آموزش و کتاب کار
ریاضی (۱) پایه دهم
(ویژه‌ی مهندس‌ها)

مؤلفین:

رسول حاجی‌زاده، پیمان جلیلی، حسن باطنی

انتشارات خوشخوان

پیشگفتار ناشر

خداوند متعال را شاکرم که اسباب خدمت به دانش‌آموزان تیزهوش و ممتاز ایران عزیزمان را چندین سال متوالی است که نصیب این جانب کرده است و امیدوارم این لطف را در سال‌های بعد نیز به شرط حیات، از بنده دریغ نکند.

کتاب‌هایی که در انتشارات خوشخوان نگارش می‌شود مخصوص دانش‌آموزان ممتاز، تیزهوش، المپیادی و از همه مهم‌تر مختص دانش‌آموزان علاقمند است، بسیار متاسف می‌شوم که کتابی از کتب انتشارات ما را دانش‌آموزی خریداری کند که با اجبار فرد خاصی مانند معلم، اولیاء و یا . . . باشد و آن دانش‌آموز هیچ اشتیاقی به حل مسائل ریاضی و هوش نداشته باشد.

یکی از بیماری‌هایی که در سنوات گذشته نصیب جوانان عزیزمان شده است قرار گرفتن در جریانی به نام گذر از سد کنکور است که باعث شده است وقت این عزیزان به بطالت و بیهوده سپری شود. اغلب شبکه‌های صدا و سیما متأسفانه در همین راستا گام برمی‌دارند و آنتن خود را در اختیار افراد سودجویی قرار می‌دهند که این افراد سودجو فقط و فقط به فکر مال‌اندوزی بوده و این‌که با این برنامه‌های پنکی و پوچشان چه بلایی بر سر نوجوانان و جوانان این مرز و بوم می‌آورند کاری ندارند. همان‌طور که آگاهید تمام شادابی و تفریح و . . . به بهانه‌ی آمادگی برای کنکور از دانش‌آموزان گرفته شده است. در همین راستا باز با عرض تاسف ناشرین و مولفینی وجود دارند که فقط به فکر بالا بردن آمار فروش و سود حاصل از این فروش می‌باشند و در این بین چه عزیزانی قربانی می‌شوند خدا می‌داند. با آگاهی از این موضوع که نگارش و ارائه‌ی کتاب به بازار باید در جهتی باشد که شادابی و رضایت دانش‌آموزان نه تنها نباید کم‌رنگ شود بلکه باید این کتب باعث بالا رفتن روحیه و انگیزه‌ی آن عزیزان نیز باشد، چرا که رضایت خداوند باریتعالی هم در همین است، پرسنل و مؤلفین محترم انتشارات خوشخوان با انگیزه‌ای مضاعف بیش از پیش همت کرده و در این راستا شبانه‌روز وقت صرف می‌کنند و امید دارند که این کتب به مخاطبین واقعی خود برسد که همانا دانش‌آموزان ممتاز و تیزهوش می‌باشد ولی متاسفانه همیشه این نگرانی وجود دارد که نکند دانش‌آموزی که در دروس ریاضی، فیزیک، شیمی علاقه و استعداد کافی ندارد ولی رو به این کتاب‌ها آورده است که اگر چنین شود در چشم آن دانش‌آموز ما هم تبدیل به همان انتشاراتی می‌شویم که در جهت از بین بردن شادابی و روحیه از دانش‌آموزان گام برداشته‌ایم و این گناهی است نابخشودنی. بنابراین خواهشمند است خرید این کتاب را برای دانش‌آموزانی توصیه کنید که تفریح و اوقات فراغتشان با ریاضی و هوش سپری می‌شود.

در انتها از زحمات تمام عزیزان که در تولید این اثر گام برداشتند تقدیر و تشکر می‌شود و از شما مخاطبین گرامی هم انتظار می‌رود عیوب و ایرادات کار را به ما ارجاع دهید تا در چاپ‌های بعدی مورد توجه قرار گیرد.

رسول حاجی‌زاده
«مدیر انتشارات خوشخوان»

والسلام علی من اتبع الهدی

مقدمه مؤلفین

نگارش کتاب کمک‌آموزشی برای درس ریاضیات کار ساده‌ای نیست آن هم وقتی که مخاطبین دانش‌آموزان ممتاز باشند. از طرفی مؤلفین این کتاب در سنوات گذشته خود از دانش‌آموزان ممتاز و برگزیدگان المپیاد ریاضی بوده‌اند که خوشبختانه سر از تدریس ریاضی در مدارس ممتاز تهران درآورده‌اند و با نیاز آموزشی این نوع دانش‌آموزان آشنایی کافی دارند. بنابراین بلافاصله بعد از عرضه شدن کتاب ریاضیات دهم، گروه مؤلفین متشکل از آقایان رسول حاجی‌زاده، پیمان جلیلی و حسن باطنی کار تألیف و جمع‌آوری مطالب مربوطه را آغاز کردند و این هماهنگی و بالا پایین کردن مطالب در جلسات بسیار متعددی و تا حدود یک سال این روند ادامه پیدا کرد تا این‌که با حول و قوه‌ی الهی در انتهای بهار ۹۶ بازبینی نهایی کتاب به اتمام رسید. امید است هر آنچه از دل برمی‌آید بر دل نشیند، مؤلفین کتاب با اشتیاق تمام و با تلاش شبانه‌روزی این ناچیز را برای شما بزرگواران تدوین کرده‌اند امید است نیازها را درست تشخیص داده باشند و پس از مطالعه‌ی کامل کتاب لبخندی از روی رضایت بر چهره‌ی‌تان نقش بسته باشد.

با تجربه‌ای که در کلاس‌های درس در مدارس ممتاز از جمله تیزهوشان‌ها داشته‌ایم مصلحت در آن دیده شد که در آموزش بعضی از مطالب پا را فراتر از گلیم گذاشته و مطالبی را خارج از کتاب درسی آموزش دهیم چون ممکن است این مطالب مورد نیاز همه نباشد آن‌ها را با عنوانِ «بیش‌تر بدانیم» آورده‌ایم و مسائل و تمارین مربوط به این مباحث را که همگانی نمی‌باشند و فقط ویژه‌ی دانش‌آموزان علاقمند است با رنگی متمایز مشخص کرده‌ایم.

توصیه می‌شود در ابتدا مسائل نمونه را خودتان حل کنید و جواب خود را با جواب ارائه شده مقایسه کنید و یا احیاناً اگر قادر به حل مسئله نبودید از پاسخ تشریحی نوشته شده راهنمایی بگیرید. برای تمارین انتهای فصل نیز تا حد ممکن جواب نهایی نوشته شده است تا جواب خودتان را با آن مقایسه کنید امیدواریم کمی و کاستی‌ها را بر ما ببخشایید.

مؤلفین

فهرست مطالب

فصل ۳ توان‌های گویا و عبارت‌های جبری ۱۱۷

فصل ۴ معادله‌ها و نامعادله‌ها ۱۶۱

فصل ۱

مجموعه و دنباله‌ها

سخنی با دبیر

همکار گرامی: در این کتاب فصل ۱، در ٤ درس ارائه شده است.

۱. **مجموعه‌ها:** ممکن است به نظر برسد پرداختن به جبر مجموعه‌ها در این بخش جایگاهی ندارد، مخصوصاً با علم به این که به این بحث در سال آتی و در قالب کتاب آمار و احتمال پرداخته خواهد شد. ولی از نظر نویسنده، آشنایی با اعمالی مثل تفاضل متقارن یا قوانینی مثل قانون دمورگان ولو بدون دانستن نامشان، در حل مسائل ترکیبیات و احتمال به دانش‌آموز کمک می‌کند. همچنین با این که می‌توان از قوانینی مثل توزیع‌پذیری یا قانون جذب و . . . صرف‌نظر کرد ولی تسلط به این قوانین می‌تواند سرعت عمل دانش‌آموزان را در پاسخ‌گویی به تست‌ها افزایش دهد.

۲. **الگو و دنباله:** در این بخش بر الگویابی در سطوح مختلف ساده و دشوار تاکید شده است و این نکته که جملات عمومی دنباله‌های عددی لزوماً منحصر به فرد نیستند.

۴ و ۳. **دنباله‌های حسابی و هندسی:** در این دو بخش ضمن معرفی فرمول‌ها و نکات مفید، فرمول‌های مجموع جملات دنباله‌ها به ویژه در دنباله‌های هندسی تحت عنوان «بیشتر بدانیم» مورد توجه قرار گرفته است. با این که مجموع جملات دنباله‌ها از مباحث کتاب درسی نیست ولی با توجه به مثال‌های ارائه شده می‌تواند برای دانش‌آموزان ممتاز بسیار جذاب و مفید باشد.

سخنی با دانش آموز

دانش‌آموز عزیز: می‌توانیم این فصل را به دو بخش کلی مجموعه‌ها و دنباله‌ها تقسیم کنیم.

مجموعه‌ها: از این بخش مستقیم در کنکور سؤال مطرح می‌شود و همچنین اگر به این بخش تسلط کافی داشته باشید حل برخی از سؤالات ترکیبیات و احتمال در فصل‌های ٦ و ٧ ساده‌تر خواهد شد.

الگو و دنباله‌ها: از این بخش به طور مستقیم در کنکور سؤال مطرح می‌شود. مبحث مجموع جملات دنباله‌ها از مباحث کتاب درسی نیست ولی مطالعه‌ی آن به دانش‌آموزان ممتاز و مستعد توصیه می‌شود. لازم به ذکر است که بحث الگو و دنباله برای دانش‌آموزان علاقمند به ریاضی جذابیت ویژه‌ای دارد و همین امر باعث شده است طراحان سؤالات المپیاد، توجه ویژه‌ای به این بحث داشته باشند.

فهرست مطالب فصل

مقدمات و یادآوری

دانش‌آموزان ممتاز معمولاً مفاهیم و قوانین مجموعه‌ها را به سادگی درک می‌کنند. برای یادآوری مفاهیم مجموعه‌ها که در سال‌های گذشته مطرح شده، تعدادی مثال حل می‌کنیم و سپس مفاهیم کتاب درسی را مطرح کرده و در هر مورد به حل مثال‌های مربوط می‌پردازیم.

مثال ۱ مجموعه‌ی A را با اعضا و مجموعه‌ی B را با نمادهای ریاضی نمایش دهید.

$$A = \{x^2 | x = \frac{y}{2}, 3y \in \mathbb{N}, x \leq 1\} \qquad B = \{3, 6, 12, 24, \cdots\}$$

حل.

برای یافتن اعضای A، باید yهای مورد نظر را بنویسیم.

$$y : \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \cdots$$

حال xها را از روی yها با شرط $x \leq 1$ تشکیل می‌دهیم.

$$x : \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 1$$

$$A = \{\frac{1}{36}, \frac{1}{9}, \frac{1}{4}, \frac{4}{9}, \frac{25}{36}, 1\}$$

برای نوشتن مجموعه‌ی B توجه کنید که اگر اعضای مجموعه را بر ۳ تقسیم کنیم، اعداد حاصل، توانی از ۲ هستند.

$$B = \{3 \times 1, 3 \times 2, 3 \times 4, \cdots\} = \{3 \times 2^x | x \in \mathbb{W}\}$$ [1]

مثال ۲ تمام زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $A = \{1, \{1\}, \varnothing\}$ را بنویسید.

حل. زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی A عبارتند از:

زیرمجموعه‌ها: $\{\ \}, \{1\}, \{\{1\}\}, \{\varnothing\}, \{1, \{1\}\}, \{1, \varnothing\}, \{\{1\}, \varnothing\}, \{1, \{1\}, \varnothing\}$

لازم به یادآوری است که یک مجموعه‌ی n عضوی، 2^n زیرمجموعه دارد. اثبات این موضوع را در فصل‌های بعدی خواهید دید. همان‌طور که در مثال بالا مشاهده کردید مجموعه‌ی سه عضوی A دارای ۸ زیرمجموعه است.

تذکر

دقت شود که مجموعه‌ی $\varnothing$ برابر تهی است و عضوی ندارد در حالی که مجموعه‌ی $\{\varnothing\}$ مجموعه‌ای است با یک عضو و عضو آن مجموعه‌ای تهی است. برای یک تمثیل ساده می‌توان مجموعه‌ی تهی را با یک جعبه‌ی خالی که چیزی در آن نیست و یک مجموعه مثل $\{\varnothing\}$ را می‌توان به عنوان جعبه‌ای که داخل آن یک جعبه‌ی خالی است تشبیه کرد. بدیهی است که جعبه‌ای حاوی یک جعبه‌ی خالی، دیگر خالی نیست.

مثال ۳ اگر به اعضای مجموعه‌ی A، دو عضو اضافه شود، به تعداد زیرمجموعه‌هایش ۴۸ واحد افزوده می‌شود. تعداد اعضای مجموعه‌ی A چندتاست؟

حل. اگر مجموعه‌ی A دارای n عضو باشد، آنگاه 2^n زیرمجموعه خواهد داشت. بنابراین:

(تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی A) + ۴۸ = (تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی جدید که $n + 2$ عضو دارد)

$$2^{n+2} = 2^n + 48 \Rightarrow 2^{n+2} - 2^n = 48 \Rightarrow 2^n(2^2 - 1) = 48 \Rightarrow n = 4$$

[1] برای مجموعه‌ی B می‌توان فرمول‌های دیگری یافت. در واقع جواب نوشته شد، یکی از جواب‌هاست. دلیل این موضوع را در بخش الگو و دنباله خواهید دید.

مثال ۴ اگر $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ و $B = \{c, d, g\}$ باشند تعداد مجموعه‌هایی مانند X را بیابید که در رابطه‌ی $(A \cap B) \subseteq X \subseteq (A \cup B)$ صدق می‌کنند.

حل. مجموعه‌های $A \cup B$ و $A \cap B$ را تشکیل می‌دهیم.

