+3x^2+4x^3)^2=1+(2x)^2+(3x^2)^2+(4x^3)^2+2((1)(2x)+(1)(3x^2)+\dots+(2x)(3x^2)+\dots+(3x^2)(4x^3))$$

اگر کمی باهوش باشید می‌بینید که در عبارت $2((1)(2x)+\dots)$ ضریب پرانتز ۲ است، پس همهٔ جملات این پرانتز، ضریبشان زوج است (قبوله؟)، پس فقط جملات بیرون پرانتز، یعنی ۱، $4x^2$، $9x^4$ و $16x^6$ را بررسی می‌کنیم که به وضوح فقط ۱ و $9x^4$ ضریب‌هایشان فرد است، یعنی تنها دو عبارت، ضریب فرد دارند.

۶۷۰ ۳ با فاکتورگیری از x و استفاده از اتحاد جمله مشترک برای تجزیهٔ این عبارت می‌توان نوشت: $x^3-5x^2+4x=x(x^2-5x+4)=x(x-1)(x-4)$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید در تجزیهٔ این عبارت عامل $x-2$ وجود ندارد.

۶۷۱ ۳ با فاکتورگیری از x و استفاده از اتحاد مزدوج برای تجزیه عبارت x^5-16x می‌توان نوشت:

$$x^5-16x=x(x^4-16)=x(x^2-4)(x^2+4)=x(x-2)(x+2)(x^2+4)$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید در تجزیهٔ عبارت، عامل x^2+2 وجود ندارد.

۶۷۲ ۴ برای تجزیهٔ عبارت x^5-5x^3-36x، مراحل زیر را دنبال می‌کنیم:

$$x^5-5x^3-36x\xrightarrow{\text{فاکتورگیری}}x(x^4-5x^2-36)\xrightarrow{\text{جمله مشترک}}x(x^2-9)(x^2+4)\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}}x(x-3)(x+3)(x^2+4)$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید در تجزیهٔ این عبارت، فقط عامل $x-9$ وجود ندارد.

۶۷۳ ۴ با استفاده از اتحاد چاق‌ولاغر یعنی رابطهٔ $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ می‌توان نوشت: $x^2+1=(\sqrt[3]{x^2}+1)(\sqrt[3]{x^4}-\sqrt[3]{x^2}+1)$

در نتیجه $A=\sqrt[3]{x^4}$ و $B=-\sqrt[3]{x^2}$ و خواستهٔ مسئله برابر است با:

$$AB=\sqrt[3]{x^4}(-\sqrt[3]{x^2})=-\sqrt[3]{x^4}\sqrt[3]{x^2}=-\sqrt[3]{x^6}=-x^2$$

۱۰۱۱ **۳** تغییرات هر کمیت دلخواه مانند x را با Δx نمایش می‌دهیم و برابر $\Delta x = x_2 - x_1$ است. اگر رابطهٔ دماها در حالت اول به صورت $F_1 = \frac{9}{5}C_1 + 32$ و در حالت دوم به‌صورت $F_2 = \frac{9}{5}C_2 + 32$ باشد، داریم:

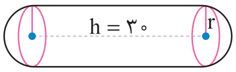
$$F_2 - F_1 = (\frac{9}{5}C_2 + 32) - (\frac{9}{5}C_1 + 32) \Rightarrow F_2 - F_1 = \frac{9}{5}(C_2 - C_1) \Rightarrow \Delta F = \frac{9}{5}\Delta C$$

از طرفی طبق فرض مسئله دما برحسب فارنهایت باید ۸۱ درجه افزایش بیابد، یعنی $\Delta F = 81$. پس داریم:

$$81 = \frac{9}{5}\Delta C \Rightarrow \Delta C = \frac{5 \times \cancel{81}^{9}}{\cancel{9}} = 5 \times 9 = 45$$

پس در این صورت دما برحسب سانتی‌گراد ۴۵ درجه افزایش یافته است.

