مقدمه ناشر

به نام خدا

بدون شک مارادونا اسطورهٔ فوتبال جهانه!

جادوگری که از وسط زمین شروع به دریبل زدنه بازیکنا می‌کنه، سریعاً نزدیک و نزدیک دروازه میشه و ......gooooooal!

حالا برای اینکه مارادونای کنکورتون باشید، یه سری کتاب جیبی براتون تألیف کردیم به اسم **نکته‌باز**!

تو فرایند تألیف کتابای نکته‌باز، هوشمندانه عمل کردیم. این‌طوری که نکات کاملاً ضروری کنکور و استراتژی‌های لازم برای حل سؤالات رو، یک جا براتون آوردیم.

علاوه بر همهٔ این‌ها، شما با انتخاب نکته‌باز، می‌تونین در سریع‌ترین زمان ممکن مطالب رو جمع‌بندی کنین چون تو این کتابا همهٔ مطالب کنکور به صورت نکته‌محور دسته‌بندی شدن.

در پایان جا داره یه تشکر ویژه کنیم از تیم تألیف و تولید خیلی‌سبز که بدون زحماتشون، بدون شک کتابای به این خوبی نداشتیم ...!

مارادونای زندگیت باش ...

مقدمه مؤلف

آوردن یا نیاوردن! مسئله این است. سخت‌ترین بخش نوشتن این کتاب این بود که انتخاب کنیم کدوم مطلب رو بیاریم، کدومش رو نیاریم!؟ چون برامون مهم بود که وقتی این کتاب را می‌خونید، روی خط مستقیم کنکور حرکت کنید؛ نه یه ذره این‌ورتر و نه یه ذره اون‌ورتر.

لازمه بدونید ما تو این راه تنها نبودیم. آدمای زیادی همراهمون بودن:

پیام ابراهیم‌نژاد که راهنمایی‌مون کرد، احسان حسینیان که بهمون اعتماد کرد و گروه تولید خیلی‌سبزمون که کلی زحمت کشید.

در آخر خوشحال میشیم اگر ایرادی توی کتاب دیدید با ما در میون بذارید.

ایمان ساریخانی

Sarikhani_math

کیوان صارمی

Keivan_Saremi

فهرست مطالب

فصل اول
آشنایی با نظریهٔ اعداد

۱ استدلال

ارائهٔ دلیل برای درستی یا نادرستی یک گزاره را استدلال می‌نامیم. برخی از روش‌های استدلال را در شکل روبه‌رو ببینید:

۲ اثبات مستقیم

برخی از گزاره‌ها را می‌توان به کمک برگرداندن آن‌ها به زبان ریاضی و استفاده از مطالبی که درستی آن‌ها را قبلاً پذیرفته‌ایم، به صورت مستقیم اثبات کرد. به عنوان مثال به دو مورد از مهم‌ترین آن‌ها و نحوهٔ اثباتشان توجه کنید:

۱) میانگین پنج عدد متوالی همان عدد وسطی است.

اثبات اگر پنج عدد متوالی را a، $a+۱$، $a+۲$، $a+۳$ و $a+۴$ در نظر بگیریم، میانگین آن‌ها برابر است با:

$$\text{میانگین} = \frac{a+(a+۱)+\overbrace{(a+۲)}^{\text{عدد وسط}}+(a+۳)+(a+۴)}{۵} = \frac{۵a+۱۰}{۵} = a+۲$$

۲) اگر k حاصل‌ضرب دو عدد متوالی باشد، آن‌گاه $۴k+۱$ مربع کامل است.

اثبات دو عدد متوالی را a و $a+1$ در نظر می‌گیریم، بنابراین $k=a(a+1)$

و در نتیجه:

$$4k+1=4a(a+1)+1=4a^2+4a+1=\underbrace{(2a+1)^2}_{\text{مربع کامل}}$$

۳ مثال نقض

به مثالی که نشان می‌دهد یک حکم یا گزاره در حالت کلی درست نیست، **مثال نقض** می‌گوییم. این روش استدلال برای رد کردن یک حکم کلی به کار می‌رود.