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g\}, \qquad A \cap B = \{c, d\}$$

مجموعه‌ی X حتماً باید اعضای c و d را داشته باشد و نیز می‌تواند از اعضای $\{a, b, e, f, g\}$ عضو داشته باشد. یعنی تعداد X های متفاوت، همان تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی ۵ عضوی است.

$$\text{X تعداد مجموعه‌های} = ۲^{۵} = ۳۲$$

مثال ۵ مجموعه‌ی $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ چند زیرمجموعه دارد که حتماً شامل a و c باشد ولی شامل h, b نباشد؟

حل. زیرمجموعه‌ی مورد نظر به صورت روبه‌رو است. $\{a, c, \{$اعضای زیرمجموعه‌ای از $\{d, e, f, g\}\}$

اعضای b و h را انتخاب نمی‌کنیم پس مجموعه‌ی مورد نظر شامل a و c است و اعضای d، e، f و g نیز می‌توانند عضو آن باشند یا نباشند. پس عضوهای زیرمجموعه‌ای دلخواه از $\{d, e, f, g\}$ را به همراه a و c در یک مجموعه قرار می‌دهیم.

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌ها} = ۲^{۴} = ۱۶$$

مثال ... $B =$. با هم برابر باشند.

حل. $\Rightarrow a^{۲} + ۲ \geq ۲$

پس $۲ + a^{۲}$ نمی‌تواند با ۱ برابر باشد:

$$a^{۲} + ۲ = ۳ \Rightarrow a^{۲} = ۱ \Rightarrow a = ۱ \text{ یا } a = -۱$$

$a = ۱$ غیر قابل قبول است چون با جایگذاری $a = ۱$، هر دو عضو مجموعه‌ی A برابر ۳ خواهند شد.

مثال ۷ اگر $A \subseteq B$، عبارت $[(A \cap B) \cup B] - [(A \cup B) \cap A]$ را تا حد امکان ساده کنید.

حل. اگر $A \subseteq B$ باشد می‌توان نتیجه گرفت: $A \cap B = A \qquad A \cup B = B$

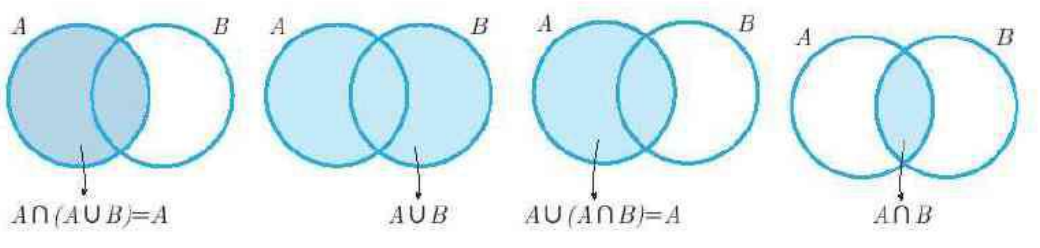
$$[(A \cap B) \cup B] - [(A \cup B) \cap A] = (A \cup B) - (B \cap A) = B - A$$

نکته ۱

به ازای هر دو مجموعه‌ی دلخواه A و B می‌توان نوشت:

$$(A \cup B) \cap A = A, \qquad (A \cap B) \cup A = A$$

دو رابطه‌ی فوق به قانون جذب در مجموعه‌ها معروف هستند. می‌توان درستی این روابط را به کمک نمودار ون تحقیق کرد.



اثبات قانون جذب:

چون $(A\cap B)$ زیرمجموعه‌ی A است، پس اجتماع آن دو، برابر مجموعه‌ی بزرگ‌تر یعنی A است.

$$(A\cap B)\subseteq A \Rightarrow (A\cap B)\cup A = A$$

چون A زیرمجموعه‌ی $(A\cup B)$ است، پس اشتراک آن دو، برابر مجموعه‌ی کوچک‌تر یعنی A است.

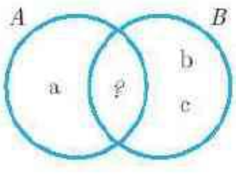
$$A\subseteq (A\cup B) \Rightarrow (A\cup B)\cap A = A$$

بنابر قانون جذب می‌توان مثال ۷ را حتی بدون در نظرگرفتن فرض مثال، حل کرد.

$$[(A\cap B)\cup B)] - [(A\cup B)\cap A] = B - A$$

مثال ۸ اگر $A - B = \{a\}$ و $B - A = \{b, c\}$ باشد مجموعه‌ی $(A\cup B) - (A\cap B)$ را تشکیل دهید.

حل. می‌توان به کمک نمودار ون مسئله را بهتر درک کرد.

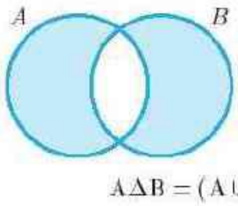


با کمی دقت می‌توان متوجه شد که $(A\cup B) - (A\cap B)$ در واقع اجتماع مجموعه‌های $(A - B)$ و $(B - A)$ است.

$$(A\cup B) - (A\cap B) = (A - B)\cup(B - A) = \{a, b, c\}$$

بیشتر بدانیم ۱

اجتماع مجموعه‌های $(A - B)$ و $(B - A)$ را اصطلاحاً تفاضل متقارن مجموعه‌های A و B می‌نامند و آن را با نماد $A\Delta B$ نمایش می‌دهند.[1]



$$A\Delta B = (A - B)\cup(B - A)$$

به راحتی و با کمک نمودار ون می‌توان تساوی روبه‌رو را نتیجه گرفت: $A\Delta B = (A\cup B) - (A\cap B)$

عمل تفاضل متقارن برای یافتن اعضایی است که از دو مجموعه‌ی A و B، تنها در یکی عضویت دارند نه هر دو. به عنوان مثال اگر A مجموعه‌ی اعداد بخش‌پذیر بر ۳ و B مجموعه‌ی اعداد بخش‌پذیر بر ۵ باشد مجموعه‌ی $A\Delta B$ مجموعه‌ی اعدادی است که تنها بر ۳ یا تنها بر ۵ بخش‌پذیرند.

$$A = \{۳, ۶, ۹, ۱۲, ۱۵, ۱۸, ۲۱, \cdots\} \qquad B = \{۵, ۱۰, ۱۵, ۲۰, ۲۵, ۳۰, \cdots\}$$

$$A\Delta B = \{۳, ۵, ۶, ۹, ۱۰, ۱۲, ۱۸, ۲۰, ۲۱, \cdots\}$$

مثال ۹ اگر $A_i = \{x \mid i \le x \le i^۲ + ۱\}$ حاصل $A_۱\cup A_۲\cup\cdots\cup A_{۱۰۰}$ را با نمادهای ریاضی بنویسید.

حل. در این نوع نگارش، i اصطلاحاً اندیس A است. می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{array}{l} A_۱ = \{x \mid ۱ \le x \le ۲\} \\ A_۲ = \{x \mid ۲ \le x \le ۵\} \\ A_۳ = \{x \mid ۳ \le x \le ۱۰\} \\ \vdots \\ A_{۱۰۰} = \{x \mid ۱۰۰ \le x \le ۱۰۰۰۱\} \end{array}\right\} \Rightarrow A_۱\cup A_۲\cup\cdots\cup A_{۱۰۰} = \{x \mid ۱ \le x \le ۱۰۰۰۱\}$$

۱) علامت Δ را دلتا می‌نامند.

نکته‌ی ۲ برای انجام عمل اجتماع یا اشتراک تعداد زیادی مجموعه، آن‌ها را با نام یکسان و اندیس نام‌گذاری می‌کنیم و به صورت زیر می‌نویسیم.

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \,, \qquad \bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

مثال ۱۰ اگر A_i مجموعه‌ی شمارنده‌های طبیعی عدد $2i$ باشد حاصل عبارت $\bigcap_{i=1}^{10} A_{2i}$ را تا حد امکان ساده کنید.

حل. با جاگذاری i از ۱ تا ۱۰ می‌توان نوشت:

$$\bigcap_{i=1}^{10} A_{2i} = A_2 \cap A_4 \cap \cdots \cap A_{20}$$

$$= \left(\begin{matrix}\text{مجموعه‌ی شمارنده‌های}\\ \text{طبیعی } 4\end{matrix}\right) \cap \left(\begin{matrix}\text{مجموعه‌ی شمارنده‌های}\\ \text{طبیعی } 8\end{matrix}\right) \cap \cdots \cap \left(\begin{matrix}\text{مجموعه‌ی شمارنده‌های}\\ \text{طبیعی } 40\end{matrix}\right)$$

$$= \text{مجموعه‌ی شمارنده‌های طبیعی } 4$$

$$= \{1, 2, 4\}$$

بازه

به محدوده‌ای از اعداد حقیقی که بین دو عدد حقیقی مشخص هستند یا از یک عدد حقیقی مشخص بزرگ‌تر یا از آن کوچک‌تر هستند، یک بازه از اعداد حقیقی می‌گوییم.

انواع بازه در نمایش‌های مختلف

بازه	نوع بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
(a, b)	باز[1]	$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$	a b
$(a, b]$	نیم‌باز	$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$	a b
$[a, b)$	نیم‌باز	$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$	a b
$[a, b]$	بسته	$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$	a b
$(a, +\infty)$	باز	$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x\}$	a
$[a, +\infty)$	نیم‌باز	$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x\}$	a
$(-\infty, a)$	باز	$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x < a\}$	a
$(-\infty, a]$	نیم‌باز	$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leq a\}$	a

اجتماع، اشتراک و تفاضل بازه‌ها

همانند سایر مجموعه‌ها، می‌توان اعمال مجموعه‌ای را بر روی بازه‌ها نیز انجام داد.

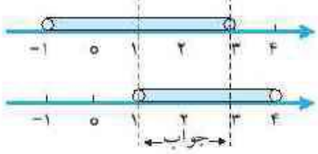
مثال ۱۱ حاصل عبارت‌های زیر را تا حد امکان ساده کنید.

(الف) $(-1, 3] \cap (1, 4)$ (ب) $(-2, 4] - (-6, 4)$ (ج) $(-1, 4) \cup [4, +\infty)$

حل. معمولاً ساده کردن عبارت‌های شامل بازه‌ها کار ساده‌ای است امّا در صورت نیاز می‌توان عملیات را در نمایش هندسی بازه‌ها (نمایش روی محور اعداد) انجام داد.

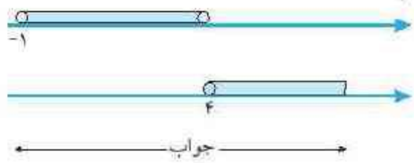
۱) در ریاضی (a, b) می‌تواند به معنای اعداد حقیقی بین a و b باشد. همچنین می‌تواند معادل نقطه‌ای با طول a و عرض b باشد و نیز می‌تواند به معنی بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک اعداد طبیعی a و b باشد. نحوه‌ی برداشت از نماد (a, b) به مبحث مورد نظر بستگی دارد.

(الف) $(-۱,۳]\cap(۱,۴)=(۱,۳]$



(ب) تنها عضو $[-۲,۴]$ که عضو $(-۶,۴)$ نیست، عدد ۴ است. $\{۴\}=(-۶,۴)-[-۲,۴]$

(ج) $(-۱,۴)\cup[۴,+\infty)=(-۱,+\infty)$



مثال ۱۲ ... $\bigcup\limits_{i=}^{۱۰۰}$ را به دست آورید.

حل.

$i=$

مثال ۱۳ اگر $A_i=(-۲i-۱,i^۲)$ و i عدد طبیعی باشد حاصل عبارت $\bigcap\limits_{i=۱} A_i$ ...

حل. با جاگذاری iها، بازه‌های $A_۱$ و $A_۲$ و ... را تشکیل می‌دهیم.

$$A_۱=(-۳,۱),A_۲=(-۵,۴),A_۳=(-۷,۹),\cdots,A_{۲۰}=(-۴۱,۴۰۰)$$

$A_۱$ زیرمجموعه‌ی تمام بازه‌های $A_۲$ تا $A_{۲۰}$ است. پس اشتراک بازه‌ها همان $A_۱$ است. $\bigcap\limits_{i=۱}^{۲۰} A_i=(-۳,۱)$

مثال ۱۴ عدد طبیعی n را طوری بیابید که بازه‌ی $\left[\frac{n-۱}{n},\frac{n+۱}{n}\right]$ شامل سه عدد حسابی باشد.

حل. می‌دانیم $۱<\frac{n+۱}{n}=۱+\frac{۱}{n}$ و $\frac{n-۱}{n}=۱-\frac{۱}{n}<۱$ یعنی بازه‌ی مورد نظر حتماً شامل عدد ۱ است.

از طرفی چون $n\in\mathbb{N}$ پس عدد $\frac{۱}{n}$ حداکثر برابر ۱ است و این به ازای $n=۱$ اتفاق می‌افتد و تنها در همین شرایط است که بازه می‌تواند شامل اعدادی حسابی غیر از عدد ۱ باشد.

$$n=۱\Rightarrow\left[\frac{n-۱}{n},\frac{n+۱}{n}\right]=[۰,۲]$$

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

اگر تعداد اعضای مجموعه‌ای برابر یک عدد حسابی باشد، مجموعه را متناهی (با پایان) و در غیر این صورت آن را نامتناهی می‌نامیم.

به عنوان مثال مجموعه‌ی اعداد طبیعی ۴۰۰ رقمی، مجموعه‌ی تمام اجرام آسمانی و مجموعه‌ی تمام انسان‌ها، مثال‌هایی از مجموعه‌ی متناهی و مجموعه‌ی اعداد طبیعی، مجموعه‌ی $(۱,۲)$ و مجموعه‌ی اعداد گنگ بین $۱۰^{-۶}$ و $۱۰^{-۵}$، مثال‌هایی از مجموعه‌های نامتناهی هستند.

مثال ۱۵ مشخص کنید کدام یک از مجموعه‌های زیر متناهی و کدام یک نامتناهی هستند. (با ذکر دلیل)

(الف) مجموعه‌ی اعداد حقیقی کوچک‌تر از ۲ و بزرگ‌تر از -۳

(ب) مجموعه‌ی اعداد اوّل به صورت $۲n+۳$ $(n\in\mathbb{N})$

(ج) مجموعه‌ی اعداد اوّل که یک واحد از مربع یک عدد صحیح کوچک‌ترند.

(د) $A = \left\{ \frac{n^۲}{n+۴} | n \in \mathbb{N}, \frac{n^۲}{n+۴} \in \mathbb{N} \right\}$

(ه) مجموعه‌ی اعداد گنگ بین $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$

حل. (الف) مجموعه‌ی مورد نظر همان بازه‌ی $(-۳, ۲)$ است که شامل بی‌شمار عدد حقیقی است پس نامتناهی است.

