

فصل ۲: احتمال

↔ درس اول: مبانی احتمال

↔ درس دوم: احتمال غیر هم شانس

↔ درس سوم: احتمال شرطی

↔ درس چهارم: پیشامدهای مستقل و وابسته

سه نفر در یک اتاق هتل هستند. یک نفر از آنها برنده جایزه تخفیف هتل شده و تنها هتلدار می‌داند چه کسی برنده شده است. (فرض کنید این سه نفر a , b و c باشند) شخص a پیش هتلدار می‌رود و می‌گوید: چون حداقل یکی از افراد b یا c برنده نشده‌اند، اسم کسی را که از آن دو نفر برنده نشده‌اند به من بگو تا وسایلم را به او بدهم تا زودتر با خودش ببرد.



هتلدار به او می‌گویند اگر من اسم کسی را که برنده نشده است به تو بگویم احتمال برد شما از $\frac{1}{3}$ به $\frac{1}{4}$ افزایش می‌یابد. ولی شخص a می‌گوید که احتمال برد من تغییر نمی‌کند. حق با هتلدار است یا شخص a ؟ نظر شما چیست؟

درس اول: مبانی احتمال

فرض کنیم مدیر مدرسه‌ای بخواهد برای سال جدید تغییراتی در انتخاب دبیران و برنامه آموزشی مدرسه به وجود آورد. او باید بررسی کند عملکرد دبیران سال گذشته، میزان رضایت دانش آموزان و نتیجه امتحان چگونه بوده است. برنامه آموزشی مدرسه دارای چه ایراداتی است؟ او باید مشخص کند با چه تیم آموزشی و برنامه درسی بهترین بهره آموزشی را می‌برد و مدرسه موفق عمل خواهد کرد. با توجه به این‌که او از آینده هیچ اطلاعی ندارد. ... حال چگونه می‌تواند تصمیم درستی بگیرد؟

ابزار مطالعه در چنین مسائلی که با ناآگاهی نسبی از شرایط یا وقایع آینده همراه است، علم آمار نام دارد.

به کمک علم آمار می‌توانیم اطلاعات سال‌های گذشته مدرسه را به درستی جمع‌آوری کنیم و از آن یک توصیف مناسب برای وضعیت مدرسه داشته باشیم و سپس با کمک علم احتمال تصمیم خوبی بگیریم.

نکته: هرگاه با جامعه‌ای ناشناخته سر و کار داریم شناختن جامعه با نمونه و داده یک کار آماری است ولی اگر جامعه‌ای را بشناسیم و بخواهیم بدانیم نمونه‌هایی از آن جامعه چگونه خواهند بود علم احتمال به کمک ما می‌آید.

به طور مثال: الف. می‌دانیم در یک جعبه ۷ لامپ سالم و ۳ لامپ سوخته است، چند لامپ برداریم که حداقل یک لامپ سوخته باشد؟ (علم احتمال)

ب. درآمد کارمندان وزارت دفاع (علم آمار)

مثال:

فرض کنید بخواهیم از دو جعبه که در اولی و دومی به ترتیب ۵ و ۱۵ سیب وجود دارد ولی فقط برخی از آن‌ها سالم هستند سببی به تصادف انتخاب کنیم. در جعبه اول ۳ سیب فاسد و ۲ سیب سالم و در جعبه دوم ۵ سیب فاسد و ۱۰ سیب سالم وجود دارد. انتخاب کدام جعبه مناسب‌تر است؟

پاسخ: در جعبه اول ۴۰٪ سیب‌ها سالم و در جعبه دوم ۶۶٪ سیب‌ها سالم هستند. پس بهتر است فرد جعبه دوم را انتخاب کند اما اگر بخواهد ۲ سیب از جعبه بردارد، تصمیم‌گیری چنان راحت نیست.

$$\text{جعبه اول: } \frac{\binom{2}{1} \binom{1}{1}}{\binom{5}{1} \binom{4}{1}} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} = 0.1$$

