کتاب آموزش کامل مفاهیم و آزمون

هندسه دهم

(ریاضی فیزیک)

علی صادقی

گذرنامه
ورود به آینده شگفت انگیز

الله
بسم
الرحمن
الرحيم

مقدمه

به‌نام خداوند جان و خرد
کزین برتر اندیشه برنگذرد

بسیار خرسندیم که کتاب «هندسه دهم» از مجموعه «گذرنامه» را تقدیم دانش‌آموزان می‌کنیم. این کتاب مطالب هندسه پایهٔ دهم را به‌صورت مفهومی آموزش می‌دهد. دانش‌آموز، ابتدا با مباحث هر فصل آشنا می‌شود و با مثال‌های فراوان بر حل آن‌ها اشراف پیدا می‌کند. سپس برای هر فصل، تعدادی پرسش‌های تشریحی و چهارگزینه‌ای را پاسخ می‌دهد تا بر موضوع تسلط یابد.

در ادامه یک آزمون چهارگزینه‌ای برای هر درس جهت خودآزمایی آورده شده است.

همچنین سطح‌بندی پرسش‌ها، اعم از تشریحی، چهارگزینه‌ای و آزمون در بخش پاسخ‌ها، انجام گرفته است.

انتظار می‌رود کتاب حاضر، همهٔ نیازهای دانش‌آموزان کلاس دهم را در درس هندسه که مایل به تحصیل در بهترین دانشگاه‌ها و بهترین رشته‌های کشور هستند، پاسخ‌گو باشد.

در اینجا لازم می‌دانیم از مؤلف محترم آقای علی صادقی که کتاب را زیر نظر دبیر مجموعه تألیف کرده‌اند تشکر کنیم.
هم‌چنین از خانم‌ها محبوبه شریفی (حروف‌چین و صفحه‌آرا)، سارا لطفی مقدم و سمانه مسروری (رسم شکل)، بهاره خدامی (گرافیست و طراح جلد) سپاسگزاریم.

امیدواریم دبیران محترم هندسه و دانش‌آموزان و خانواده‌های عزیز آن‌ها ما را با اعلام نظرات، پیشنهادها و انتقادهای خود دربارهٔ این کتاب یاری فرمایند.

انتشارات مبتکران

فهرست

فصل ۱
ترسیم‌های هندسی و استدلال

فصل ۲
قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن

فصل ۳
چندضلعی‌ها

فصل ۴
تجسم فضایی

فصل ۱

ترسیم‌های هندسی و استدلال

درس صفر
زاویه، مثلث و اجزای مهم آن

۱– **زاویه حاده (تُند):** هر زاویه کوچکتر از 90° را زاویه حاده می‌گوییم.

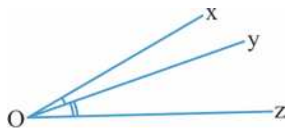
۲– **زاویه منفرجه (باز):** هر زاویه بزرگتر از 90° را زاویه منفرجه می‌گوییم.

۳– **زاویه قائمه:** به زاویه‌ای که برابر 90° باشد، زاویه قائمه می‌گوییم.

۴– **زاویه نیم صفحه:** به زاویه‌ای که برابر 180° باشد، زاویه نیم‌صفحه می‌گوییم.

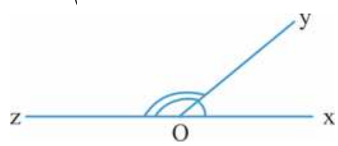
۵– **دو زاویه متمم:** به دو زاویه‌ای که مجموعشان برابر با 90° باشد دو زاویه متمم می‌گوییم.

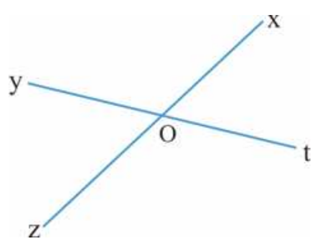
۶– **دو زاویه مکمل:** به دو زاویه‌ای که مجموعشان برابر با 180° باشد دو زاویه مکمل می‌گوییم.



۷– **دو زاویه مجاور:** به دو زاویه‌ای که در رأس و یک ضلع مشترک بوده و اضلاع غیرمشترکشان در طرفین ضلع مشترک باشند، دو زاویه مجاور می‌گوییم. به‌عنوان مثال دو زاویه $x\hat{O}y$ و $y\hat{O}z$ دو زاویه مجاورند.

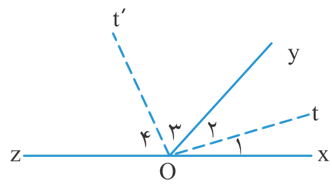
۸– **دو زاویه مجانب:** به دو زاویه مجاور که مکمل نیز باشند، دو زاویه مجانب می‌گوییم. دو زاویه $x\hat{O}y$ و $y\hat{O}z$ در شکل زیر، مجانبند.





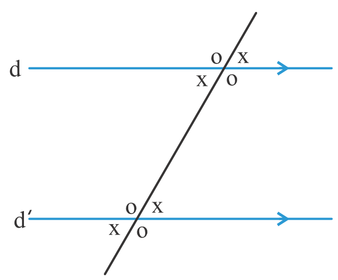
۹– **دو زاویه متقابل به رأس:** دو زاویه که رأس مشترک داشته باشند واضلاع آن‌ها دوبه‌دو در امتداد یکدیگر و در جهات مختلف باشند، دو زاویه متقابل به رأس می‌گوییم. مانند دو زاویه $x\hat{O}t$ و $y\hat{O}z$ در شکل مقابل.

۱۰– نیمسازهای دو زاویه مجانب بر هم عمودند.



اثبات:

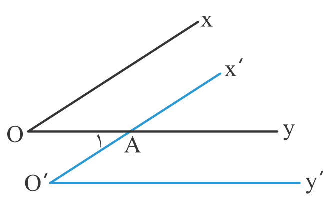
$$\left.\begin{array}{l}\hat{O}_1+\hat{O}_2+\hat{O}_3+\hat{O}_4=180^\circ\\ \hat{O}_1=\hat{O}_2\ ,\ \hat{O}_3=\hat{O}_4\end{array}\right\}\Rightarrow 2\hat{O}_2+2\hat{O}_3=180^\circ\Rightarrow\hat{O}_2+\hat{O}_3=90^\circ\Rightarrow t\hat{O}t'=90^\circ$$



۱۱– نیمسازهای دو زاویه متقابل به رأس در یک امتدادند.

۱۲– **قضیه خطوط موازی و مورب:** اگر خطی دو خط موازی را قطع کند، ۸ زاویه ایجاد می‌شود به‌طوری که زوایای حاده با هم و زوایای منفرجه با هم برابرند. همچنین هر زاویه حاده با هر زاویه منفرجه مکمل می‌باشد.

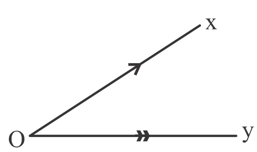
۱۳– اگر اضلاع دو زاویه نظیر به نظیر موازی باشند، دو زاویه یا مساوی‌اند یا مکمل.

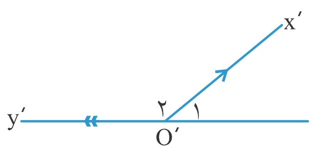


اثبات: فرض می‌کنیم در دو زاویه xOy و $x'O'y'$ اضلاع Ox و $O'x'$ با هم و اضلاع Oy و $O'y'$ نیز با هم موازی باشند و ضلع $O'x'$ ضلع Oy را مطابق شکل در نقطه A قطع کند. اگر $O'y'$ در جهت Oy باشد، طبق قضیه خطوط موازی و مورب داریم:

$$\left.\begin{array}{l}Oy\parallel O'y'\\ O'x'\ \text{مورب}\end{array}\right\}\Rightarrow\hat{O}'=\hat{A}_1\qquad\left.\begin{array}{l}Ox\parallel O'x'\\ Oy\ \text{مورب}\end{array}\right\}\Rightarrow\hat{A}_1=\hat{O}$$

درنتیجه $\hat{O}=\hat{O}'$.