	حکم	مثال نقض
۱	برای هر دو عدد حقیقی x و y همواره $\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$.	$x=y=1 \Rightarrow \sqrt{2}\neq 2$
۲	برای هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱، عدد 2^n-1 اول است.	مرکب: $n=4 \Rightarrow 2^4-1=15$
۳	اگر α و β دو عدد گنگ باشند، $\alpha+\beta$ نیز عددی گنگ است.	$\begin{cases}\alpha=1+\sqrt{3}\\ \beta=2-\sqrt{3}\end{cases} \Rightarrow \alpha+\beta=\underset{\text{گویا}}{\underset{\downarrow}{3}}$

۴ اثبات با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها

در این روش برای اثبات درستی یک گزاره، باید تمامی حالت‌های ممکن برای مسئله را در نظر بگیریم.

برای نمونه به گزارهٔ زیر و نحوهٔ اثبات آن توجه کنید.

- «برای هر عدد طبیعی n، n^2-3n+5 عددی فرد است.»

اثبات برای n دو حالت زیر ممکن است رخ دهد:

۱) n زوج باشد: $n=2k \Rightarrow n^2-3n+5=(2k)^2-3(2k)+\underset{4+1}{\underset{\downarrow}{5}}$

$$=۴k^{۲}-۶k+۴+۱=۲(\underbrace{۲k^{۲}-۳k+۲}_{q})+۱=\underbrace{۲q+۱}_{\text{فرد}}$$

۲ **n فرد باشد:** $n=۲k+۱\Rightarrow n^{۲}-۳n+۵=(۲k+۱)^{۲}-۳(۲k+۱)+۵$

$$=۴k^{۲}-۲k+\underset{\substack{\downarrow\\ ۲+۱}}{۳}=۴k^{۲}-۲k+۲+۱=۲(\underbrace{۲k^{۲}-k+۱}_{q'})+۱=\underbrace{۲q'+۱}_{\text{فرد}}$$

۵ برهان خلف

در این روش فرض می‌کنیم که حکم نادرست باشد و سپس به کمک استدلال‌های درست و مبتنی بر فرض به یک نتیجهٔ غیرممکن می‌رسیم. بنابراین فرضِ نادرست‌بودن حکم، باطل است و درستی حکم ثابت می‌شود. حکم‌های مهمی که درستی آن‌ها به کمک برهان خلف ثابت می‌شود مطابق جدول زیر است:

۱	حاصل‌جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.
۲	حاصل‌ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی گنگ است.
۳	اگر عددی گنگ باشد، معکوس آن نیز گنگ است.
۴	اگر a، b و c اعدادی صحیح باشند، حاصل $(a-b)(b-c)(c-a)$ عددی زوج است.

اثبات مورد ۴: فرض می‌کنیم حاصل $(a-b)(b-c)(c-a)$ زوج نباشد، پس عددی فرد است. بنابراین هر سه عدد $a-b$، $b-c$ و $c-a$ فرد هستند و در نتیجه داریم:

$$\begin{cases}a-b=۲k-۱\\ b-c=۲p-۱\\ c-a=۲r-۱\end{cases}\xrightarrow[\text{می‌کنیم}]{\text{جمع}}(a-b)+(b-c)+(c-a)=۲k+۲p+۲r-۳$$

$$\Rightarrow ۰=۲(\underbrace{k+p+r}_{q})-۳\Rightarrow \underbrace{۲q}_{\text{زوج}}=\underbrace{۳}_{\text{فرد}}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، نتیجهٔ به دست آمده غیرممکن است *(یه عدد زوج نمی‌تونه با یه عدد فرد برابر باشه)*، پس فرض نادرست‌بودن حکم، باطل و حکم برقرار است.

۶ اثبات بازگشتی

در این روش از گزاره‌های هم‌ارز که ارزش یکسانی دارند استفاده می‌کنیم. به این ترتیب که برای اثبات درستی گزاره‌ای مانند p، ابتدا هم‌ارزهای آن را تعیین می‌کنیم و سپس با اثبات درستی ساده‌ترین آن‌ها، درستی گزارهٔ p را نتیجه می‌گیریم. از این روش معمولاً برای اثبات درستی نامساوی‌ها استفاده می‌کنیم.

تعیین گزاره‌های هم‌ارز در اثبات بازگشتی را تا جایی ادامه می‌دهیم که به یک گزارهٔ همیشه درست *(معمولاً یه رابطهٔ بدیهیه)* برسیم.