(ب) اعداد اول به جز عدد ۲ همه فرد هستند. در بین اعداد فرد، به جز عدد ۳ می‌توان همه را به صورت مجموع یک عدد زوج طبیعی با ۳ نوشت پس مجموعه‌ی مورد نظر همان اعداد اول به استثنای اعداد ۲ و ۳ است. بنابراین نامتناهی است.

(ج) اگر x عضو مجموعه‌ی مورد نظر باشد می‌توان نوشت: $x = a^۲ - ۱$

$$x = (a - ۱)(a + ۱)$$

عدد x عددی است اول پس نمی‌تواند حاصل‌ضرب دو عدد دیگر باشد مگر این که $(a - ۱)$ برابر ۱ باشد.

$$a - ۱ = ۱ \Rightarrow a = ۲ \Rightarrow x = ۳$$

بنابراین مجموعه‌ی فوق تک عضوی و متناهی است.

(د) عدد $\frac{n^۲}{n+۴}$ عددی است طبیعی پس باید $n^۲$ بر $n + ۴$ بخش‌پذیر باشد. می‌توان نوشت:

$$\frac{n^۲}{n+۴} = \frac{n^۲ - ۱۶ + ۱۶}{n+۴} = (\underbrace{n - ۴}_{\text{صحیح}} + \frac{۱۶}{n+۴})$$

برای این که حاصل طبیعی باشد، باید $(n + ۴)$ از مقسوم‌علیه‌های ۱۶ باشد و تعداد n های مورد نظر محدود است پس مجموعه متناهی است. $n = ۴ , ۱۲$

(ه) میانگین هر دو عدد، عددی است بین آن دو یعنی $\sqrt{۳} > \frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}{۲} > \sqrt{۲}$. به همین ترتیب می‌توان بی‌شمار عدد گنگ دیگر مثلاً بین $\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}{۲}$ و $\sqrt{۲}$ و یا بین $\sqrt{۳}$ و $\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}{۲}$ نوشت پس مجموعه نامتناهی است.

نکته‌ی ۳

اگر $a < b$ آنگاه نامساوی مقابل با شرط $(c, d > ۰)$ برقرار است: $a < \frac{ac + bd}{c + d} < b$

اثبات:

$$a < b \xrightarrow[\times c]{c>۰} ac < bc \xrightarrow[+bd]{} ac + bd < bc + bd$$
$$\Rightarrow \frac{ac + bd}{c + d} < b \qquad (I)$$
$$a < b \xrightarrow[\times d]{d>۰} ad < bd \xrightarrow[+ac]{} ac + ad < ac + bd$$
$$\Rightarrow a < \frac{ac + bd}{c + d} \qquad (II)$$

$(I) , (II) \Rightarrow$ حکم برقرار است.

به کمک نکته‌ی فوق و با انتخاب c و d مناسب می‌توان بین هر دو عدد متمایز، بی‌شمار عدد گنگ و بی‌شمار عدد گویا نوشت.

مثال ۱۶ بین اعداد $\frac{۷}{۵}$ و $\sqrt{۲}$، یک عدد گنگ بنویسید.

حل. با انتخاب ضریب ۱ و ۲ می‌توان برای عدد مورد نظر به مثالی مناسب دست یافت.

$$\frac{۷}{۵} < \frac{۲\sqrt{۲} + \frac{۷}{۵}}{۳} < \sqrt{۲}$$

مثال ۱۷ مجموعه‌ی $A=\left\{\frac{3n-5}{n+1}\middle| n\in\mathbb{N}\right\}$ را در نظر بگیرید. آیا این مجموعه عضوی دارد که برابر ۲ باشد؟ آیا عضوی دارد که برابر ۴ باشد؟

حل. $\frac{3n-5}{n+1}$ را برابر ۲ و ۴ قرار می‌دهیم. اگر n به دست آمده عدد طبیعی باشد، پاسخ مسئله است.

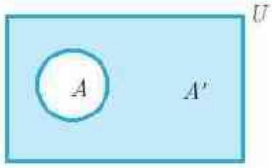
$$\frac{3n-5}{n+1}=2 \Rightarrow 3n-5=2n+2 \Rightarrow n=7 \qquad \text{قابل قبول}$$

$$\frac{3n-5}{n+1}=4 \Rightarrow 3n-5=4n+4 \Rightarrow n=-9 \qquad \text{غیر قابل قبول}$$

همان گونه که در مثال بالا دیده می‌شود در مبحث مجموعه‌ها، همانطور که از عضویت در یک مجموعه صحبت می‌شود، ممکن است عدم عضویت در مجموعه‌ای مورد نظر باشد یعنی مجموعه‌ای که شامل اعضایی باشد که در مجموعه‌ی ما عضویت ندارند.

تعریف **مجموعه‌ی مرجع.** در هر مبحث از مجموعه‌ها، می‌توان مجموعه‌ای در نظر گرفت که تمام مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعه‌ی آن باشند. این مجموعه را مجموعه‌ی مرجع می‌نامیم و آن را با U یا M نمایش می‌دهیم یعنی برای هر مجموعه A داریم: $A\subseteq U$

تعریف **مجموعه‌ی متمم.** متمم هر مجموعه مثل A که آن را با A' نمایش می‌دهیم، عبارت است از مجموعه‌ی اعضایی که عضو A نیستند و عضو U هستند. به عبارت دیگر $A'=U-A$.
بدیهی است اگر U مشخص نباشد، صحبت از A' بی‌معنی است.



به عنوان مثال، اگر دانش‌آموزان کلاس شما مجموعه‌ی A را تشکیل دهند و مجموعه‌ی مرجع را دانش‌آموزان کل دبیرستان در نظر بگیریم، A' برابر است با مجموعه‌ی تمام دانش‌آموزان دبیرستانتان که هم‌کلاس شما نیستند و اگر مرجع را کل دانش‌آموزان استان شما در نظر بگیریم، مجموعه‌ی A' بسیار بزرگ‌تر خواهد بود.

مثال ۱۸ در هر مورد با توجه به مجموعه‌ی مرجع، A' را تشکیل دهید.

(الف) $A=\{2^n | n\in\mathbb{N}, n<8\}$ $\qquad U=\{2^n | n\in\mathbb{W}, n<15\}$

(ب) $A=(-\infty,2)\cup[4,+\infty)$ $\qquad U=\mathbb{R}$

(الف)

۲ ۷ ۲ ۴ ۶ ۱۴

۰ ۱ ۲ ۱۴

۳ ۵ ۷ ۹ ۱۱ ۱۳

(ب)

(ج)

(د) مجموعه‌ی A شامل حاصل ضرب‌های مختلف اعداد گویاست و اگر a را برابر ۱ انتخاب کنیم، b هر عدد گویایی می‌تواند باشد پس مجموعه‌ی A همان مجموعه‌ی اعداد گویاست. $A' = U - A = Q - Q = \varnothing$

مثال ۱۹ اگر $A = \{2x+1 | x \in \mathbb{N}, x < 5\}$ و $B = \{x | x^2 \geq 4, x \in \mathbb{Z}\}$ و $M = \mathbb{Z}$، حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

(الف) $B - A'$ (ب) $A - B$

حل. مجموعه‌های A و A' و B را با اعضایشان نمایش می‌دهیم.

$$A = \{3, 5, 7, 9\}$$
$$A' = \{\cdots, -1, 0, 1, 2, 4, 6, 8, 10, 11, \cdots\}$$
$$B = \{\cdots, -3, -2, 2, 3, \cdots\}$$

(الف) $B - A' = \{3, 5, 7, 9\}$ (ب) $A - B = \varnothing$

مثال ۲۰ اگر $A_i = \mathbb{R} - (-i, i)$ و $U = \mathbb{R}$، حاصل عبارت زیر را به صورت بازه‌ای بنویسید.

$$\bigcap_{i=1}^{100000} A_i' = ?$$

حل. A_i شامل اعداد بازه‌ی $[-i, i]$ نیست بنابراین می‌توان A_i'ها را به صورت زیر تشکیل داد:

$$A_1' = [-1, 1]\ ,\ A_2' = [-2, 2]\ ,\ \cdots\ ,\ A_{100000}' = [-100000, 100000]$$

A_1' زیرمجموعه‌ی سایر مجموعه‌هاست. پس اشتراکشان همان A_1' است.

$$\bigcap_{i=1}^{100000} A_i' = [-1, 1]$$

چند رابطه‌ی کاربردی: با توجه به تعاریف اولیه‌ی اجتماع، اشتراک و تفاضل و همچنین مجموعه‌های مرجع و متمم می‌توان روابط ساده‌ی زیر را نوشت. تحقیق در مورد درستی این تساوی‌ها به راحتی و به کمک نمودار ون ممکن است.

۱) $(A')' = A$ ۲) $M' = \varnothing$ ۳) $\varnothing' = M$

۴) $A \cup M = M$ ۵) $A \cap M = A$ ۶) $A \cup A' = M$

۷) $A \cap A' = \varnothing$ ۸) $A - A' = A$

و با توجه به تفاضل دو مجموعه به رابطه‌ی زیر توجه ویژه داشته باشید:

۹) $A - B = A \cap B'$

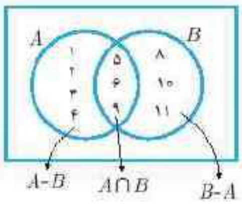
مثال ۲۱ حاصل عبارت $(A \cap M) - (A' - A)$ را به دست آورید.

حل. $(A \cap M) - (A' - A) = A - A' = A$

مثال ۲۲ اگر $A \cap B' = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B \cap A' = \{8, 10, 11\}$ و $A \cap B = \{5, 6, 9\}$، مجموعه‌های A و B را با اعضایشان نمایش دهید.

حل. دقت کنید که مجموعه‌ی مرجع داده نشده و این مسئله بدون در نظر گرفتن مجموعه‌ی مرجع، جواب ثابت دارد. می‌توانیم از روابط $A \cap B' = A - B$ و $B \cap A' = B - A$ استفاده کنیم و مسئله را به کمک نمودار ون بهتر درک کنیم.

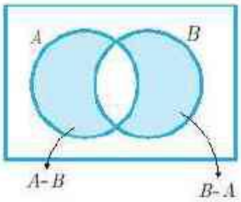
با توجه به نمودار ون داریم:



$$A=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۹\}$$
$$B=\{۵,۶,۹,۸,۱۰,۱۱\}$$

همان گونه که می‌بینیم به کمک نمودار ون می‌توان به تساوی‌هایی مثل $A=(A-B)\cup(A\cap B)$ دست یافت.

مثال ۲۳ اگر $A\cap B'=B\cap A'$ حاصل عبارت $[(A\cup B)-(A\cap B)]-A$ را به دست آورید.



حل. همان گونه که از نمودار ون مشخص است، در حالت کلی مجموعه‌های $(A-B)$ و $(B-A)$ اشتراکی ندارند. حال که دو مجموعه‌ی بدون هیچ عضو اشتراکی با هم برابرند پس هر دو تهی هستند.

$$\left.\begin{array}{l} A-B=\varnothing \Rightarrow A\subseteq B \\ B-A=\varnothing \Rightarrow B\subseteq A \end{array}\right\} \Rightarrow A=B$$

$$[(A\cup B)-(A\cap B)]-A=[(A\cup A)-(A\cap A)]-A=(A-A)-A=\varnothing-A=\varnothing$$

بیشتر بدانیم ۲

جبرمجموعه‌ها.

همان گونه که در بحث عبارت‌های جبری، از اتحادهای مفید و کاربردی برای حل مسائل دشوار یا حل سریع‌تر مسائل استفاده می‌شود، در مبحث مجموعه‌ها نیز روابطی کاربردی وجود دارد که حل مسائل را ساده می‌کند. در این بخش به صورت اجمالی به معرفی و اثبات روابط به کمک نمودار ون یا به کمک روابط از پیش اثبات شده می‌پردازیم.

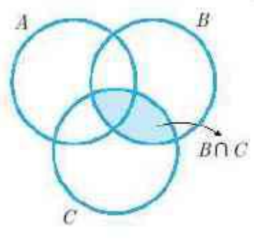
قوانین (خواص) جبر مجموعه‌ها

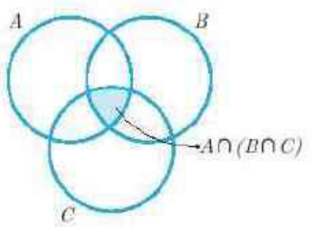
$$۱)\ \begin{cases} A\cup B=B\cup A \\ A\cap B=B\cap A \end{cases}$$ خاصیت جابه‌جایی

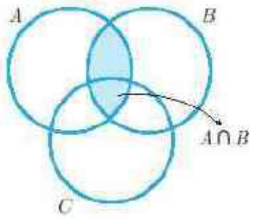
می‌توان به راحتی به کمک نمودار ون، خاصیت جابه‌جایی را ثابت کرد. در واقع در اعمال اجتماع و اشتراک دو مجموعه، ترتیب مجموعه‌ها هیچ اهمیتی ندارد. در حالت کلی‌تر اگر تعداد مجموعه‌ها از ۲ به ۳ یا بیشتر افزایش یابد نیز روابط مشابهی به دست می‌آید. در حالتی که تعداد مجموعه‌ها ۳ تا باشد، خاصیت شرکت‌پذیری حاصل می‌شود.

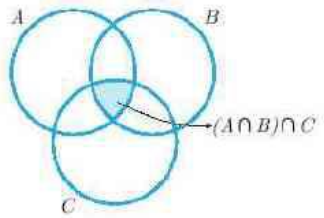
$$۲)\ \begin{cases} A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C \\ A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C \end{cases}$$ خاصیت شرکت‌پذیری (انجمنی)

اثبات شرکت‌پذیری عمل اشتراک







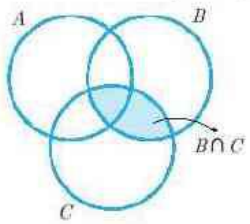


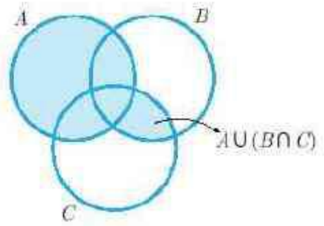
توجه شود که در خاصیت شرکت‌پذیری فقط عمل اجتماع یا اشتراک وجود دارد نه هر دو باهم. اگر هر دو عمل در ارتباط سه مجموعه وجود داشته باشد خاصیت پخشی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

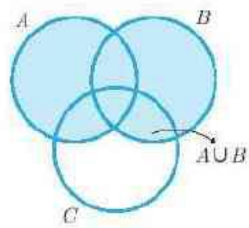
۳) $\begin{cases} A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C) \\ A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C) \end{cases}$ خاصیت پخشی (توزیع‌پذیری)

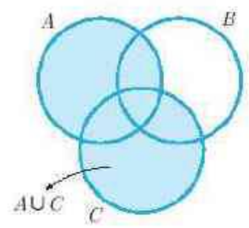
این خاصیت همانند پخش عمل ضرب در جمع یا منهای عبارت‌های جبری است.