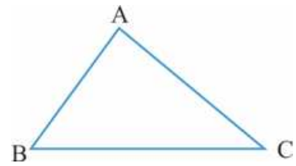


حال اگر $O'x'\parallel Ox$، $O'y'\parallel Oy$ و مطابق شکل $O'y'$ در خلاف جهت Oy باشد، آنگاه بنابر حالت اول $\hat{O}=\hat{O}'_1$. از طرفی $\hat{O}'_1+\hat{O}'_2=180^\circ$. بنابراین $\hat{O}+\hat{O}'_2=180^\circ$. درنتیجه زوایای O و O' یا مساوی‌اند یا مکمل.

۱۴– اگر اضلاع دو زاویه نظیر به نظیر موازی باشند، نیمسازهای این دو زاویه یا موازیند یا عمودند. (چرا؟)

۱۵– اگر اضلاع دو زاویه، دو به دو برهم عمود باشند، دو زاویه یا مساوی‌اند یا مکمل. (چرا؟)

مثلث



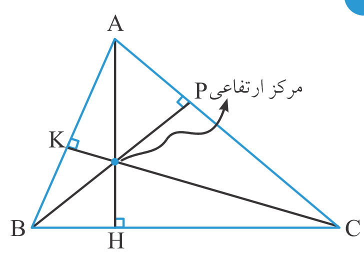
سه خط که دوبه‌دو یکدیگر را در سه نقطه متمایز قطع می‌کنند، شکلی به‌وجود می‌آورند که **مثلث** می‌نامیم. به سه پاره‌خط ایجادشده (AB، AC و BC) **اضلاع** و به نقاط A، B و C **رأس‌های** مثلث می‌گوییم. مثلث مقابل را به‌صورت $\overset{\Delta}{ABC}$ بیان می‌کنیم و می‌خوانیم مثلث ABC.

هر یک از زوایای ACB، CAB و CBA را زوایای مثلث ABC می‌نامیم. معمولاً اندازه هر ضلع مثلث را با حرف کوچک متناظر با حرف رأس مقابل آن، نمایش می‌دهیم. به‌عنوان مثال اندازه ضلع BC را که مقابل به رأس A است با حرف a، اندازه ضلع AC را با حرف b و اندازه ضلع AB را با حرف c نشان می‌دهیم.

مهم

در مثلث، به اضلاع و زوایا «اجزای اصلی» و به ارتفاع، میانه، نیمساز و عمود منصف «اجزای فرعی» مثلث می‌گوییم.

اجزای فرعی مثلث

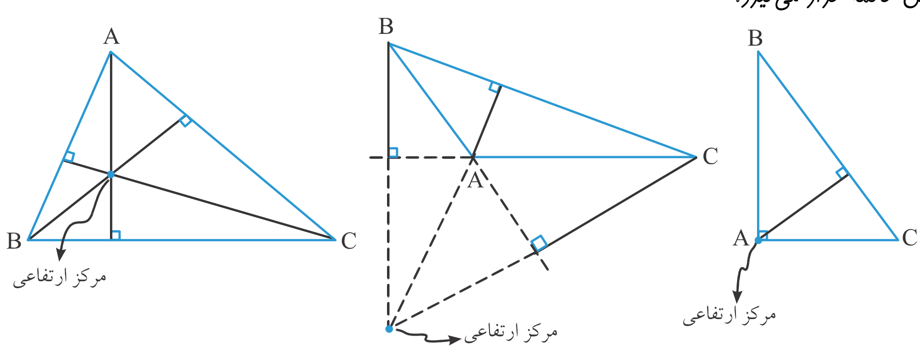


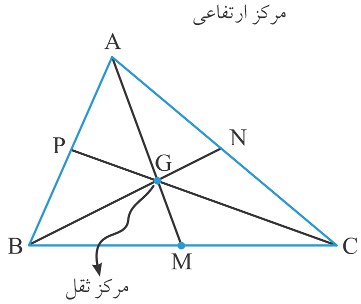
۱- **ارتفاع‌های مثلث:** ارتفاع مثلث، پاره‌خطی است که از یک رأس بگذرد و بر ضلع مقابل آن رأس عمود شود.

هر مثلث سه ارتفاع دارد. در مثلث ABC، اندازه ارتفاع‌های وارد بر اضلاع BC، AC و AB را به‌ترتیب با h_a، h_b و h_c نمایش می‌دهیم. در درس‌های بعدی ثابت می‌شود که ارتفاع‌های هر مثلث (یا امتدادهای آن‌ها) از یک نقطه می‌گذرند که آن نقطه را **مرکز ارتفاعی** مثلث می‌گوییم.

تذکر

۱. *اگر مثلث حاده‌الزاویه باشد، مرکز ارتفاعی، داخل مثلث واقع است. اگر مثلث منفرجه‌الزاویه باشد، دو ارتفاع مثلث، خارج مثلث قرار می‌گیرند و مرکز ارتفاعی، خارج مثلث واقع می‌شود. اگر مثلث قائم‌الزاویه باشد، اضلاع قائم، دو تا از ارتفاع‌ها هستند و مرکز ارتفاعی روی رأس قائمه قرار می‌گیرد.*



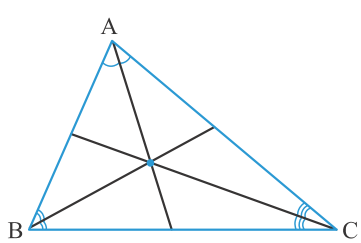


۲- **میانه‌های مثلث:** میانه مثلث پاره‌خطی است که یک رأس مثلث را به وسط ضلع مقابل آن رأس وصل می‌کند. هر مثلث، سه میانه دارد. در مثلث ABC، اندازه میانه‌های وارد بر اضلاع BC، AC و AB را به‌ترتیب با m_a، m_b و m_c نمایش می‌دهیم.

در درس‌های بعدی، ثابت می‌شود که میانه‌های هر مثلث همواره در یک نقطه داخل مثلث به نام **مرکز ثقل (گرانیگاه یا نقطه تعادل)**، یکدیگر را قطع می‌کنند.

۳- **نیمسازهای داخلی مثلث:** نیمساز داخلی هر زاویه مثلث، پاره‌خطی است که آن زاویه را نصف کند و محدود به رأس آن زاویه و ضلع مقابل آن رأس باشد.

هر مثلث سه نیمساز داخلی دارد. در مثلث ABC، اندازه نیمسازهای داخلی زوایای A، B و C را به‌ترتیب با d_a، d_b و d_c نمایش می‌دهیم.

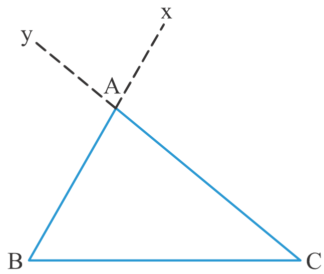


در درس‌های بعدی، ثابت می‌شود که نیمسازهای داخلی هر مثلث در یک نقطه داخل مثلث یکدیگر را قطع می‌کنند.