تست **در اثبات نامساوی $x^2+y^2+1\geq xy+x+y$ به کمک اثبات بازگشتی به کدام رابطهٔ بدیهی خواهیم رسید؟**

۱) $(x-y+1)^2\geq 0$

۲) $(x+y-1)^2\geq 0$

۳) $(x-y)^2+(x+1)^2+(y+1)^2\geq 0$

۴) $(x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2\geq 0$

پاسخ **گزینهٔ ۴** به کمک ویژگی‌های نامساوی‌ها به یک رابطهٔ بدیهی می‌رسیم:

$$x^2+y^2+1\geq xy+x+y$$

$$\xleftrightarrow{\times 2} \underbrace{2x^2}_{x^2+x^2}+\underbrace{2y^2}_{y^2+y^2}+\underbrace{2}_{1+1}\geq 2xy+2x+2y$$

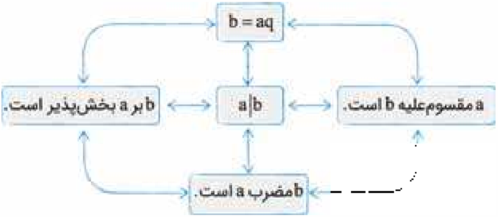
$$\Leftrightarrow (x^2-2xy+y^2)+(x^2-2x+1)+(y^2-2y+1)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2\geq 0}_{\text{بدیهی}}$$

۷ بخش‌پذیری

عدد صحیح b بر عدد صحیح $a \neq ۰$ بخش‌پذیر است، هرگاه عددی صحیح مثل q وجود داشته باشد به طوری که $b = aq$. برای نمایش این بخش‌پذیری می‌نویسیم $a \mid b$ و می‌خوانیم a، b را می‌شمارد یا عاد می‌کند.

نتایج مختلفی که از بخش‌پذیری $a \mid b$ حاصل می‌شود به صورت زیر است:



۸ ویژگی‌های اولیهٔ بخش‌پذیری

۱) در بخش‌پذیری علامت بی‌تأثیر است؛ یعنی اگر $a \mid b$، آن‌گاه همهٔ بخش‌پذیری‌های $-a \mid b$، $a \mid -b$ و $-a \mid -b$ نیز برقرارند.

۲) هر عدد صحیح خودش را عاد می‌کند. $a \mid a$

۳) ± ۱ همهٔ اعداد صحیح را عاد می‌کنند. $\pm ۱ \mid a$

۴) همهٔ اعداد صحیح صفر را عاد می‌کنند ولی صفر فقط می‌تواند خودش را عاد کند. $\square$ = هر عدد صحیح دلخواه $\Rightarrow \square \mid ۰$

$۰ \mid \square \Rightarrow \square = ۰$

مثال از رابطهٔ $x^۲ + x \mid ۰$، نتیجه می‌گیریم که:

$$x^۲ + x = ۰ \Rightarrow x(x+۱) = ۰ \Rightarrow x = ۰, -۱$$

۹ نابرابری در بخش‌پذیری و نتایج حاصل از آن

اگر عدد صحیح و غیر صفر b بر عدد صحیح a بخش‌پذیر باشد، در این صورت حتماً $|b| \geq |a|$ است.

$$a \mid b, b \neq ۰ \Rightarrow |b| \geq |a|$$

نتایج

۱. اگر $a \mid b$ و $|a| > |b|$ باشد، در این صورت قطعاً $b = ۰$ است.

۲. اگر $a \mid b$ و $b \mid a$، در این صورت حتماً $|a| = |b|$ است.

۱۰ ویژگی‌های اصلی بخش‌پذیری

۱	$a \mid b \Rightarrow a \mid ۵b$	ضرب‌کردن در یک عدد صحیح	ویژگی‌های سمت راست
۲	$a \mid b \Rightarrow a \mid b^{۳}$	افزایش توان	
۳	$۶a \mid b \Rightarrow ۳a \mid b$	از دست دادن ضریب	ویژگی‌های سمت چپ
۴	$a^{۳} \mid b \Rightarrow a^{۲} \mid b$	کاهش توان	
۵	$a^{۷} \mid b^{۷} \Leftrightarrow a \mid b$	توان‌رسانی و ریشه‌گیری	ویژگی‌های طرفین یک بخش‌پذیری
۶	$a \mid b \Rightarrow ۱۰a \mid ۱۰b$	ضرب‌کردن در یک عدد صحیح	
۷	$ma \mid mb \xrightarrow{m \neq ۰} a \mid b$	تقسیم‌کردن بر یک عدد صحیح غیر صفر	
۸	$\begin{cases} a \mid b \\ a \mid c \end{cases} \Rightarrow a \mid b \pm c$	جمع و تفریق سمت راستی‌ها، به شرط برابربودن سمت چپی‌ها	ویژگی‌های طرفین دو بخش‌پذیری