در این حالت با توجه به این‌که سیب‌ها را یکی پس از دیگری انتخاب می‌کنیم انتخاب جعبه دوم بهتر است.

$$\text{جعبه دوم: } \frac{\binom{10}{1} \binom{9}{1}}{\binom{15}{1} \binom{14}{1}} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7} \approx 0.43$$

در مثال بالا اگر به سیب‌های جعبه اول شماره ۱ تا ۵ نسبت دهیم، شماره آن‌ها مهم نیست ولی فرد انتخاب کننده می‌داند سیب‌های انتخابی وی بین ۱ تا ۵ خواهد بود. که در علم احتمال به مجموعه $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ فضای نمونه و به هر عضو آن برآمد گفته می‌شود.

فضای نمونه

کلیه حالات ممکن بررسی یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه گوئیم و با S نشان می‌دهیم.

مثال:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

فضای نمونه‌ای پرتاب یک تاس را بنویسید.

پاسخ: فضای نمونه‌ای دارای ۶ برآمد می‌باشد.

$$n(S) = 6^n$$

نکته: اگر n تاس را با هم پرتاب کنیم، تعداد اعضای فضای نمونه‌ای آن برابر است با:

$$n(S) = 2^n$$

نکته: اگر n سکه را با هم پرتاب کنیم یا یک سکه را n بار پرتاب کنیم، تعداد اعضای فضای نمونه‌ای آن برابر است با:

نکته: هرگاه چند ابزار آزمایشی را با هم پرتاب کنیم مثل یک تاس و دو سکه یا حالات دیگر برای یافتن تعداد اعضای فضای نمونه کافیست اعضای هر فضا را در هم ضرب کنیم.

$$n(S) = n_1(S) \times n_2(S) \times \dots \times n_k(S)$$

مثال:

۱. تعداد اعضای فضای نمونه پرتاب یک تاس و دو سکه را بنویسید.

$$n(S) = 6 \times 2 \times 2 = 24$$

پاسخ:

۲. تعداد اعضای فضای نمونه تولد ۴ فرزند را بنویسید.

$$n(S) = 2^4 = 16$$

پاسخ:

هرگاه دو ابزار آزمایش با هم پرتاب شود شکل اعضای فضای نمونه به صورت دوتایی نوشته می‌شود. مثلاً در پرتاب ۲ تاس برای نوشتن فضا از ضرب دکارتی $\{(1,2, \dots, 6)\} \times \{(1,2, \dots, 6)\}$ استفاده می‌شود و به صورت $S = \{(1,1)(1,2)(1,3)(1,4) \dots (6,3)(6,4)(6,5)(6,6)\}$ نوشته می‌شود.

مثال:

فضای نمونه پرتاب یک تاس و یک سکه را بنویسید.

$$n(S) = 2 \times 6 = 12$$

پاسخ:

$$S = \{(1,ر)(1,پ)(2,ر)(2,پ)(3,ر)(3,پ)(4,ر)(4,پ)(5,ر)(5,پ)(6,ر)(6,پ)\}$$

پیشامد

هر زیر مجموعه‌ای از فضای نمونه را پیشامد می‌گوییم.

اصول احتمال

برای هر پیشامد A احتمال رخ دادن آن را با P(A) نشان می‌دهیم که عددی بین [0,1] است. اصول احتمال عبارت‌اند از:

۱. $P(S) = 1$

۲. برای هر دو پیشامد A و B که $A \cap B = \emptyset$ داریم $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

در اصل بالا P را تابع احتمال گوئیم و دامنه آن مجموعه همه پیشامدهاست.

آنچه در بند ۲ بالا گفته شد یعنی $A \cap B = \emptyset$ باشد برای دو پیشامد دلخواه A و B به این معنی است که دو پیشامد با هم رخ نمی‌دهند و به آن‌ها ناسازگار یا جدا از هم گفته می‌شود.

قضیه: هر فضای احتمال خواص زیر را دارد.