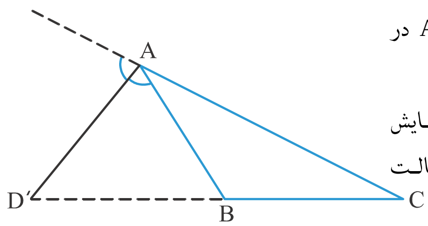
زاویه خارجی مثلث

در مثلث، به زاویه‌ای که از امتداد یکی از اضلاع زاویه داخلی مثلث، پدید می‌آید، زاویه خارجی نظیر آن زاویه می‌گوییم. مانند زوایای BAy و CAx در مثلث ABC.

واضح است که زوایای BAy و CAx با هم برابرند (زیرا متقابل به رأس‌اند). بنابراین برای هر رأس، فقط یکی از آن‌ها را درنظر می‌گیریم.

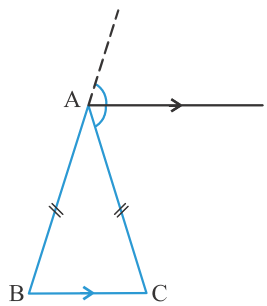


۴- **نیمسازهای خارجی مثلث:** نیمساز خارجی هر زاویه مثلث، پاره‌خطی است که زاویه خارجی نظیر آن زاویه را نصف می‌کند و محدود به رأس آن زاویه و امتداد ضلع مقابل آن رأس است. (مانند پاره‌خط AD' در مثلث مقابل).

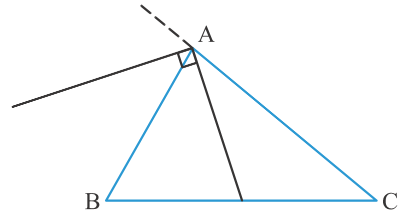


در مثلث ABC، اندازه نیمسازهای خارجی نظیر زوایای A، B و C را به‌ترتیب با d'_a، d'_b و d'_c نمایش می‌دهیم. با رسم سه نیمساز خارجی برای مثلث دلخواه ABC، می‌توان دید که نیمسازهای خارجی در حالت کلی از یک نقطه نمی‌گذرند. (همرس نیستند)!

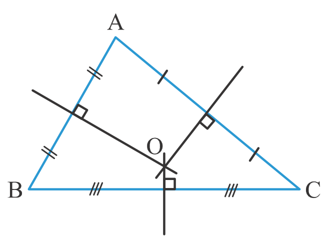
تذکر *۲. اگر مثلث متساوی‌الساقین باشد، نیمساز خارجی رأس، با قاعده موازی است. بنابراین در این وضعیت طول نیمساز خارجی نظیر رأس، بی‌معنی است!*



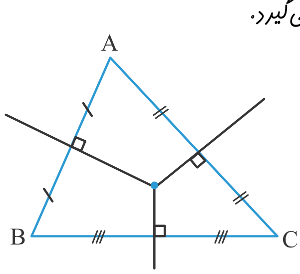
نکته مهم **در هر مثلث، هر زاویه خارجی، با زاویه داخلی نظیرش، مجانب می‌باشد. بنابراین نیمسازهای داخلی و خارجی نظیر هر رأس بر هم عمودند.**

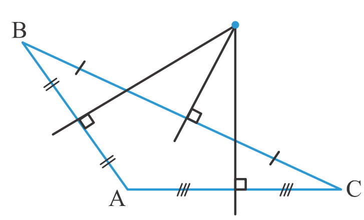


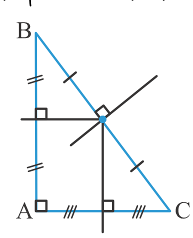
۵- **عمودمنصف‌های اضلاع مثلث:** عمودمنصف هر ضلع مثلث، خطی است که از وسط آن ضلع می‌گذرد و بر آن ضلع عمود می‌شود. در درس‌های بعدی، ثابت می‌شود که عمودمنصف‌های اضلاع هر مثلث، از یک نقطه می‌گذرند (همرسند).



تذکر *۳. اگر مثلث حاده‌الزاویه باشد، نقطه همرسی عمودمنصف‌ها، داخل مثلث، اگر مثلث منفرجه‌الزاویه باشد، نقطه همرسی عمودمنصف‌ها، خارج مثلث و اگر مثلث قائم‌الزاویه باشد، نقطه همرسی عمودمنصف‌ها، وسط وتر، قرار می‌گیرد.*







توجه: *به سه خط یا بیشتر که همگی در یک نقطه متقاطع‌اند، همرس می‌گوییم.*

نکاتی در مورد مثلث

۱- مجموع زوایای داخلی هر مثلث برابر °۱۸۰ می‌باشد.

۲- هر زاویه خارجی در مثلث، با مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاورش برابر است.

۳- مجموع زوایای خارجی در هر مثلث برابر °۳۶۰ است.

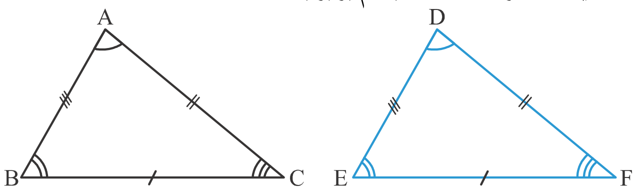
۴- در هر مثلث زاویه بین نیمسازهای دو زاویه داخلی برابر است با: $\frac{\text{زاویه سوم}}{۲} + ۹۰^\circ$.

۵- در هر مثلث زاویه بین نیمسازهای دو زاویه خارجی برابر است با: $۹۰^\circ - \frac{\text{زاویه سوم}}{۲}$.

۶- در هر مثلث زاویه بین نیمساز یک زاویه داخلی با نیمساز یک زاویه خارجی، برابر است با: $\frac{\text{زاویه سوم}}{۲}$.

۷- در مثلث اندازه زاویه بین ارتفاع و نیمساز داخلی نظیر هر رأس برابر است با نصف تفاضل دو زاویه دیگر.

۸- دو مثلث را **همنهشت** می‌گوییم هرگاه اندازه‌های اضلاع متناظر و همچنین اندازه زوایای متناظر در دو مثلث با هم برابر باشند. مانند مثلث‌های ABC و DEF.



$$\left.\begin{array}{l} AB = DE\,,\, BC = EF\,,\, AC = DF \\ \hat{A} = \hat{D}\,,\, \hat{B} = \hat{E}\,,\, \hat{C} = \hat{F} \end{array}\right\} \Rightarrow ABC \cong DEF$$

علامت همنهشتی

۹- **حالت‌های همنهشتی مثلث‌ها** عبارتند از (الف) تساوی سه ضلع (ض ض ض)، (ب) تساوی دو ضلع و زاویه بین آن دو ضلع (ض ز ض) و (پ) تساوی دو زاویه و ضلع بین آن دو زاویه (ز ض ز).

۱۰- حالت‌های همنهشتی مثلث‌های **قائم‌الزاویه** عبارت است از (الف) وتر و یک ضلع، (ب) وتر و یک زاویه حاده.

۱۱- در مثلث قائم‌الزاویه **میانه وارد بر وتر** برابر با نصف وتر است.

۱۲- در مثلث قائم‌الزاویه زاویه بین ارتفاع و میانه وارد بر وتر برابر است با تفاضل دو زاویه دیگر.

۱۳- مثلثی را که در آن دو ضلع مساوی باشند، **مثلث متساوی‌الساقین** می‌گوییم. هر یک از دو ضلع مساوی را ساق و ضلع سوم را قاعده و به محل برخورد دو ساق، رأس مثلث می‌گوییم.

۱۴- در مثلث متساوی‌الساقین، زاویه‌های روبرو به ساق‌ها با هم برابرند.

۱۵- مثلثی که دو زاویه برابر داشته باشد، متساوی‌الساقین می‌باشد.

۱۶- در مثلث متساوی‌الساقین، نیمساز زاویه رأس، ارتفاع، میانه وارد بر قاعده و عمودمنصف قاعده برهم منطبق‌اند.