ویژگی‌های طرفین دو بخش‌پذیری	ضرب طرفین دو بخش‌پذیری	$a\mid b, c\mid d \Rightarrow ac\mid bd$	۹
	خاصیت تعدی	$a\mid \underbrace{b, b}_{\text{برابر}}\mid c \Rightarrow a\mid c$	۱۰

تست اگر $b^{2}\mid a-b$، کدام نتیجه‌گیری الزاماً درست <u>نیست</u>؟ $(a,b\in\mathbb{Z})$

۱) $b^{2}\mid a+2b$ ۲) $b\mid a+2b$ ۳) $b^{2}\mid a^{2}+b^{2}$ ۴) $b\mid a$

پاسخ گزینهٔ ۱

$$b^{2}\mid a-b \xrightarrow[b\mid b]{\text{ویژگی ۴}} \begin{cases} b\mid a-b \\ b\mid b \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{ویژگی ۸}} b\mid (a-b)+b \Rightarrow b\mid a$$

پس نتیجه‌گیری گزینهٔ (۴) درست است.

حال به کمک رابطهٔ $b\mid a$ سایر گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۲): $b\mid a \xrightarrow[\text{ویژگی ۸}]{b\mid 2b} b\mid a+2b$

$$b\mid a \xrightarrow{\text{ویژگی ۵}} b^{2}\mid a^{2} \xrightarrow[\text{ویژگی ۸}]{b^{2}\mid b^{2}} \underbrace{b^{2}\mid a^{2}+b^{2}}_{\text{گزینهٔ (۳)}}$$

بنابراین گزینهٔ (۱) الزاماً درست نمی‌باشد.

۱۱ سه ویژگی جالب از بخش‌پذیری

۱) اگر $n\mid f(x)$ و $n\mid ax+b$، برای به دست آوردن مقادیر n کافی است ریشهٔ عبارت خطی را در رابطهٔ $n\mid f(x)$ جای‌گذاری کنیم.

$$\begin{cases} n\mid ax+b \\ n\mid f(x) \end{cases} \Rightarrow n\mid f(-\frac{b}{a})$$

در صورت کسری‌شدن $f(-\frac{b}{a})$، کافی است کسر مورد نظر را تا جای ممکن ساده کرده و سپس از مخرج صرف نظر کنیم.

مثال

$$\begin{cases} n \mid ۲x+۱ \\ n \mid ۲x^۲+۳ \end{cases} \xrightarrow{x=-\frac{۱}{۲}} n \mid ۲(-\frac{۱}{۲})^۲+۳ \Rightarrow n \mid \frac{۱}{۲}+۳$$

$$\Rightarrow n \mid \frac{۷}{۲} \xrightarrow{\text{حذف مخرج}} n \mid ۷ \Rightarrow n=\pm۱, \pm۷$$

۲ اگر در یک بخش‌پذیری، سمت چپ یک عبارت خطی و سمت راست یک چندجمله‌ای باشد، می‌توان ریشهٔ عبارت خطی را در عبارت سمت راست جای‌گذاری کرد:

$$ax+b \mid f(x) \Rightarrow ax+b \mid f(-\frac{b}{a})$$

مثال اگر $x-۲ \mid x^۳+۳$ باشد، داریم:

$$x-۲ \mid x^۳+۳ \xrightarrow{x=۲} x-۲ \mid ۲^۳+۳ \Rightarrow x-۲ \mid ۱۱$$

$$\Rightarrow x-۲=\pm۱, \pm۱۱ \Rightarrow x=۱,۳,-۹,۱۳$$

۳ از رابطهٔ $a^m \mid b^n$ به شرطی می‌توان درستی رابطهٔ $a^p \mid b^r$ را نتیجه گرفت که $\frac{r}{p} \geq \frac{n}{m}$ باشد، یعنی:

$$a^m \mid b^n \xrightarrow{\frac{r}{p} \geq \frac{n}{m}} a^p \mid b^r$$

مثال نتیجه‌گیری « $a^۵ \mid b^۷ \Rightarrow a^۶ \mid b^{۱۱}$ » درست است، زیرا:

$$\frac{۱۱}{۶} \geq \frac{۷}{۵} \Rightarrow ۵۵ \geq ۴۲ \checkmark$$

تست اگر روابط $۷ \mid ۵k+۱$ و $۴۹ \mid ۲۵k^۲+۲۰k+m$ برقرار باشند، مقدار m کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ گزینهٔ ۱ از رابطهٔ $۴۹ \mid ۲۵k^{۲}+۲۰k+m$ نتیجه می‌گیریم که $۷ \mid ۲۵k^{۲}+۲۰k+m$ است. حال می‌توان ریشهٔ عبارت خطی را در سمت راست رابطهٔ $۷ \mid ۲۵k^{۲}+۲۰k+m$ جای‌گذاری کرد:

$$۵k+۱=۰ \Rightarrow k=-\frac{۱}{۵} \xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} ۷ \mid ۲۵(\frac{۱}{۲۵})+۲۰(-\frac{۱}{۵})+m$$

$$\Rightarrow ۷ \mid m-۳ \xrightarrow{\text{با توجه به گزینه‌ها}} m=۳$$

تست نقاط (a,b) روی منحنی $y=\frac{۳x-۱}{x+۲}$ قرار دارند. اگر $a,b\in\mathbb{Z}$ باشند، چند نقطه با این ویژگی روی این منحنی قرار دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ (سراسری ۱۴۰۱)

پاسخ گزینهٔ ۴ چون نقاط (a,b) با مختصات صحیح روی منحنی $y=\frac{۳x-۱}{x+۲}$ قرار دارند، پس:

$$x+۲ \mid ۳x-۱ \xrightarrow{\text{جای‌گذاری } x=-۲ \text{ در سمت راست}} x+۲ \mid ۳(-۲)-۱$$

$$\Rightarrow x+۲ \mid -۷ \Rightarrow x+۲=\pm۱,\pm۷$$

بنابراین ۴ نقطه با مختصات صحیح روی منحنی قرار دارند.

۱۲ ب.م.م

عدد طبیعی d را ب.م.م دو عدد صحیح a و b که حداقل یکی از آن‌ها صفر نیست می‌نامیم و می نویسیم $(a,b)=d$، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند:

۱) $\forall m>۰ \;; m\mid a \;, m\mid b \Rightarrow m\leq d$

۲) $d\mid a \,, d\mid b$

برای محاسبهٔ ب.م.م از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

حاصل‌ضرب عوامل مشترک با کم‌ترین توان = ب.م.م

مثال برای محاسبهٔ $(۷۲,۱۸۰)$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۷۲ = \underline{۲}^۳ \times \underline{\underline{۳}}^۲ \\ ۱۸۰ = \underline{۲}^۲ \times \underline{\underline{۳}}^۲ \times ۵ \end{cases} \Rightarrow (۷۲,۱۸۰) = ۲^۲ \times ۳^۲ = ۳۶$$

تست در مجموعهٔ اعداد طبیعی اگر $(۳n^۲ - ۲n + ۶, ۳n + ۵) = d$ باشد و $d \neq ۱$ باشد، عدد d کدام است؟ (خارج ۹۹)

۱) ۴۱ ۲) ۴۳ ۳) ۴۷ ۴) ۵۳

پاسخ گزینهٔ ۴ چون $(۳n^۲ - ۲n + ۶ , ۳n + ۵) = d$، پس $d \mid ۳n + ۵$ و $d \mid ۳n^۲ - ۲n + ۶$. حال برای به دست آوردن مقادیر d، ریشهٔ عبارت $۳n + ۵$ را در سمت راست رابطهٔ $d \mid ۳n^۲ - ۲n + ۶$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$۳n + ۵ = ۰ \Rightarrow n = -\frac{۵}{۳}$$

$$\xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} d \mid ۳(\frac{۲۵}{۹}) - ۲(-\frac{۵}{۳}) + ۶ \Rightarrow d \mid \frac{۵۳}{۳} \Rightarrow d \mid ۵۳ \xrightarrow{d \neq ۱} d = ۵۳$$

۱۳ دو عدد نسبت به هم اول

دو عدد صحیح a و b را نسبت به هم اول می‌نامیم هرگاه $(a,b) = ۱$.