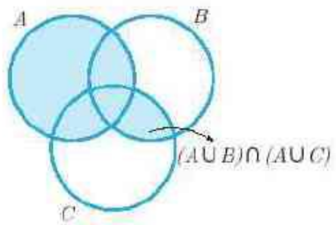
اثبات خاصیت پخشی اجتماع نسبت به اشتراک











مثال ۲۴ به کمک قانون پخشی، عبارت‌های زیر را بسط دهید.

(الف) $A\cup(B\cap C\cap D)$ (ب) $(A\cup B)\cap(C\cup D)$

حل. (الف) قانون پخشی محدودیتی در تعداد مجموعه‌ها ندارد.

$$A\cup(B\cap C\cap D)=(A\cup B)\cap(A\cup C)\cap(A\cup D)$$

(ب) در سوالات از این دست $(A\cup B)$ را به شکل یک مجموعه می‌بینیم و در عبارت دوم پخش می‌کنیم.

$$\begin{aligned}(A\cup B)\cap(C\cup D)&=[(A\cup B)\cap C]\cup[(A\cup B)\cap D]\\&=[(A\cap C)\cup(B\cap C)]\cup[(A\cap D)\cup(B\cap D)]\\&=(A\cap C)\cup(B\cap C)\cup(A\cap D)\cup(B\cap D)\end{aligned}$$

مثال ۲۵ حاصل عبارت زیر را تا حدامکان ساده کنید.

$$[(A\cup B')\cap(A\cup B)]\cup(A'\cap B)$$

حل. ابتدا عبارت داخل [ ] را ساده می‌کنیم. «$A\cup$» در هر دو پرانتز مشترک است. می‌توانیم از عکس قانون پخشی استفاده کنیم. (مشابه فاکتورگیری

در عبارات جبری)

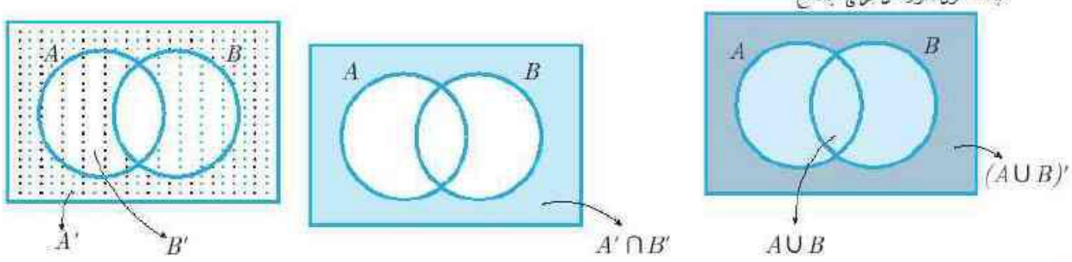
$$(\underline{A}\cup B')\cap(\underline{A}\cup B)=A\cup(B'\cap B)=A\cup\varnothing=A$$

کل عبارت را می‌توان به صورت $A\cup(A'\cap B)$ نوشت.

$$A\cup(A'\cap B)\underset{\text{پخشی}}{=}(\underbrace{A\cup A'}_{M})\cap(A\cup B)=M\cap(A\cup B)=A\cup B$$

۴) $\begin{cases}(A\cup B)'=A'\cap B'\\(A\cap B)'=A'\cup B'\end{cases}$ قانون دمورگان

اثبات قانون دمورگان برای اجتماع



مثال ۲۶ ثابت کنید $(A\cap B\cap C)'=A'\cup B'\cup C'$ (به کمک جبر مجموعه‌ها)

حل عبارت $(A\cap B)$ را یک مجموعه در نظر می‌گیریم و از دمورگان برای دو مجموعه استفاده می‌کنیم.

$$[(A\cap B)\cap C]'\underset{\text{دمورگان}}{=}(A\cap B)'\cup C'\underset{\text{دمورگان}}{=}(A'\cup B')\cup C'=A'\cup B'\cup C'$$

نکته ۴

قانون دمورگان برای هر تعداد مجموعه قابل تعمیم است یعنی:

$$\left(\bigcup_{1}^{n} A\right)' = \bigcap_{1} A'$$

$$\left(\bigcap_{1} A\right)' = \bigcup_{1} A'$$

مثال

اثبات اجتماع به اشتراک $A\cup(A\cap B)=(A\cap M)\cup(A\cap B)\underset{\text{عکس پخشی}}{=}A\cap(B\cup M)=A\cap M=A$

اثبات اشتراک به اجتماع $A\cap(A\cup B)=(A\cup\varnothing)\cap(A\cup B)\underset{\text{عکس پخشی}}{=}A\cup(B\cap\varnothing)=A\cup\varnothing=A$

مثال ۲۸ حاصل را تا حد امکان ساده کنید.

$$(A\cup B\cup C)\cap[((C-B)\cup(B-A))\cup A\cup B\cup C]$$

حل. بر خلاف ظاهر پیچیده و ترسناک سوال، فرم $\square\cap(\bigcirc\cup\square)$ دیده می‌شود و می‌دانیم که جواب همان $\square$ است.

$$(A\cup B\cup C)\cap[((C-B)\cup(B-A))\cup A\cup B\cup C]\underset{\text{جذب}}{=}A\cup B\cup C$$

مثال ۲۹ درستی تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

(الف) $A-(A\cap B)=A-B$

(ب) $(A-B)-C=A-(B\cup C)$

(ج) $(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$

حل.

(الف) $A-(A\cap B)=A\cap(A\cap B)'\underset{\text{دمورگان}}{=}A\cap(A'\cup B')\underset{\text{پخشی}}{=}(\underbrace{A\cap A'}_{\varnothing})\cup(A\cap B')$

$=\varnothing\cup(A-B)=A-B$

(ب) $(A-B)-C=(A\cap B')\cap C'\underset{\text{شرکت‌پذیری}}{=}A\cap(B'\cap C')$

$\underset{\text{عکس دمورگان}}{=}A\cap(B\cup C)'=A-(B\cup C)$

(ج) $(A-B)\cup(B-A)=(A\cap B')\cup(B\cap A')\underset{\text{پخشی}}{=}[(A\cap B')\cup B]\cap[(A\cap B')\cup A']$

$\underset{\text{پخشی}}{=}\left[(A\cup B)\cap(\underbrace{B\cup B'}_{M})\right]\cap\left[(\underbrace{A\cup A'}_{M})\cap(B'\cup A')\right]$

$=[(A\cup B)\cap M]\cap[M\cap(B'\cup A')]=(A\cup B)\cap(B\cap A)'=(A\cup B)-(A\cap B)$

مثال ۳۰ حاصل را تا حد امکان ساده کنید.

(الف) $A-[A'-(A-B)]$

(ب) $[A\cap(A'\cup B)]\cup[B\cap(A'\cup B')]$

حل.

(الف) $A-[A'-(A-B)]=A-[A'-(A\cap B')]=A-[A'\cap(A\cap B')']$

$\underset{\text{دمورگان}}{=}A-\left[\underbrace{A'\cap(A'\cup B)}_{\text{جذب}}\right]=A-A'=A$

(ب) $[A\cap(A'\cup B)]\cup[B\cap(A'\cup B')]\underset{\text{پخشی}}{=}\left[(\underbrace{A\cap A'}_{\varnothing})\cup(A\cap B)\right]\cup\left[(B\cap A')\cup(\underbrace{B\cap B'}_{\varnothing})\right]$

$=(A\cap B)\cup(B\cap A')\underset{\text{عکس پخشی}}{=}B\cap(\underbrace{A\cup A'}_{M})=B\cap M=B$

مثال ۳۱ ثابت کنید اگر $A \cup B = A \cup C$ و $A \cap B = A \cap C$، می‌توان نتیجه گرفت $B = C$

حل.

$$B \underset{\text{عکس جذب}}{=} B \cup (A \cap B) \underset{\text{فرض}}{=} B \cup (A \cap C) \underset{\text{پخشی}}{=} (B \cup A) \cap (B \cup C)$$

$$\underset{\text{فرض}}{=} (A \underline{\cup C}) \cap (B \underline{\cup C}) \underset{\text{عکس پخشی}}{=} (A \cap B) \underline{\cup C} \underset{\text{فرض}}{=} (A \cap C) \cup C \underset{\text{عکس جذب}}{=} C$$

همان گونه که در این چند مثال دیدیم، جبر مجموعه‌ها ابزاری قوی در درک مفاهیم مجموعه‌هاست.

• با توجه به این که در کتاب درسی اشاره‌ی مستقیمی به این مبحث نشده به همین حد اکتفا می‌کنیم.

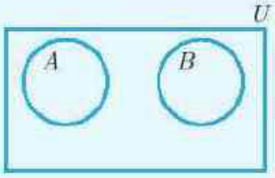
دو مجموعه‌ی جدا از هم

به دو مجموعه‌ی A و B که عضو مشترک نداشته باشند، دو مجموعه‌ی جدا از هم یا مجزا گویند.

$A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow$ A و B از هم مجزا هستند.

به عنوان مثال مجموعه‌ی اعداد زوج و مجموعه‌ی اعداد فرد، جدا از همند یا مجموعه‌ی اعدادی که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن‌ها بر ۳ برابر ۱ است و مجموعه‌ی اعداد مضرب ۳ جدا از همند.

نکته ۵ اگر A و B دو مجموعه‌ی مجزا باشند یعنی $n(A \cap B) = 0$، در نتیجه هر یک زیرمجموعه‌ی متمم دیگری است.



$$A \cap B = \varnothing \Rightarrow A \subseteq B' \,,\; B \subseteq A'$$
$$A \cap B = \varnothing \Rightarrow A \cap B' = A \,,\; A \cup B' = B' \,,\; \cdots$$

مثال ۳۲ اگر A و B و C دوبه‌دو از هم مجزا باشند، حاصل عبارت زیر را تا حد امکان ساده کنید.

$$(C - B) \cap (A \cup (B - C))$$

حل. روش اول: B و C از هم جدا هستند پس $C - B = C$ و $B - C = B$ یعنی می‌توان عبارت فوق را به صورت زیر نوشت.

$$(C - B) \cap (A \cup (B - C)) = C \cap (A \cup B) = \varnothing$$

چون C از A و نیز از B جدا است پس C هیچ اشتراکی با $(A \cup B)$ ندارد و حاصل تهی شده است.

روش دوم: در روش دوم نیز عبارت را تا $C \cap (A \cup B)$ ساده می‌کنیم. حال می‌توان از خاصیت پخشی اشتراک نسبت به اجتماع استفاده کرد.

$$C \cap (A \cup B) \underset{\text{پخشی}}{=} (C \cap A) \cup (C \cap B) \underset{\substack{\text{A و C مجزا هستند} \\ \text{C و B مجزا هستند}}}{=} \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$$

مثال ۳۳ اگر مجموعه‌های A و $(B \cap C)$ جدا از هم باشند، حاصل عبارت زیر را تا حد امکان ساده کنید.

$$(A \cup B' \cup C') \cup (A \cap B \cap C) \cap B'$$

حل. مجموعه‌های A و $B \cap C$ از هم جدا هستند یعنی $A \cap (B \cap C) = \varnothing$ پس عبارت وسط $(A \cap B \cap C)$ برابر تهی است.

حال توجه کنید که بر اساس نکته‌ی گفته شده چون A و $(B \cap C)$ از هم جدا هستند پس $A \subseteq (B \cap C)'$ حال می‌توان نوشت:

$$A \subseteq (B \cap C)' \Rightarrow A \cup (B \cap C)' = (B \cap C)' \underset{\text{دمورگان}}{\Rightarrow} A \cup B' \cup C' = B' \cup C'$$

بنابراین می‌توان عبارت اصلی را به صورت زیر نوشت:

$$(B' \cup C') \cup \varnothing \cap B'$$

دقت کنید که به علت تقدم عملیات، ابتدا باید $(B' \cup C')$ را با $\varnothing$ اجتماع کنیم و در غیر این صورت به جواب درست نخواهیم رسید.

$$\text{عبارت} = (B' \cup C') \cap B' \underset{\text{جذب}}{=} B'$$

روابط بین تعداد اعضاء مجموعه‌ها (۱)

نکته ۶ در مبحث مجموعه‌ها هر جا صحبت از «و» شود بحث از اشتراک و هر جا صحبت از «یا» شود بحث از اجتماع دو مجموعه است.

مثال ۳۴ ۴ مجموعه‌ی زیر را تشکیل دهید و ارتباطشان را بررسی کنید.

$A =$ مجموعه‌ی اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۲۵ که بر ۴ بخش‌پذیرند.

$B =$ مجموعه‌ی اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۲۵ که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن‌ها بر ۳، برابر ۲ است.

$C =$ مجموعه‌ی اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۲۵ که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن‌ها بر ۳، برابر ۲ است و بر ۴ بخش‌پذیرند.

$D =$ مجموعه‌ی اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۲۵ که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن‌ها بر ۳، برابر ۲ است یا بر ۴ بخش‌پذیرند.

حل. ۴ مجموعه را تشکیل می‌دهیم.

$$A = \{4, 8, 12, 16, 20, 24\}$$

$$B = \{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23\}$$

$$C = \{8, 20\} \qquad D = \{2, 4, 5, 8, 11, 12, 14, 16, 17, 20, 23, 24\}$$

همان گونه که مشخص است، $C = A \cap B$ و $D = A \cup B$. یعنی اعضای مجموعه‌ی C همزمان هر دو شرط را برآورده می‌سازند ولی اعضای مجموعه‌ی D حداقل یکی از شرط‌های عضویت در A و B را دارا هستند.

