نشر الگو

تمام

تمرین امتحان

هندسه یازدهم

حمیدرضا ملکی

درس‌نامهٔ سؤال‌محور

سؤالات تألیفی

سؤالات امتحانی

آزمون نیم‌سال و پایان‌سال

پاسخ‌های تشریحی

پیشگفتار

به نام خدا

این کتاب بر اساس محتوای کتاب درسی هندسهٔ ۲ پایهٔ یازدهم نوشته شده است و سه ویژگی مهم دارد:

۱ مطالب کتاب درسی را کاملاً پوشش می‌دهد. شما می‌توانید حل تشریحی همهٔ فعالیت‌ها، کار در کلاس‌ها و تمرین‌های کتاب درسی هندسهٔ ۲ را در آن ببینید.

۲ شما را برای امتحان نهایی کاملاً آماده می‌کند. در پایان هر فصل، تعدادی سؤال آورده شده که بر اساس امتحانات نهایی بارم‌بندی و پاسخ داده شده‌اند. همچنین سه امتحان شبیه‌ساز امتحان نوبت اول و سه امتحان شبیه‌ساز امتحان نهایی (نوبت دوم) طراحی شده‌اند که با بررسی همهٔ آن‌ها، کسب نمرهٔ ۲۰ در امتحان نهایی برای شما آسان می‌شود.

۳ توانایی حل مسئلهٔ شما را افزایش می‌دهد.

بی‌شک بسیاری از شما در برخورد با مسئله‌های هندسه با این پرسش مواجه شده‌اید که چطور آن را حل کنم؟ در تألیف این کتاب، هدف اصلی این بوده است که مهارت حل مسئلهٔ شما در هندسه افزایش یابد. برای این منظور، علاوه بر مسئله‌های کتاب درسی، سؤالاتی آورده شده که به شما در رسیدن به این هدف کمک می‌کند؟ همچنین بسیاری از مسئله‌ها و تمرین‌های این کتاب با روش‌های گوناگون حل شده تا با ایده‌ها و تکنیک‌های مختلف حل مسئله‌های هندسه آشنا شوید. در پایان هر فصل، برای دانش‌آموزان علاقه‌مند چندین تمرین مهارتی وجود دارد. با حل این مسئله‌ها، چالش‌های بیشتری را تجربه می‌کنید. حتماً به آن‌ها فکر کنید.

این کتاب شامل پنج فصل است. سه فصل اول آن مطابق کتاب درسی هندسهٔ ۲ است. فصل چهارم شامل امتحانات شبیه‌ساز نوبت اول و نوبت دوم و فصل پنجم شامل پاسخ‌های تشریحی است. سه فصل اول کتاب تقریباً مستقل از یکدیگرند، یعنی هر کدام از آن‌ها را می‌توانید جداگانه مطالعه کنید و نگران این موضوع نباشید که باید فصل‌های دیگر را بلد باشید. ساختار کلی هریک از این سه فصل بدین صورت است:

درس‌نامه و مسائل ← تمرین‌های تشریحی ← فصل در یک قاب ← تمرین‌های مهارتی ← سؤالات بارم‌بندی شده

چند توصیه برای افزایش توانایی حل مسئله در هندسه به شما دارم:

۱ شکل مسئله‌ها را خوب و دقیق رسم کنید. رسم شکل زیبا و دقیق به شما در یافتن ایدهٔ حل مسئله کمک می‌کند و باعث می‌شود که از فکر کردن روی مسئله لذت ببرید.

۲ به مسئله‌ها خوب فکر کنید. ما در این کتاب همانند کتاب هندسهٔ دهم تمام نشر الگو یک شعار را دنبال می‌کنیم. **حل نکردن اشکال ندارد ولی فکر نکردن اشکال دارد.** خیلی مهم است که به اندازهٔ کافی روی مسائل فکر کنید. اگر هم حل نشد، هیچ اشکالی ندارد.

۳ از پاسخنامه خیلی کم استفاده کنید. سعی کنید تا جای ممکن خودتان مسئله‌ها را حل کنید. اگر نتوانستید، از دوستان خود یا معلمتان کمک بگیرید. در نهایت، اگر از هیچ روشی به پاسخ مسئله نرسیدید، باز هم حل کامل را از پاسخنامه نخوانید، بلکه از آن راهنمایی بگیرید.

در پایان بر خود لازم می‌دانم از همکاران عزیزم در نشر الگو، دکتر آریس آقانیانس و دکتر ابوالفضل علی‌بمانی برای ویراستاری علمی، خانم فاطمه احدی برای صفحه‌آرایی و خانم ستین مختار مدیر واحد ویراستاری و حروف‌چینی تشکر و قدردانی کنم.

حمیدرضا ملکی

فهرست مطالب

فصل اول: دایره

درس اول: مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره ۲
تمرین‌های تشریحی ۱۸
درس دوم: رابطه‌های طولی در دایره ۲۲
تمرین‌های تشریحی ۳۶
درس سوم: چندضلعی‌های محاطی و محیطی ۴۰
تمرین‌های تشریحی ۵۴
فصل اول در یک قاب ۵۷
تمرین‌های مهارتی ۶۰
سؤالات امتحانی بارم‌بندی شده ۶۴

فصل دوم: تبدیل‌های هندسی و کاربردها

درس اول - بخش اول: تبدیل‌های هندسی - بازتاب، انتقال و دوران ۷۰
تمرین‌های تشریحی ۹۴
درس اول - بخش دوم: تبدیل‌های هندسی - تجانس ۹۷
تمرین‌های تشریحی ۱۱۱
درس دوم: کاربرد تبدیل‌ها ۱۱۴
تمرین‌های تشریحی ۱۲۳
فصل دوم در یک قاب ۱۲۶
تمرین‌های مهارتی ۱۲۸
سؤالات امتحانی بارم‌بندی شده ۱۳۱

فصل سوم: روابط طولی در مثلث

یادآوری: روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه ۱۳۶
درس اول: قضیهٔ سینوس‌ها ۱۳۷
تمرین‌های تشریحی ۱۴۲
درس دوم: قضیهٔ کسینوس‌ها ۱۴۴
تمرین‌های تشریحی ۱۴۹
درس سوم: قضیهٔ نیمسازهای زوایای داخلی و محاسبهٔ طول نیمسازها ۱۵۳
تمرین‌های تشریحی ۱۵۷
درس چهارم: قضیهٔ هرون (محاسبهٔ ارتفاع‌ها و مساحت مثلث) ۱۶۰
تمرین‌های تشریحی ۱۶۳
فصل سوم در یک قاب ۱۶۷
تمرین‌های مهارتی ۱۶۹
سؤالات امتحانی بارم‌بندی شده ۱۷۲

فصل چهارم: امتحانات نوبت اول و نوبت دوم

امتحان نوبت اول (۱) ۱۷۶
امتحان نوبت اول (۲) ۱۷۸
امتحان نوبت اول (۳) ۱۸۰
امتحان نوبت دوم (۱) ۱۸۲
امتحان نوبت دوم (۲) ۱۸۴
امتحان نوبت دوم (۳) ۱۸۶

فصل پنجم: پاسخ‌های تشریحی

فصل اول

پاسخ تمرین‌های تشریحی ۱۹۰

پاسخ تمرین‌های مهارتی ۲۱۲

پاسخنامهٔ سؤالات امتحانی بارم‌بندی شده ۲۲۱

فصل دوم

پاسخ تمرین‌های تشریحی ۲۲۶

پاسخ تمرین‌های مهارتی ۲۴۲

پاسخنامهٔ سؤالات امتحانی بارم‌بندی شده ۲۴۵

فصل سوم

پاسخ تمرین‌های تشریحی ۲۵۰

پاسخ تمرین‌های مهارتی ۲۷۳

پاسخنامهٔ سؤالات امتحانی بارم‌بندی شده ۲۷۸

فصل چهارم

پاسخنامهٔ امتحان نوبت اول (۱) ۲۸۲

پاسخنامهٔ امتحان نوبت اول (۲) ۲۸۴

پاسخنامهٔ امتحان نوبت اول (۳) ۲۸۶

پاسخنامهٔ امتحان نوبت دوم (۱) ۲۸۸

پاسخنامهٔ امتحان نوبت دوم (۲) ۲۹۰

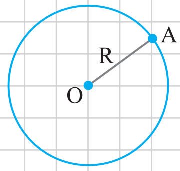
پاسخنامهٔ امتحان نوبت دوم (۳) ۲۹۲

درس اول

مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

برای مشاهدهٔ خلاصه‌ای از نکات فصل اول در یک قاب، به صفحات ۵۷ تا ۵۹ رجوع کنید.

دایره یکی از شکل‌های مهم در هندسه است. با مفهوم دایره در سال‌های گذشته آشنا شده‌اید. همان‌طور که می‌دانید، همهٔ نقاط روی دایره از مرکز آن به یک فاصلهٔ ثابت هستند. آیا می‌توانید با این ویژگی دایره را تعریف کنید؟



$C(O, R)$

دایره

مجموعهٔ همهٔ نقاطی از صفحه که از یک نقطهٔ ثابت در همان صفحه فاصله‌ای ثابت و غیرصفر دارند، **دایره** است. به این نقطهٔ ثابت، **مرکز دایره** و به فاصلهٔ ثابت، **شعاع دایره** گفته می‌شود.

توجه نمایش دایرهٔ به مرکز O و شعاع R به صورت $C(O, R)$ است.

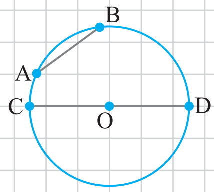
اجزای دایره

۱ **شعاع:** پاره‌خطی است که یک سر آن مرکز دایره و سر دیگر آن نقطه‌ای روی دایره باشد.[1]

۲ **وتر:** پاره‌خطی است که دو سر آن روی دایره باشند.

۳ **قطر:** وتری از دایره است که از مرکز دایره می‌گذرد. در واقع قطر بزرگ‌ترین وتر دایره است.

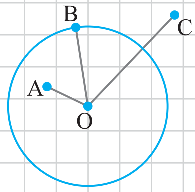
۴ **کمان:** قسمتی از دایره است که شامل دو نقطه روی دایره و همهٔ نقطه‌های بین این دو نقطه باشد.



در شکل مقابل، پاره‌خط‌های OC و OD دو شعاع دایره هستند، پاره‌خط AB یک وتر دایره است و پاره‌خط CD یک قطر دایره است. همچنین، قسمتی از دایره شامل دو نقطهٔ A و B و همهٔ نقطه‌های بین این دو نقطه یک کمان دایره است (کمان AB).

اوضاع نسبی نقطه و خط نسبت به دایره

به نظر شما نقطه و دایره، چه حالت‌هایی نسبت هم دارند؟ به سه نقطهٔ A ، B و C در شکل مقابل توجه کنید و سعی کنید پاسخ این پرسش را بیابید.



$C(O, R)$

اوضاع نسبی نقطه و دایره

وضعیت نقطهٔ A نسبت به دایرهٔ $C(O, R)$ ممکن است سه گونه باشد:[2]

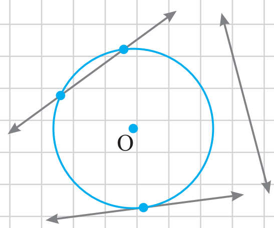
۱ نقطهٔ A درون دایره است، هرگاه فاصلهٔ آن از مرکز دایره کمتر از شعاع دایره باشد، یعنی $OA < R$.

۲ نقطهٔ A روی دایره است، هرگاه فاصلهٔ آن از مرکز دایره برابر شعاع دایره باشد، یعنی $OA = R$.

۳ نقطهٔ A بیرون دایره است، هرگاه فاصلهٔ آن از مرکز دایره بیشتر از شعاع دایره باشد، یعنی $OA > R$.

در دایرهٔ $C(O, R)$ در شکل بالا، نقطهٔ A درون دایره است، پس $OA < R$ ؛ نقطهٔ B روی دایره است، پس $OB = R$ ؛ و نقطهٔ C بیرون دایره است، پس $OC > R$.

اکنون بگویید خط و دایره چه حالت‌هایی نسبت به هم دارند. آیا پاسخ آن مشابه حالت‌های نقطه و دایره است؟ برای یافتن پاسخ به سه خط شکل مقابل توجه کنید. تعداد نقاط برخورد هر کدام از آن‌ها با دایره چند تاست؟ همان‌طور که در شکل می‌بینید، تعداد نقاط برخورد خط و دایره می‌تواند صفر، یک یا دو باشد.



۱- طبق تعریف، شعاع یک پاره‌خط است. اما در این کتاب آن را به مفهوم اندازهٔ این پاره‌خط نیز در نظر می‌گیریم. به عنوان مثال می‌گوییم دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی‌متر.

۲- در اینجا لازم است که ذکر شود نقطه و دایره در یک صفحه‌اند. در سرتاسر این کتاب همهٔ شکل‌ها در یک صفحه فرض می‌شوند و از ذکر کردن آن صرف‌نظر می‌کنیم.

خط مماس و خط قاطع

۱ خط مماس: هرگاه خطی با دایره‌ای فقط یک نقطهٔ مشترک داشته باشد، گفته می‌شود خط بر دایره مماس است.

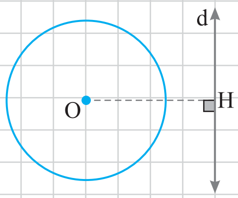
۲ خط قاطع: هرگاه خطی با دایره‌ای دو نقطهٔ مشترک داشته باشد، خط را نسبت به آن دایره قاطع می‌نامند. در این حالت خط و دایره را متقاطع می‌نامند.

پس خط و دایره نسبت به هم سه حالت دارند. آیا این سه حالت به فاصلهٔ مرکز دایره از خط وابسته است؟ حتماً پاسخ شما «بله» است.

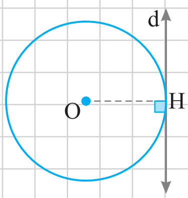
اوضاع نسبی خط و دایره

وضعیت خط d نسبت به دایرهٔ $C(O, R)$ ممکن است سه گونه باشد:

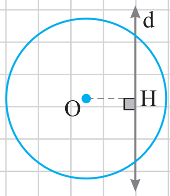
۱ خط و دایره نقطهٔ مشترک ندارند، هرگاه فاصلهٔ مرکز دایره از خط بزرگ‌تر از شعاع دایره باشد، یعنی $OH > R$.