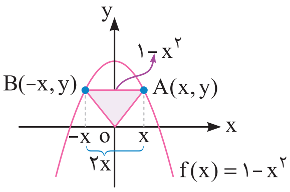
۱۰۱۲ **۲** ابتدا یک شکل به‌صورت مقابل برای مسئله در نظر می‌گیریم:



می‌دانیم حجم یک کره به شعاع r برابر $\frac{4}{3}\pi r^3$ و حجم استوانه با ارتفاع h و شعاع قاعدهٔ r برابر $\pi r^2 h$ است. پس می‌توان نوشت:

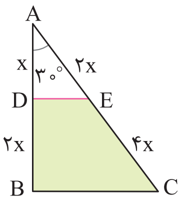
$$V = \underbrace{2(\frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi r^3)}_{\text{حجم دو نیم کره}} + \underbrace{\pi r^2 (30)}_{\text{حجم استوانه}} = \frac{4}{3}\pi r^3 + 30\pi r^2$$

۱۰۱۳ **۴** مختصات نقطهٔ B به‌وضوح به‌صورت $B(-x, y)$ است، از طرفی با توجه به این‌که A و B روی نمودار تابع $y = 1 - x^2$ قرار دارند، برای محاسبهٔ مساحت مثلث OAB می‌توان نوشت:



$$S = \frac{1}{2} \times \text{ارتفاع} \times \text{قاعده} = \frac{1}{\cancel{2}}(\cancel{2}x)(1 - x^2) = x - x^3$$

۱۰۱۴ **۲** مساحت دو مثلث $\overset{\Delta}{ADE}$ و $\overset{\Delta}{ABC}$ را با استفاده از رابطهٔ $S = \frac{1}{2}ab\sin\theta$ به‌دست می‌آوریم. پس داریم:



$$\overset{\Delta}{ADE}: S = \frac{1}{2}(x)(2x)\sin 30^\circ = \frac{1}{2}(2x^2)(\frac{1}{2}) = \frac{x^2}{2}$$

$$\overset{\Delta}{ABC}: S = \frac{1}{2}(3x)(6x)\sin 30^\circ = \frac{1}{2}(18x^2)(\frac{1}{2}) = \frac{9x^2}{2}$$

در نتیجه مساحت ناحیهٔ رنگی برابر است با:

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} - S_{\overset{\Delta}{ADE}} = \frac{9x^2}{2} - \frac{x^2}{2} = \frac{8x^2}{2} = 4x^2$$

۱۰۱۵ **۲** فقط تابع داده شده در گزینهٔ «۲» یک تابع چندجمله‌ای است. در گزینه‌های «۱» و «۴»، متغیر x در مخرج کسر و در گزینهٔ «۳» متغیر x زیر رادیکال قرار دارد، پس این توابع چندجمله‌ای نیستند.

۱۰۱۶ **۳** به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینهٔ «۱»: می‌دانیم $y = \sqrt[3]{(x-1)^3} = x - 1$ است که به‌وضوح یک تابع چندجمله‌ای می‌باشد. ✓

گزینهٔ «۲»: در عبارت درجه دوم $x^2 - x + 1$، $\Delta < 0$ و $a > 0$ می‌باشد پس این عبارت همواره مثبت است و $y = |x^2 - x + 1| = x^2 - x + 1$ می‌باشد که یک تابع چندجمله‌ای است. ✓

گزینهٔ «۳»: می‌دانیم $x^2 + 2x + 1$ در واقع همان $(x+1)^2$ است. پس $y = \sqrt{x^2 + 2x + 1} = \sqrt{(x+1)^2} = |x+1|$ می‌باشد که به وضوح یک تابع چندجمله‌ای نیست. ×

گزینهٔ «۴»: ضابطه این تابع به‌صورت $y = \frac{x^3 + 2x}{5x} = \frac{\cancel{x}(x^2+2)}{5\cancel{x}} = \frac{x^2+2}{5}$ قابل نوشتن است که یک تابع چندجمله‌ای می‌باشد. ✓

۱۰۱۷ **۴** می‌دانیم عبارت $x^2 + 1$ همواره مثبت است، پس داریم:

$$f(x) = |\underbrace{x^2 + 1}_{\text{مثبت}}| = x^2 + 1$$

در نتیجه این تابع به‌ازای همهٔ اعداد حقیقی یعنی $(-\infty, +\infty)$ یک چندجمله‌ای است.

۱۰۱۸ **۳** طبق فرض مسئله $f(0) = 2$ و $f(1) = 5$ است. پس داریم:

$$x = 0: f(0) = 0 + 0 + b = 2 \Rightarrow b = 2$$

$$x = 1: f(1) = a + 1 + b = 5 \xrightarrow{b=2} a + 3 = 5 \Rightarrow a = 2$$

در نتیجه $f(x) = 2x^3 + x + 2$ است و برای محاسبهٔ $f(-2)$ در تابع به‌جای x عدد -2 را قرار می‌دهیم:

$$x = -2: f(-2) = 2(-2)^3 + (-2) + 2 = 2(-8) - \cancel{2} + \cancel{2} = -16$$

۱۰۱۹ **۱** طبق فرض مسئله $f(x) = 5x + 2$ و $f(a) = 12$ است. پس داریم:

$$x = a: f(a) = 5a + 2 = 12 \Rightarrow 5a = 10 \Rightarrow a = 2$$

از طرفی $g(x) = 2x^3 - 51$ و $g(b) = 3$ می‌باشد. پس می‌توان نوشت:

$$x = b: g(b) = 2b^3 - 51 = 3 \Rightarrow 2b^3 = 54 \Rightarrow b^3 = 27 \Rightarrow b = 3$$

در نهایت خواستهٔ مسئله $f(a - b) = f(-1)$ است که مقدار آن $-5 + 2 = -3$ می‌باشد.