تذکر باید دقت شود مفهوم «یا»ی ریاضی با «یا»ی مورد استفاده در گفتگوی روزمره لزوماً یکسان نیست. مثلاً وقتی مدیر شما، در کلاس حاضر شده و اعلام می‌کند علی در زنگ تفریح اول و یا در زنگ تفریح دوم پیش مدیر برود قطعاً انتظار او این است که او دقیقاً در یکی از دو زنگ اول و یا دوم پیش مدیر برود و اگر هر دو زنگ تفریح علی پیش مدیر برود اطاعت امر نشده است. این «یا» یای محاوره است ولی وقتی در زبان ریاضی از «یا» استفاده می‌کنیم، ممکن است هر دوی اتفاقات با هم رخ دهند. به عنوان مثال اگر $(x-2)(y-3)=0$ باشد آن‌گاه $x=2$ یا $y=3$ خواهد بود و این به آن معناست که یا $x=2$ است یا $y=3$ است یا هردو.

مثال ۳۵ چند عدد بین ۳۰ و ۸۰ داریم که حداقل بر یکی از اعداد ۴ یا ۹ بخش‌پذیر باشند؟ این تعداد، چه ارتباطی با تعداد مضارب ۴ بین ۳۰ و ۸۰ و نیز تعداد مضارب ۹ بین ۳۰ و ۸۰ دارد؟

حل. فرض کنید A مجموعه‌ی مضارب ۴ بین ۳۰ و ۸۰ و B مجموعه‌ی مضارب ۹ بین ۳۰ و ۸۰ باشد. در این صورت مجموعه‌ی مورد نظر مسئله، همان $A \cup B$ است.

$$A = \{32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60, 64, 68, 72, 76\}$$

$$B = \{۳۶, ۴۵, ۵۴, ۶۳, ۷۲\}$$

$$A \cup B = \{۳۲, ۳۶, ۴۰, ۴۴, ۴۵, ۴۸, ۵۲, ۵۴, ۵۶, ۶۰, ۶۳, ۶۴, ۶۸, ۷۲, ۷۶\}$$

$$n(A) = ۱۲ \qquad n(B) = ۵ \qquad n(A \cup B) = ۱۵$$

در واقع، اعضای مجموعه‌های A و B با هم شمرده می‌شوند ولی دو عضو ۳۶ و ۷۲ که اعضای مشترک هستند، دو بار شمرده می‌شوند و باید از مجموع کم شوند یعنی:

$$n(A \cup B) = ۱۲ + ۵ - ۲ = ۱۵$$

[1] رابطه‌ی زیر بین تعداد اعضای مجموعه‌های متناهی A و B و اشتراک و اجتماعشان برقرار است.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

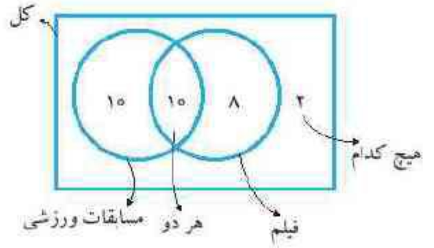
مثال ۳۶ در کلاسی با ۳۰ دانش‌آموز، ۲۰ نفر از دانش‌آموزان به مسابقات ورزشی و ۱۸ نفر به تماشای فیلم علاقه دارند. اگر ۱۰ نفر از دانش‌آموزان هم به فیلم و هم به مسابقات ورزشی علاقه داشته باشند، چند نفر از دانش‌آموزان کلاس نه به فیلم و نه مسابقات ورزشی علاقه‌مندند؟

حل. روش اول: فرض کنید A مجموعه‌ی دانش‌آموزان علاقه‌مند به مسابقات ورزشی و B مجموعه‌ی دانش‌آموزان علاقه‌مند به فیلم باشد. در این صورت $n(A) = ۲۰$ و $n(B) = ۱۸$ و $n(A \cap B) = ۱۰$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = ۲۰ + ۱۸ - ۱۰ = ۲۸$$

یعنی ۲۸ نفر به فیلم یا مسابقات ورزشی علاقه‌مندند. پس از ۳۰ نفر ۲ نفر به هیچ کدام علاقه ندارند.

روش دوم: در برخی موارد می‌توان به کمک نمودار ون، مسائل را به سادگی حل کرد.



روش سوم (روش نادرست): می‌توان نتیجه گرفت که تمام دانش‌آموزان یا به دو مورد علاقه‌مندند یا هیچ کدام! یعنی می‌توان تعداد کل را منهای تعداد افراد علاقه‌مند به دو رشته کرد و تعداد افراد بی‌علاقه به هر دو رشته را به دست آورد! $۳۰ - ۱۰ = ۲۰$

نکته ۷ برای به دست آوردن تعداد اعضایی که نه عضو A و نه عضو B هستند باید تعداد اعضای مجموعه‌ی مرجع را منهای تعداد اعضای $(A \cup B)$ کنیم.

$$n(A' \cap B') \underset{\text{دمورگان}}{=} n\left((A \cup B)'\right) = n(U) - n(A \cup B)$$

مثال ۳۷ مجموع تعداد اعضای A و B، ۵ برابر تعداد اعضای مشترکشان است. تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه چند برابر تعداد اعضای مشترکشان است؟

حل. مسئله

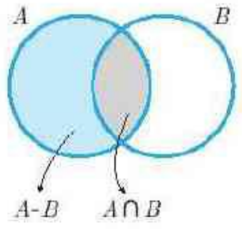
$$n(A) + n(B) = ۵ \times n(A \cap B)$$

۱) اصل شمول و عدم شمول

$$= 5n(A \cap B) - n(A \cap B) = 4 \times n(A \cap B)$$

$$\Rightarrow \frac{n(A \cup B)}{n(A \cap B)} = 4$$

مثال ۳۸ مجموعه‌ی A، دارای ۲۰ عضو می‌باشد. تعداد عضوهای مجموعه‌ی B عددی است بین ۵ و ۱۰. مجموع تعداد اعضای $(A - B)$ و $(A \cap B)$ چقدر است؟



حل. تعداد اعضای مجموعه‌ی B نامشخص است. رسم نمودار ون می‌تواند کارگشا باشد. با توجه به شکل می‌توان فهمید:

$$n(A - B) + n(A \cap B) = n(A)$$

$$\Rightarrow n(A - B) + n(A \cap B) = 20$$

مثال ۳۹ از ۲۷ دانش‌آموز یک کلاس که هر یک حداقل به یکی از دروس ریاضی، فیزیک یا شیمی علاقه‌مندند، ۱۲ نفر به فیزیک، ۱۴ نفر به ریاضی، ۱۵ نفر به شیمی، ۵ نفر به ریاضی و فیزیک، ۶ نفر به ریاضی و شیمی و ۵ نفر به فیزیک و شیمی علاقه‌مندند.

(الف) چند نفر به هر ۳ درس علاقه‌مندند؟

(ب) چند نفر به ۲ درس علاقه‌مندند؟

حل. در این مسئله ۳ مجموعه باید در نظر گرفته شوند. چون هنوز رابطه‌ای برای ۳ مجموعه نداریم، رسم شکل می‌تواند کارگشا باشد.

$A =$ مجموعه‌ی دانش‌آموزان علاقه‌مند به ریاضی $\quad n(A) = 14 \quad n(A \cap B) = 5$

$B =$ مجموعه‌ی دانش‌آموزان علاقه‌مند به فیزیک $\quad n(B) = 12 \quad n(A \cap C) = 6$

$C =$ مجموعه‌ی دانش‌آموزان علاقه‌مند به شیمی $\quad n(C) = 15 \quad n(B \cap C) = 5$

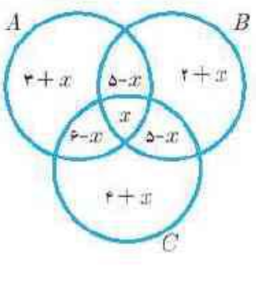
$n(A \cap B \cap C) = x$

تعداد دانش‌آموزانی که صرفاً به ریاضی و فیزیک علاقه‌مندند $= n(A \cap B) - x = 5 - x$

تعداد دانش‌آموزانی که صرفاً به ریاضی و شیمی علاقه‌مندند $= n(A \cap C) - x = 6 - x$

تعداد دانش‌آموزانی که صرفاً به فیزیک و شیمی علاقه‌مندند $= n(B \cap C) - x = 5 - x$

دقت کنید که به عنوان مثال از تفاضل عدد ۱۴ و مجموع اعداد $(5 - x)$ و x و $(6 - x)$ عدد $3 + x$ به دست آمده است.



$$(3 + x) + (5 - x) + x$$
$$+ (6 - x) + (2 + x)$$
$$+ (5 - x) + (4 + x) = 27$$
$$\Rightarrow x = 2$$

(الف) ۲ نفر به هر ۳ درس علاقه‌مندند.

(ب) تعداد افرادی که صرفاً به دو درس علاقه‌مندند عبارتست از

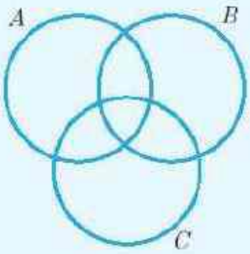
$$(5 - x) + (6 - x) + (5 - x)$$

تعداد علاقه‌مندان فقط به ۲ درس $= 16 - 3x = 16 - 6 = 10$

نکته ۸

برای سه مجموعه‌ی A و B و C و با توجه به نمودار ون می‌توان اصل شمول و عدم شمول را به صورت زیر نوشت:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$



در واقع با جمع زدن اعضای A و B و C، اعضای $A \cap B$ و $A \cap C$ و $B \cap C$ دو بار شمرده می‌شوند و باید کم شوند ولی با کم کردن $A \cap B$ و $A \cap C$ و $B \cap C$ اعضای $A \cap B \cap C$ بیش از حد کم می‌شوند که باید مجدد اضافه شوند. البته توجه شود که ما با یک اصل سروکار داریم و نیاز به اثبات ندارد! ولی با روشی که در مثال ۳۴ استفاده شد، می‌توان این رابطه را اثبات کرد.

حال قسمت الف مثال ۳۹ را به کمک فرمول اخیر حل می‌کنیم.

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$\Rightarrow ۲۷ = ۱۴ + ۱۲ + ۱۵ - ۵ - ۶ - ۵ + n(A \cap B \cap C)$$

$$\Rightarrow n(A \cap B \cap C) = ۲ \Rightarrow$$ ۲ نفر به هر ۳ درس علاقه‌مندند

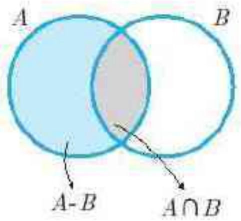
روابط بین تعداد اعضای مجموعه‌ها (۲)

بیشتر بدانیم ۳

مشابه اصل شمول و عدم شمول که برای اجتماع و اشتراک و خود مجموعه‌ها بیان شد، می‌توان روابطی برای مجموعه‌هایی نظیر $A - B$، $A \Delta B$، $A' \cup B'$، $A' \cap B'$ و ... نوشت. در این بخش به معرفی اجمالی این روابط به کمک نمودار ون می‌پردازیم. درک این روابط و به کارگیری مناسب آن‌ها می‌تواند در حل بسیاری از سوالات احتمال که در فصل هفتم مطرح می‌شوند، کمک کند.

تفاضل دو مجموعه

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$



از این رابطه در حل مثال ۳۸ این بخش استفاده کردیم. برای درک بهتر تساوی، به شکل مقابل توجه کنید.

اجتماع متمم‌های دو مجموعه

$$n(A' \cup B') = n(U) - n(A \cap B)$$

برای درک این تساوی می‌توان همانند مورد قبل از نمودار ون استفاده کرد. همچنین می‌توان از قواعد جبر مجموعه‌ها برای اثبات آن بهره برد.

$$n(A' \cup B') \underset{\text{دمورگان}}{=} n((A \cap B)') = n(U - (A \cap B)) = n(U) - n(U \cap (A \cap B))$$

$$= n(U) - n(A \cap B)$$

اشتراک متمم‌های دو مجموعه

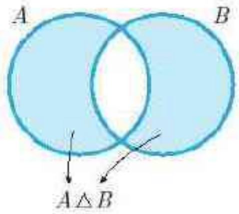
$$n(A' \cap B') = n(U) - n(A \cup B)$$

$$n(A' \cap B') \underset{\text{دمورگان}}{=} n((A \cup B)') = n(U - (A \cup B)) = n(U) - n(U \cap (A \cup B))$$

$$= n(U) - n(A \cup B)$$

البته احتمالاً شما ترجیح می‌دهید از نمودار ون استفاده کنید!

تفاضل متقارن



$$n(A\Delta B) = n(A \cup B) - n(A \cap B)$$
$$= n(A) + n(B) - 2n(A \cap B)$$

درک درستی تساوی به راحتی به کمک نمودار ون ممکن است.

مثال ۴۰ چند عدد ۳ رقمی داریم که

(الف) بر ۵ یا ۷ بخش‌پذیر باشد؟

(ب) فقط بر ۵ یا فقط بر ۷ بخش‌پذیر باشد؟

(ج) نه بر ۵ و نه ۷ بخش‌پذیر باشد؟

(د) همزمان بر ۵ و ۷ بخش‌پذیر نباشد؟

(ه) بر ۵ بخش‌پذیر باشد ولی بر ۷ بخش‌پذیر نباشد؟

حل. مجموعه‌ی مرجع اعداد ۳ رقمی است. $n(U) = 999 - 100 + 1 = 900$

مجموعه‌ی اعداد ۳ رقمی بخش‌پذیر بر ۵ را A و مجموعه‌ی اعداد ۳ رقمی بخش‌پذیر بر ۷ را B می‌نامیم. کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین اعداد ۳ رقمی عضو A عبارتند از ۱۰۰ و ۹۹۵. کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین اعداد ۳ رقمی عضو B عبارتند از ۱۰۵ و ۹۹۴.

$$n(A) = \frac{995 - 100}{5} + 1 = 180$$
$$n(B) = \frac{994 - 105}{7} + 1 = 128$$
$$\text{تعداد اعداد بخش‌پذیر بر ۳۵} = n(A \cap B) = \frac{980 - 105}{35} + 1 = 26$$

(الف) چون «یا» استفاده کرده باید $n(A \cup B)$ را به دست آوریم.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 180 + 128 - 26 = 282$$

(ب) فقط بر ۵ یا فقط بر ۷ معادل «یای فارسی» یا همان تفاضل متقارن است.

$$n(A\Delta B) = n(A \cup B) - n(A \cap B) = 282 - 26 = 256$$

(ج) نه بر ۵ و نه بر ۷ بخش‌پذیر باشد معادل $A' \cap B'$ است.

$$n(A' \cap B') = n(U) - n(A \cup B) = 900 - 282 = 618$$

(د) همزمان بر ۵ و ۷ بخش‌پذیر نباشد معادل $A' \cup B'$ است.

$$n(A' \cup B') = n(U) - n(A \cap B) = 900 - 26 = 874$$

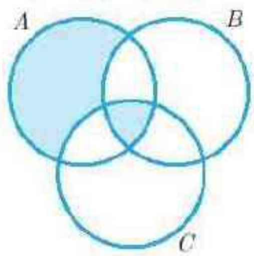
(ه) بر ۵ بخش‌پذیر باشد ولی بر ۷ نه. این معادل $A - B$ است.