۲ خط بر دایره مماس است، هرگاه فاصلهٔ مرکز دایره از خط برابر شعاع دایره باشد، یعنی $OH = R$. در این حالت خط و دایره یک نقطهٔ مشترک دارند.



۳ خط و دایره متقاطع‌اند، هرگاه فاصلهٔ مرکز دایره از خط کوچک‌تر از شعاع دایره باشد، یعنی $OH < R$. در این حالت خط و دایره دو نقطهٔ مشترک دارند.

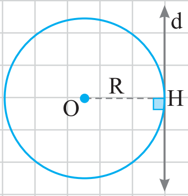


ممکن است در مورد حالت دوم بپرسید که اگر $OH = R$، آن‌گاه چرا خط بر دایره مماس است؟ به مسئلهٔ زیر توجه کنید تا پاسخ برای شما واضح شود.

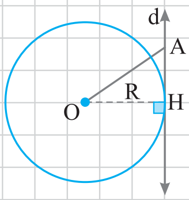
مسئله ۱

کتاب درسی

در شکل مقابل فاصلهٔ مرکز دایرهٔ $C(O, R)$ از خط d برابر شعاع دایره است. ثابت کنید خط d بر دایره مماس است.



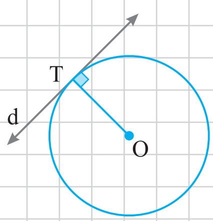
راه‌حل خط بر دایره مماس است، یعنی چه؟ یعنی خط و دایره یک نقطهٔ مشترک دارند. پس کافی است ثابت کنیم خط و دایره غیر از H نقطهٔ مشترک دیگری ندارند. اکنون آیا می‌توانید اثبات را تکمیل کنید؟ برای این منظور نقطه‌ای مانند A (غیر از H) روی خط d در نظر می‌گیریم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAH، طول وتر OA از اندازهٔ ضلع قائم OH بزرگ‌تر است. پس $OA > R$ و در نتیجه نقطهٔ A روی دایره قرار ندارد و این یعنی خط d و دایره فقط در نقطهٔ H مشترک‌اند. به بیان دیگر، خط d بر دایرهٔ $C(O, R)$ مماس است.



توجه کنید که عکس مسئلهٔ ۱ نیز درست است. در واقع می‌توان چنین گفت:

نتیجه یک خط و یک دایره بر هم مماس‌اند اگر و تنها اگر این خط در نقطهٔ تماس با دایره بر شعاع گذرنده از آن نقطه عمود باشد.

در مسئلهٔ ۱ یک طرف این نتیجه ثابت شد. اثبات طرف دیگر در تمرین مهارتی ۱ از شما خواسته شده است. در واقع می‌توان چنین نیز گفت که اگر خط d در نقطهٔ T بر دایرهٔ $C(O, R)$ مماس باشد، آن‌گاه نزدیک‌ترین نقطهٔ خط d به نقطهٔ O نقطهٔ T است.



زاویه‌ها در دایره

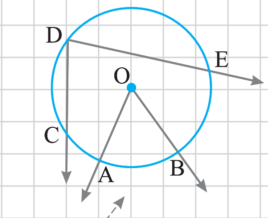
در این بخش سه زاویهٔ اصلی مرکزی، محاطی و ظلّی و سپس دو زاویهٔ فرعی داخلی و خارجی را در دایره معرفی می‌کنیم. البته با زاویه‌های مرکزی و محاطی در پایه‌های قبل آشنا شده‌اید. در ابتدا سه زاویهٔ اصلی مرکزی، محاطی و ظلّی را در دایرهٔ $C(O, R)$ تعریف می‌کنیم.

زاویه‌های مرکزی، محاطی و ظلّی

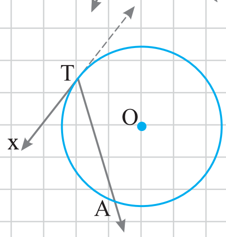
زاویه‌های مرکزی، محاطی و ظلّی

۱ زاویهٔ مرکزی: زاویه‌ای را که رأس آن بر مرکز دایره واقع باشد و دو ضلع آن شامل دو شعاع از دایره باشند، زاویهٔ مرکزی می‌گویند (زاویهٔ AOB در شکل مقابل).

۲ زاویهٔ محاطی: زاویه‌ای را که رأس آن روی دایره و دو ضلع آن شامل دو وتر از دایره باشند، زاویهٔ محاطی می‌گویند (زاویهٔ CDE در شکل مقابل).



۳ زاویهٔ ظلّی: زاویه‌ای را که رأس آن روی دایره قرار داشته باشد، یکی از ضلع‌های آن روی خطی مماس بر دایره و ضلع دیگر آن شامل وتری از دایره باشد، زاویهٔ ظلّی می‌گویند (زاویهٔ xTA در شکل مقابل).



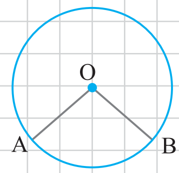
اکنون می‌خواهیم هر کدام از این سه زاویه را با کمان متناظرش مرتبط کنیم. برای این منظور در تعریف زیر به هر کمان از دایره، عددی برحسب درجه نسبت می‌دهیم.

اندازهٔ کمان

اندازهٔ زاویهٔ مرکزی مقابل به یک کمان را اندازهٔ آن کمان می‌نامند.

به عنوان مثال، در دایرهٔ $C(O, R)$ در شکل مقابل اندازهٔ کمان AB برابر با اندازهٔ زاویهٔ مرکزی AOB است و بدین صورت نوشته می‌شود:

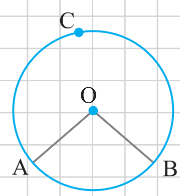
$$\overset{\frown}{AB}=\hat{O}$$



$C(O,R)$

البته ممکن است در تعریف اندازهٔ کمان اشکالی ببینید. همان‌طور که از هندسهٔ ۱ به یاد دارید، اندازهٔ زاویه حداکثر ۱۸۰° است. پس آیا این تعریف برای همهٔ کمان‌ها قابل استفاده است؟ پاسخ «خیر» است.

برای توضیح بیشتر به شکل مقابل توجه کنید. در شکل مقابل چند کمان AB مشاهده می‌کنید؟ دو کمان. اندازهٔ کمان کوچک‌تر AB با اندازهٔ زاویهٔ مرکزی AOB برابر است. در مورد کمان بزرگ‌تر AB چه می‌توان گفت؟ برای نمایش کمان بزرگ‌تر AB از یک حرف کمکی استفاده می‌شود، یعنی در شکل مقابل این کمان را با $\overset{\frown}{ACB}$ مشخص می‌کنیم که C نقطهٔ دلخواهی روی کمان بزرگ‌تر AB است. حال این پرسش مطرح می‌شود که اندازهٔ کمان ACB را چگونه تعریف کنیم؟ بدین صورت:

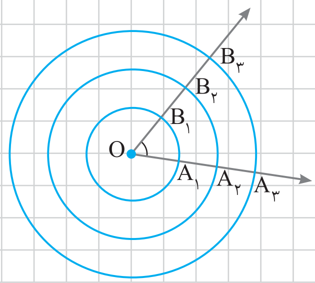


$$\overset{\frown}{ACB}=۳۶۰^\circ-\overset{\frown}{AB}=۳۶۰^\circ-\hat{O}$$

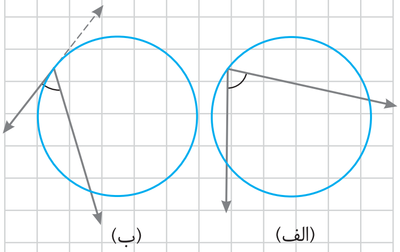
بنابراین اندازهٔ کمان از صفر تا ۳۶۰ درجه است.

در تعریف اندازهٔ کمان لازم است به نکته‌ای دیگر نیز اشاره کنیم. بنابر شکل مقابل، هر سه کمان $A_{۱}B_{۱}$، $A_{۲}B_{۲}$ و $A_{۳}B_{۳}$ یک اندازه دارند. بنابراین

$$\hat{O}=\overset{\frown}{A_{۱}B_{۱}}=\overset{\frown}{A_{۲}B_{۲}}=\overset{\frown}{A_{۳}B_{۳}}$$



اکنون که با اندازهٔ زاویهٔ مرکزی آشنا شدیم، می‌خواهیم در دو قضیهٔ زیر اندازه‌های زاویه‌های محاطی و ظلّی را به اندازهٔ کمان مقابل به آن‌ها ارتباط دهیم.



قضیه ۱

الف) اندازهٔ هر زاویهٔ محاطی برابر با نصف اندازهٔ کمان مقابل به آن است.

ب) اندازهٔ هر زاویهٔ ظلّی برابر با نصف اندازهٔ کمان مقابل به آن است.

در دو مسئلهٔ بعدی این قضیه را ثابت می‌کنیم.

مسئله ۲ کتاب درسی

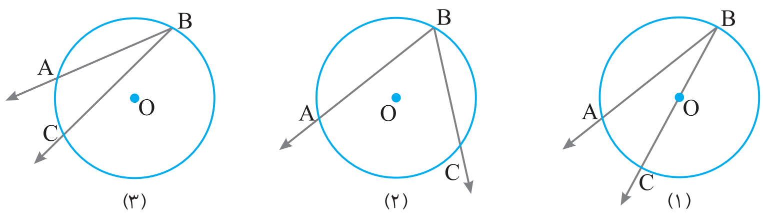
دایرهٔ $C(O, R)$ و یک زاویهٔ محاطی مانند زاویهٔ ABC مفروض است. مطابق شکل‌های زیر، مرکز دایره نسبت به این زاویه سه حالت دارد:

۱ یک ضلع زاویه از نقطهٔ O می‌گذرد.

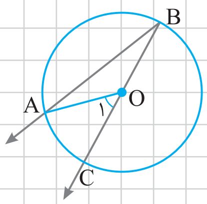
۲ دو ضلع زاویه در دو طرف نقطهٔ O واقع شوند.

۳ دو ضلع زاویه در یک طرف نقطهٔ O واقع شوند.

در هریک از این سه حالت، ثابت کنید اندازهٔ زاویهٔ محاطی ABC برابر با $\frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$ است.



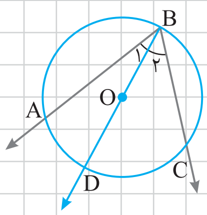
راه‌حل حالت (۱): شعاع OA را رسم می‌کنیم. در مثلث متساوی‌الساقین OAB، زاویهٔ AOC زاویهٔ خارجی مثلث است. پس



$$A\hat{O}C = \hat{O}_1 = \hat{A} + \hat{B} = 2\hat{B} \Rightarrow \hat{B} = \frac{\hat{O}_1}{2} \Rightarrow A\hat{B}C = \frac{\hat{O}_1}{2}$$

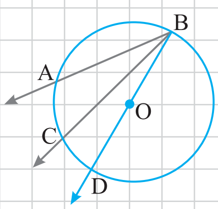
از طرفی زاویهٔ O_1 زاویه‌ای مرکزی است. در نتیجه $\hat{O}_1 = \overset{\frown}{AC}$. بنابراین $A\hat{B}C = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$.

حالت (۲): از B به O وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا نیم‌خط حاصل دایره را در نقطهٔ D قطع و زاویهٔ ABC را به دو زاویه از نوع زاویه‌های حالت (۱) تقسیم کند. اکنون سعی کنید خودتان کار را تمام کنید.



$$\text{حالت (۱)} \Rightarrow \begin{cases} \hat{B}_1 = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2} \\ \hat{B}_2 = \frac{\overset{\frown}{DC}}{2} \end{cases} \xrightarrow{+} \hat{B}_1 + \hat{B}_2 = \frac{\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{DC}}{2} \Rightarrow A\hat{B}C = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$$

حالت (۳): در این حالت نیز از B به O وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطهٔ D قطع کند و دو زاویه از نوع زاویه‌های حالت (۱) ایجاد شوند.



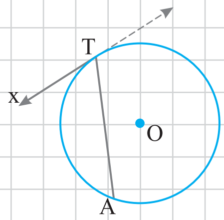
$$\text{حالت (۱)} \Rightarrow \begin{cases} A\hat{B}D = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2} \\ C\hat{B}D = \frac{\overset{\frown}{CD}}{2} \end{cases} \xrightarrow{-} A\hat{B}D - C\hat{B}D = \frac{\overset{\frown}{AD} - \overset{\frown}{CD}}{2} \Rightarrow A\hat{B}C = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$$

توجه کنید که برای اثبات قضیهٔ ۱(الف) هر سه حالت این مسئله لازم است. در مسئلهٔ بعدی قضیهٔ ۱(ب) را ثابت می‌کنیم.

مسئله ۳

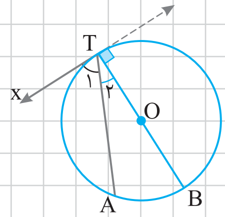
کتاب درسی

دایرهٔ $C(O, R)$ و یک زاویهٔ ظلّی مانند زاویهٔ xTA مفروض اسـت. مطابق شـکل مقابل ثابت کنید اندازهٔ زاویهٔ ظلّی xTA برابر با $\frac{\overset{\frown}{AT}}{۲}$ است.