۱۷- مثلثی که میانه و ارتفاع نظیر یک ضلع آن بر هم منطبق باشند، متساوی‌الساقین است.

۱۸- مثلثی که ارتفاع نظیر یک ضلع آن، نیمساز زاویه مقابل به آن ضلع هم باشد، متساوی‌الساقین است.

۱۹- مثلثی که میانه نظیر یک ضلع آن، نیمساز زاویه مقابل به آن ضلع هم باشد، متساوی‌الساقین است.

۲۰- در مثلث متساوی‌الساقین، نیمسازهای داخلی زوایای مقابل به ساق‌ها با هم برابرند.

۲۱- مثلثی که دو نیمساز داخلی‌اش برابر باشند، متساوی‌الساقین است.

۲۲- در مثلث متساوی‌الساقین، ارتفاع‌های نظیر ساق‌ها با هم برابرند.

۲۳- مثلثی که دو ارتفاع برابر داشته باشد، متساوی‌الساقین است.

۲۴- در مثلث متساوی‌الساقین، میانه‌های نظیر ساق‌ها با هم برابرند.

۲۵- مثلثی که دو میانه برابر داشته باشد، متساوی‌الساقین است.

۲۶- در مثلث متساوی‌الساقین، نیمساز خارجی نظیر رأس با قاعده موازی است.

۲۷- اگر در مثلثی، نیمساز خارجی یکی از زوایا با ضلع روبرویش موازی باشد در این صورت مثلث متساوی‌الساقین است.

۲۸- مثلثی را که در آن سه ضلع مساوی باشند، **مثلث متساوی‌الاضلاع** می‌گوییم. کاملاً بدیهی است که زوایای داخلی مثلث متساوی‌الاضلاع با هم برابر و هر کدام ۶۰° می‌باشد.

۲۹- از آنجا که مثلث متساوی‌الاضلاع، متساوی‌الساقین نیز می‌باشد، تمام ویژگی‌های مثلث متساوی‌الساقین برای مثلث متساوی‌الاضلاع نیز برقرار است.

درس ۱ ترسیم‌های هندسی

ترسیمات هندسی یعنی رسم یا ساختن شکل‌های هندسی به کمک خط‌کش و پرگار. این ترسیمات، مناسب‌ترین وسیله برای آشنایی با شکل‌های هندسی هستند و بهتر از هر وسیله دیگری، زمینه را برای فراگیری حل مسائل هندسی فراهم می‌کنند. خط‌کش، پرگار، گونیا و نقاله مهمترین ابزارها برای رسم یک شکل به‌طور دقیق، می‌باشند. ولی هدف از ترسیم هندسی این است که برای رسم یک شکل تنها از دو وسیله **خط‌کش و پرگار** استفاده کنیم.

در ترسیمات هندسی توجه به نکات زیر ضروری است:

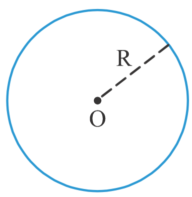
الف) خط‌کش و پرگار قابل استفاده، به گونه‌ای می‌باشند که اولاً خط‌کش، غیرمدرج می‌باشد (یعنی فقط برای رسم خط راست قابل استفاده است). ثانیاً از پرگار تنها برای جدا کردن طول معین یا برای رسم دایره یا کمانی از دایره می‌توان استفاده کرد که یا مرکز و یک نقطه از آن معلوم باشد و یا مرکز و اندازه شعاع آن.

ب) منظور از معلوم بودن پاره‌خط، آن است که دو سر پاره‌خط معلوم بوده و می‌توانیم دهانه پرگار را به اندازه آن باز کنیم و به هیچ عنوان اندازه پاره‌خط، مدنظر نمی‌باشد.

پ) منظور از معلوم بودن زاویه نیز آن است که جای رأس زاویه و نیز امتداد دو ضلع آن مشخص می‌باشد.

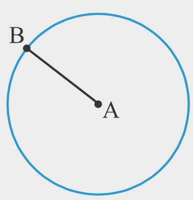
ت) برای حل مسأله ترسیم، ابتدا مسأله را رسم شده فرض کرده، از شکل فرضی اطلاعات جدید به‌دست می‌آوریم تا رسم شکل راحت‌تر انجام پذیرد. سپس با خط‌کش و پرگار شکل موردنظر را رسم می‌کنیم.

تعریف دایره: دایره مجموعه نقاطی است که فاصله آن‌ها از نقطه ثابتی مانند O، برابر با مقدار ثابت R باشد. به‌عبارت دیگر هر نقطه روی دایره فاصله‌اش از O برابر R است و هر نقطه‌ای که فاصله‌اش از O برابر R است، روی دایره قرار دارد.



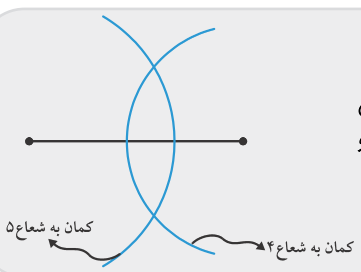
مسأله ۱: دو نقطه متمایز A و B مفروض‌اند. دایره‌ای رسم کنید که A مرکز آن باشد و از نقطه B بگذرد.

پاسخ: ابتدا دهانه پرگار را به اندازه پاره‌خط AB باز کرده، سپس به مرکز A دایره موردنظر را رسم می‌کنیم. واضح است که این دایره از نقطه B می‌گذرد.



مسأله ۲: مثلثی با اضلاع ۴، ۵ و ۶ رسم کنید.

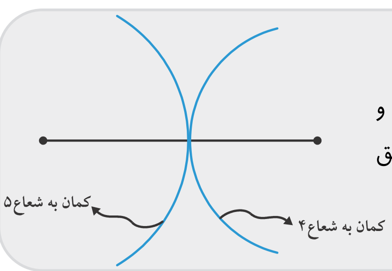
پاسخ: ابتدا پاره‌خطی به اندازه ۶ رسم می‌کنیم. سپس از یک سر این پاره‌خط کمانی به شعاع ۴ و از سر دیگر پاره‌خط کمانی به شعاع ۵ رسم می‌کنیم. این دو کمان یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند و هر دو نقطه می‌توانند رأس سوم مثلث باشند.



تذکر ۴. *در شمارش مثلث‌های رسم شده، مثلث‌های همنهشت را یکبار می‌شماریم. بنابراین در مسأله قبل چون دو مثلث همنهشت می‌باشند، یک مثلث قابل رسم است.*

مسأله ۳: مثلثی با اضلاع ۴، ۵ و ۹ رسم کنید.

پاسخ: ابتدا پاره‌خطی به اندازه ۹ رسم می‌کنیم. سپس از یک سر پاره‌خط کمانی به شعاع ۴ و از سر دیگر پاره‌خط کمانی به شعاع ۵ رسم می‌کنیم. این دو کمان روی پاره‌خط (مطابق شکل) متقاطع‌اند و مثلثی به‌وجود نمی‌آید.



مهم نتیجه

برای اینکه مثلثی با اندازه‌های a، b و c قابل رسم باشد، باید مجموع هر دو ضلع از ضلع سوم بزرگ‌تر باشد و یا به‌عبارت دیگر مجموع دو ضلع کوچک‌تر، از ضلع سوم بزرگ‌تر باشد، همچنین اگر مثلث قابل رسم باشد، تنها یک مثلث وجود دارد.