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 180 - 26 = 154$$

۱ مجموعه‌ی A را به کمک اعضا و مجموعه‌ی B را به کمک

$\mathbb{N}$

$\{- \quad \mathbb{N} \quad \}$



$\mathbb{R} \quad \mathbb{R}$

$\bigcup$

$\mathbb{N}$

(د) مجموعه‌ی نقاط داخل یک مثلث مشخص

۱۰ اگر $A_i = (-i, i+1)$ و $U = \mathbb{R}$، حاصل عبارت زیر را تا حد امکان ساده کنید.

$$A'_1 \cap A'_2 \cap \cdots \cap A'_{1395}$$

۱۱ حاصل را تا حد امکان ساده کنید. (M مجموعه مرجع است)

(الف) $[(A' - A)' \cap M] \cup A'$

(ب) $[(B - C) \cup (C - B) \cup A] \cap A$

(ج) $(A \cap B \cap C) \cup (A' \cap C) \cup (B' \cap C)$

۱۲ درستی تساوی‌های زیر را به کمک جبر مجموعه‌ها اثبات کنید.

(الف) $A' - B = B' - A$

(ب) $(A - B) - C = (A - C) \cap (B' - C)$

(ج) $(A \cup B) - (B \cup C) = (A - B) - C$

(د) $(A \Delta B)' = A' \Delta B$

۱۳ اگر $A \subseteq B \subseteq C$ حاصل را تا حد امکان ساده کنید.

$$[(A \cap B') \cup (B \cap C') \cup (C \cap A')] \cup (A' \cup B' \cup C')'$$

۱۴ اگر مجموعه‌ی C از مجموعه‌های A' و $(A - B)$ مجزا باشد حاصل عبارت $(A \cap C) - B$ را بیابید.

۱۵ اگر C و B' مجزا باشند، همچنین B و A' نیز مجزا باشند، راجع به A و B و C چه می‌توان گفت؟

۱۶ اگر $n(A - B) = 10$ و $n(B - A) = 8$ و $n(B) = 14$ آن‌گاه $n(A \cup B)$ چند است؟

۱۷ تعداد اعضای مجموعه‌ی B دو برابر تعداد اعضای مجموعه‌ی A است. اگر $n(A \cup B) = 30$ و $n(A \cap B) = 6$، تعداد زیرمجموعه‌های B چند برابر تعداد زیرمجموعه‌های A است؟

۱۸ در یک کلاس ۲۶ نفره، تمام دانش‌آموزان حداقل به یکی از دروس ریاضی، فیزیک یا شیمی علاقه‌مندند. اگر تعداد علاقه‌مندان دروس ریاضی، فیزیک و شیمی به ترتیب ۱۸ و ۱۳ و ۷ نفر باشد و هیچ‌کسی همزمان به دروس شیمی و فیزیک علاقه‌مند نباشد و نیز تعداد کسانی که به ریاضی و فیزیک علاقه‌مندند دو برابر تعداد کسانی باشد که به ریاضی و شیمی علاقه‌مندند، مشخص کنید چند نفر فقط به یک درس علاقه‌مندند؟

۱ (x, y)های مورد نظر عبارتند از $(1, 1)$ و $(1, 2)$ و $(1, 3)$ و $(2, 1)$

$$A = \{1^2 \times 1, 1^2 \times 2, 1^2 \times 3, 2^2 \times 1\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

اگر اعضای مجموعه‌ی B را با عدد ۱ جمع کنیم، حاصل مکعب کامل خواهد شد. پس اعضا به صورت $n^3 - 1$ هستند.

$$B = \{n^3 - 1 | n \in \mathbb{N}\}$$

۲ تعداد اعضای مجموعه را از n به 2n می‌رسانیم. تعداد زیرمجموعه‌ها از 2^n به 2^{2n} افزایش می‌یابد.

$$2^{2n} = 2^n + 240 \Rightarrow 2^{2n} - 2^n - 240 = 0$$

قرار می‌دهیم $2^n = A$

$$A^2 - A - 240 = 0 \Rightarrow (A - 16)(A + 15) = 0$$

$A = -15$ غ‌ق‌ق

$$A = 16 \Rightarrow 2^n = 16 \Rightarrow n = 4$$

۳ (x, y)های مورد نظر عبارتند از $(1, 1)$ و $(1, 2)$ و $(2, 2)$ و $(1, 3)$ و $(2, 3)$ و $(3, 3)$ و $(1, 4)$ و $(2, 4)$ و $(3, 4)$ و $(4, 4)$

$$A = \left\{\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{1}, \frac{4}{2}, \frac{4}{3}, \frac{4}{4}\right\} = \left\{1, 2, 3, \frac{3}{2}, 4, \frac{4}{3}\right\}$$

مجموعه‌ی A، ۶۴ زیرمجموعه دارد.

۴

$$a^2 + b^2 \geq 0 \xRightarrow{+4} a^2 + b^2 + 4 \geq 4$$

$$-\sqrt{c} \leq 0 \Rightarrow 1 - \sqrt{c} \leq 1$$

عبارات $a^2 + b^2 + 4$ و $1 - \sqrt{c}$ نمی‌توانند با هم برابر باشند پس $a^2 + b^2 + 4 = -c^2 + 4$ و $1 - \sqrt{c} = d$

از طرفی $a^2 + b^2 + 4$ حداقل برابر ۴ است در حالی که $-c^2 + 4$ حداکثر برابر ۴ می‌باشد پس تنها حالت برابری این دو آن است که هر ۲ برابر ۴ باشند.

$$a^2 + b^2 + 4 = -c^2 + 4 = 4 \Rightarrow a = b = c = 0$$

$$1 - \sqrt{c} = d \Rightarrow d = 1$$

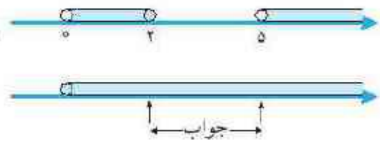
$$a + 2b + 3c + 4d = 4$$

۵ هاشور بزرگ قسمت‌هایی از A است که عضو B یا C نیستند یعنی $A - (B \cup C)$ و هاشور کوچک اشتراک سه مجموعه است.

عبارت مورد نظر $= [A - (B \cup C)] \cup (A \cap B \cap C)$

۶

(الف)



$$(0, +\infty) - ((0, 2] \cup (5, +\infty)) = (2, 5]$$

(ب) $$\mathbb{R} - (\underbrace{\mathbb{R} \cap (-1, +\infty)}_{(-1, +\infty)}) =$$

$$\mathbb{R} - (-1, +\infty) = (-\infty, -1]$$

۷

$$A_2 = [\sqrt{2}, 2)$$

$$A_3 = [\sqrt{3}, 3)$$

$$\vdots$$

$$A_{1395} = [\sqrt{1395}, 1395)$$

$$A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_{1395} = [\sqrt{2}, 1395)$$

۸ عدد وسط بازه (مرکز بازه)، میانگین اعداد ابتدا و انتهای آن است.

$$\frac{a + 3 + 3a + 1}{2} = 10 \Rightarrow 2a + 2 = 10 \Rightarrow a = 4$$

۹

(الف) می‌توان عبارت مورد نظر را به صورت $n(n + 1) + 121$ نوشت. $n(n + 1)$ یعنی حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی همواره زوج است و جمع آن با ۱۲۱ عددیست فرد. پس نمی‌تواند مضرب ۴ باشد. مجموعه‌ی مورد نظر تهی و متناهی است.

(ب) مجموعه‌ی اعداد اوّل نامتناهی است و چون اعداد اوّل با ۱۰۰ رقم یا کمتر محدود هستند پس تعداد اعداد اوّل با بیش از ۱۰۰ رقم بی‌شمار است و مجموعه نامتناهی است.

(ج) مجموعه‌ی اعداد گویای بین هر دو عدد دلخواه، همواره نامتناهی است.

(د) تعداد نقاط داخل مثلث مشخص بی‌شمار است و مجموعه نامتناهی است.

۱۰ مجموعه‌های $A'_1, A'_2, \cdots, A'_{1395}$ به صورت زیر هستند:

$$A'_1 \cap A'_2 \cap \cdots \cap A'_{1395} = (-\infty, -1395] \cup [1396, +\infty)$$

۱۱

(الف)
$$[(A' - A)' \cap M] \cup A'$$
$$= [(A')' \cap M] \cup A' = (A \cap M) \cup A'$$
$$= A \cup A' = M$$

(ب)

۱۲

(ج)
$$(A \cup B) - (B \cup C) = (A \cup B) \cap (B \cup C)'$$
$$\underset{\text{دمورگان}}{=} (A \cup B) \cap (B' \cap C')$$
$$\underset{\text{شرکت‌پذیری}}{=} [(A \cup B) \cap B'] \cap C'$$
$$\underset{\text{پخشی}}{=} [(A \cap B') \cup \underbrace{(B \cap B')}_{\varnothing}] \cap C'$$
$$= (A \cap B') \cap C' = (A - B) - C$$

(د) $A \Delta B$ یعنی تفاضل متقارن مجموعه‌های A و B که در قبل تعریف شد.
$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$
$$(A \Delta B)' = [(A - B) \cup (B - A)]'$$
$$\underset{\text{دمورگان}}{=} (A - B)' \cap (B - A)' = (A \cap B')' \cap (B \cap A')'$$
$$\underset{\text{دمورگان}}{=} (A' \cup B) \cap (B' \cup A)$$
$$\underset{\text{پخشی}}{=} [(A' \cup B) \cap B'] \cup [(A' \cup B) \cap A]$$
$$\underset{\text{پخشی}}{=} [(A' \cap B') \cup \underbrace{(B \cap B')}_{\varnothing}] \cup [\underbrace{(A' \cap A)}_{\varnothing} \cup (B \cap A)]$$
$$= (A' \cap B') \cup (B \cap A)$$
$$= (A' - B) \cup (B - A') = A' \Delta B$$

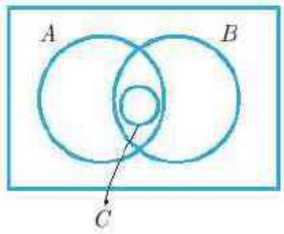
۱۳ عبارت $(A' \cup B' \cup C')'$ را به دو روش می‌توان ساده کرد:

روش اول
$$A \subseteq B \subseteq C \Rightarrow C' \subseteq B' \subseteq A'$$
$$\Rightarrow A' \cup B' \cup C' = A' \Rightarrow (A' \cup B' \cup C')' = A$$

روش دوم: از قانون دمورگان استفاده می‌کنیم.
$$(A' \cup B' \cup C')' = A \cap B \cap C = A \quad (\mathrm{I})$$

جون $A \subseteq B \subseteq C$ پس حاصل برابر A است.
حال به بررسی عبارت اوّل می‌پردازیم.
$$A \subseteq B \Rightarrow A - B = \varnothing$$
$$B \subseteq C \Rightarrow B - C = \varnothing$$
$$[(A \cap B') \cup (B \cap C') \cup (C \cap A')]$$
$$= [\underbrace{(A - B)}_{\varnothing} \cup \underbrace{(B - C)}_{\varnothing} \cup (C - A)]$$
$$= C - A = C \cap A' \quad (\mathrm{II})$$
$$\overset{(\mathrm{II}),(\mathrm{I})}{\Rightarrow} \text{عبارت مورد نظر} = (C \cap A') \cup A$$
$$\underset{\text{پخشی}}{=} (C \cup A) \cap \underbrace{(A' \cup A)}_{M} = C \cup A = C$$

۱۴ روش اول: از نمودار ون استفاده می‌کنیم.



چون C از A' جداست پس C داخل A است. از طرفی چون C از $A-B$ جداست پس C از بخشی از A که با B عضو مشترک ندارد نیز جداست پس C زیرمجموعه‌ی $A\cap B$ است. (مطابق شکل)
پس $A\cap C=C$

$$(A\cap C)-B=C-B=\varnothing$$

روش دوم: از جبر مجموعه‌ها استفاده می‌کنیم.

$$C\cap A'=\varnothing \overset{\cup A}{\Rightarrow} (C\cap A')\cup A=A$$

$$\Rightarrow (C\cup A)\cap(\underbrace{A'\cup A}_{M})=A$$

$$\Rightarrow C\cup A=A \Rightarrow C\subseteq A$$

$$\Rightarrow C\cap A=C$$

حال می‌دانیم $\quad C\cap(A-B)=\varnothing$

$$\Rightarrow C\cap(A\cap B')=\varnothing \Rightarrow (C\cap A)\cap B'=\varnothing$$

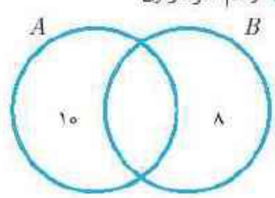
$$\Rightarrow C\cap B'=\varnothing \Rightarrow C\subseteq B$$

$$(A\cap C)-B=C-B=\varnothing$$

۱۵ با استدلال مشابه مسئله‌ی ۱۴ می‌توان نتیجه گرفت:

$$C\subseteq B\ ,\ B\subseteq A \Rightarrow C\subseteq B\subseteq A$$

۱۶ روش اول: رسم نمودار ون



حال برای آن که تعداد اعضای B برابر ۱۴ باشد باید در قسمت $A\cap B$ عدد ۶ را جاگذاری کنیم.

$$n(A\cup B)=۱۰+۶+۸=۲۴$$

روش دوم:

$$n(B)=n(B-A)+n(A\cap B)$$

$$\Rightarrow ۱۴=۸+n(A\cap B) \Rightarrow n(A\cap B)=۶$$

$$n(A)=n(A-B)+n(A\cap B)=۶+۱۰=۱۶$$

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$$=۱۶+۱۴-۶=۲۴$$

۱۷

$$n(B)=۲n(A)$$

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$$\Rightarrow ۳۰=n(A)+۲n(A)-۶$$

$$\Rightarrow n(A)=۱۲\ ,\ n(B)=۲۴$$

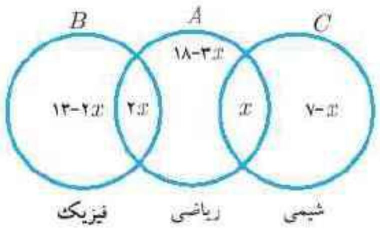
$$\frac{\text{تعداد زیرمجموعه‌های B}}{\text{تعداد زیرمجموعه‌های A}}=\frac{۲^{۲۴}}{۲^{۱۲}}=۲^{۱۲}$$

۱۸ روش اول: نمودار ون مربوط را رسم می‌کنیم.