راه‌حل روش اول (روش کتـاب درسـی): از T بـه O وصل می‌کنیم و امتـداد می‌دهیم تا دایره را در نقطهٔ B قطع کند. شعاع OT در نقطهٔ T بر خط مماس عمود است. اکنون توجه کنید که

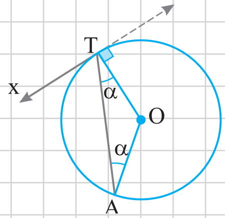
$$\hat{T}_۲=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}\ \text{(زاویهٔ محاطی)},\quad \hat{T}_۱+\hat{T}_۲=۹۰^\circ=\frac{\overset{\frown}{TB}}{۲}$$



در نتیجه

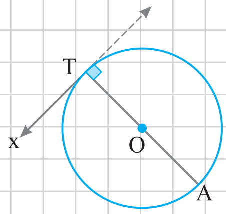
$$x\hat{T}A=\hat{T}_۱=۹۰^\circ-\hat{T}_۲=\frac{\overset{\frown}{TB}}{۲}-\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{AT}}{۲}$$

روش دوم: شـعاع‌های OA و OT را رسم می‌کنیم. مثلث OAT متساوی‌السـاقین است. پس $O\hat{T}A=O\hat{A}T=\alpha$. در نتیجـه $\overset{\frown}{AT}=\hat{O}=۱۸۰^\circ-۲\alpha$. از طرفـی $x\hat{T}A=۹۰^\circ-\alpha$. بنابراین

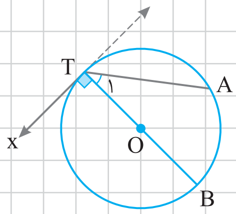


$$x\hat{T}A=۹۰^\circ-\alpha=\frac{۱۸۰^\circ-۲\alpha}{۲}=\frac{\overset{\frown}{AT}}{۲}$$

ممکن است این پرسش برای شما مطرح شود که آیا اثبات قضیهٔ ۱(ب) مانند اثبات قضیهٔ ۱(الف) سه حالت ندارد؟ پاسخ مثبت است؛ سه حالت دارد. تاکنون قضیه برای حالتی که زاویهٔ xTA حاده باشد، ثابـت شـده اسـت. حـال می‌خواهیـم دو حـالت دیگر را بیـان کنیـم. اگـر AT قطر دایره باشـد، آن‌گاه $x\hat{T}A=۹۰^\circ$ و $\overset{\frown}{AT}=۱۸۰^\circ$. پس در این حالت نیز $x\hat{T}A=\frac{\overset{\frown}{AT}}{۲}$.



در نهایـت، اگـر زاویهٔ xTA منفرجه باشـد، چگونـه ثابت کنیم؟ بدین صورت کـه ابتدا از T به O وصـل می‌کنیـم و امتداد می‌دهیم تا دایـره را در نقطهٔ B قطع کند. در این صـورت BT قطر دایره است و داریم

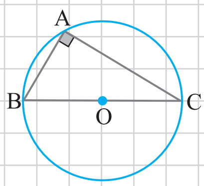


$$x\hat{T}A=\hat{T}_۱+x\hat{T}B=\hat{T}_۱+۹۰^\circ=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}+\frac{\overset{\frown}{BT}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{AT}}{۲}$$

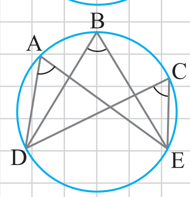
از گزاره‌هایی که ثابت کردیم چند نتیجهٔ کاربردی به‌دست می‌آیند که از آن‌ها زیاد استفاده می‌کنیم.

نتیجه دربارهٔ اندازه‌های زاویه‌های محاطی و ظلّی گزاره‌های زیر برقرارند:

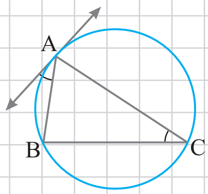
الف) اندازهٔ زاویهٔ محاطی روبه‌رو به قطر، ۹۰° است.



ب) زاویه‌های محاطی روبه‌رو به یک کمان هم‌اندازه‌اند.



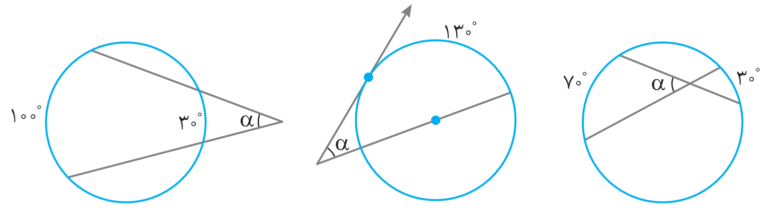
پ) دو زاویهٔ مشخص شده در شکل هم‌اندازه‌اند. زیرا اندازهٔ هر دو نصف اندازهٔ کمان AB است.



اکنون به بیان چند مسئله می‌پردازیم تا از این گزاره‌ها استفاده کنیم.

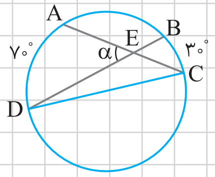
مسئله ۴

در هریک از شکل‌های زیر مقدار α را به دست آورید.



(پ) (ب) (الف)

راه‌حل الف) وتر CD را رسم می‌کنیم. سعی کنید اندازه‌های زاویه‌های مثلث CDE را به دست آورید.



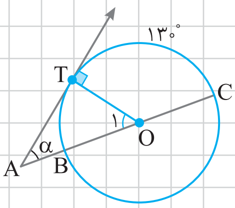
(زاویهٔ محاطی) $\hat{C}=\frac{\overset{\frown}{AD}}{۲}=\frac{۷۰^\circ}{۲}=۳۵^\circ$

(زاویهٔ محاطی) $\hat{D}=\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}=\frac{۳۰^\circ}{۲}=۱۵^\circ$

از طرفی α اندازهٔ زاویهٔ خارجی مثلث CDE است. پس $\alpha=\hat{C}+\hat{D}=۳۵^\circ+۱۵^\circ=۵۰^\circ$.

ب) در این شکل AT بر دایره مماس و O مرکز دایره است. به دو روش به این قسمت پاسخ می‌دهیم.

روش اول: شعاع OT را رسم می‌کنیم. توجه کنید که

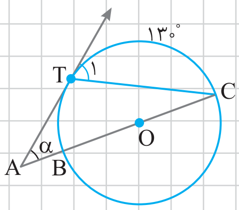


$$\overset{\frown}{BT}=۱۸۰^\circ-\overset{\frown}{TC}=۱۸۰^\circ-۱۳۰^\circ=۵۰^\circ$$

از طرفی زاویهٔ $O_۱$ زاویهٔ مرکزی است. پس $\hat{O}_۱=\overset{\frown}{BT}=۵۰^\circ$. اکنون می‌توان نوشت

$$\triangle AOT:\alpha=۹۰^\circ-\hat{O}_۱=۹۰^\circ-۵۰^\circ=۴۰^\circ$$

روش دوم: وتر TC را رسم می‌کنیم. توجه کنید که



$$\overset{\frown}{BT}=۱۸۰^\circ-\overset{\frown}{TC}=۵۰^\circ$$

در نتیجه

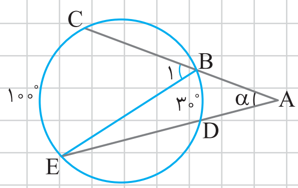
(زاویهٔ محاطی) $\hat{C}=\frac{\overset{\frown}{BT}}{۲}=\frac{۵۰^\circ}{۲}=۲۵^\circ$

(زاویهٔ ظلّی) $\hat{T}_۱=\frac{\overset{\frown}{TC}}{۲}=\frac{۱۳۰^\circ}{۲}=۶۵^\circ$

در مثلث TAC، زاویهٔ $T_۱$ زاویهٔ خارجی مثلث است. پس

$$\hat{T}_۱=\alpha+\hat{C}\Rightarrow\alpha=\hat{T}_۱-\hat{C}=۶۵^\circ-۲۵^\circ=۴۰^\circ$$

پ) وتر BE را رسم می‌کنیم. آیا می‌توانید اندازه‌های زاویه‌های مثلث BAE را به دست آورید؟ توجه کنید که



(زاویهٔ محاطی) $\hat{B}_۱=\frac{\overset{\frown}{CE}}{۲}=\frac{۱۰۰^\circ}{۲}=۵۰^\circ$

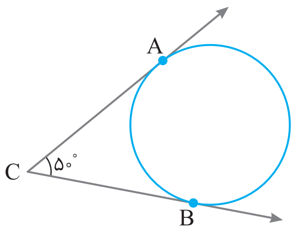
(زاویهٔ محاطی) $\hat{E}=\frac{\overset{\frown}{BD}}{۲}=\frac{۳۰^\circ}{۲}=۱۵^\circ$

در مثلث BAE زاویهٔ $B_۱$ زاویهٔ خارجی مثلث است. پس

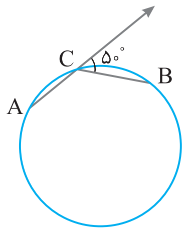
$$\hat{B}_۱=\alpha+\hat{E}\Rightarrow\alpha=\hat{B}_۱-\hat{E}=۵۰^\circ-۱۵^\circ=۳۵^\circ$$

مسئله ۵

در هریک از شکل‌های زیر اندازهٔ کمان AB را حساب کنید.



(ب)

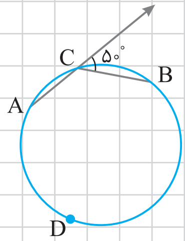


(الف)

راه‌حل توجه کنید که در هریک از شکل‌ها دو کمان AB وجود دارد. همان‌طور که قبلاً گفتیم، منظور از $\overset{\frown}{AB}$ کمان با اندازهٔ کوچک‌تر است. برای نشان دادن کمان بزرگ‌تر از حرف سوم استفاده می‌کنیم.

الف) توجه کنید که $\hat{ACB}=۱۸۰^\circ-۵۰^\circ=۱۳۰^\circ$

زاویهٔ ACB محاطی است. پس

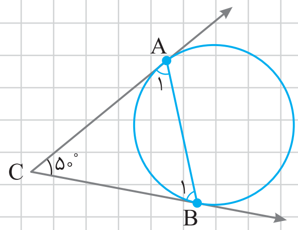


$$\hat{ACB}=\frac{\overset{\frown}{ADB}}{۲}\Rightarrow \overset{\frown}{ADB}=۲\times۱۳۰^\circ=۲۶۰^\circ\Rightarrow \overset{\frown}{AB}=۳۶۰^\circ-\overset{\frown}{ADB}=۱۰۰^\circ$$

آیا می‌توانید روش دیگری برای این قسمت ارائه کنید؟

ب) برای این قسمت دو روش ارائه می‌کنیم:

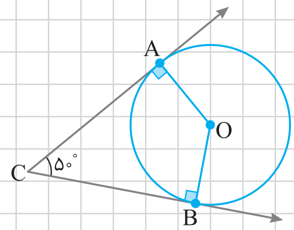
روش اول: وتر AB را رسم می‌کنیم. دو زاویهٔ $A_۱$ و $B_۱$ ظلّی هستند. پس



$$\hat{A}_۱=\hat{B}_۱=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}=\alpha$$

بنابراین $\triangle ABC: ۵۰^\circ+۲\alpha=۱۸۰^\circ\Rightarrow\alpha=۶۵^\circ\Rightarrow\overset{\frown}{AB}=۲\alpha=۱۳۰^\circ$

روش دوم: از مرکز دایره استفاده می‌کنیم. توجه کنید که O زاویهٔ مرکزی است و شعاع‌های OA و OB بر خط‌های مماس عمودند. آیا می‌توانید این روش را تکمیل کنید؟ می‌دانیم مجموع اندازه‌های زاویه‌های داخلی چهارضلعی CAOB برابر ۳۶۰° است. پس

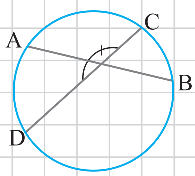


$$\hat{O}=۳۶۰^\circ-(۹۰^\circ+۵۰^\circ+۹۰^\circ)=۱۳۰^\circ\Rightarrow\overset{\frown}{AB}=\hat{O}=۱۳۰^\circ$$

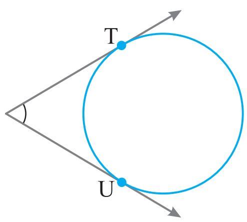
زاویه‌های داخلی و خارجی

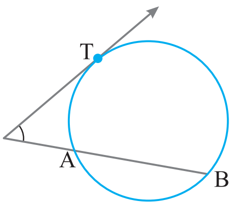
تاکنون زاویه‌هایی را بررسی کردیم که رأس آن‌ها روی دایره باشد و در قضیهٔ ۱ رابطهٔ بین اندازهٔ این زاویه‌ها را با اندازهٔ کمان‌های نظیرشان مشخص کردیم. اکنون به بررسی این موضوع برای زاویه‌هایی می‌پردازیم که رأس آن‌ها درون یا بیرون دایره است و اضلاعشان کمان‌هایی روی دایره جدا می‌کنند: زاویه‌های داخلی و خارجی در دایره.

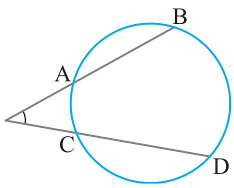
در شکل مقابل دو وتر AB و CD یکدیگر را درون دایره قطع کرده‌اند. به زاویهٔ بین این دو وتر زاویهٔ داخلی می‌گوییم.



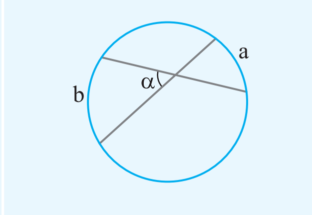
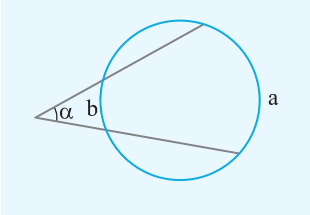
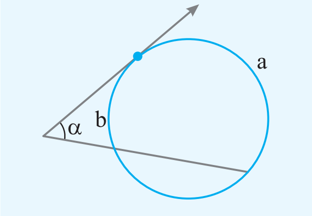
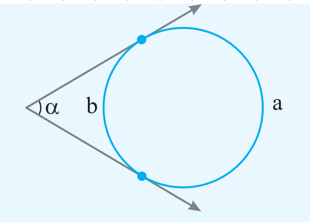
به نظرتان زاویهٔ خارجی چیست؟ به سه شکل زیر توجه کنید. به هریک از این سه زاویه، زاویهٔ خارجی می‌گوییم.







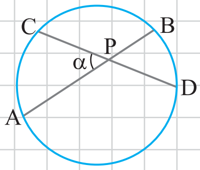
حال این پرسش مطرح می‌شود که اندازه‌های زاویه‌های داخلی و خارجی چه رابطه‌ای با اندازه‌های کمان‌های متناظرشان دارد؟ آیا پاسخی برای این پرسش دارید؟ در جدول زیر این ارتباط را می‌بینید.