چند مورد از نسبت به هم اول‌های معروف عبارت‌اند از:

۱) هر دو عدد صحیح متوالی نسبت به هم اول‌اند. $(a , a+۱) = ۱$

۲) هر دو عدد صحیح و فرد متوالی نسبت به هم اول‌اند.

$$(۲k - ۱ , ۲k + ۱) = ۱$$

۳) هر دو عدد اول متمایز نسبت به هم اول‌اند. $p \neq q \Rightarrow (p , q) = ۱$

۴) عدد اول p نسبت به هر عددی که مضرب p نباشد، اول است.

$$p \nmid a \Rightarrow (p,a) = ۱$$

تست به ازای چند عدد دورقمی n، دو عدد به صورت $25n+9$ و $11n+4$ نسبت به هم اول‌اند؟

۱) ۸۶ ۲) ۸۷ ۳) ۸۹ ۴) ۹۰

پاسخ گزینهٔ ۴ با فرض $(11n+4, 25n+9)=d$، نتیجه می‌گیریم که $d\,|\,11n+4$ و $d\,|\,25n+9$. حال برای به دست آوردن d کافی است، ریشهٔ یکی از عبارت‌های خطی را در سمت راست دیگری قرار دهیم:

$$11n+4=0 \Rightarrow n=-\frac{4}{11} \Rightarrow d\,\Big|\,25\left(-\frac{4}{11}\right)+9$$

$$\Rightarrow d\,\Big|\,-\frac{1}{11} \Rightarrow d\,|\,-1 \Rightarrow d=1$$

بنابراین به ازای تمام مقادیر n، این دو عدد نسبت به هم اول‌اند که تعداد دورقمی‌ها ۹۰تاست.

۱۴ ک.م.م

عدد طبیعی c را ک.م.م دو عدد صحیح و ناصفر a و b می‌نامیم و می‌نویسیم $[a,b]=c$، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند:

۱) $a\,|\,c\,,\,b\,|\,c$

۲) $\forall m\ ;a\,|\,m\,,\,b\,|\,m \Rightarrow c\leq m$

برای به دست آوردن ک.م.م دو عدد از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

ک.م.م = غیرمشترک‌ها × حاصل‌ضرب عوامل مشترک با بیشترین توان

مثال برای محاسبهٔ $[100\,,\,35]$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{cases}100=2^2\times \underline{5}^2\\ 35=7\times \underline{5}\end{cases} \Rightarrow [100,35]=7\times 2^2\times 5^2=700$$

۱۵ رابطهٔ بخش‌پذیری با ب.م.م و ک.م.م

نمودار مقابل حق مطلب رو ادا می‌کنه:

$$a \mid b \Rightarrow (a,b)=|a| \quad , \quad [a,b]=|b|$$

تست حاصل عبارت $((\text{۸}x,\text{۴}x),[\text{۳}x,\text{۱۲}x^{\text{۲}}])$ کدام است؟

۱) x ۲) $\text{۳}\,|\,x\,|$ ۳) $|\,x\,|$ ۴) $\text{۴}\,|\,x\,|$

پاسخ گزینهٔ ۴ چون $\text{۳}x \mid \text{۱۲}x^{\text{۲}}$, $\text{۴}x \mid \text{۸}x$، بنابراین:

$$((\text{۸}x , \text{۴}x) , [\text{۳}x , \text{۱۲}x^{\text{۲}}]) = (\text{۴}x , \text{۱۲}x^{\text{۲}})$$

از طرفی با توجه به این‌که $\text{۴}x \mid \text{۱۲}x^{\text{۲}}$، داریم: $(\text{۴}x,\text{۱۲}x^{\text{۲}}) = |\text{۴}x| = \text{۴}\,|\,x\,|$

۱۶ قضیهٔ تقسیم

اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد، اعداد صحیح و منحصربه‌فرد q و r یافت می‌شوند به طوری که:

$$\underbrace{\text{۰} \le r < b}_{\text{شرط تقسیم}} \quad , \quad a=bq+r$$

(a: مقسوم، b: مقسوم‌علیه، q: خارج قسمت، r: باقی‌مانده)

تست در یک تقسیم به مقسوم، ۱۴ واحد اضافه می‌کنیم. در این صورت به خارج قسمت ۲ واحد اضافه می‌شود اما مقسوم‌علیه و باقی‌مانده تغییری نمی‌کند، مقسوم‌علیه کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۱۲