۱. $P(A') = 1 - P(A)$

۲. $P(\emptyset) = 0$

۳. اگر A, B و C پیشامدهای دو به دو مستقل باشند آنگاه:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

۴. برای هر پیشامد دلخواه A و B داریم:

۵. برای هر دو پیشامد دلخواه A و B داریم:

اثبات ۱.

$$A \cap A' = \emptyset \text{ ناسازگار هستند}$$

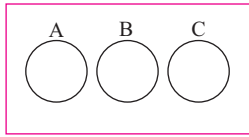
$$P(\underbrace{A \cup A'}_S) = P(A) + P(A') - \overbrace{P(A \cap A')}^{\emptyset} \rightarrow \underbrace{P(S)}_1 = P(A) + P(A')$$

$$\rightarrow P(A') = 1 - P(A)$$

$\emptyset \cap S = \emptyset \quad \emptyset \cup S = S$

اثبات ۲.

$P(\emptyset \cup S) = P(\emptyset) + P(S) \rightarrow P(S) = P(\emptyset) + P(S) \rightarrow P(\emptyset) = 0$

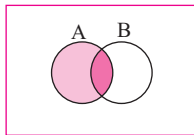


اثبات ۳. A، B و C دو به دو ناسازگارند یعنی:

$A \cap B = \emptyset \quad A \cap C = \emptyset \quad B \cap C = \emptyset$

$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup (B \cup C)) = P(A) + \underbrace{P(B \cup C)}_{P(B)+P(C)} = P(A) + P(B) + P(C)$

اثبات ۴.



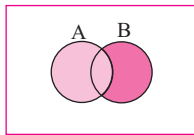
$(A - B) \cup (A \cap B) = A$

طبق شکل واضح است که $A \cap B$ و $A - B$ با هم ناسازگارند یعنی

$(A - B) \cap (A \cap B) = \emptyset$

$P(A) = P((A - B) \cup (A \cap B)) \Rightarrow P(A) = P(A - B) + P(A \cap B) \rightarrow P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

اثبات ۵.



$A \cup B = A \cup (B - A)$

طبق شکل واضح است که دو قسمت A و $B - A$ با هم اشتراک ندارند یعنی ناسازگارند.

$P(A \cup B) = P(A \cup (B - A)) \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + \underbrace{P(B - A)}_{P(B) - P(A \cap B)}$

پس:

$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

مثال:

۱. اگر $P(A') = \frac{2}{3}$ و $P(B) = \frac{1}{5}$ باشد و A و B ناسازگار باشند $P(A \cup B)$ را بیابید.

پاسخ:

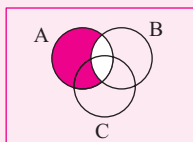
ناسازگار $P(A \cap B) = 0$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$

$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

۲. پیشامدهای A، B، C سه پیشامد دلخواه در فضای نمونه S می‌باشند پیشامد $(A - B) \cap C$ را هاشور بزنید.

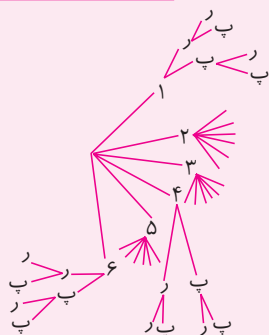
پاسخ:



۳. یک تاس را به هوا پرتاب می‌کنیم. اگر عدد اول بیاید دوباره تاس می‌ریزیم و اگر عدد غیر اول آمد

دو مرتبه سکه پرتاب می‌کنیم. مطلوب است پیشامد این‌که فقط یک بار سکه پشت بیاید.