۱۱۷۲ ۲ با هر یک از دسته ارقام {۰,۱,۵} و {۰,۲,۴} و {۱,۲,۳} می‌توان اعداد سه رقمی با ارقام متمایز ساخت که مجموع ارقام آن‌ها برابر ۶ باشد. حالا مسئله را در سه حالت زیر بررسی می‌کنیم:

حالت اول: تعداد اعداد سه رقمی‌ای که با ارقام {۰,۱,۵} می‌توان نوشت برابر است با: $\underline{۲}\times\underline{۲}\times\underline{۱}=۴$

حالت دوم: تعداد اعداد سه رقمی‌ای که با ارقام {۰,۲,۴} می‌توان نوشت برابر است با: $\underline{۲}\times\underline{۲}\times\underline{۱}=۴$

حالت سوم: تعداد اعداد سه رقمی‌ای که با ارقام {۱,۲,۳} می‌توان نوشت برابر است با: $\underline{۳}\times\underline{۲}\times\underline{۱}=۶$

در نهایت طبق اصل جمع، تعداد کل حالات برابر با ۱۴ = ۶ + ۴ + ۴ می‌باشد. *(در حالت‌های اول حواسمون هستش که رقم صدگان نمی‌تونه صفر باشه!)*

۱۱۷۳ ۳ با توجه به اینکه می‌خواهیم این عدد زوج باشد، یکان آن باید ۲ یا ۴ یا ۶ یا ۸ یا صفر باشد. امّا با توجه به متقارن بودن آن، هر عددی که در یکان قرار می‌گیرد در صدگان هم قرار می‌گیرد، پس صفر برای یکان قابل قبول نیست و در نتیجه یکان ۴ حالت و صدگان ۱ حالت دارد، امّا دهگان هر یک از ارقام صفر تا ۹ می‌تواند باشد. پس داریم:

$$\underset{\text{رقم یکان}}{\underline{۱}}\times\underline{۱۰}\times\underset{\{۲,۴,۶,۸\}}{\underline{۴}}=۴۰$$

۱۱۷۴ ۳ می‌دانیم از هر یک از اعضای A دقیقاً باید یک پیکان به مجموعه B خارج شود پس برای هر عضو A چهار حالت داریم و در نتیجه تعداد توابع از مجموعهٔ A به B برابر با $۶۴ = ۴^۳ = ۴\times۴\times۴$ است.

۱۱۷۵ ۳ شرط تابع بودن این است که از هر عضو A دقیقاً یک فلش خارج شود، پس هر یک از اعضای ۲، ۳ و ۴ از مجموعهٔ A سه حالت برای انتخابشان دارند، ولی با توجه به محدودیت مسئله، عضو ۱ از مجموعهٔ A نمی‌تواند به a برود پس دو حالت دارد. در نتیجه طبق اصل ضرب، تعداد توابع از مجموعهٔ A به B با شرط گفته شده برابر $۵۴ = ۳\times۳\times۳\times۲$ تا است.

کسی هست که نرونه تعداد کل توابع از مجموعهٔ A به B برابر $۸۱ = ۳^۴$ می‌شه؟

۱۱۷۶ ۳ یک رابطه از A به B زمانی تابع است که هر عضو A دقیقاً به یک عضو B برود.
تکلیف a مشخص است! a باید به ۳ وصل شود تا تابع شامل زوج مرتب (a , ۳) باشد، پس یک حالت دارد. c هم می‌تواند به یکی از ۱, ۳, ۴, ۵ وصل شود (۴ حالت). دو حرف b و d هیچ محدودیتی ندارند، پس هر کدام از آن‌ها ۵ حالت دارند، بنابراین طبق اصل ضرب، تعداد توابع مطلوب از A به B برابر است با:

$$۱\times۴\times۵\times۵=۱۰۰$$

۱۱۷۷ ۴ از بین گزینه‌های داده شده فقط رابطهٔ داده شده در گزینهٔ «۴» درست است، ببینید: $۶!=۶\times۵!\Rightarrow ۷۲۰=۶\times۱۲۰\Rightarrow ۷۲۰=۷۲۰$ ✓