پاسخ گزینهٔ ۳ اگر تقسیم اولیه را به صورت $a = bq + r$ در نظر بگیریم، با اعمال تغییرات داریم: $a+\text{۱۴} = b(q+\text{۲})+r$

$$\xrightarrow{a=bq+r} \cancel{bq}+\cancel{r}+\text{۱۴} = \cancel{bq}+\text{۲}b+\cancel{r} \Rightarrow \text{۲}b=\text{۱۴} \Rightarrow b=\text{۷}$$

تست در تقسیم عدد طبیعی a بر ۳۷، باقی‌ماندهٔ تقسیم از مربع خارج قسمت ۲ واحد کم‌تر است. بزرگ‌ترین مقدار a مضرب کدام عدد است؟

۱) ۹ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

پاسخ گزینهٔ ۴ با توجه به قضیهٔ تقسیم داریم:

$$a = bq + r \xrightarrow[b=۳۷]{r=q^۲-۲} a = ۳۷q + q^۲ - ۲$$

حال به کمک شرط تقسیم بیشترین مقدار q و سپس بیشترین مقدار a را به دست می‌آوریم: $۰ \le r < b \Rightarrow ۰ \le q^۲ - ۲ < ۳۷ \Rightarrow ۲ \le q^۲ < ۳۹$

$$\Rightarrow q_{max} = ۶ \Rightarrow a_{max} = ۳۷(۶) + ۶^۲ - ۲ = ۲۵۶ = ۱۶k$$

تست اگر خارج قسمت تقسیم عدد طبیعی $a > ۹$ بر ۱۱، ۳ واحد بیشتر از باقی‌ماندهٔ آن باشد، احتمال این‌که عدد $a - ۹$ بر ۲۴ بخش‌پذیر باشد، کدام است؟ (سراسری ۱۴۰۰)

۱) $\frac{۱۳}{۲۲}$ ۲) $\frac{۶}{۱۱}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۱۱}$

پاسخ گزینهٔ ۲ با توجه به قضیهٔ تقسیم داریم:

$$a = bq + r \xrightarrow[q=r+۳]{b=۱۱} a = ۱۱(r+۳) + r \Rightarrow a = ۱۲r + ۳۳$$

$$\Rightarrow a - ۹ = ۱۲r + ۲۴ = ۱۲(r+۲)$$

از رابطهٔ $a - ۹ = ۱۲(r+۲)$ نتیجه می‌گیریم که برای آن‌که $a - ۹$ بر ۲۴ بخش‌پذیر باشد، باید $r + ۲$ زوج باشد. از طرفی طبق شرط تقسیم $۰ \le r < ۱۱$ است، پس r در حالت کلی ۱۱ مقدار ۰، ۱، ... و ۱۰ را می‌پذیرد که به ازای مقادیر ۰، ۲، ۴، ۶، ۸ و ۱۰، $r + ۲$ زوج می‌باشد. بنابراین احتمال مورد نظر برابر با $\frac{۶}{۱۱}$ است.

۱۷ افراز به کمک قضیهٔ تقسیم و نتایج حاصل از آن

عدد صحیح a را در نظر بگیرید. با توجه به مقادیر ممکن برای باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر عدد صحیح m می‌توان a را به m دستهٔ مقابل افراز کرد:

mk	$mk+1$	$mk+2$	$\cdots$	$mk+(m-1)$

مثلاً با تقسیم عدد a بر ۵ می‌توان a را به ۵ دستهٔ مقابل افراز کرد:

$5k$	$5k+1$	$5k+2$	$5k+3$	$5k+4$

هر یک از اعداد $5k+4$ و $5k+3$ را به ترتیب می‌توان به صورت $5k-1$ و $5k-2$ نیز نشان داد.

نتایج
۱ حاصل‌ضرب n عدد صحیح متوالی بر $n!$ بخش‌پذیر است.
۲ مربع هر عدد فرد به صورت $8k+1$ است.
۳ هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ به صورت $6k+1$ یا $6k-1$ است.