تست

۱: با کدام دسته از اعداد زیر می‌توان مثلث با این اضلاع رسم کرد؟

۱) ۳ و ۲ و ۵   ۲) ۳ و ۲ و ۷   ۳) ۲/۵ و ۳/۴ و ۶   ۴) ۷ و ۳ و ۵ ✓

پاسخ: با بررسی گزینه‌ها داریم:

گزینه ۱: $۲+۳ \not> ۵ \longrightarrow$ مثلث قابل رسم نیست

گزینه ۲: $۲+۳ \not> ۷ \longrightarrow$ مثلث قابل رسم نیست

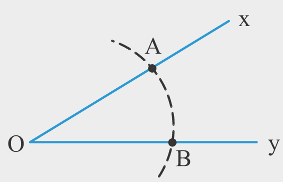
گزینه ۳: $۲/۵+۳/۴ \not> ۶ \longrightarrow$ مثلث قابل رسم نیست

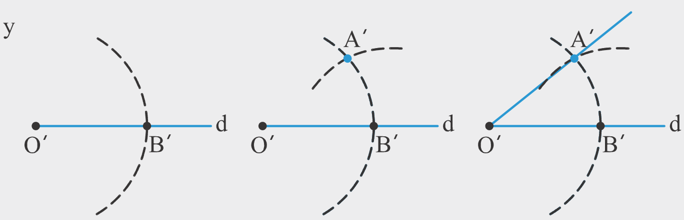
گزینه ۴: $۵+۳ > ۷ \longrightarrow$ مثلث قابل رسم است

مسأله

۴: زاویه‌ای به اندازه زاویه داده شده xOy رسم کنید.

پاسخ: ابتدا با خط‌کش خط d را رسم می‌کنیم و نقطه‌ای مانند O' روی آن درنظر می‌گیریم. به مرکز O کمان دلخواهی رسم می‌کنیم تا اضلاع زاویه داده شده xOy را در نقاط A و B قطع کند. دهانه پرگار را تغییر نمی‌دهیم و به مرکز O' کمانی رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطه B' قطع کند. حال دهانه پرگار را به اندازه طول پاره‌خط AB باز می‌کنیم و بدون تغییر دادن دهانه پرگار به مرکز B' کمانی رسم می‌کنیم تا کمان اول را در نقطه A' قطع کند. حال اگر O' را به A' وصل کنیم، زاویه $A'O'B'$ با زاویه $AOB\,(xOy)$ برابر می‌شود. زیرا دو مثلث OAB و $O'A'B'$ همنهشتند.

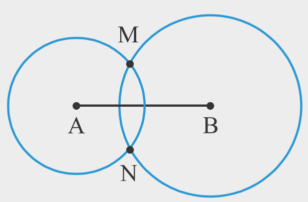




مسأله

۵: دو نقطه A و B به فاصله ۳ سانتی‌متر از یکدیگر قرار دارند. نقاطی را بیابید که فاصله‌شان از A، ۲ و از B، ۲/۵ سانتی‌متر باشند.

پاسخ: ابتدا A را به B وصل می‌کنیم. سپس به مرکز A و شعاع ۲ یک کمان (دایره) و به مرکز B و شعاع ۲/۵ کمان (دایره) دیگری رسم می‌کنیم. این دو کمان (دایره) یکدیگر را در دو نقطه M و N قطع می‌کنند. این نقاط، نقاط موردنظر می‌باشند.



مهم نتیجه

اگر دو نقطه A و B به فاصله x از یکدیگر واقع باشند. نقاطی که فاصله‌شان از A برابر y و از B، برابر z باشند، به‌صورت زیر قابل بررسی است:

الف) اگر $y+z>x$، در این صورت دو نقطه وجود دارد. (دایره‌ها در دو نقطه متقاطع‌اند)

ب) اگر $y+z=x$، در این صورت یک نقطه وجود دارد. (دایره‌ها در یک نقطه متقاطع‌اند)

پ) اگر $y+z<x$، در این صورت هیچ نقطه‌ای وجود ندارد. (دایره‌ها نقطه مشترک ندارند.)

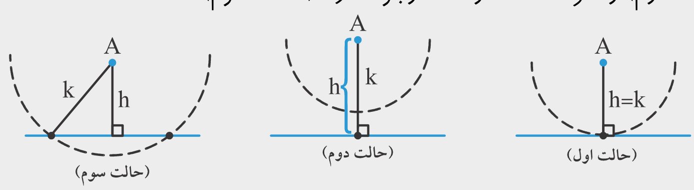
تست ۲: **پاره‌خط AB به طول ۱۰ مفروض است. چند نقطه وجود دارد که از A به فاصله ۷ و از B به فاصله ۲ باشند؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ✓ ۴) نامتناهی

پاسخ: از آنجا که $7+2<10$ بنابراین هیچ نقطه‌ای وجود ندارد.

مسئله ۶: **خط d و نقطه A که به فاصله h از آن قرار دارد، مفروضند. نقاطی از خط d را بیابید که از نقطه A به فاصله k باشند. (حالت‌های مختلف را بررسی کنید).**

پاسخ: به‌طور کلی نقاطی که از A به فاصله k باشد، نقاط روی محیط دایره‌ای به مرکز A و شعاع k، می‌باشد. محل برخورد این دایره با خط d، نقاط موردنظر است. با توجه به شکل‌های زیر، اگر $h=k$، تنها یک نقطه وجود دارد (حالت اول). اگر $h>k$، هیچ نقطه‌ای وجود ندارد (حالت دوم) و اگر $h<k$، دو نقطه وجود دارد (حالت سوم).



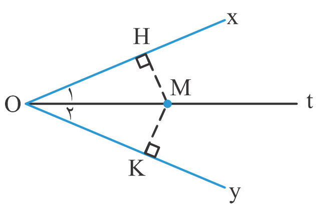
تست ۳: **خط d و نقطه A خارج آن، مفروضند، چند نقطه روی خط d وجود دارد که از نقطه A به فاصله ۴ باشد؟**

۱) صفر ۲) ۲ ۳) حداکثر ۲ ✓ ۴) ۱

پاسخ: از آنجا که فاصله نقطه A تا خط d معلوم نیست، هر یک از حالت‌های بررسی شده در مسأله قبل امکان‌پذیر است. بنابراین حداکثر ۲ نقطه وجود دارد.

ویژگی مهم نیمساز و رسم آن

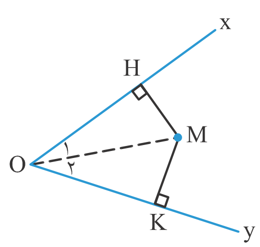
نکته ۱. **هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.**



اثبات: فرض می‌کنیم Ot نیمساز زاویه xOy باشد. نقطه دلخواه M را روی نیمساز Ot در نظر می‌گیریم. از M عمودهای MH و MK را بر اضلاع Ox و Oy رسم می‌کنیم. داریم:

$$\begin{cases} OM = OM \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ \hat{H} = \hat{K} = 90^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{وتر و یک زاویه تند}} OMH \cong OMK \Rightarrow MH = MK$$

نکته ۲. **اگر نقطه‌ای از دو ضلع زاویه به یک فاصله باشد، آن نقطه روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.**

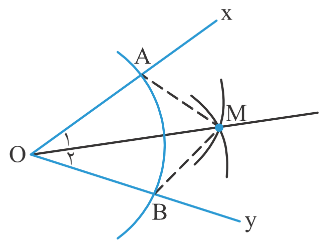


اثبات: فرض می‌کنیم M از دو ضلع زاویه xOy به یک فاصله باشد یعنی $MH = MK$. از O به M وصل می‌کنیم. داریم:

$$\begin{cases} OM = OM \\ MH = MK \\ \hat{H} = \hat{K} = 90^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} OMH \cong OMK \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

نتیجه مهم: هر نقطه که روی نیمساز یک زاویه باشد، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

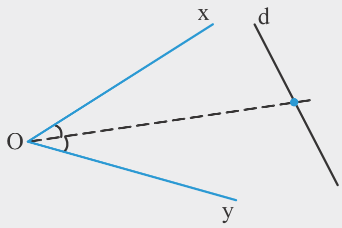
روش رسم نیمساز



برای رسم نیمساز زاویه داده شده xOy ، ابتدا به مرکز O و شعاع دلخواه یک کمان رسم می‌کنیم تا اضلاع زاویه را در A و B قطع کند. به مرکزهای A و B و به شعاع دلخواه یکسان کمان‌هایی رسم می‌کنیم تا حتماً یکدیگر را در نقطه‌ای مانند M قطع کنند. مثلث‌های OAM و OBM به حالت (ضضض) همنهشت هستند، بنابراین $\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲$. یعنی M روی نیمساز است و امتداد OM نیمساز زاویه xOy است.