			
$\alpha=\frac{a+b}{۲}$	$\alpha=\frac{a-b}{۲}$	$\alpha=\frac{a-b}{۲}$	$\alpha=\frac{a-b}{۲}$

آیا اثبات این چهار مورد را بلدید؟ سعی کنید از دو مسئلهٔ قبل استفاده کنید و آن‌ها را ثابت کنید. در مسئلهٔ بعد، حکم را در مورد زاویهٔ داخلی ثابت می‌کنیم. اثبات موارد دیگر را در تمرین ۲ از شما خواسته‌ایم.

مسئله ۶

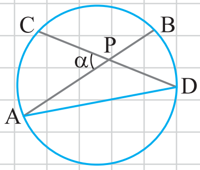
کتاب درسی



در شکل مقابل ثابت کنید

$$\alpha=\frac{\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD}}{۲}$$

راه‌حل توانستید ثابت کنید؟ حتماً خیلی از شما آن را ثابت کردید. اگر هنوز نتوانسته‌اید، کمی بیشتر فکر کنید و از ایدهٔ حل مسئلهٔ ۴ کمک بگیرید. کافی است از زاویهٔ خارجی مثلث PAD یا مثلث PBC استفاده کنید. ما در اینجا با مثلث PAD کار می‌کنیم. پس ابتدا وتر AD را رسم می‌کنیم.



توجه کنید که $\triangle PAD: \alpha=\hat{D}+\hat{A}$

از طرفی دو زاویهٔ A و D زاویه‌های محاطی در دایره‌اند. پس

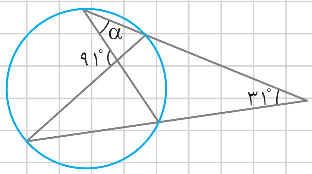
$$\begin{cases}\hat{D}=\frac{\overset{\frown}{AC}}{۲}\\ \hat{A}=\frac{\overset{\frown}{BD}}{۲}\end{cases}\Rightarrow \alpha=\hat{D}+\hat{A}=\frac{\overset{\frown}{AC}}{۲}+\frac{\overset{\frown}{BD}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD}}{۲}$$

اکنون با ایده گرفتن از این مسئله، سعی کنید موارد دیگر جدول قبل را ثابت کنید. در تمرین ۲، اثبات آن‌ها از شما خواسته شده است. در پاسخ آن تمرین، روش دیگری نیز برای این موارد بیان شده است.

توجه جدول ارائه‌شده بسیار مهم است. حتماً نتایج آن را به خاطر بسپارید و در مسئله‌های بعدی از آن‌ها استفاده کنید.

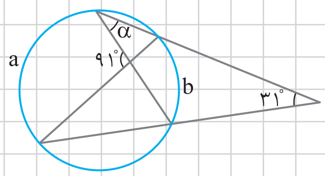
مسئله ۷

کتاب درسی



در شکل مقابل، اندازهٔ زاویهٔ α را به دست آورید.

راه‌حل در این شکل چه نوع زاویه‌هایی می‌بینید؟ غیر از زاویه‌های محاطی، یک زاویهٔ داخلی و یک زاویهٔ خارجی در دایره دیده می‌شود. این‌طور نیست؟ توجه کنید که



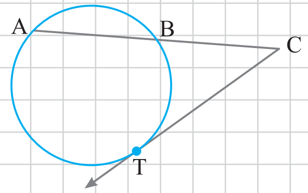
$$\begin{cases}۹۱^\circ=\frac{a+b}{۲}\Rightarrow a+b=۱۸۲^\circ\\ ۳۱^\circ=\frac{a-b}{۲}\Rightarrow a-b=۶۲^\circ\end{cases}\Rightarrow a=۱۲۲^\circ\ ,\quad b=۶۰^\circ$$

چون α اندازهٔ زاویه‌ای محاطی است، پس

$$\alpha=\frac{b}{۲}=\frac{۶۰^\circ}{۲}=۳۰^\circ$$

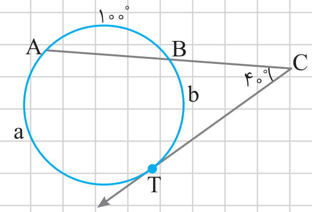
مسئله ۸

در شکل مقابل $\overset{\frown}{AB}=۱۰۰^\circ$ و $\hat{C}=۴۰^\circ$. اندازهٔ کمان‌های AT و BT را به دست آورید.



راه‌حل زاویهٔ C زاویهٔ خارجی دایره است. پس

$$\hat{C}=\frac{a-b}{۲}\Rightarrow ۴۰^\circ=\frac{a-b}{۲}\Rightarrow a-b=۸۰^\circ$$



از طرفی مجموع اندازه‌های کمان‌های دایره ۳۶۰° است. در نتیجه

$$a+b+۱۰۰^\circ=۳۶۰^\circ\Rightarrow a+b=۲۶۰^\circ$$

پس

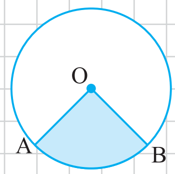
$$\begin{cases}a+b=۲۶۰^\circ\\ a-b=۸۰^\circ\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۱۷۰^\circ\Rightarrow \overset{\frown}{AT}=۱۷۰^\circ\\ b=۹۰^\circ\Rightarrow \overset{\frown}{BT}=۹۰^\circ\end{cases}$$

قطاع و قطعه

می‌دانید قطاع چیست؟ آیا تفاوت بین قطاع و قطعه را می‌دانید؟ به دو تعریف زیر دقت کنید تا به پاسخ این سؤال‌ها برسید.

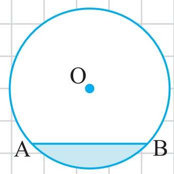
قطاع و قطعه

۱ قطاع: به ناحیه‌ای از درون و روی دایره که به دو شعاع دایره و آن دایره محدود است، قطاع گفته می‌شود. در دایرهٔ $C(O, R)$ در شکل مقابل یک قطاع رنگی و یک قطاع سفید دیده می‌شوند.



قطاع

۲ قطعه: به ناحیه‌ای از درون و روی دایره که به یک وتر و آن دایره محدود است، قطعه گفته می‌شود. در دایرهٔ $C(O, R)$ در شکل مقابل یک قطعهٔ رنگی و یک قطعهٔ سفید دیده می‌شوند.

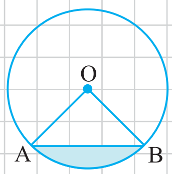


قطعه

چه ارتباطی بین مساحت‌های قطاع و قطعه وجود دارد؟ حتماً پاسخ مناسبی برای این پرسش دارید.

نتیجه در دایرهٔ $C(O, R)$ در شکل مقابل

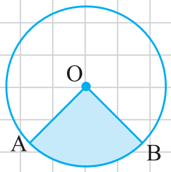
مساحت قطاع AOB = مساحت قطعه + مساحت مثلث AOB



در ادامهٔ این قسمت به بررسی قطاع می‌پردازیم. آیا بین مساحت قطاع AOB و اندازهٔ کمان AB رابطه‌ای وجود دارد؟ همان‌طور که مشخص است، هرچه اندازهٔ کمان بیشتر شود، مساحت قطاع بیشتر می‌شود. آیا با افزایش اندازهٔ کمان، طول آن کمان نیز افزایش می‌یابد؟ حتماً پاسخ شما «بله» است.

به عنوان مثال، اگر $\overset{\frown}{AB}=۶۰^\circ$ ، آن‌گاه مساحت قطاع AOB چه کسری از مساحت دایره است؟

حتماً می‌گویید $\frac{۱}{۶}=\frac{۶۰^\circ}{۳۶۰^\circ}$. کاملاً درست است. بنابراین مساحت قطاع AOB و طول کمان AB به اندازهٔ $\overset{\frown}{AB}$ وابسته است.

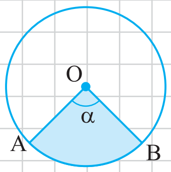


نتیجه در دایرهٔ $C(O, R)$ در شکل مقابل

$$\frac{\widehat{AB}}{۳۶۰^\circ}=\frac{\text{طول کمان } AB}{\text{محیط دایره}}$$

$$\frac{\widehat{AB}}{۳۶۰^\circ}=\frac{\text{مساحت قطاع } AOB}{\text{مساحت دایره}}$$

سعی کنید این تناسب‌ها را به خوبی درک کنید. در نکتهٔ زیر، مساحت قطاع، طول کمان و محیط قطاع بر حسب اندازهٔ زاویهٔ مرکزی یا اندازهٔ کمان مشخص شده‌اند.



نکته

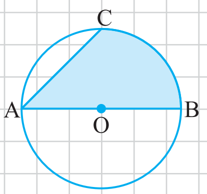
در دایرهٔ $C(O, R)$ در شکل مقابل اگر $\widehat{AB}=\alpha$، آن‌گاه

$$\frac{\alpha}{۳۶۰^\circ}=\frac{\text{طول کمان } AB}{۲\pi R}\Rightarrow L=\text{طول کمان } AB=\frac{\alpha}{۳۶۰^\circ}\times ۲\pi R$$

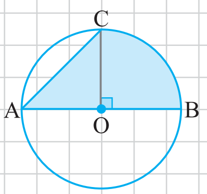
$$\frac{\alpha}{۳۶۰^\circ}=\frac{\text{مساحت قطاع } AOB}{\pi R^{۲}}\Rightarrow S=\text{مساحت قطاع } AOB=\frac{\alpha}{۳۶۰^\circ}\times \pi R^{۲}$$

$$\text{محیط قطاع } AOB=\text{طول کمان } AB+۲R\Rightarrow \text{محیط قطاع } AOB=\frac{\alpha}{۳۶۰^\circ}\times ۲\pi R+۲R$$

مسئله ۹



در دایرهٔ $C(O,۱۰)$ در شکل مقابل، اندازهٔ کمان AC برابر ۹۰° است. مساحت ناحیهٔ رنگی را حساب کنید.



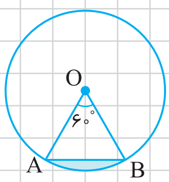
راه‌حل توجه کنید که ناحیهٔ رنگی قطاع نیست. آیا می‌توانید یک قطاع از آن جدا کنید؟ با رسم شعاع OC، ناحیهٔ خواسته شده به یک قطاع ۹۰° و یک مثلث قائم‌الزاویه تقسیم می‌شود. توجه کنید که

$$S_{OAC}=\frac{OA\times OC}{۲}=\frac{۱۰\times ۱۰}{۲}=۵۰$$

$$S_{\text{قطاع } COB}=\frac{\alpha}{۳۶۰^\circ}\times \pi R^{۲}=\frac{۹۰^\circ}{۳۶۰^\circ}\times \pi\times ۱۰^{۲}=۲۵\pi$$

پس مساحت ناحیهٔ رنگی برابر $۲۵\pi+۵۰$ است.

مسئله ۱۰ کتاب درسی



در شکل مقابل شعاع دایره برابر ۴ است. مساحت قطعهٔ رنگی را حساب کنید.

راه‌حل کافی است مساحت مثلث AOB را از مساحت قطاع AOB کم کنیم:

$$\text{مساحت قطاع } AOB=\frac{\alpha}{۳۶۰^\circ}\times \pi R^{۲}=\frac{۶۰^\circ}{۳۶۰^\circ}\times \pi\times ۴^{۲}=\frac{۸}{۳}\pi$$

مثلث OAB متساوی‌الاضلاع با طول ضلع R است. در نتیجه

$$S_{OAB}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}R^{۲}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}\times ۴^{۲}=۴\sqrt{۳}$$

بنابراین مساحت قطعهٔ رنگی برابر $\frac{۸}{۳}\pi-۴\sqrt{۳}$ است.

درس اول

تمرین‌های تشریحی

۱ جاهای خالی را پر کنید. کتاب درسی

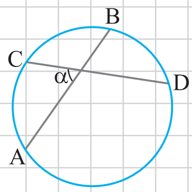
الف) نقطهٔ A درون دایرهٔ $C(O,R)$ است هرگاه ....

ب) خط ℓ بر دایرهٔ $C(O,R)$ مماس است هرگاه ....

پ) نقطهٔ A روی دایرهٔ $C(O,R)$ است هرگاه ....

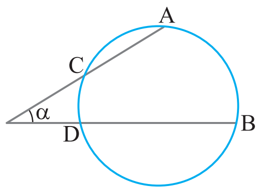
ت) خط ℓ با دایرهٔ $C(O,R)$ متقاطع است هرگاه ....

۲ در هریک از شکل‌های زیر حکم خواسته شده را ثابت کنید. کتاب درسی



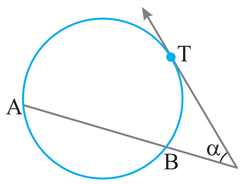
$\alpha = \dfrac{\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD}}{۲}$

(الف)



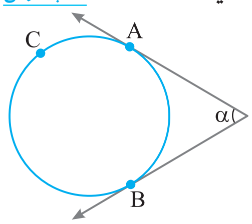
$\alpha = \dfrac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD}}{۲}$

(ب)



$\alpha = \dfrac{\overset{\frown}{AT} - \overset{\frown}{BT}}{۲}$

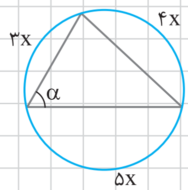
(پ)



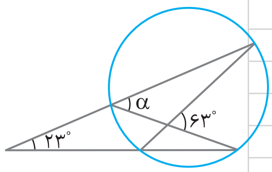
$\alpha = \dfrac{\overset{\frown}{ACB} - \overset{\frown}{AB}}{۲}$

(ت)

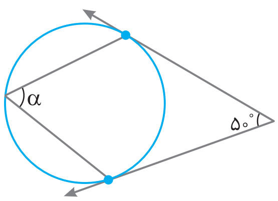
۳ در هریک از شکل‌های زیر، مقدار α را به‌دست آورید.