مجموعه‌ی دانش‌آموزان علاقه‌مند به ریاضی $=A$

مجموعه‌ی دانش‌آموزان علاقه‌مند به فیزیک $=B$

مجموعه‌ی دانش‌آموزان علاقه‌مند به شیمی $=C$



مجموع تعداد اعضای هر بخش باید برابر ۲۶ باشد.

$$۱۳+۷+۱۸-۳x=۲۶ \Rightarrow x=۴$$

تعداد دانش‌آموزانی که فقط به یک درس علاقه‌مندند برابر است با:

$$\underset{\text{کل}}{۲۶}-\underset{\text{علاقه‌مندان به ۲ درس}}{۳x}=۱۴$$

روش دوم: از فرمول اصل شمول برای ۳ مجموعه استفاده می‌کنیم.

$$n(A)=۱۸\ ,\ n(B)=۱۳\ ,\ n(C)=۷$$

$$n(B\cap C)=۰\ ,\ n(A\cap B)=۲n(A\cap C)$$

$$n(A\cap B\cap C)=۰\ ,\ n(A\cup B\cup C)=۲۶$$

$$۲۶=۱۸+۱۳+۷-n(A\cap C)-۲n(A\cap C)-۰+۰$$

$$\Rightarrow n(A\cap C)=۴ \Rightarrow n(A\cap B)=۸$$

تعداد فقط فیزیک $=n(B)-n(A\cap B)=۵$

تعداد فقط شیمی $=n(C)-n(A\cap C)=۳$

تعداد فقط ریاضی $=n(A)-n(A\cap B)-n(A\cap C)=۶$

تعداد تک درس $=۵+۳+۶=۱۴$

تمرین

۱ مجموعه‌های A و B را به کمک اعضا و مجموعه‌های C و D را با نمادهای ریاضی نمایش دهید.

$$A = \left\{ \frac{n^2}{n+2} \middle| n \in \mathbb{Z}, \frac{n^2}{n+2} \in \mathbb{N} \right\}$$

$$B = \{x + 2y \mid x, y \in \mathbb{Z}, x^2 + y^2 \leq 4\}$$

$$C = \left\{ \frac{2}{5}, \frac{3}{6}, \frac{4}{7}, \cdots \right\}$$

$$D = \{1, 2, 3, 4, 8, 9, 16, 27, 64\}$$

۲ اگر به اعضای مجموعه‌ای ۲ واحد اضافه کنیم، تعداد زیرمجموعه‌ها ۱۱۲ تا از حالتی که یکی از اعضایش را حذف کنیم، بیشتر است. خود مجموعه چند زیرمجموعه دارد؟

۳ اگر به اعضای مجموعه‌ی A یکی اضافه کنیم، مجموعه‌های A و B و C روی هم ۷۲ زیرمجموعه خواهند داشت. اگر به اعضای مجموعه‌ی B یکی اضافه کنیم، سه مجموعه روی هم ۸۸ زیرمجموعه و اگر به مجموعه‌ی C یک عضو اضافه کنیم، سه مجموعه روی هم ۶۴ زیرمجموعه خواهند داشت. تعداد اعضای هر مجموعه را مشخص کنید.

۴ مجموعه‌ای ۳ عضوی تشکیل دهید که هر عضوش زیرمجموعه‌اش نیز باشد.

۵ a و b و d را طوری به دست آورید که مجموعه‌های $A = \{4ab, -3\}$ و $B = \{a^2 + 4b^2, 1 - b^2, d^2 + 2d + 1\}$ با هم برابر باشند.

۶ مجموعه‌های زیر را با نمودار ون نمایش دهید.

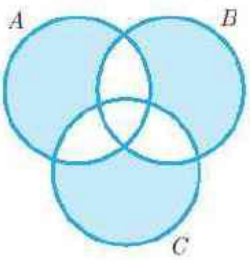
(الف) $(A \Delta B)'$

(ب) $(A \cup B)' - C$

(ج) $(A' \cup B) \cap C'$

(د) $(A \Delta B) - C$

۷ برای نمایش ون زیر یک عبارت مجموعه‌ای مثال بزنید.



۸ اگر $A \cup B \subseteq A \cap B$ در مورد A و B چه می‌توان گفت؟

۹ اگر $A - B \subseteq A \cap B$ عبارت $[A \cup (A \cap B)] \cup B$ را ساده کنید.

۱۰ اگر $A \subseteq B \cap C$ و $B \cup C \subseteq A$ حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$[A - (B \cup C)] \cup [C - (A \cup B)] \cup [B - (A \cup C)]$$

۱۶ درستی تساوی‌های زیر را به کمک جبر مجموعه‌ها ثابت کنید.

الف) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$

$(A \Delta B) \Delta (A$

$\varnothing$

۱۹ متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) $A = \{a | a \in \mathbb{Q}', \sqrt{2}a \in \mathbb{Q}\}$

ب) $B = \{x + y | x, y \in \mathbb{Q}', xy \in \mathbb{Q}\}$

ج) مجموعه‌ی مثلث‌هایی که طول اضلاعشان برابر $(a^2+1)^2$ و a^4 و (a^2+1) است.

د) (اعداد اول $\mathbb{P}$) $C = \{x | x \in \mathbb{P}, \frac{x+1}{2} \notin \mathbb{N}\}$

۲۰ اگر $[A \cup (A \cap C)] - [B \cap (A \cup B)]$ برابر $A \cup (A \cap B \cap C)$ باشد ثابت کنید A و B از هم مجزا هستند.

۲۱ اگر $A = \{1, 2, 3, \cdots, 10\}$ و $B = \{9, 10, 11, 12\}$ و $U = \{1, 2, 3, \cdots, 15\}$ مجموعه‌های زیر را تشکیل دهید.

الف) $A - B$

ب) $B - A$

ج) $A \Delta B$

د) $A' \cup B'$

هـ) $B' - A$

۲۲ حاصل را تا حد امکان ساده کنید.

$[(C \cup D) \cap A] \cup [(C \cup D) \cap A']$

۲۳ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $[1, +\infty) - (2, +\infty)$

ب) $((-\infty, 2) \cup [5, +\infty)) \cap (3, 10)$

۲۴ به ازای چند عدد طبیعی بازه‌ی $\left(\frac{n-3}{111}, \frac{2n+1}{5}\right]$ شامل عدد ۱ است؟

۲۵ اگر $A_i = (2^{i-1}, 2^i)$ حاصل عبارت $\bigcup_{i=1}^{1000} A_i$ را تا حد امکان ساده کنید.

۲۶ اگر مجموعه‌ی A، ۱۰ عضو داشته باشد و $n(A \cup B) = 30$ مجموعه‌ی B حداقل و حداکثر چند عضو می‌تواند داشته باشد؟

۲۷ تعداد اعضای مجموعه‌های A و B به ترتیب ۰/۶ و ۰/۸ تعداد اعضای $A \cup B$ است. چند درصد از اعضای مجموعه‌ی B عضو A هستند؟

۲۸ تعداد اعضای $A - B$ از تعداد اعضای $A \cup B$، ۵ تاکمتر است. اگر تعداد اعضای $B \cap C$ از تعداد اعضای مجموعه‌ی C، ۶ واحد کمتر باشد، مجموعه‌ی $B \cup C$ چند عضو دارد؟

۲۹ اگر $n(A\Delta B) = 20$ و $A \subseteq B'$، $n(A \cup B)$ را بیابید.

۳۰ اگر $A \subseteq B$ باشد به کمک جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:

$$n(B - A) = n(B) - n(A)$$

۳۱ در بین اعداد طبیعی بین ۲۰۰ و ۶۰۰ چند عدد داریم که:

(الف) بر ۳ و ۴ بخش‌پذیر باشد؟

(ب) بر ۳ یا ۴ بخش‌پذیر باشد؟

(ج) نه بر ۳ و نه بر ۴ بخش‌پذیر باشد؟

(د) فقط بر ۴ یا فقط بر ۳ بخش‌پذیر باشد؟

(ه) همزمان بر هر دو بخش‌پذیر نباشد؟

(الف) چند نفر در این کلاس عینکی هستند و ساعت می‌بندند؟

(ب) چند نفر در این کلاس فقط عینک یا فقط ساعت دارند؟

۳۳ از ۳۰ نفر دانش‌آموزان یک کلاس که هرکدام حداقل به یکی از ورزش‌های فوتبال، والیبال یا بسکتبال علاقه‌مندند، ۱۵ نفر به فوتبال، ۱۱ نفر به والیبال و ۱۸ نفر به بسکتبال علاقه دارند. اگر ۷ نفر به فوتبال و والیبال، ۴ نفر به والیبال و بسکتبال و ۵ نفر به فوتبال و بسکتبال علاقه‌مند باشند مشخص کنید:

(الف) چند نفر به هر سه رشته علاقه‌مندند؟

(ب) چند نفر فقط به یک رشته علاقه‌مندند؟

(ج) چند نفر دقیقاً به ۲ رشته علاقه‌مندند؟

(د) چند نفر به والیبال علاقه‌مندند ولی به فوتبال علاقه ندارند؟

۳۴ در یک جامعه‌ی آماری، ۶۰ درصد افراد، گروه خونی A دارند، ۴۰ درصد به دیابت مبتلا هستند و ۳۰ درصد فشار خون بالا دارند. اگر ۳۰ درصد افراد با گروه خونی A به دیابت مبتلا باشند و ۱۰ درصد این افراد فشار خون بالا داشته باشند و نیز ۳۰ درصد کسانی که به فشار خون بالا مبتلا هستند دچار دیابت باشند، مشخص کنید: (تمام افراد جامعه حداقل یکی از شروط فوق را دارا هستند.)

(الف) چند درصد از افراد جامعه گروه خونی A دارند ولی فشار خون بالا ندارند؟

ب) چند درصد از کسانی که دچار دیابت هستند، گروه خونی A دارند؟

ج) چند درصد از افراد جامعه گروه خونی A دارند و همزمان به دیابت و فشار خون مبتلا هستند؟

د) چند درصد افراد جامعه نه دیابت دارند و نه فشار خون بالا؟

پاسخ تمرین — درس ۱

۲ ۳۲

۲۴ ۱۱۲

۲۷ ۵۰ درصد

۲۸ ۱۱

۳۲

الف) ۳

ب) ۱۷

۳۳

الف) ۲

ب) ۱۸

ج) ۱۰

د) ۴

۳۴

الف) ۵۴ درصد

ب) ۴۵ درصد

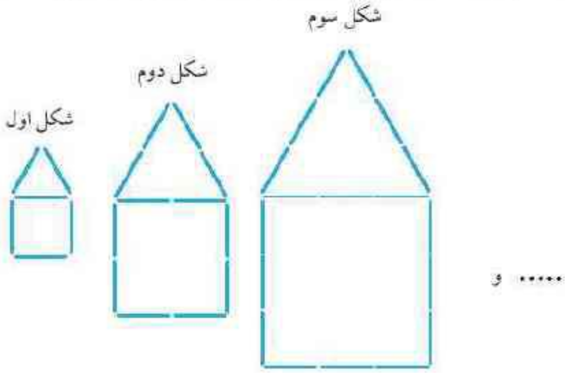
ج) ۳ درصد

د) ۳۹ درصد

الگو

الگو یک ساختار منظم از اشکال، اعداد و به طور کلی اطلاعات است که به خاطر منظم بودن، به کمک قواعد ریاضی قابل تحلیل و احتمالاً قابل پیش‌بینی خواهد بود. در این بخش به بررسی الگوهای عددی و برخی از الگوهای هندسی متناظر آن‌ها می‌پردازیم.

مثال ۴۱ به الگوی هندسی زیر توجه کنید. تعداد پاره‌خط‌های لازم برای ساختن هر یک از شکل‌ها، الگویی عددی می‌سازند.



می‌توانیم برای شکل n اُم فرمولی به دست آوریم که تعداد پاره‌خط‌ها را بر حسب n مشخص کند. با اندکی دقت معلوم می‌شود که تعداد پاره‌خط‌ها در مرحله‌ی n اُم برابر است با $6n$.

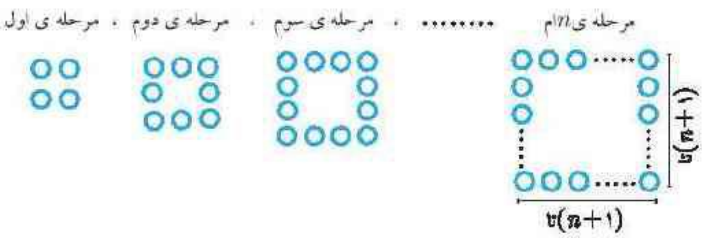
در بسیاری از الگوهای عددی، می‌توان به قاعده یا فرمولی برای مرحله‌ی n اُم دست یافت که به آن جمله‌ی عمومی الگو می‌گویند. در مثال ۱ جمله‌ی عمومی الگو $a_n = 6n$ است. a_n (a اندیس n) یعنی عدد n اُم الگویی به نام a. به هر یک از اعداد الگو، یک جمله‌ی آن گفته می‌شود. در مورد مثال ۱ داریم:

جمله‌ی اول $= a_1 = 6$ و جمله‌ی دوم $= a_2 = 12$ ، $\cdots$

یافتن فرمول مهم است چون به کمک آن می‌توان اطلاعات بیشتری در مورد الگو به دست آورد. مثلاً برای یافتن تعداد پاره‌خط‌های شکل دهم می‌توان بدون رسم شکل، با استفاده از فرمول $a_n = 6n$ تعداد پاره‌خط‌های آن مرحله را فهمید.

$$a_{10} = 6 \times 10 = 60$$

مثال ۴۲ الگوی هندسی زیر و اعداد متناظر آن را که نشان‌دهنده‌ی تعداد دایره‌هاست در نظر بگیرید. جمله‌ی عمومی را به دست آورید.