مسأله

۷: زاویه xOy و خط d مفروضند. به‌طوری که خط d با هیچ‌یک از اضلاع زاویه موازی نیست. چند نقطه روی خط d وجود دارد که از اضلاع زاویه به یک فاصله باشد؟



پاسخ: نقاطی که از اضلاع زاویه xOy به یک فاصله باشند، نقاط روی نیمساز زاویه می‌باشند، بنابراین نیمساز زاویه xOy را رسم می‌کنیم. محل برخورد این نیمساز با خط d، نقاط موردنظرند. دو حالت ممکن است:

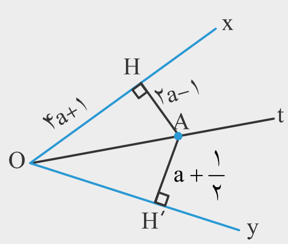
حالت اول: خط d با نیمساز در یک نقطه متقاطع باشد (جواب یک نقطه)

حالت دوم: خط d بر نیمساز زاویه منطبق باشد (جواب بی‌شمار نقطه)

حالت سوم: خط d با نیمساز موازی باشد (جواب وجود ندارد)

تست

۴: در شکل مقابل Ot نیمساز زاویه xOy است. طول 'OH کدام است؟



۱) $\frac{۳}{۲}$

۲) ۶

۳) ۷ ✓

۴) ۸

پاسخ: می‌دانیم هر نقطه روی نیمساز زاویه از اضلاع زاویه به یک فاصله است. بنابراین $AH = AH'$. درنتیجه:

$$۲a - ۱ = a + \frac{۱}{۲} \Rightarrow a = \frac{۳}{۲}$$

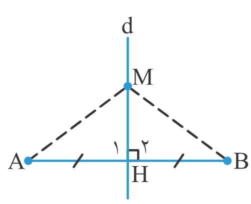
از طرفی مثلث‌های OAH و 'OAH همنهشت بوده و بنابراین داریم:

$$OH' = OH = ۴a + ۱ = ۴\left(\frac{۳}{۲}\right) + ۱ = ۷$$

ویژگی مهم عمودمنصف و رسم آن

نکته

۳. هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است.



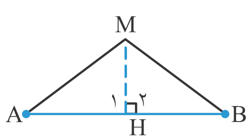
اثبات: فرض می‌کنیم d عمودمنصف پاره‌خط AB بوده و M نقطه‌ای دلخواه روی d باشد. از M به A و B وصل می‌کنیم. داریم:

$$\begin{cases} MH = MH \\ \hat{H}_۱ = \hat{H}_۱ = ۹۰^\circ \\ AH = HB \end{cases} \xrightarrow{(\text{ض ز ض})} \overset{\Delta}{AMH} \cong \overset{\Delta}{BMH} \Rightarrow AM = BM$$

نکته

۴. هر نقطه که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد.

اثبات: فرض می‌کنیم نقطه M از نقاط A و B به یک فاصله باشد. از M عمود MH را بر AB رسم می‌کنیم. داریم:

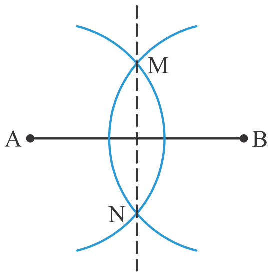


$$\begin{cases} MA = MB \\ MH = MH \\ \hat{H}_۱ = \hat{H}_۲ = ۹۰^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \overset{\Delta}{AMH} \cong \overset{\Delta}{BMH} \Rightarrow AH = HB$$

بنابراین MH عمودمنصف پاره‌خط AB است. درنتیجه M روی عمودمنصف AB قرار دارد.

مهم نتیجه

هر نقطه که روی عمودمنصف یک پاره‌خط باشد، از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است و هر نقطه که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن قرار دارد.

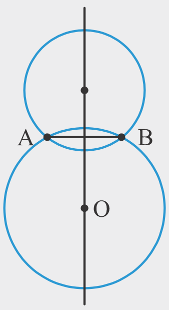


روش رسم عمودمنصف یک پاره‌خط

برای رسم عمودمنصف پاره‌خط داده شده AB، ابتدا دو کمان به مراکز A و B و به شعاع یکسان (بزرگتر از نصف طول پاره‌خط AB) رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در دو نقطه M و N قطع کنند. هر دو نقطه M و N از نقاط A و B به یک فاصله‌اند، پس روی عمودمنصف AB قرار دارند. بنابراین اگر M را به N وصل کنیم، عمودمنصف پاره‌خط AB به‌دست می‌آید.

مسأله

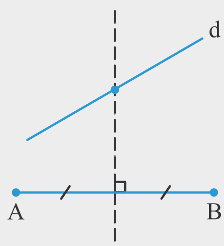
۸: دو نقطه متمایز A و B را درنظر بگیرید. دایره‌ای رسم کنید که از A و B بگذرد. چند دایره قابل رسم است؟



پاسخ: مرکز دایره گذرنده از A و B، از دو نقطه A و B به یک فاصله است (شعاع). بنابراین روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد. بنابراین ابتدا عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم. سپس نقطه دلخواه O را روی آن درنظر می‌گیریم. دایره‌ای به مرکز O و به شعاع OA یا OB رسم می‌کنیم تا دایره موردنظر به‌دست آید. بنابراین بی‌شمار دایره می‌توان رسم کرد که از A و B بگذرند. مرکز این دایره‌ها روی عمودمنصف پاره‌خط AB واقع‌اند.

مسأله

۹: خط d و دو نقطه A و B در یک صفحه مفروضند. روی خط d نقطه‌ای را بیابید که از A و B به یک فاصله باشد.



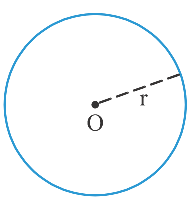
پاسخ: عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم. محل برخورد عمودمنصف با خط d، نقطه موردنظر است. اگر عمودمنصف AB خط d را قطع نکند (d بر AB عمود باشد) مسأله جواب ندارد. در صورتی که عمودمنصف AB خط d را در یک نقطه قطع کند، مسأله یک جواب دارد و در صورتی که عمودمنصف AB بر خط d منطبق باشد مسأله بی‌شمار جواب دارد.

مهم تذکر

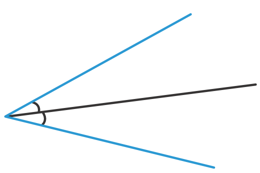
یکی از کاربردهای روش رسم عمودمنصف، یافتن وسط پاره‌خط می‌باشد.

نکته ویژه

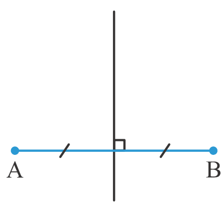
در بحث ترسیمات هندسی توجه به مطالب زیر خالی از لطف نیست:



۱- مجموعه نقاطی که همگی فاصله‌شان از نقطه O برابر r باشد، محیط دایره‌ای به مرکز O و شعاع r می‌باشد.