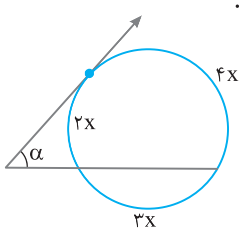
(الف)



(ب)



(پ)

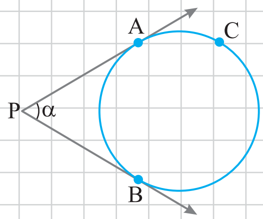


(ت)

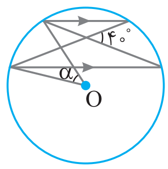
۴ در دایرهٔ $C(O,R)$، $\overset{\frown}{AB} = ۶۰^\circ$ و $AB = ۱۰$. فاصلهٔ O از وتر AB را به‌دست آورید. کتاب درسی

۵ در شکل مقابل ثابت کنید

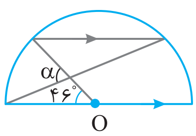
$\overset{\frown}{AB} = ۱۸۰^\circ - \alpha\,,\quad \overset{\frown}{ACB} = ۱۸۰^\circ + \alpha$



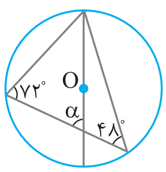
۶ در دایرهٔ $C(O,R)$ در شکل‌های زیر، مقدار α را به‌دست آورید.



(الف)

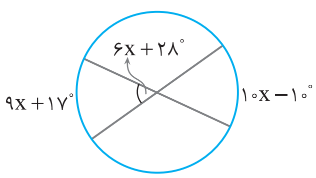


(ب)

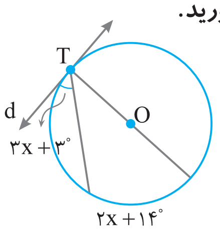


(پ)

۷ در هریک از شکل‌های زیر مقدار x را به‌دست آورید.

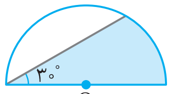


(الف)

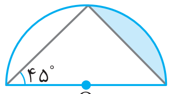


(ب)

۸ شعاع نیم‌دایره‌های زیر برابر ۱۲ است. در هر کدام مساحت ناحیهٔ رنگی را حساب کنید.

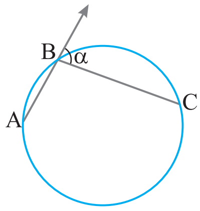


(الف)



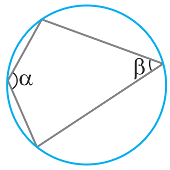
(ب)

۹ در هریک از شکل‌های زیر حکم خواسته شده را ثابت کنید.



$\alpha = \frac{\overset{\frown}{ABC}}{۲}$

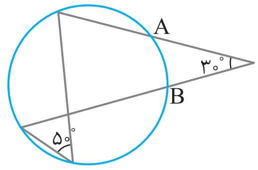
(الف)



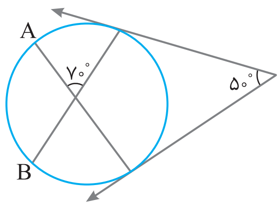
$\alpha + \beta = ۱۸۰^\circ$

(ب)

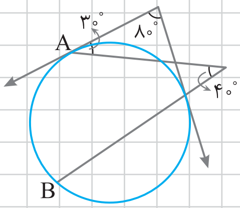
۱۰ در هریک از شکل‌های زیر اندازهٔ کمان AB را به‌دست آورید.



(الف)



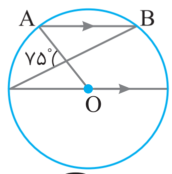
(ب)



(پ)

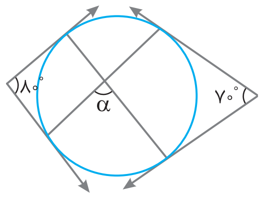
۱۱ فاصلهٔ وتر AB در دایرهٔ $C(O,۱۰)$ از مرکز آن برابر $۵\sqrt{۳}$ است. طول کمان AB چقدر است؟

۱۲ در شکل‌های زیر مقدار خواسته شده را حساب کنید. کتاب درسی



$\overset{\frown}{AB} = ?$

(الف)

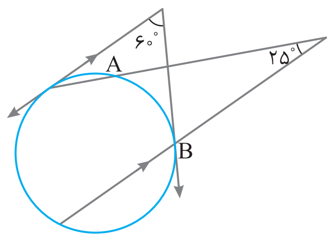


$\alpha = ?$

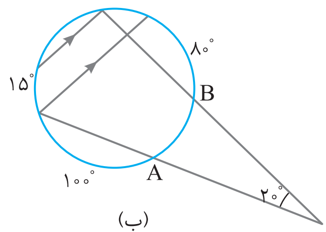
(ب)

۱۳ اگر طول کمان AB در دایره‌ای یک‌چهارم اندازهٔ قطر این دایره و مساحت قطاع کمان AB برابر ۲۵ باشد، محیط این قطاع چقدر است؟

۱۴ در هریک از شکل‌های زیر اندازهٔ کمان AB را به‌دست آورید.



(الف)

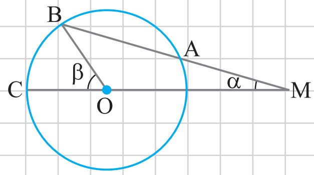


(ب)

۱۵ طول دو وتر از دایره‌ای ۲۲ و ۲۸ است. اگر فاصلهٔ مرکز دایره از یکی از وترها دو برابر فاصلهٔ مرکز دایره از دیگری باشد، شعاع دایره چقدر است؟

۱۶ دایرهٔ $C(O, R)$ مفروض است. از نقطهٔ M در خارج دایره قاطعی چنان رسم کرده‌ایم که دایره را در دو نقطهٔ A و B قطع کرده است. اگر $MA = R$، نشان دهید $\beta = ۳\alpha$.

کتاب درسی

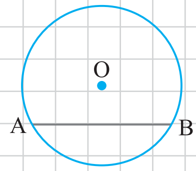


۱۷ (نکته‌های (الف)، (ب) و (پ)) در دایرهٔ $C(O, R)$ در شکل مقابل نشان دهید

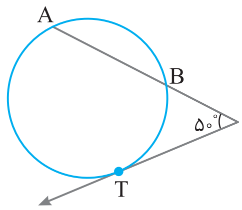
الف) $\overset{\frown}{AB} = ۶۰^\circ \Leftrightarrow AB = R$

ب) $\overset{\frown}{AB} = ۹۰^\circ \Leftrightarrow AB = \sqrt{۲}R$

پ) $\overset{\frown}{AB} = ۱۲۰^\circ \Leftrightarrow AB = \sqrt{۳}R$

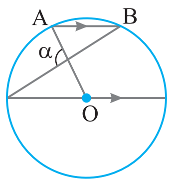


۱۸ در دایره‌های $C(O, R)$ در شکل‌های زیر، با توجه به فرض داده شده مورد خواسته شده را به‌دست آورید.



$AB = \sqrt{۲}R \Rightarrow \overset{\frown}{AT} = ?$

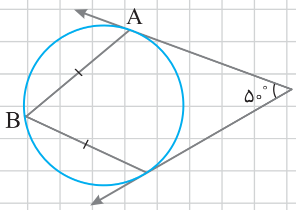
(الف)



$AB = R \Rightarrow \alpha = ?$

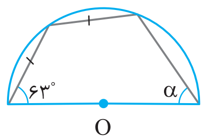
(ب)

۱۹ در هریک از شکل‌های زیر مورد خواسته شده را حساب کنید.



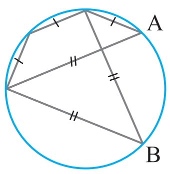
$\overset{\frown}{AB} = ?$

(الف)



$\alpha = ?$

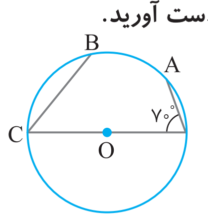
(ب)



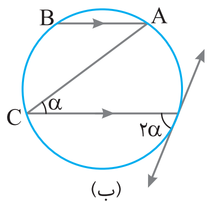
$\overset{\frown}{AB} = ?$

(پ)

۲۰ در دایره‌های $C(O, R)$ در شکل‌های زیر، $AB = R$. در هر کدام اندازهٔ کمان BC را به‌دست آورید.

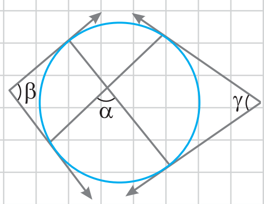


(الف)

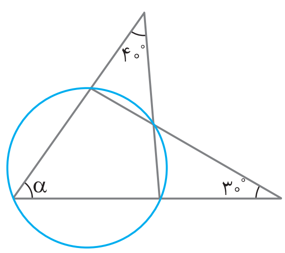


(ب)

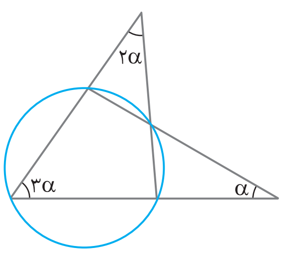
۲۱ با توجه به شکل مقابل نشان دهید $\alpha = \dfrac{\beta + \gamma}{۲}$.



۲۲ در هر شکل مقدار α را به‌دست آورید.



(الف)



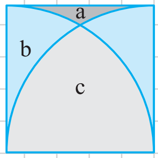
(ب)

تمرین‌های مهارتی

صفحات پاسخ: ۲۱۲ تا ۲۲۰

۱ (قضیهٔ خط مماس) نشان دهید خط d در نقطهٔ T بر دایرهٔ $C(O, R)$ مماس است اگر و تنها اگر OT بر d عمود باشد.

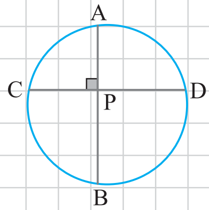
۲ در شکل مقابل دو ربع دایره رسم شده است. اگر طول ضلع مربع ۱۰ باشد، مساحت هریک از ناحیه‌های مشخص شده را به‌دست آورید.



۳ دو وتر AB و CD در دایرهٔ $C(O, R)$ بر هم عمودند. نشان دهید

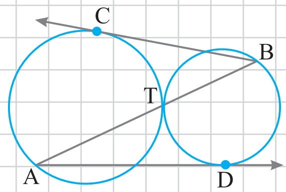
الف) امتداد میانهٔ PM از مثلث PAD بر BC عمود است.

ب) $AC^{۲}+BD^{۲}=AD^{۲}+BC^{۲}=۴R^{۲}$



۴ در شکل مقابل دو دایره در نقطهٔ T مماس خارج‌اند. ثابت کنید

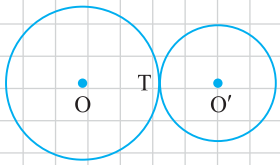
$AB^{۲}=BC^{۲}+AD^{۲}$



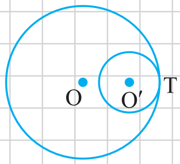
۵ دو دایرهٔ $C(O, R)$ و $C(O', R')$ در نقطهٔ T بر هم مماس‌اند. در هر دو شکل زیر نشان دهید

الف) O، O' و T روی یک خطاند.

ب) در نقطهٔ مشترک دو دایره، یک خط بر هر دو مماس است.

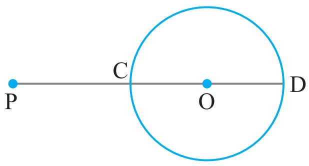


(۱)

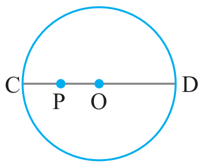


(۲)

۶ مطابق شکل‌های زیر دایرهٔ $C(O, R)$ مفروض است. در هریک از دو حالت ثابت کنید نزدیک‌ترین نقطهٔ دایره به P نقطهٔ C و دورترین نقطهٔ دایره از P نقطهٔ D است.

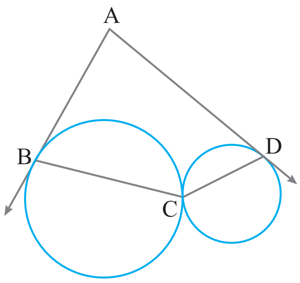


(الف)



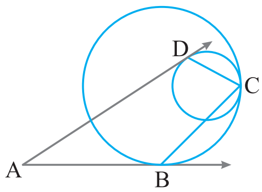
(ب)

۷ در هریک از شکل‌های زیر حکم خواسته شده را ثابت کنید.



$\hat{A}+۲B\hat{C}D=۳۶۰^{\circ}$

(الف)



$\hat{A}+۲B\hat{C}D=۱۸۰^{\circ}$

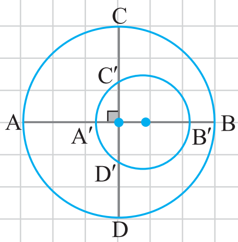
(ب)

۸ طول خط‌المرکزین دو دایرهٔ متخارج برابر d اسـت. اگر اندازهٔ زاویهٔ بین دو مماس مشترک داخلی این دو دایره 2α و اندازهٔ زاویهٔ بین دو مماس مشترک خارجی این دو دایره 2β باشد، نشان دهید

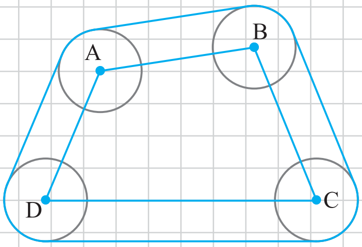
الف) طول مماس مشترک داخلی دو دایره برابر $d\cos\alpha$ است.

ب) طول مماس مشترک خارجی دو دایره برابر $d\cos\beta$ است.