تست اگر $a=4k+3$ و $b \mid a+2$، آن‌گاه باقی‌ماندهٔ عدد a^2+b^2+13 بر ۸ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

پاسخ گزینهٔ ۴ چون $a=4k+3$، پس a و در نتیجه $a+2$ نیز فرد است. از طرفی با توجه به این‌که $b \mid a+2$، بنابراین b نیز عددی فرد می‌باشد. می‌دانیم مربع هر عدد فرد به فرم $8k+1$ است، پس:

$$a^2+b^2+13=(8k+1)+(8k'+1)+13$$

$$=8k+8k'+\underset{8+7}{\underset{\downarrow}{15}}=8\underbrace{(k+k'+1)}_{q}+7=8q+7$$

۱۸ تعریف همنهشتی

اگر دو عدد a و b در تقسیم بر عدد m باقی‌ماندهٔ یکسانی داشته باشند، می‌گوییم a و b به پیمانهٔ m همنهشت هستند و می‌نویسیم، $a \overset{m}{\equiv} b$.

m عددی طبیعی و بزرگ‌تر از یک است.

مثال اعداد ۴، ۱۴، ۲۹ و ۶- در تقسیم بر ۵ باقی‌ماندهٔ یکسان ۴ را دارند پس به پیمانهٔ ۵، همنهشت هستند: $۴ \overset{۵}{\equiv} ۱۴ \overset{۵}{\equiv} ۲۹ \overset{۵}{\equiv} -۶$

می‌توان یک رابطهٔ همنهشتی را به یک رابطهٔ بخش‌پذیری تبدیل کرد:

$$a \overset{m}{\equiv} b \Leftrightarrow m \mid a-b \text{ یا } a = mk+b$$

مثلاً از رابطهٔ $x \overset{۳}{\equiv} ۲$ نتیجه می‌گیریم که: $۳ \mid x-۲$ یا $x = ۳k+۲$

۱۹ کلاس همنهشتی

مجموعهٔ اعدادی را که در تقسیم بر عدد m، باقی‌ماندهٔ یکسان r داشته باشند، کلاس همنهشتی یا دستهٔ همنهشتی r به پیمانهٔ m می‌نامیم و به صورت $[r]_m$ نمایش می‌دهیم. $[r]_m = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = mk + r\}$

مثلاً منظور از $[۴]_۷$ مجموعهٔ اعدادی است که در تقسیم بر ۷ باقی‌ماندهٔ ۴ را دارند: $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = ۷k+۴\} = \{\cdots, -۳, ۴, ۱۱, ۱۸, \cdots\}$

همنهشتی به پیمانهٔ m، اعداد صحیح را به m کلاس همنهشتی افراز می‌کند. مثلاً همنهشتی به پیمانهٔ ۴، مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ را به ۴ کلاس همنهشتی زیر افراز می‌کند:

$۴k$	$۴k+۱$	$۴k+۲$	$۴k+۳$

$[۱]_۴ = \{۴k+۱ \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$[۰]_۴ = \{۴k \mid k \in \mathbb{Z}\}$
$[۳]_۴ = \{۴k+۳ \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$[۲]_۴ = \{۴k+۲ \mid k \in \mathbb{Z}\}$

تست **در همنهشتی به پیمانهٔ m، سه عدد a، ۴۱ و ۱۳۲ در یک کلاس همنهشتی قرار دارند، کوچک‌ترین عدد سه‌رقمی a به طوری که مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به تعداد کم‌تری کلاس همنهشتی افراز شود، کدام است؟**

۱) ۱۰۲ ۲) ۱۰۳ ۳) ۱۰۴ ۴) ۱۰۶

پاسخ گزینهٔ ۳ از آن‌جایی که سه عدد a، ۴۱ و ۱۳۲ در یک کلاس همنهشتی به پیمانهٔ m قرار دارند، بنابراین:

$$۱۳۲\overset{m}{\equiv}۴۱\overset{m}{\equiv}a \Rightarrow m \mid ۱۳۲-۴۱ \Rightarrow m \mid ۹۱ \Rightarrow m=۷\ \text{یا}\ ۱۳\ \text{یا}\ ۹۱$$

از طرفی چون می‌خواهیم مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به تعداد کم‌تری کلاس همنهشتی افراز شود، پس m باید کم‌ترین مقدار ممکن یعنی ۷ باشد، پس داریم:

$$۴۱\overset{۷}{\equiv}a \Rightarrow a=۷k+۴۱ \xrightarrow{a\geq ۱۰۰} k=۹ \Rightarrow a_{min}=۱۰۴$$