حالا به بررسی سایر گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینهٔ «۱»: $۶!=۳!+۳!\Rightarrow ۷۲۰=۶+۶$ ✗ ، گزینهٔ «۲»: $۸!=۴!\times۲!\Rightarrow ۴۰۳۲۰=۲۴\times۲$ ✗ ، گزینهٔ «۳»: $(۳!)^۲=۹!\Rightarrow (۶)^۲=۳۶۲۸۸۰$ ✗

۱۱۷۸ ۲ با فاکتورگیری در داخل پرانتز، عبارت را ساده می‌کنیم: $۱۵(۱۵\times۱۴!+۱۴!)=۱۵\,(۱۴!\,(۱۵+۱))=۱۵\times۱۴!\times۱۶=۱۶\times۱۵\times۱۴!=۱۶!$

۱۱۷۹ ۳ طبق فرض مسئله $\frac{n!}{(n-۲)!}=۹۰$ است. پس داریم:

$$\frac{n!}{(n-۲)!}=\frac{n(n-۱)\cancel{(n-۲)!}}{\cancel{(n-۲)!}}=n(n-۱)=۹۰=۱۰\times۹\Rightarrow n=۱۰$$

پس $(\frac{n}{۲})!=(\frac{۱۰}{۲})!=۵!=۱۲۰$ می‌باشد.

۱۱۸۰ ۳ همگی می‌دانیم $n!=n(n-۱)!$ است، پس در معادلهٔ داده شده به‌جای $(n^۲-۹)!$ می‌توانیم از $(n^۲-۹)(n^۲-۱۰)!$ استفاده کنیم و داریم:

$$\frac{(n^۲-۹)!}{(n+۳)(n^۲-۱۰)!}=۱۴\Rightarrow\frac{(n^۲-۹)\cancel{(n^۲-۱۰)!}}{(n+۳)\cancel{(n^۲-۱۰)!}}=۱۴\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}}\frac{(n-۳)\cancel{(n+۳)}}{\cancel{n+۳}}=۱۴\Rightarrow n-۳=۱۴\Rightarrow n=۱۴+۳=۱۷$$

۱۱۸۱ ۲ با استفاده از قوانین گفته شده برای فاکتوریل، می‌توان نوشت:

$$\frac{(۲x+۱)!}{[۲(x-۱)]!}=\frac{(۲x+۱)!}{(۲x-۲)!}=\frac{(۲x+۱)(۲x)(۲x-۱)\cancel{(۲x-۲)!}}{\cancel{(۲x-۲)!}}=(۲x+۱)(۲x)(۲x-۱)=(۲x)(۴x^۲-۱)=۸x^۳-۲x$$

مزدوج

با مقایسهٔ عبارت به‌دست آمده با $ax^۳+bx+c$ به وضوح $a=۸$ ، $b=-۲$ و $c=۰$ می‌باشد، پس: $a+b+c=۸-۲+۰=۶$

۱۳۲۳ ۲ در پرتاب سه تاس، تعداد اعضای فضای نمونه‌ای $n(S)=۶^۳=۲۱۶$ است. برای آن‌که سه تاس اعداد متوالی باشند، یکی از حالت‌های زیر پیش می‌آید:

$(۱,۲,۳),(۲,۳,۴),(۳,۴,۵),(۴,۵,۶)$

که اعضای هر یک از این دسته‌ها $۳!=۶$ حالت جابه‌جا می‌شوند. پس داریم:

$$n(A)=۴\times۶=۲۴\Rightarrow P(A)=\frac{۲۴}{۲۱۶}=\frac{۱}{۹}$$

۱۳۲۴ ۱ تعداد اعضای فضای نمونه‌ای پرتاب سه تاس برابر $n(S)=۶^۳=۲۱۶$ است. حالا کافی است سه عدد از مجموعهٔ $\{۱,۲,\dots,۶\}$ انتخاب و آن‌ها را از بزرگ به کوچک مرتب کنیم، پس داریم:

$$n(A)=\binom{۶}{۳}=۲۰$$

در نهایت احتمال مطلوب برابر است با:

$$P(A)=\frac{۲۰}{۲۱۶}=\frac{۵}{۵۴}$$

۱۳۲۵ ۳ می‌دانیم تعداد اعضای فضای نمونه‌ای در پرتاب سه تاس برابر $n(S)=۶^۳=۲۱۶$ می‌باشد. برای محاسبهٔ تعداد حالات مطلوب، با استفاده از اصل متمم تعداد حالاتی که در هر سه تاس اعدادی متمایز ظاهر می‌شود را از تعداد کل حالات کم می‌کنیم. پس داریم:

$$n(A)=۲۱۶-(۶\times۵\times۴)=۲۱۶-۱۲۰=۹۶$$

در نتیجه احتمال مطلوب برابر با $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۹۶}{۲۱۶}=\frac{۴}{۹}$ می‌باشد.