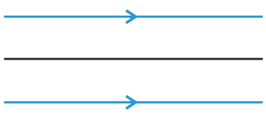


۲- مجموعه نقاطی که از دو خط متقاطع (اضلاع زاویه) به یک فاصله باشند، نقاط روی نیمساز زاویه است.

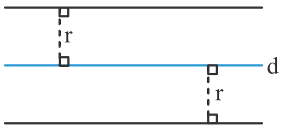


۳- مجموعه نقاطی که از دو نقطه متمایز (از دو سر پاره‌خط) به یک اندازه باشند، نقاط روی عمودمنصف پاره‌خط است.

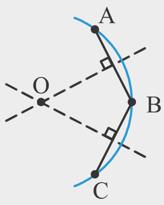
۴- مجموعه نقاطی که از دو خط موازی به یک فاصله باشند، نقاط روی خطی است موازی با دو خط و به یک فاصله از هر یک.



۵- مجموعه نقاطی که از خط d به فاصله r باشند، نقاط روی دو خط موازی با d در طرفین آن و به فاصله r از آن می‌باشند.

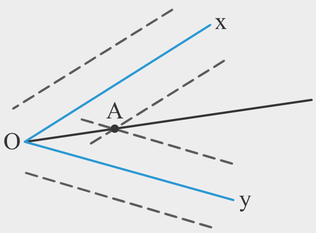


مسأله ۱۰: کمانی از یک دایره معلوم است. مرکز آن را بیابید و دایره را رسم کنید.



پاسخ: سه نقطه دلخواه A، B و C را روی کمان درنظر می‌گیریم. عمودمنصف‌های AB و BC را رسم می‌کنیم. محل تقاطع این دو عمودمنصف مرکز دایره است (زیرا مرکز دایره از نقاط A، B و C به یک فاصله است، بنابراین روی عمودمنصف AB و BC قرار دارد). حال به مرکز O و شعاع OA دایره را رسم می‌کنیم.

مسأله ۱۱: زاویه xOy مفروض است. نقطه‌ای بیابید که فاصله آن از هر ضلع زاویه برابر ۳ باشد. سپس به کمک آن نیمساز زاویه را رسم کنید.

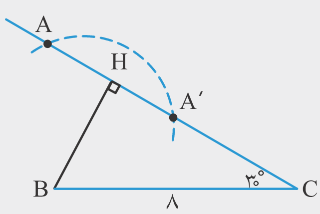


پاسخ: نقاطی که از ضلع Ox به فاصله ۳ باشند، نقاط روی دو خط موازی با Ox در طرفین آن و به فاصله ۳ از آن است. بنابراین دو خط موازی با Ox به فاصله ۳ از آن و دو خط موازی با Oy به فاصله ۳ از آن رسم می‌کنیم. محل برخورد این خطوط جواب مسأله است (نقطه A). نقاط A و O از هر یک از اضلاع زاویه به یک فاصله‌اند. بنابراین اگر A را به O وصل کنیم، OA نیمساز زاویه xOy است.

مسأله ۱۲: مراحل رسم زوایایی به اندازه ۶۰°، ۳۰° و ۱۵° را توضیح دهید.

پاسخ: مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول ضلع دلخواه رسم می‌کنیم. هر یک از زوایای این مثلث، ۶۰° است. سپس نیمساز یکی از این زوایا را رسم می‌کنیم تا زاویه ۳۰° پدید آید. در مرحله آخر، بار دیگر نیمساز یکی از زوایای ۳۰° را رسم می‌کنیم تا زاویه ۱۵° ایجاد شود.

مسأله ۱۳: مثلث ABC را با معلومات $BC = ۸$، $AB = ۵$ و $\hat{C} = ۳۰°$ رسم کنید.



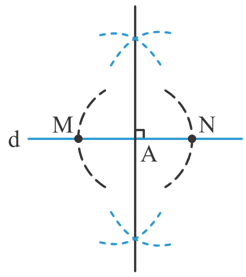
پاسخ: ابتدا ضلع $BC = ۸$ را رسم می‌کنیم و روی رأس C زاویه ۳۰° را جدا می‌کنیم. سپس کمانی به مرکز B و شعاع $AB = ۵$ رسم می‌کنیم. داریم:

$$\overset{\Delta}{BHC} : \hat{C} = ۳۰° \Rightarrow BH = \frac{BC}{۲} = \frac{۸}{۲} = ۴$$

بنابراین کمان رسم شده ضلع زاویه ۳۰° را در دو نقطه قطع می‌کند و دو مثلث متمایز به‌دست می‌آید.

توجه شود که در حالت کلی اگر کمان رسم شده، ضلع زاویه ۳۰° را در یک نقطه قطع کند فقط یک مثلث به‌دست می‌آید و اگر ضلع زاویه ۳۰° را قطع نکند مثلثی قابل رسم نیست.

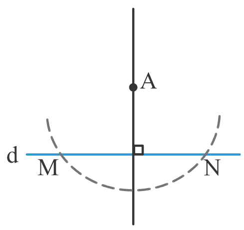
روش رسم خط عمود بر یک خط از یک نقطه



خط d و نقطه A را درنظر می‌گیریم. می‌خواهیم از نقطه A، خطی عمود برخط d رسم کنیم. دو حالت وجود دارد.

الف) نقطه A روی خط d است.

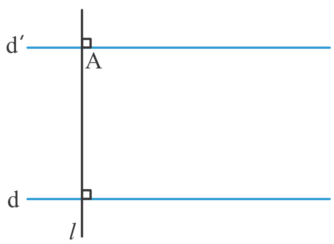
به مرکز A و شعاع دلخواه کمانی رسم می‌کنیم تا خط d را در دو نقطه M و N قطع کند. در این صورت A وسط پاره‌خط MN است. حال اگر عمودمنصف پاره‌خط MN را رسم کنیم از نقطه A می‌گذرد. به این ترتیب این عمودمنصف، خطی است که در نقطه A بر خط d عمود است.



ب) نقطه A خارج خط d است.

به مرکز A و به شعاع بزرگتر از فاصله نقطه A تا خط، کمانی رسم می‌کنیم تا خط d را در دو نقطه M و N قطع کند. در این صورت نقطه A از M و N به یک فاصله است بنابراین A روی عمودمنصف پاره‌خط MN قرار دارد. اگر عمودمنصف پاره‌خط MN را رسم کنیم از نقطه A می‌گذرد. به این ترتیب این عمودمنصف، خطی است که از نقطه A گذشته و بر خط d عمود است.

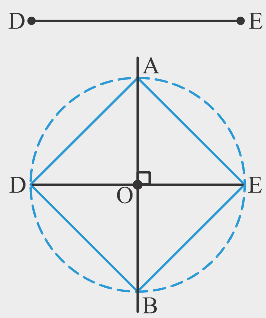
روش رسم خطی موازی یک خط از نقطه‌ای خارج آن



فرض می‌کنیم خط d و نقطه A خارج آن داده شده باشد. می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از A بگذرد و با خط d موازی باشد. ابتدا l را طوری رسم می‌کنیم که از نقطه A بگذرد و بر d عمود باشد. سپس خط d′ را به گونه‌ای رسم می‌کنیم که از A بگذرد و بر l عمود باشد. در این صورت خطوط d و d′ بر خط l عمودند، بنابراین موازی‌اند.

مسأله

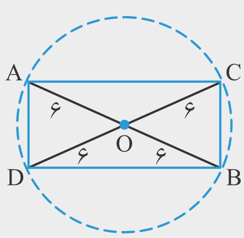
۱۴: مربعی رسم کنید که پاره‌خط مفروض DE قطر آن باشد.