پاسخ:



$A = \{(6, ر, پ), (6, ر, ر), (4, ر, پ), (4, ر, ر), (1, ر, پ), (1, ر, ر)\}$

تمرین‌های امتحانی

فصل ۳: احتمال

۱. یک تاس را پرتاب می‌کنیم. اگر عدد ۴ بیاید دو سکه پرتاب می‌کنیم در غیر این صورت یک سکه پرتاب می‌کنیم.
 - الف. فضای نمونه
 - ب. پیشامدی را در نظر بگیرید که در این آزمایش فقط یک بار سکه رو بیاید.
۲. سه کارت همزمان با هم و به تصادف از یک دسته کارت که شامل ۴ کارت زرد، ۳ کارت آبی، ۳ کارت سبز و ۴ کارت قرمز است، انتخاب می‌شوند. مطلوب است تعیین:
 - الف. فضای نمونه
 - ب. پیشامد آن که تمام کارت‌ها قرمز باشند.
 - پ. پیشامد آن که یک کارت قرمز، یکی سبز و یکی آبی باشد.
 - ت. پیشامد آن که سه رنگ مختلف باشند.
 - ث. پیشامد آن که هر ۴ رنگ بیاید.
۳. کدام یک از سؤالات زیر مربوط به علم آمار و کدام یک مربوط به علم احتمال است؟
 - الف. درآمد بازیگران سینما چقدر است؟
 - ب. می‌دانیم ۱۵ نفر از ۲۰ نفر دانش آموزان کلاس، موسیقی بلدند. چند نفر انتخاب کنیم تا مطمئن شویم که دست کم یک نفر موسیقی‌دان است؟
 ۴. اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.
 - الف. پیشامد $A \cup B$ زمانی رخ می‌دهد که
 - ب. پیشامد $A \cap B$ زمانی رخ می‌دهد که
 - پ. زمانی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد.
 - ت. پیشامد $A - B$ زمانی رخ می‌دهد که
 ۵. یک تاس را پرتاب کرده‌ایم و پیشامدهای زیر رخ داده است. برای هر مجموعه پیشامد رخ داده شده، یک تعریف ارائه کنید.

الف. $A = \{2, 4, 6\}$	ب. $B = \{2\}$	پ. $C = \{5, 6\}$	ت. $D = \{2, 3, 5\}$
------------------------	----------------	-------------------	----------------------
 ۶. تاسی را به هوا پرتاب کرده‌ایم عدد ۴ آمده است
 - الف. چه پیشامدهایی می‌توان تعریف کرد؟
 - ب. چند پیشامد می‌توان تعریف کرد؟
 - پ. آیا رو شدن عدد ۴ دلیل بر رخ دادن همه این پیشامدهاست؟
 ۷. سکه‌ای را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا برای اولین بار سکه رو بیاید. فضای نمونه‌ای را تعیین کنید.
 ۸. کیسه‌ای دارای ۱۲۰ کارت است که اعداد ۱، ۲، ۳، ... و ۱۲۰ روی هر کارت نوشته شده است. از این کیسه یک کارت به تصادف بیرون می‌کشیم. فرض کنید A پیشامدی باشد که روی کارت عدد زوج، B پیشامدی باشد که روی کارت مضرب ۳ و C پیشامدی که عدد روی کارت اول باشد. مطلوب است تعداد اعضای:

الف. فضای نمونه A و B	ب. $A \cap B$	پ. $A - C$
ت. $(A \cup B) - C$	ث. C'	ج. $(A \cup B)'$
 ۹. از مجموعه $S = \{1, 2, 3, \dots, 576\}$ عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم. مطلوب است تعیین احتمال آن که:
 - الف. عد انتخابی مضرب ۷ باشد
 - ب. عدد انتخاب شده مضرب ۳ یا ۵ باشد.
 - پ. عدد انتخاب شده مضرب ۳ باشد اما مضرب ۵ نباشد.