۱۳۲۶ ۲ تاس مورد نظر در هر یک از پرتاب‌ها می‌تواند ۴ یا ۶ بیایند، یعنی دو حالت دارد. پس تعداد اعضای فضای نمونه‌ای این آزمایش برابر است با:

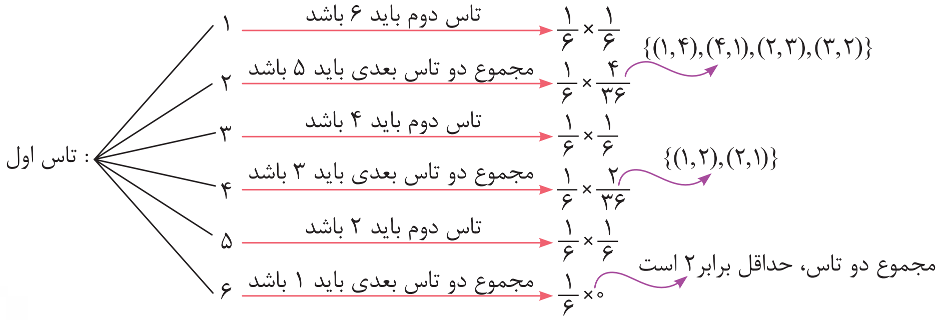
$$n(S)=\underbrace{۲}_{\text{پرتاب اول}}\times\overbrace{۲}^{\text{پرتاب دوم}}\times\underbrace{۲}_{\text{پرتاب سوم}}=۸$$

از طرفی حالت مطلوب مسئله این است که در پرتاب اول ۶ و در پرتاب دوم ۴ ظاهر شود، اما پرتاب سوم می‌تواند ۴ یا ۶ باشد. پس داریم:

$$n(A)=\underbrace{۱}_{\{۶\}}\times\underbrace{۱}_{\{۴\}}\times\underbrace{۲}_{\{۴,۶\}}=۲$$

در نهایت احتمال مطلوب $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴}$ می‌باشد.

۱۳۲۷ ۳ با توجه به اینکه در پرتاب تاس اول چه عددی ظاهر می‌شود، نموداری به‌صورت زیر می‌توان در نظر گرفت:



در نتیجه طبق اصل جمع داریم:

$$P(A)=(\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۶})+(\frac{۱}{۶}\times\frac{۴}{۳۶})+(\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۶})+(\frac{۱}{۶}\times\frac{۲}{۳۶})+(\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۶})=\frac{۱}{۳۶}+\frac{۴}{۲۱۶}+\frac{۱}{۳۶}+\frac{۲}{۲۱۶}+\frac{۱}{۳۶}=\frac{۲۴}{۲۱۶}=\frac{۱}{۹}$$

۱۳۲۸ ۴ تعداد اعضای فضای نمونه‌ای این آزمایش برابر با $n(S)=۲^۴=۱۶$ است. از طرفی برای محاسبهٔ حالت‌های مطلوب کافی است سه سکه انتخاب کنیم که «رو» بیاید یا سه سکه انتخاب کنیم که «پشت» بیاید. پس داریم:

$$n(A)=\binom{۴}{۳}+\binom{۴}{۳}=۴+۴=۸\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۸}{۱۶}=\frac{۱}{۲}$$

۱۳۲۹ ۳ فضای نمونه‌ای پرتاب ۵ سکه $n(S)=۲^۵=۳۲$ عضو دارد. حالا برای محاسبهٔ تعداد حالاتی که حداقل ۳ بار «پشت» ظاهر شده است، می‌توان نوشت:

$$n(A)=\underbrace{\binom{۵}{۳}}_{\text{۳ بار «پشت» ظاهر شود.}}+\underbrace{\binom{۵}{۴}}_{\text{۴ بار «پشت» ظاهر شود.}}+\underbrace{\binom{۵}{۵}}_{\text{۵ بار «پشت» ظاهر شود.}}=۱۰+۵+۱=۱۶$$

پس احتمال مطلوب برابر $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۶}{۳۲}=\frac{۱}{۲}$ است.