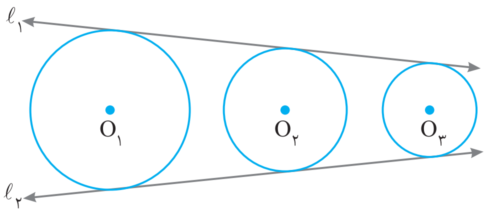
۹ در شـکل قطر AB از مرکز دایرهٔ کوچک می‌گذرد و بر قطر CD عمود است. اگر $AA'=a$، $BB'=b$ و $CC'=c$ و شعاع دایرهٔ بزرگ R باشد، ثابت کنید $R=\frac{ab-c^2}{a+b-2c}$



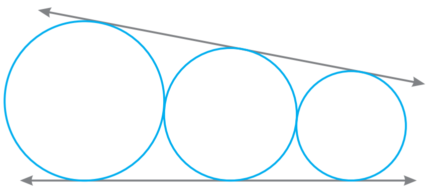
۱۰ چهار دایره با شـعاع برابر و به مراکز رأس‌های چهارضلعی $ABCD$ مطابق شـکل مقابل رسـم شده‌اند. این چهار دایره با نخی به هم بسته شده‌اند. ثابت کنید طول نخ برابر با مجموع محیط یک دایره و محیط چهارضلعی است.



۱۱ مطابق شـکل زیر، دو خط ℓ_1 و ℓ_2 بر سـه دایرهٔ $C(O_1,R_1)$، $C(O_2,R_2)$ و $C(O_3,R_3)$ مماس‌اند. نشان دهید $\frac{O_1O_2}{O_2O_3}=\frac{R_1-R_2}{R_2-R_3}$

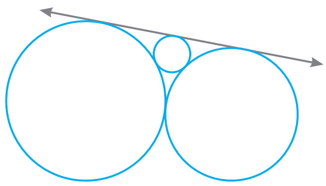


۱۲ در هریک از شکل‌های زیر سه دایره به شعاع‌های $R_1>R_2>R_3$ رسم شده‌اند. در هر کدام حکم خواسته شده را ثابت کنید.



$R_2=\sqrt{R_1R_3}$

(الف)



$\frac{1}{\sqrt{R_2}}=\frac{1}{\sqrt{R_1}}+\frac{1}{\sqrt{R_3}}$

(ب)

۱۳ دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C(O',R')$ در نقطهٔ T مماس درون هستند. حکم‌های زیر را ثابت کنید.

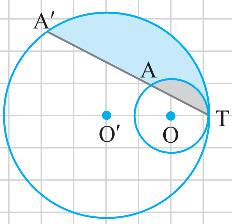
الف) $\overset{\frown}{TA}=\overset{\frown}{TA'}$

ب) $OA \parallel O'A'$

پ) $\frac{TA}{TA'}=\frac{R}{R'}$

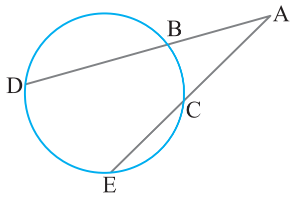
ت) $\frac{\text{طول کمان } TA}{\text{طول کمان } TA'}=\frac{R}{R'}$

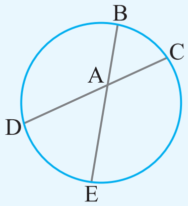
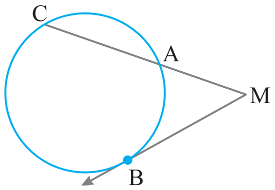
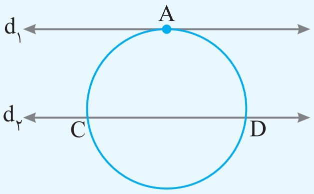
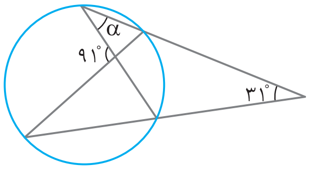
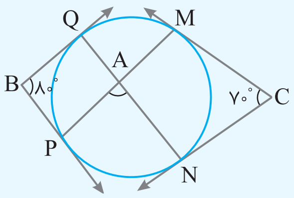
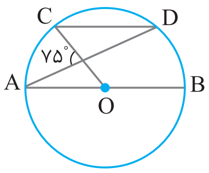
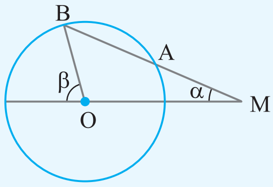
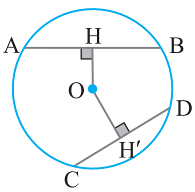
ث) $\frac{\text{مساحت ناحیهٔ خاکستری}}{\text{مساحت ناحیهٔ آبی}}=\frac{R^2}{R'^2-R^2}$



سؤالات امتحانی بارم‌بندی شده

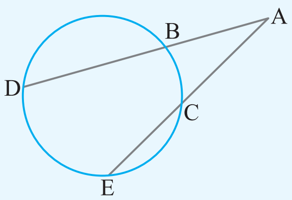
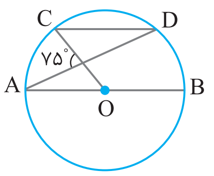
صفحات پاسخ: ۲۲۱ تا ۲۲۶

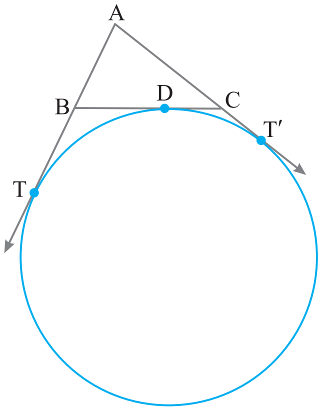
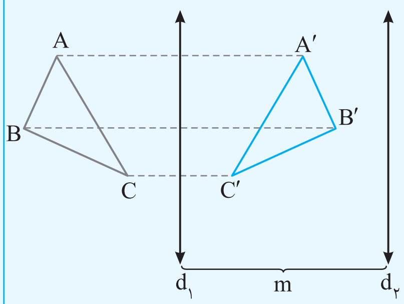
ردیف	سؤالات	بارم
۱	درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید. الف) هر مستطیل محاطی است. ب) هر ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، محاطی است. پ) هر مثلث، هم محاطی است و هم محیطی. ت) هر لوزی محیطی است. ث) هر ذوزنقهٔ محاطی، متساوی‌الساقین است. ج) هر متوازی‌الاضلاع محاطی است. چ) هر کایت محیطی است. ح) هر چندضلعی منتظم، هم محاطی است و هم محیطی.	۲
۲	جاهای خالی را با عبارت‌ها یا عددهای مناسب پر کنید. الف) اگر نقطه‌ای خارج دایره باشد، آن‌گاه فاصلهٔ آن تا مرکز دایره .... شعاع دایره است. ب) اگر نقطه‌ای درون دایره باشد، فاصلهٔ آن تا مرکز دایره .... شعاع دایره است. پ) در دایرهٔ $C(O,R)$ نقطهٔ A روی دایره است هرگاه .... ت) اگر فاصلهٔ خط از مرکز دایره با شعاع دایره برابر باشد، خط و دایره .... ث) اگر فاصلهٔ خط از مرکز دایره کمتر از شعاع باشد، خط و دایره .... نقطهٔ اشتراک دارند. ج) یک چندضلعی را .... می‌نامند هرگاه دایره‌ای بر همهٔ ضلع‌های آن .... باشد. چ) در چندضلعی‌های محیطی، مرکز دایرهٔ محاطی محل همرسی .... است. ح) در چندضلعی‌های محاطی، مرکز دایرهٔ محیطی محل همرسی .... است. خ) طول مماس مشترک داخلی دو دایرهٔ $C(O,3)$ و $C(O',4)$ که $OO'=10$، برابر .... است. د) طول مماس مشترک خارجی دو دایرهٔ $C(O,2)$ و $C(O',3)$ که $OO'=7$، برابر .... است. ذ) در یک چندضلعی محیطی با مساحت ۲۰ و محیط ۵، شعاع دایرهٔ محاطی برابر .... است. ر) اگر اندازهٔ کمانی در دایره‌ای به شعاع ۶ برابر 60° باشد، طول آن کمان .... است. ز) مساحت قطاع 45° از دایره‌ای به شعاع ۱۲ برابر .... است. ژ) در دایرهٔ $C(O,R)$، $\overset{\frown}{AB}=60^\circ$ و $AB=10$. فاصلهٔ O از وتر AB برابر .... است.	۳/۷۵
۳	فرض کنید اندازه‌های کمان‌های AB و CD از دایرهٔ $C(O,R)$ با هم برابرند. نشان دهید اندازه‌های وترهای AB و CD نیز با هم برابرند.	۱/۲۵
۴	فرض کنید دو وتر AB و CD از یک دایره هم‌اندازه‌اند. ثابت کنید اندازه‌های کمان‌های AB و CD نیز برابرند.	۱/۲۵
۵	نشان دهید دو وتر که یکدیگر را درون دایره قطع نمی‌کنند، با هم موازی‌اند اگر و تنها اگر کمان‌های محدود بین آن‌ها مساوی باشند.	۱/۲۵
۶	قطر CD از دایره‌ای کمان AB از آن را نصف کرده است. نشان دهید CD بر AB عمود است و کمان AB را نصف می‌کند.	۱/۲۵
۷	با توجه به شکل مقابل نشان دهید $\hat{A}=\frac{\overset{\frown}{DE}-\overset{\frown}{BC}}{2}$  	۱

۸	با توجه به شکل مقابل نشان دهید $D\hat{A}E=\frac{\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{DE}}{۲}$ 	۱/۲۵
۹	در شکل مقابل MB بر دایره مماس است. نشان دهید $\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{AB}}{۲}$ 	۱
۱۰	در شکل مقابل اگر $d_۱$ بر دایره مماس باشد و $d_۱ \| d_۲$، نشان دهید $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AD}$. 	۱
۱۱	در شکل مقابل مقدار α را به‌دست آورید. 	۱
۱۲	در شکل اضلاع دو زاویهٔ B و C بر دایره مماس‌اند. اندازهٔ زاویهٔ A چند درجه است؟ 	۱/۲۵
۱۳	در دایرهٔ رسم شده در شکل مقابل، $AB \| CD$. اندازهٔ کمان CD را به‌دست آورید. 	۱/۷۵
۱۴	دایرهٔ $C(O,R)$ مفروض است. از نقطهٔ M خارج دایره خطی چنان رسم کرده‌ایم که دایره را در دو نقطهٔ A و B قطع کرده است و $MA=R$. نشان دهید $\beta=۳\alpha$. 	۱/۵
۱۵	در دایرهٔ $C(O,R)$ نشان دهید $AB>CD$ اگر و تنها اگر $OH<OH'$. 	۱/۵

امتحان نوبت اول (۱)

صفحات پاسخ: ۲۸۲ و ۲۸۳

ردیف	سؤالات	بارم
۱	درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید. الف) هر کایت محاطی است. ب) هر ذوزنقهٔ محیطی، متساوی‌الساقین است. پ) هر مثلث، هم محاطی است و هم محیطی. ت) هر نقطه روی محور بازتاب، نقطهٔ ثابت تبدیل است.	۱
۲	جاهای خالی را با عبارت‌ها یا عددهای مناسب پر کنید. الف) اگر فاصلهٔ خط از مرکز دایره با شعاع دایره برابر باشد، خط و دایره .... ب) در چندضلعی‌های محاطی، مرکز دایرهٔ محیطی محل همرسی .... است. پ) در بازتاب نسبت به خط d، تبدیل‌یافتهٔ هر نقطه روی خط d .... است. ت) در دوران اگر تصویر نقطهٔ A نقطهٔ A' باشد، عمودمنصف پاره‌خط AA' از .... می‌گذرد. ث) تبدیلی که طول هر پاره‌خط را حفظ می‌کند، .... نامیده می‌شود. ج) در یک چندضلعی محیطی با مساحت ۲۰ و محیط ۵، شعاع دایرهٔ محاطی برابر .... است. چ) مساحت قطاع ۴۵° از دایره‌ای به شعاع ۱۲ برابر .... است. ح) دوران با زاویهٔ ۶۰° .... نقطهٔ ثابت تبدیل دارد.	۲
۳	نشان دهید دو وتر که یکدیگر را درون دایره قطع نمی‌کنند، با هم موازی‌اند اگر و تنها اگر کمان‌های محدود بین آن‌ها مساوی باشند.	۱/۲۵
۴	با توجه به شکل مقابل نشان دهید $\hat{A}=\frac{\overset{\frown}{DE}-\overset{\frown}{BC}}{۲}$ 	۱
۵	در دایرهٔ رسم شده در شکل مقابل، $AB\parallel CD$. اندازهٔ کمان CD را به‌دست آورید. 	۱/۷۵
۶	طول شعاع‌های دو دایرهٔ متخارج را به‌دست آورید که طول مماس مشترک خارجی آن‌ها مساوی $۳\sqrt{۷}$، طول مماس مشترک داخلی آن‌ها مساوی $\sqrt{۱۵}$ و طول خط‌المرکزین آن‌ها مساوی ۸ است.	۱/۵
۷	قضیه: هرگاه M نقطه‌ای بیرون دایره باشد و از M مماس و قاطعی نسبت به دایره رسم کنیم، مربع اندازهٔ مماس برابر است با حاصل‌ضرب اندازه‌های دو قطعهٔ قاطع.	۱/۷۵
۸	هرگاه از نقطهٔ M خارج از دایرهٔ $C(O,R)$ دو مماس بر دایره رسم کنیم و نقاط تماس T و T' باشند، ثابت کنید $MT=MT'$.	۱
۹	از نقطهٔ P در خارج دایره‌ای، مماس PA به طول $۱۰\sqrt{۳}$ را بر آن رسم کرده‌ایم (A روی دایره است). همچنین خطی از P گذرانده‌ایم که دایره را در دو نقطهٔ B و C قطع کرده است و $BC=۲۰$. طول‌های PB و PC را به‌دست آورید.	۱/۲۵
۱۰	در مثلث ABC اگر h_a، h_b و h_c اندازهٔ ارتفاع‌ها باشد، نشان دهید $\frac{۱}{h_a}+\frac{۱}{h_b}+\frac{۱}{h_c}=\frac{۱}{r}$	۱/۲۵

۱۱	در شکل مقابل، دایره محاطی خارجی مثلث ABC رسم شده است. نشان دهید $AT=AT'=p$ 	۱/۵
۱۲	جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید. الف) بازتاب شیب خط را .... ب) در بازتاب، قرینهٔ قرینهٔ هر نقطه .... است.	۰/۵
۱۳	در حالتی که پاره‌خط AB با بردار $\vec{v}$ موازی نباشد، نشان دهید اگر $A'B'$ انتقال‌یافتهٔ AB تحت بردار $\vec{v}$ باشد، آن‌گاه AB و $A'B'$ هم‌اندازه‌اند.	۱/۵
۱۴	در شکل، d_1 به موازات d_2 و به فاصلهٔ m از آن قرار دارد و مثلث $A'B'C'$ بازتاب مثلث ABC نسبت به خط d_1 است. بازتاب مثلث $A'B'C'$ را نسبت به خط d_2 رسم کنید و آن را مثلث $A''B''C''$ بنامید. الف) نشان دهید $AA''=2m$. ب) اندازهٔ BB'' و CC'' چقدر است؟ پ) با چه تبدیلی می‌توان مثلث $A''B''C''$ را تصویر مثلث ABC دانست؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ 	۱/۵
۱۵	نقطهٔ A به فاصله $2\sqrt{6}$ از خط d قرار دارد. تصویر نقطهٔ A را تحت بازتاب نسبت به خط d نقطهٔ A' می‌نامیم. نقطهٔ A را حول نقطهٔ A' به اندازهٔ ۱۲۰ درجه دوران می‌دهیم تا نقطهٔ A'' حاصل شود. طول پاره‌خط AA'' را محاسبه کنید.	۱/۲۵
	موفق و پیروز باشید — جمع بارم	۲۰

فصل اول

پاسخ تمرین‌های تشریحی

۱ الف) نقطهٔ A درون دایرهٔ $C(O,R)$ است هرگاه $OA<R$.