تمرین‌های امتحانی

۱. دو نفر به نام‌های A و B با احتمال‌های قبولی به ترتیب $\frac{7}{10}$ و $\frac{8}{10}$ در یک آزمون شرکت می‌کنند.
 - الف. احتمال آنکه هر دو قبول شوند چقدر است؟
 - ب. احتمال آنکه حداقل یکی قبول شود چقدر است؟
۲. در پرتاب دو تاس سالم با کدام احتمال هیچ‌کدام از اعداد ظاهر شده مضرب ۳ نیست؟
۳. الف. اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، آنگاه $P(A \cap B) = \dots\dots\dots$
 ب. اگر $A \cap B = \emptyset$ باشد A و B را دو پیشامد $\dots\dots\dots$ گوئیم.
۴. اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند و $P(A) \cdot P(B) + P(A' \cup B') = 1$ باشد آنگاه دو پیشامد A و B نسبت به هم چه وضعی دارند؟
۵. اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند و $P(A) = \frac{1}{4}$ و $P(B) = \frac{1}{3}$ باشند حاصل $P(A \cup B')$ را بیابید.
۶. دو تیرانداز A و B با احتمال‌های به ترتیب $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{4}$ هدفی را می‌زنند اگر هر کدام فقط یک‌بار تیراندازی کنند با کدام احتمال:
 - الف. فقط A به هدف می‌زند؟
 - ب. فقط یکی به هدف می‌زند؟
 - پ. هیچ‌کدام به هدف نمی‌زند؟
۷. پادشاه از خانواده‌ای است که دو فرزند دارد. احتمال اینکه فرزند دیگر خانواده خواهر او باشد چقدر است؟
۸. جعبه‌ای شامل ۳ مهره قرمز، ۵ مهره آبی و ۳ مهره سبز است. از این جعبه ۳ مهره به تصادف و بدون جایگذاری برمی‌داریم.
 - الف. چقدر احتمال دارد مهره اول قرمز، مهره دوم آبی و مهره سوم نیز قرمز باشد؟
 - ب. حال اگر مهره‌ها را به تصادف و با جایگذاری برداریم چقدر احتمال دارد مهره اول قرمز، مهره دوم آبی و مهره سوم نیز قرمز باشد؟
۹. احتمال انتقال نوعی بیماری ارثی از والدین به فرزند پسر ۴۵٪ و به فرزند دختر ۳۸٪ است. خانواده‌ای انتظار فرزندى را می‌کشند، چقدر احتمال دارد فرزند سالم باشد؟
۱۰. جعبه‌ای شامل ۱۵ لامپ است که ۵ تای آن سوخته است. اگر به تصادف و بدون جایگذاری ۳ لامپ از جعبه بیرون آوریم، چقدر احتمال دارد:
 - الف. هر سه لامپ معیوب باشد؟
 - ب. حداقل یک لامپ معیوب باشد؟
۱۱. دو تاس را باهم به هوا پرتاب می‌کنیم. اگر A پیشامد رو شدن اعداد یکسان در هر دو تاس و B پیشامد مضرب ۳ آمدن تاس اول باشد، آیا دو پیشامد A و B مستقل هستند؟
۱۲. اگر $P(A) = \frac{1}{4}$ و $P(B) = \frac{1}{3}$ و بدانیم A و B مستقل هستند $P(A'|B')$ را بیابید.
۱۳. خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است چقدر احتمال دارد:
 - الف. حداقل ۳ فرزند خانواده پسر باشد.
 - ب. هر ۴ فرزند دختر باشد.