پاسخ: می‌دانیم در مربع قطرها برابر و عمودمنصف یکدیگرند. بنابراین ابتدا عمودمنصف پاره‌خط معلوم DE را رسم می‌کنیم. سپس به مرکز نقطه O، وسط پاره‌خط DE و شعاع OD دایره‌ای رسم می‌کنیم. محل برخورد این دایره با عمودمنصف پاره‌خط DE را A و B می‌نامیم. چهارضلعی ADBE مربع موردنظر است.

مسأله

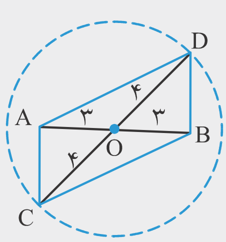
۱۵: مستطیلی به طول قطر ۱۲ رسم کنید.



پاسخ: می‌دانیم چهارضلعی که قطرهایش برابر و منصف باشند، مستطیل است. بنابراین از نقطه دلخواه O، دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۶ رسم می‌کنیم. دو قطر دلخواه این دایره را AB و CD می‌نامیم. در چهارضلعی ACBD، قطرها برابر و منصف یکدیگرند. پس این چهارضلعی مستطیل موردنظر است. واضح است که بی‌شمار مستطیل با این ویژگی می‌توان رسم کرد.

مسأله

۱۶: متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول قطرهای آن ۶ و ۸ باشد.



پاسخ: می‌دانیم در متوازی‌الاضلاع قطرها منصف یکدیگرند. بنابراین پاره‌خط AB را به طول ۶ رسم می‌کنیم. وسط این پاره‌خط را O می‌نامیم. به مرکز O و شعاع ۴ $(\frac{8}{2})$ دایره‌ای رسم می‌کنیم. قطر دلخواهی از این دایره که از A و B نمی‌گذرد را در نظر گرفته، CD می‌نامیم. چهارضلعی ADBC، متوازی‌الاضلاع موردنظر است. واضح است که بی‌شمار متوازی‌الاضلاع با این ویژگی می‌توان رسم کرد.

تست

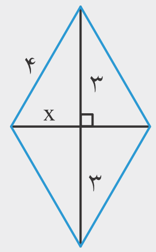
۵: کدام‌یک از اشکال هندسی زیر با معلومات داده شده به‌صورت منحصر به‌فرد (یکتا) قابل رسم است؟

۱) مستطیلی که طول قطر آن ۴ باشد.

۲) لوزی که طول ضلع آن ۴ و طول قطر آن ۶ باشد.

۳) متوازی‌الاضلاعی که طول قطرهای آن ۵ و ۸ باشد.

۴) متوازی‌الاضلاعی که طول اضلاع آن ۴ و ۶ باشد.



پاسخ: گزینه‌های ۱، ۳ و ۴ هرکدام بی‌شمار شکل را معرفی می‌کنند. در صورتی که در گزینه ۲، اگر طول ضلع و قطر لوزی به ترتیب ۴ و ۶ باشد، مطابق شکل با توجه به منصف بودن قطرها و رابطه فیثاغورس می‌توان قطر دیگر لوزی را به‌دست آورد که در این صورت تنها یک لوزی قابل رسم است.

$$x^۲ = ۴^۲ - ۳^۲ \Rightarrow x^۲ = ۷ \Rightarrow x = \sqrt{۷}$$

$$\Rightarrow \text{قطر دیگر} = ۲\sqrt{۷}$$

تست

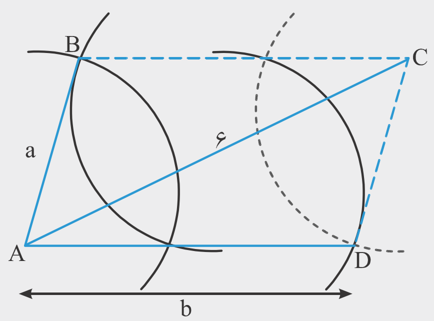
۶: برای رسم یک متوازی‌الاضلاع دلخواه که $AC = ۶$ یکی از قطرهای آن است، مطابق شکل از دو سر A و C کمان‌هایی به شعاع‌های a و b رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقاط B و D قطع کنند. در این صورت کدام مقدار برای a و b قابل قبول است؟

۱) $a = ۲$ و $b = ۳$

۲) $a = ۴$ و $b = ۳$

۳) $a = ۳$ و $b = ۳$

۴) $b = ۷$ و $a = ۱$



پاسخ: در متوازی‌الاضلاع اضلاع روبرو برابرند. بنابراین $BC = AD = b$. متوازی‌الاضلاع زمانی با این روش قابل رسم است که کمان‌های رسم شده به شعاع‌های a و b به مراکز A و C یکدیگر را قطع کنند. به‌عبارت دیگر مثلث ABC با اضلاع a، b و ۶ قابل رسم باشد. بنابراین باید $a + b > ۶$، $a + ۶ > b$ و $b + ۶ > a$ باشد. گزینه ۲ در این نامساوی‌ها صدق می‌کند.

پرسش‌های تشریحی

۱. مثلثی به طول اضلاع ۴، ۵ و ۶ رسم کنید (طریقه رسم را توضیح دهید)

۲. جاهای خالی را به گونه‌ای تکمیل کنید که

الف) مسأله زیر دو جواب داشته باشد

ب) مسأله زیر یک جواب داشته باشد.

پ) مسأله زیر جواب نداشته باشد

نقاط A و B به فاصله .... از هم هستند. نقطه‌ای پیدا کنید که فاصله‌اش از نقطه A برابر .... و از نقطه B برابر .... باشد.

۳. دو ضلع یک زاویه را درنظر بگیرید.

الف) نقطه‌ای بیابید که فاصله آن از هر ضلع زاویه موردنظر ۲ واحد باشد.

ب) نقطه‌ای بیابید که فاصله آن از هر ضلع زاویه موردنظر ۴ واحد باشد.

پ) با استفاده از (الف) و (ب) نیمساز زاویه موردنظر را رسم کنید.

۴. به کمک خط‌کش و پرگار طریقه رسم زوایای °۶۰، °۴۵، °۳۰ و °۱۵ را توضیح دهید.

۵. می‌دانیم چندضلعی که قطرهایش منصف هم باشند، متوازی‌الاضلاع است. متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول قطرهـای آن ۴ و ۷ باشـد. چند متوازی‌الاضلاع به طول قطرهای ۴ و ۷ می‌توان رسم کرد؟

۶. می‌دانیم چندضلعی که قطرهایش با هم برابر و منصف هم باشد، مستطیل است. مستطیلی رسم کنید که طول قطر آن ۶ باشد.

۷. مستطیلی رسم کنید که:

الف) طول اضلاع آن ۳ و ۵ باشد.

ب) طول یک ضلع آن ۴ و طول قطر آن ۵ باشد.

۸. با توجه به اینکه برای لوزی بودن یک چهارضلعی کافی است که قطرهای آن چهارضلعی عمودمنصف یکدیگر باشند.

الف) لوزی به طول ضلع ۵ و طول قطر ۶ رسم کنید.

ب) لوزی رسم کنید که طول قطرهای آن ۳ و ۵ باشد.

۹. پاره‌خط AB را به طول ۱۰ سانتی‌متر رسم کنید.

الف) عمودمنصف آن را رسم کنید.

ب) چند نقطه روی عمودمنصف وجود دارند که از دو نقطه A و B به فاصله

۱) ۱۰ سانتی‌متر هستند؟ ۲) ۵ سانتی‌متر هستند؟ ۳) ۳ سانتی‌متر هستند؟