ب) خط ℓ بر دایرهٔ $C(O,R)$ مماس است هرگاه فاصلهٔ O از ℓ برابر R باشد.

پ) نقطهٔ A روی دایرهٔ $C(O,R)$ است هرگاه $OA=R$.

ت) خط ℓ با دایرهٔ $C(O,R)$ متقاطع است هرگاه فاصلهٔ O از ℓ کمتر از R باشد.

۲ هر کدام را با دو روش ثابت می‌کنیم. هر دو روش در کتاب درسی آمده‌اند.

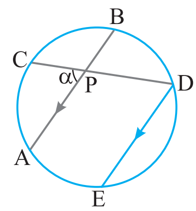
الف) روش اول (با زاویهٔ خارجی مثلث): این روش در مسئلهٔ ۶ درس‌نامه بیان شده است.

روش دوم (با استفاده از خط موازی): از D خطی موازی AB رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطهٔ E قطع کند. بنابر قضیهٔ خطوط موازی و مورب،

$AB||ED,$ مورب $CD \Rightarrow \hat{D}=\hat{P}=\alpha$, $AB||ED \Rightarrow \overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BD}$

در مورد مجموع اندازه‌های دو کمان AC و BD که در حکم آمده است، چه می‌توان گفت؟ چون $\hat{D}$ زاویهٔ محاطی است، پس $\hat{D}=\frac{\overset{\frown}{CE}}{2}$ و در نتیجه

$$\alpha=\hat{D}=\frac{\overset{\frown}{CE}}{2}=\frac{\overset{\frown}{CA}+\overset{\frown}{AE}}{2}=\frac{\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD}}{2}$$

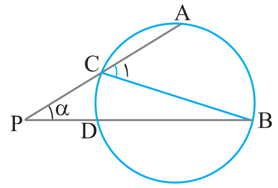


ب) روش اول (با زاویهٔ خارجی مثلث): وتر BC را رسم می‌کنیم.

$\triangle CPB: \hat{C}_1=\hat{P}+\hat{B} \Rightarrow \alpha=\hat{C}_1-\hat{B}$

دو زاویهٔ C_1 و B زاویه‌های محاطی هستند. پس

$$\begin{cases}\hat{C}_1=\frac{\overset{\frown}{AB}}{2}\\ B=\frac{\overset{\frown}{CD}}{2}\end{cases} \Rightarrow \alpha=\hat{C}_1-\hat{B}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{2}-\frac{\overset{\frown}{CD}}{2}=\frac{\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{CD}}{2}$$

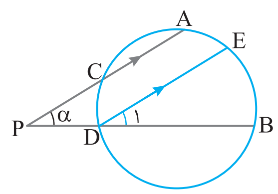


روش دوم (با استفاده از خط موازی): از D خطی موازی AC رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطهٔ E قطع کند. بنابر قضیهٔ خطوط موازی و مورب،

$AP||ED,$ مورب $PB \Rightarrow \hat{D}_1=\hat{P}=\alpha$, $AC||ED \Rightarrow \overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{CD}$

حال دوباره به حکم مسئله توجه کنید. تفاضل دو کمان $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{CD}$ چه کمانی است؟ چون زاویهٔ D_1 زاویهٔ محاطی است، پس $\hat{D}_1=\frac{\overset{\frown}{BE}}{2}$ و در نتیجه

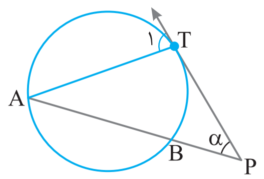
$$\alpha=\hat{D}_1=\frac{\overset{\frown}{BE}}{2}=\frac{\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{AE}}{2}=\frac{\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{CD}}{2}$$



پ) روش اول (با زاویهٔ خارجی مثلث): وتر AT را رسم می‌کنیم.

$\triangle TAP: \hat{T}_1=\hat{A}+\hat{P} \Rightarrow \alpha=\hat{T}_1-\hat{A}$

$$\begin{cases}\text{(زاویهٔ ظلّی)}\ \hat{T}_1=\frac{\overset{\frown}{AT}}{2}\\ \text{(زاویهٔ محاطی)}\ \hat{A}=\frac{\overset{\frown}{BT}}{2}\end{cases} \Rightarrow \alpha=\hat{T}_1-\hat{A}=\frac{\overset{\frown}{AT}}{2}-\frac{\overset{\frown}{BT}}{2}=\frac{\overset{\frown}{AT}-\overset{\frown}{BT}}{2}$$

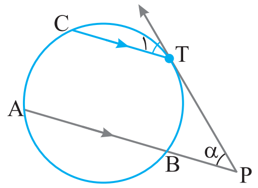


روش دوم (با استفاده از خط موازی): از T خطی موازی AB رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطهٔ C قطع کند.

$TC||PA$, مورب $PT \Rightarrow \hat{T}_1=\hat{P}=\alpha$, $TC||BA \Rightarrow \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BT}$

توجه کنید که زاویهٔ T_1 زاویهٔ ظلّی است. پس $\hat{T}_1=\frac{\overset{\frown}{TC}}{2}$ و در نتیجه

$$\alpha=\hat{T}_1=\frac{\overset{\frown}{TC}}{2}=\frac{\overset{\frown}{AT}-\overset{\frown}{AC}}{2}=\frac{\overset{\frown}{AT}-\overset{\frown}{BT}}{2}$$

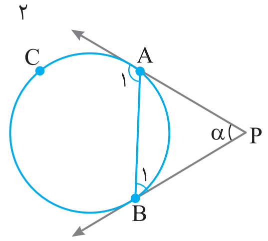


ت) روش اول (با زاویهٔ خارجی مثلث): وتر AB را رسم می‌کنیم.

$\triangle PAB: \hat{A}_1=\hat{B}_1+\hat{P} \Rightarrow \alpha=\hat{A}_1-\hat{B}_1$

در مورد $\hat{A}_1$ و $\hat{B}_1$ چه می‌توان گفت؟ چه نوع زاویه‌ای هستند؟

$$\begin{cases}\text{(زاویهٔ ظلّی)}\ \hat{A}_1=\frac{\overset{\frown}{ACB}}{2}\\ \text{(زاویهٔ ظلّی)}\ \hat{B}_1=\frac{\overset{\frown}{AB}}{2}\end{cases} \Rightarrow \alpha=\hat{A}_1-\hat{B}_1=\frac{\overset{\frown}{ACB}-\overset{\frown}{AB}}{2}$$

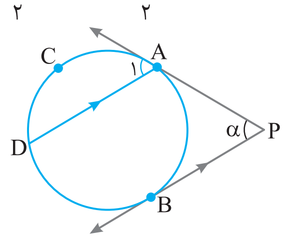


روش دوم (با استفاده از خط موازی): از A خطی موازی PB رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطهٔ D قطع کند.

$AD||PB,$ مورب $PA \Rightarrow \hat{A}_1=\hat{P}=\alpha$, $AD||PB \Rightarrow \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{DB}$

چون $\hat{A}_1$ زاویهٔ ظلّی است، پس $\hat{A}_1=\frac{\overset{\frown}{AD}}{2}$. در نتیجه

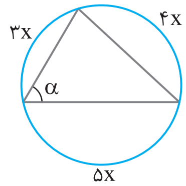
$$\hat{A}_1=\frac{\overset{\frown}{AD}}{2}=\frac{\overset{\frown}{ADB}-\overset{\frown}{BD}}{2}=\frac{\overset{\frown}{ACB}-\overset{\frown}{AB}}{2}$$



۳ الف) ابتدا توجه کنید که

$$۳x+۴x+۵x=۳۶۰^\circ \Rightarrow ۱۲x=۳۶۰^\circ \Rightarrow x=۳۰^\circ$$

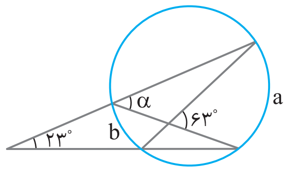
با توجه به اندازهٔ زاویهٔ محاطی، $\alpha=\frac{۴x}{۲}=۲x=۶۰^\circ$



ب) کافی است از زاویه‌های داخلی و خارجی در دایره استفاده کنیم:

$$\begin{cases} ۶۳^\circ=\frac{a+b}{۲} \Rightarrow a+b=۱۲۶^\circ \\ ۲۳^\circ=\frac{a-b}{۲} \Rightarrow a-b=۴۶^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=۸۶^\circ \\ b=۴۰^\circ \end{cases}$$

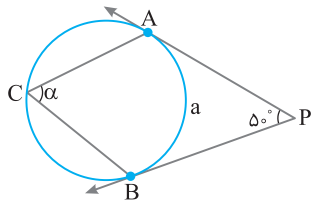
در نتیجه $\alpha=\frac{a}{۲}=۴۳^\circ$.



پ) در شکل یک زاویهٔ خارجی و یک زاویهٔ محاطی دیده می‌شود. اگر $\overset{\frown}{AB}=a$ ، آن‌گاه $\overset{\frown}{ACB}=۳۶۰^\circ-a$. پس

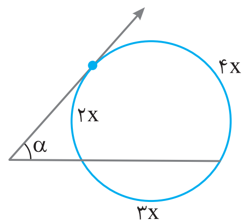
$$\hat{P}=\frac{\overset{\frown}{ACB}-\overset{\frown}{AB}}{۲} \Rightarrow ۵۰^\circ=\frac{(۳۶۰^\circ-a)-a}{۲} \Rightarrow ۳۶۰^\circ-۲a=۱۰۰^\circ \Rightarrow a=۱۳۰^\circ$$

بنابراین $\alpha=\frac{a}{۲}=۶۵^\circ$.



ت) در این دایره $۲x+۳x+۴x=۳۶۰^\circ$. در نتیجه $x=۴۰^\circ$. حال با توجه به زاویهٔ خارجی در دایره به‌دست می‌آید

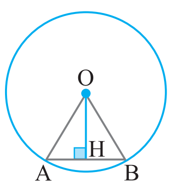
$$\alpha=\frac{۴x-۲x}{۲}=x=۴۰^\circ$$



۴ بنابر فرض داریم $\overset{\frown}{AB}=۶۰^\circ \Rightarrow \hat{O}=\overset{\frown}{AB}=۶۰^\circ$

پس مثلث متساوی‌الساقین OAB یک مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۱۰ است. در نتیجه

$$OH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}OA=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times ۱۰=۵\sqrt{۳}$$

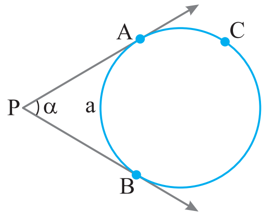


۵ نتیجهٔ این تمرین را به خاطر بسپارید چون پرکاربرد است. ما با دو روش آن را حل می‌کنیم. فرض کنید $\overset{\frown}{AB}=a$.

روش اول (با زاویهٔ خارجی در دایره):

$$\alpha=\frac{\overset{\frown}{ACB}-\overset{\frown}{AB}}{۲}=\frac{(۳۶۰^\circ-a)-a}{۲}=\frac{۳۶۰^\circ-۲a}{۲}=۱۸۰^\circ-a$$

در نتیجه $\overset{\frown}{AB}=a=۱۸۰^\circ-\alpha$ و $\overset{\frown}{ACB}=۳۶۰^\circ-a=۱۸۰^\circ+\alpha$.