نمونه سؤال امتحانی فصل دوم

بارم	سؤالات	ردیف
۱/۲۵	جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. هرگاه با جامعه‌ای ناشناخته سروکار داریم شناختن یا و یک کار است ولی اگر جامعه را بشناسیم و بخواهیم بدانیم نمونه‌هایی از آن جامعه چگونه خواهند بود علم به کمک ما می‌آید.	۱
۰/۷۵	در مدرسه‌ی A، ۱۲ نفر از کلاس ۳۰ نفره نمره قبولی آزمون گرفته‌اند و در مدرسه‌ی B، ۱۸ نفر از کلاس ۳۴ نفره نمره قبولی در آزمون گرفته‌اند. کدام مدرسه وضعیت بهتری دارد؟	۲
۰/۵	اگر $A \cap B = \emptyset$ باشد آنگاه A و B دو پیشامد هستند و در این صورت $P(A \cup B) =$	۳
۰/۵	کدام یک از سؤالات زیر مربوط به آمار و کدام مربوط به احتمال است؟ الف. می‌دانیم در یک جعبه از ۲۰ میوه‌ی موجود ۷ تایی آن‌ها فاسد است. چند میوه انتخاب کنیم تا مطمئن شویم که حداقل یک سیب سالم است؟ ب. میزان ساعت مطالعه‌ی دانش‌آموزان پایه‌ی یازدهم چقدر است؟	۴
۱/۵	از مجموعه‌ی $S = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ یک عدد به تصادف برمی‌داریم. چقدر احتمال دارد: الف. عدد انتخابی بر ۵ بخش‌پذیر باشد؟ ب. عدد انتخابی بر ۵ یا ۳ بخش‌پذیر باشد؟ پ. عدد انتخابی بر ۵ بخش‌پذیر باشد ولی بر ۳ نباشد؟	۵
۲	چهار فرد a، b، c و d برای انتخابات شورای شهر کاندید شده‌اند. اگر شانس انتخاب فرد a، ۳ برابر شانس فرد d باشد و c و a هم شانس باشند و شانس انتخاب فرد b نصف شانس فرد a باشد چقدر احتمال دارد فرد a یا d انتخاب شود؟	۶
۲/۵	احتمال قبولی سارا در کنکور تجربی ۶۵٪ و احتمال قبولی ندا ۴۸٪ است. چقدر احتمال دارد: الف. هر دو نفر در کنکور قبول شوند؟ ب. حداقل یکی از آن‌ها قبول شود؟ پ. هیچ کدام قبول نشوند؟ ت. فقط سارا قبول شود؟ ث. فقط یکی از دو نفر قبول شود؟	۷
۱/۵	فردی در جیب خود یک سکه سالم و یک سکه که دو طرفش شیر است، نگه می‌دارد او یکی از سکه‌ها را به تصادف انتخاب می‌کند و آن را پرتاب می‌کند، اگر شیر ظاهر شود با چه احتمالی سکه سالم انتخاب شده است؟	۸
۱	در یک کلاس ۴ دانشجوی پسر سال اول، ۶ دانشجوی دختر سال اول و ۶ دانشجوی پسر سال دوم ثبت‌نام کرده‌اند. چه تعداد دانشجوی دختر سال دوم باید در این کلاس ثبت‌نام کنند تا در صورت انتخاب یک دانشجو به تصادف پیشامدهای جنس و سال تحصیلی مستقل باشند؟	۹

ردیف	سؤالات	بارم
۱۰	یک تاس و یک سکه را باهم به هوا پرتاب می‌کنیم. پیشامد A رو شدن عدد اول در تاس و پیشامد B آمدن پشت در سکه می‌باشد. آیا A و B مستقل از هم هستند؟	۱/۵
۱۱	A، B، C سه پیشامد هستند. ثابت کنید رابطه‌ی $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$ درست است اگر و تنها اگر رابطه‌ی روبرو درست باشد: $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = 0$	۲
۱۲	خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است: الف. احتمال آنکه ۴ فرزند خانواده دختر باشند. ب. احتمال آنکه فقط فرزند اول و آخر دختر باشند. پ. احتمال آنکه ۲ فرزند خانواده دختر باشند.	۱/۵
۱۳	دو ظرف همانند داریم اولی دارای ۶ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و دومی دارای ۶ مهره سفید و ۸ مهره سیاه است. با چشم بسته یکی از این دو ظرف را اختیار کرده و مهره‌ای از آن بیرون می‌آوریم. احتمال اینکه این مهره سفید باشد چقدر است؟	۱/۵
۱۴	حاصل $P(B) \times P(A B) + P(B') \times P(A B')$ را بیابید.	۱
۱۵	در یک کلاس ۲۰ نفری ۱۶ نفر عضو تیم فوتبال ۱۲ نفر عضو تیم والیبال و ۲ نفر عضو هیچ تیمی نیستند. یک نفر به تصادف انتخاب می‌کنیم اگر عضو تیم والیبال باشد احتمال آنکه عضو تیم فوتبال هم باشد چقدر است؟	۱
۲۰	جمع نمره	