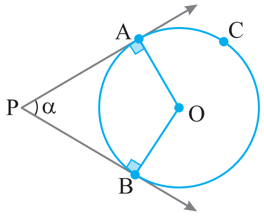


روش دوم: دو شعاع OA و OB را رسم می‌کنیم. این شعاع‌ها بر خط‌های مماس عمودند. مجموع اندازه‌های زوایای داخلی چهارضلعی PAOB را در نظر می‌گیریم:

$$\hat{O}+۹۰^\circ+\alpha+۹۰^\circ=۳۶۰^\circ \Rightarrow \hat{O}=۱۸۰^\circ-\alpha$$

زاویهٔ O زاویهٔ مرکزی است. در نتیجه $\overset{\frown}{AB}=\hat{O}=۱۸۰^\circ-\alpha$. بنابراین

$$\overset{\frown}{ACB}=۳۶۰^\circ-\overset{\frown}{AB}=۳۶۰^\circ-(۱۸۰^\circ-\alpha)=۱۸۰^\circ+\alpha$$

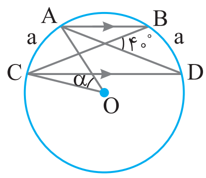


۶ الف) از موازی بودن دو وتر AB و CD چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$AB||CD \Rightarrow \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}=a$$

آیا زاویهٔ داخلی در دایره می‌بینید؟ دقیقاً. زاویه‌ای با اندازهٔ ۴۰° .

$$۴۰^\circ=\frac{a+a}{۲} \Rightarrow a=۴۰^\circ \Rightarrow \hat{O}=\alpha=\overset{\frown}{AC}=a=۴۰^\circ$$

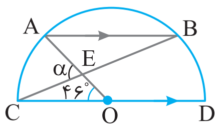


ب) روش اول: دوباره دو وتر موازی در شکل مشاهده می‌شود. همچنین توجه کنید که زاویهٔ O زاویهٔ مرکزی است. پس $\overset{\frown}{AC}=\hat{O}=۴۶^\circ$. بنابراین

$$AB||CD \Rightarrow \overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{AC}=۴۶^\circ \Rightarrow \hat{C}=\frac{\overset{\frown}{BD}}{۲}=۲۳^\circ \quad \text{(زاویهٔ محاطی)}$$

در مثلث OCE، α اندازهٔ زاویهٔ خارجی مثلث است. پس

$$\alpha=\hat{O}+\hat{C}=۴۶^\circ+۲۳^\circ=۶۹^\circ$$



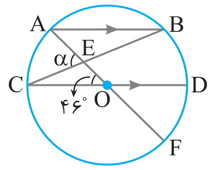
روش دوم: نیم‌دایره را به دایره تبدیل می‌کنیم و شعاع OA را از سمت O امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطهٔ F قطع کند.

$$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{DF}=\hat{O}=۴۶^\circ$$

$$AB||CD \Rightarrow \overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{AC}=۴۶^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BF}=۲\times ۴۶^\circ=۹۲^\circ$$

در این دایره $\hat{E}$ زاویهٔ داخلی است. پس

$$\alpha=\hat{E}=\frac{\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BF}}{2}=\frac{46^\circ+92^\circ}{2}=69^\circ$$



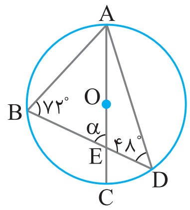
پ) این قسمت خیلی ساده است. اگر نتوانستید α را به‌دست آورید، از قطر بودن AC استفاده نکرده‌اید.

$$\hat{B}=\frac{\overset{\frown}{AD}}{2}\Rightarrow \overset{\frown}{AD}=2\times72^\circ=144^\circ\Rightarrow \overset{\frown}{CD}=180^\circ-\overset{\frown}{AD}=36^\circ$$

$$\hat{D}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{2}\Rightarrow \overset{\frown}{AB}=2\times48^\circ=96^\circ$$

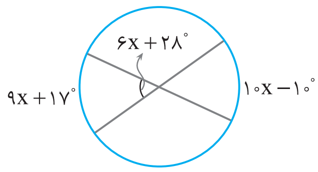
توجه کنید که E زاویهٔ داخلی در دایره است. پس

$$\alpha=\hat{E}=\frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD}}{2}=\frac{96^\circ+36^\circ}{2}=66^\circ$$



۷ الف) کافی است از زاویهٔ داخلی در دایره استفاده شود.

$$6x+28^\circ=\frac{9x+17^\circ+10x-10^\circ}{2}\Rightarrow 12x+56^\circ=19x+7^\circ\Rightarrow x=7^\circ$$

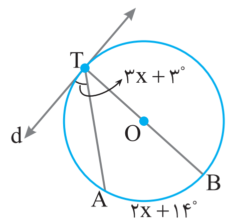


ب) با توجه به اندازهٔ زاویهٔ ظلّی،

$$3x+3^\circ=\frac{\overset{\frown}{TA}}{2}\Rightarrow \overset{\frown}{TA}=6x+6^\circ$$

$$\overset{\frown}{TA}+\overset{\frown}{AB}=180^\circ\Rightarrow 6x+6^\circ+2x+14^\circ=180^\circ$$

$$8x+20^\circ=180^\circ\Rightarrow x=20^\circ$$

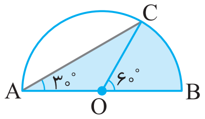


۸ الف) به روش‌های مختلفی می‌توان مساحت ناحیهٔ رنگی را حساب کرد. مثلاً می‌توان از مساحت نیم‌دایره، مساحت ناحیهٔ سفید را کم کرد. ولی ما در اینجا با رسم شعاع OC ناحیهٔ رنگی را به مثلث OAC و قطاع BOC تقسیم می‌کنیم. با توجه به اندازهٔ زاویه‌های مرکزی و محاطی $B\hat{O}C=\overset{\frown}{BC}=2\times\hat{A}=60^\circ$. در نتیجه

$$S_{BOC\ \text{قطاع}}=\frac{\alpha}{360^\circ}\times\pi R^2=\frac{60^\circ}{360^\circ}\times\pi\times12^2=24\pi$$

$$S_{OAC}=\frac{1}{2}OA\times OC\times\sin\hat{O}=\frac{1}{2}\times12\times12\times\sin120^\circ=36\sqrt{3}$$

بنابراین مساحت ناحیهٔ رنگی برابر $24\pi+36\sqrt{3}$ است.

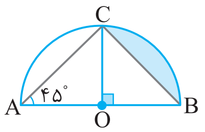


ب) ناحیهٔ رنگی یک قطعه است. اگر شعاع OC را رسم کنیم، آن‌گاه با توجه به اندازه‌های زاویه‌های مرکزی و محاطی $B\hat{O}C=\overset{\frown}{BC}=2\times\hat{A}=90^\circ$. بنابراین مساحت قطعهٔ رنگی برابر اختلاف مساحت قطاع 90° و مساحت مثلث OBC است.

$$S_{BOC\ \text{قطاع}}=\frac{\alpha}{360^\circ}\times\pi R^2=\frac{90^\circ}{360^\circ}\times\pi\times12^2=36\pi$$

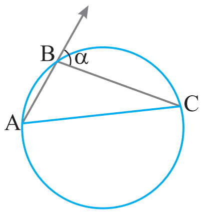
$$S_{OBC}=\frac{1}{2}OB\times OC=\frac{1}{2}\times12\times12=72$$

در نتیجه مساحت قطعهٔ رنگی برابر $36\pi-72$ است.



۹ الف) روش اول: وتر AC را رسم می‌کنیم. با توجه به زاویهٔ خارجی در مثلث ABC،

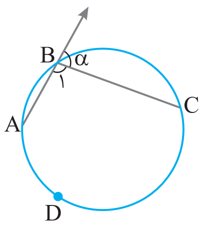
$$\alpha=\hat{A}+\hat{C}=\frac{\overset{\frown}{BC}}{2}+\frac{\overset{\frown}{AB}}{2}=\frac{\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{AB}}{2}=\frac{\overset{\frown}{ABC}}{2}$$



روش دوم: توجه کنید که اندازهٔ زاویهٔ B_1 برابر $180^\circ-\alpha$ است و این زاویه یک زاویهٔ محاطی است. اکنون می‌توان نوشت

$$\hat{B}_1=\frac{\overset{\frown}{ADC}}{2}\Rightarrow 180^\circ-\alpha=\frac{\overset{\frown}{ADC}}{2}$$

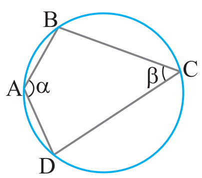
$$\alpha=180^\circ-\frac{\overset{\frown}{ADC}}{2}=\frac{360^\circ-\overset{\frown}{ADC}}{2}=\frac{\overset{\frown}{ABC}}{2}$$



ب) کافی است از زاویه‌های محاطی استفاده کنیم:

$$\begin{cases}\hat{A}=\dfrac{\overset{\frown}{BCD}}{2}\\[2mm] \hat{C}=\dfrac{\overset{\frown}{BAD}}{2}\end{cases}\Rightarrow \alpha+\beta=\hat{A}+\hat{C}=\frac{\overset{\frown}{BCD}+\overset{\frown}{BAD}}{2}=\frac{360^\circ}{2}=180^\circ$$

بنابراین $\alpha+\beta=180^\circ$.

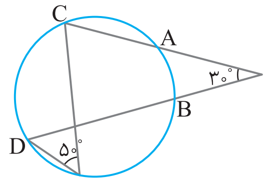


۱۰ الف) با توجه به اندازهٔ زاویهٔ محاطی،

$$50^\circ=\frac{\overset{\frown}{CD}}{2}\Rightarrow \overset{\frown}{CD}=100^\circ$$

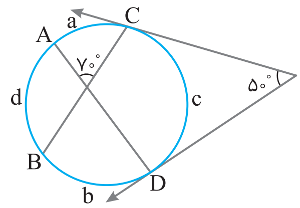
همچنین با توجه به اندازهٔ زاویهٔ خارجی در دایره،

$$30^\circ=\frac{\overset{\frown}{CD}-\overset{\frown}{AB}}{2}\Rightarrow 60^\circ=100^\circ-\overset{\frown}{AB}\Rightarrow \overset{\frown}{AB}=40^\circ$$



ب) در شکل یک زاویهٔ داخلی و یک زاویهٔ خارجی در دایره دیده می‌شود.

$$70^\circ=\frac{a+b}{2}\Rightarrow a+b=140^\circ\Rightarrow c+d=220^\circ$$



اکنون می‌توانیم به دو روش عمل کنیم.

روش اول: طبق تمرین ۵ می‌توان نوشت $\overset{\frown}{CAD}=180^\circ+50^\circ=230^\circ$، پس

$$d+a+b=230^\circ\Rightarrow d+140^\circ=230^\circ\Rightarrow \overset{\frown}{AB}=d=90^\circ$$

روش دوم: از زاویهٔ خارجی در دایره استفاده می‌کنیم:

$$50^\circ=\frac{\overset{\frown}{CAD}-\overset{\frown}{CD}}{2}\Rightarrow 100^\circ=a+b+d-c\Rightarrow c-d=40^\circ$$

پس $c-d=40^\circ$ و $c+d=220^\circ$.

$$\begin{cases}c-d=40^\circ\\ c+d=220^\circ\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=130^\circ\\ d=90^\circ\Rightarrow \overset{\frown}{AB}=90^\circ\end{cases}$$

پ) طبق تمرین ۵ می‌توان نوشت $\overset{\frown}{AD}=180^\circ-\hat{E}=180^\circ-80^\circ=100^\circ$

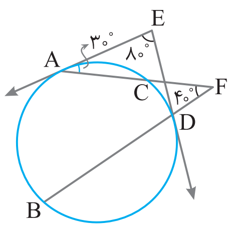
توجه کنید که زاویهٔ EAC زاویهٔ ظلّی است، پس

$$E\hat{A}C=\frac{\overset{\frown}{AC}}{2}\Rightarrow 30^\circ=\frac{\overset{\frown}{AC}}{2}\Rightarrow \overset{\frown}{AC}=60^\circ$$

$$\begin{cases}\overset{\frown}{AC}=60^\circ\\ \overset{\frown}{AD}=100^\circ\end{cases}\Rightarrow \overset{\frown}{CD}=40^\circ$$

از طرفی $\hat{F}$ زاویهٔ خارجی در دایره است، پس

$$\hat{F}=\frac{\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{CD}}{2}\Rightarrow 40^\circ=\frac{\overset{\frown}{AB}-40^\circ}{2}\Rightarrow \overset{\frown}{AB}=120^\circ$$

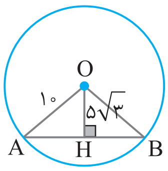


۱۱ با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس به‌دست می‌آید

$$\triangle OAH: AH^2=OA^2-OH^2=10^2-(5\sqrt{3})^2=25\Rightarrow AH=5$$

در نتیجه $AB=10$ و مثلث OAB متساوی‌الاضلاع است. بنابراین $A\hat{O}B=60^\circ$

و طول کمان AB برابر است با $\frac{A\hat{O}B}{360^\circ}\times 2\pi R=\frac{60^\circ}{360^\circ}\times 2\pi\times 10=\frac{10\pi}{3}$



۱۲ الف) مشابه این تمرین را قبلاً گفته‌ایم. می‌توانید از آن کمک بگیرید. همان طور که در آنجا دیدید، از دو روش می‌توانیم استفاده کنیم.

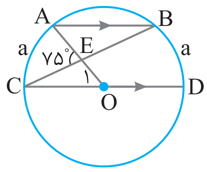
روش اول: موازی بودن AB و CD شما را یاد چه نتیجه‌ای می‌اندازد؟

$$AB\parallel CD\Rightarrow \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}=a$$

توجه کنید که $\hat{O}_1=\overset{\frown}{AC}=a$ و $\hat{C}=\frac{\overset{\frown}{BD}}{2}=\frac{a}{2}$. با استفاده از اندازهٔ زاویهٔ خارجی در مثلث OCE به‌دست می‌آید

$$75^\circ=\hat{C}+\hat{O}_1=\frac{a}{2}+a\Rightarrow \frac{3}{2}a=75^\circ\Rightarrow a=50^\circ$$

در نتیجه $\overset{\frown}{AB}=180^\circ-2a=80^\circ$.

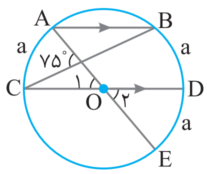


روش دوم: شعاع OA را از سمت O امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطهٔ E قطع کند.

$$AB\parallel CD\Rightarrow \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}=a\ ,\quad \hat{O}_1=\hat{O}_2\Rightarrow \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{DE}=a$$

زاویه با اندازهٔ 75° چه نوع زاویه‌ای در دایره است؟ دقیقاً. زاویهٔ داخلی. پس

$$75^\circ=\frac{a+2a}{2}\Rightarrow 3a=150^\circ\Rightarrow a=50^\circ\Rightarrow \overset{\frown}{AB}=180^\circ-2a=80^\circ$$



ب) روش اول (روش کتاب درسی): دو زاویهٔ خارجی و یک زاویهٔ داخلی دایره در شکل دیده می شوند. درست است؟

$$80^\circ=\frac{b+c+d-a}{2},\quad 70^\circ=\frac{b+a+d-c}{2}$$

با جمع کردن این دو تساوی به نتیجهٔ $b+d=150^\circ$ می‌رسیم. پس با توجه به اندازهٔ زاویهٔ داخلی،

$$\alpha=\frac{b+d}{2}=\frac{150^\circ}{2}=75^\circ$$