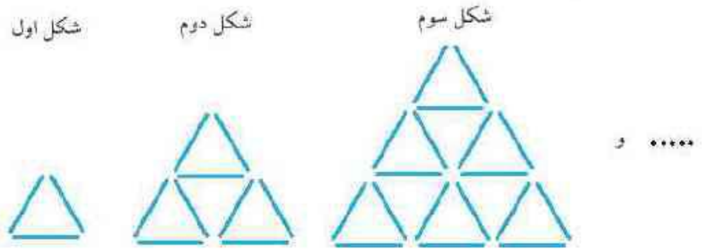
حل. روش اول: سطرهای اول و آخر، هر کدام از $(n+1)$ دایره و $(n-1)$ سطر دیگر هر کدام از ۲ دایره تشکیل شده‌اند بنابراین:

$$\text{تعداد دایره‌های مرحله‌ی n اُم} = a_n = 2(n+1) + (n-1) \times 2 = 4n$$

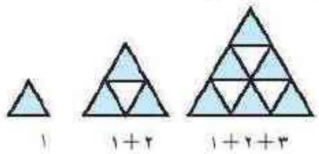
روش دوم: هر ضلع مربع از $(n+1)$ دایره تشکیل شده ولی دایره‌های واقع بر راس‌های مربع در دو ضلع قرار دارند و دو بار شمرده می‌شوند، بنابراین باید از مجموع کم شوند.

$$\text{تعداد دایره‌های مرحله‌ی n اُم} = a_n = 4(n+1) - 4 = 4n$$

مثال ۴۳ در شکل‌های زیر، تعداد پاره‌خط‌های لازم برای ساختن شکل‌ها، الگویی عددی می‌سازند. جمله‌ی عمومی این دنباله را به دست آورید.



حل. در واقع هر شکل، از تعدادی مثلث با الگوی زیر ساخته می‌شود.

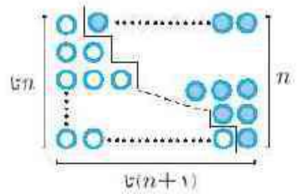


یعنی کافی است تعداد مثلث‌های رنگی را شمرده و در ۳ ضرب کنیم.

$1 + 2 + 3 + \cdots + n =$ تعداد مثلث‌های مرحله‌ی n اُم

$a_n = 3(1 + 2 + 3 + \cdots + n)$ جمله‌ی عمومی تعداد پاره‌خط‌ها

جمله‌ی عمومی فوق می‌تواند صورت ساده‌تری داشته باشد. برای رسیدن به فرمولی جالب‌تر به شکل مقابل توجه کنید.



در این شکل تعداد توپ‌های توپر با تعداد توپ‌های توخالی برابر $1+2+3+\cdots+n$ است و با توجه به شکل می‌توان فهمید مجموع تعداد توپ‌های توپر و توخالی با هم برابر است با $n(n+1)$ یعنی:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

بنابراین: $a_n = \frac{3n(n+1)}{2}$.

نکته‌ی ۹

مجموع n عدد طبیعی متوالی از ۱ تا n	$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

فرمول فوق از فرمول‌های بسیار پرکاربرد در ریاضیات است که برای آن اثبات‌های متعدد هندسی و نیز اثبات جبری وجود دارد.

در برخی از الگوهای عددی در هر مرحله یک تساوی عددی یا جبری دیده می‌شود. به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۴۴

$$1^3 = 1^2$$
$$1^3 + 2^3 = (1+2)^2$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 = (1+2+3)^2$$
$$\vdots$$
$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$$

در چنین الگویی، اعداد ۱، ۹، ۳۶ و ... که در مراحل مختلف تولید می‌شوند، اهمیتی ندارند بلکه تساوی مجموع مکعبات اعداد ۱ تا n با مربع مجموع اعداد ۱ تا n مورد نظر است.[۱]

مثال ۴۵ با محاسبه‌ی $\frac{۱}{۲} + ۱$، $۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴}$ و ... فرمولی برای محاسبه‌ی عبارت $۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \cdots + \frac{۱}{۲^n}$ حدس بزنید.

حل.

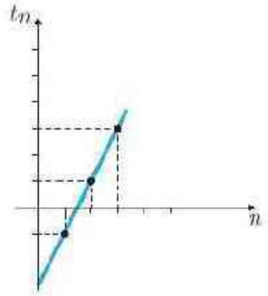
$$۱ + \frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۲} = ۲ - \frac{۱}{۲}$$
$$۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} = \frac{۷}{۴} = ۲ - \frac{۱}{۴}$$
$$۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸} = \frac{۱۵}{۸} = ۲ - \frac{۱}{۸}$$
$$\vdots$$
$$۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \cdots + \frac{۱}{۲^n} = ۲ - \frac{۱}{۲^n}$$

الگوی خطی

اگر الگویی شامل تعدادی عدد باشد طوری که جمله‌ی عمومی آن به صورت $t_n = a \times n + b$ باشد، الگو را خطی می‌نامیم. t_n جمله‌ی عمومی الگو و a و b دو عدد حقیقی دلخواه و ثابت هستند. در واقع هرگاه جمله‌ی عمومی الگو بر حسب n، عبارتی از درجه‌ی ۱ یا صفر باشد، الگو خطی است.

به الگوی $t_n = ۲n - ۳$ توجه کنید که در آن جملات اول، دوم، سوم، ... به ترتیب ۱−، ۱، ۳، ... به دست می‌آید.

حال اگر آن‌ها را در صفحه‌ی مختصات دوبعدی نشان دهیم به صورت مقابل خواهد بود. که در آن اعداد طبیعی موجود بر محور xها نشانگر شماره‌ی جمله و اعداد موجود بر محور yها نشانگر مقدار جمله‌ی عمومی است. همان طور که مشاهده می‌شود این نقاط بر روی خطی فرضی با معادله‌ی $y = ۲x - ۳$ قرار دارند و به همین دلیل به این نوع الگوها، الگوهای خطی می‌گویند. و در حالت کلی می‌توان گفت:



ویژگی ۱: در الگوی خطی $t_n = an + b$ هر جمله منهای جمله‌ی قبلی برابر با ضریب n یعنی a است.

ویژگی ۲: تمام جملات الگوی خطی $t_n = an + b$ بر روی $y = ax + b$ قرار دارند که در آن شیب خط همان اختلافی است که دو جمله‌ی متوالی از یکدیگر دارند.

مثال ۴۶ جملات سوم و پنجم یک الگوی خطی به ترتیب برابر ۸ و ۱۶ هستند. جمله‌ی عمومی و جمله‌ی هشتم الگو را به دست آورید.

حل.

الگو خطی است. $\Rightarrow t_n = an + b$

$$\begin{matrix} t_۳ = ۸ & \Rightarrow \\ t_۵ = ۱۶ & \Rightarrow \end{matrix} \begin{cases} ۳a + b = ۸ \\ ۵a + b = ۱۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۳a - b = -۸ & \Rightarrow a = ۴ \\ ۵a + b = ۱۶ & \Rightarrow b = -۴ \end{cases}$$

$$\Rightarrow t_n = ۴n - ۴ \qquad \text{جمله‌ی هشتم} = t_۸ = ۴ \times ۸ - ۴ = ۲۸$$

دنباله

هر تعداد عدد را که پشت سر هم قرار می‌گیرند، یک دنباله می‌گویند. دقت کنید که در یک دنباله بر خلاف مجموعه‌ها، ترتیب اعداد (جملات) اهمیت دارد.

---
۱) اثبات این فرمول را در آینده خواهید دید.

مثال ۴۷ برای هر یک از دنباله‌های زیر یک جمله‌ی عمومی حدس بزنید.

(الف) $2, 5, 8, \ldots$ (ب) $\frac{1}{2 \times 3}, \frac{2}{3 \times 4}, \frac{3}{4 \times 5}, \ldots$ (ج) $4, 8, 16, \ldots$

(د) $2, 6, 12, \ldots$ (ه) $-1, 2, -3, 4, \ldots$ (و) $2, 12, 112, 1112, \ldots$

حل. (الف) هر جمله از جمله‌ی قبل خود ۳ واحد بیش‌تر است، پس دنباله یک الگوی خطی به صورت $t_n = an + b$ می‌باشد که در آن $a = 3$ است. با جاگذاری $n = 1$ می‌توان مقدار b را به دست آورد.

$$t_1 = 2 \Rightarrow a \times 1 + b = 2 \Rightarrow 3 + b = 2 \Rightarrow b = -1$$

جمله‌ی عمومی به صورت $t_n = 3n - 1$ است.

(ب) صورت کسر، شماره‌ی جمله و مخرج آن حاصل‌ضرب دو عدد متوالی بعدی است: $a_n = \frac{n}{(n+1)(n+2)}$

(ج) جملات دنباله، توان‌های طبیعی عدد ۲ هستند: $a_n = 2^{n+1}$

(د) می‌توان جملات را به صورت 2×1، 3×2، 4×3 و... در نظر گرفت: $a_n = n(n+1)$

(ه) جملات یکی در میان مثبت و منفی می‌باشند. در این نوع سؤالات می‌توان از عاملی که متناوباً ۱ و ۱- می‌شود مثل $(-1)^n$ یا $(-1)^{n+1}$ استفاده کرد: $a_n = (-1)^n \times n$

نکته ۱۰ اگر جملات دنباله یکی در میان مثبت و منفی شوند، جمله‌ی عمومی را بدون در نظر گرفتن منفی‌ها به دست آورده و آن را در یکی از عبارت‌های $(-1)^n$ یا $(-1)^{n+1}$ ضرب می‌کنیم.

نکته ۱۱ اگر جملات دنباله دو تا دو تا مثبت و منفی شوند، جمله‌ی عمومی را بدون در نظر گرفتن منفی‌ها به دست آورده و آن را در یکی از عبارت‌های $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ یا قرینه‌ی آن ضرب می‌کنیم.

(و) برای این که اعداد، الگوی ساده‌تری نمایش دهند، می‌توان همه را منهای ۱ کرد.

$$1, 11, 111, \ldots$$

حال اگر همه را در ۹ ضرب کنیم به الگوی روبه‌رو می‌رسیم: $9, 99, 999, \ldots$

این اعداد هر یک ۱ واحد از توانی از ۱۰ کم‌ترند:

$$9, 99, 999, 9999, \cdots \Rightarrow (10^1 - 1), (10^2 - 1), (10^3 - 1), (10^4 - 1), \cdots$$

$$1, 11, 111, 1111, \cdots \Rightarrow \frac{10^1 - 1}{9}, \frac{10^2 - 1}{9}, \frac{10^3 - 1}{9}, \frac{10^4 - 1}{9}, \cdots$$

$$2, 12, 112, 1112, \cdots \Rightarrow (\frac{10^1 - 1}{9} + 1), (\frac{10^2 - 1}{9} + 1), (\frac{10^3 - 1}{9} + 1), (\frac{10^4 - 1}{9}), \cdots$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{10^n - 1}{9} + 1 = \frac{10^n + 8}{9}$$

تذکر مهم

با دیدن تعداد محدودی از جملات دنباله لزوماً نمی‌توان به جمله‌ی عمومی آن به صورت منحصربه‌فرد دست یافت. به عنوان مثال با دیدن ... ,۳ ,۲ ,۱ نمی‌توان مطمئن بود که دنباله به صورت $a_n = n$ است. مثلاً ممکن است به یکی از صورت‌های زیر باشد:

$$۱, ۲, ۳, ۱, ۲, ۳, ۱, ۲, ۳, \ldots$$

$$۱, ۲, ۳, ۴, ۴, ۴, \ldots$$

بنابراین اگر بتوانیم برای تعدادی از جملات دنباله یک جمله‌ی عمومی بنویسیم، به تنها جواب ممکن نرسیده‌ایم.

مثال ۴۸ برای دنباله‌ی زیر سه جمله‌ی عمومی متفاوت بنویسید.

$$۲, ۹, ۲۸, \ldots$$

حل. اگر از اعداد فوق یک واحد کم کنیم، جملات مکعب اعداد طبیعی خواهند بود پس یک حدس عبارت است از:

$$a_n = n^۳ + ۱$$

ولی دنباله‌های زیر هم می‌توانند همان جملات اولیه را تولید کنند ولی در جملات بعد خود، لزوماً مثل a_n نیستند:

$$b_n = (n-۱)(n-۲)(n-۳) + n^۳ + ۱ = ۲n^۳ - ۶n^۲ + ۱۱n - ۵$$

$$c_n = \frac{(n-۱)(n-۲)(n^۲-۹)}{n^۲+۱} + n^۳ + ۱$$

دنباله‌های b_n و c_n در ۳ جمله‌ی اول با a_n مشابهت دارند. با همین روش می‌توان بی‌شمار جمله‌ی عمومی متفاوت نوشت.

مثال ۴۹ دنباله‌ی $a_n = \frac{۲n+۱}{n+۳}$ را در نظر بگیرید.

(الف) جملات اول و نهم آن را به دست آورید.

(ب) آیا در این دنباله جمله‌ای وجود دارد که برابر ۱٫۵ باشد؟

(ج) آیا در این دنباله جمله‌ای وجود دارد که برابر $\frac{۵}{۴}$ باشد؟

حل.

(الف) $a_۹ = \frac{۲\times ۹+۱}{۹+۳} = \frac{۱۹}{۱۲}$ $\qquad a_۱ = \frac{۲\times ۱+۱}{۱+۳} = \frac{۳}{۴}$

(ب) $a_n = \frac{۲n+۱}{n+۳} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow ۴n+۲ = ۳n+۹ \Rightarrow n = ۷$

جمله‌ی هفتم برابر $\frac{۳}{۲}$ است.

(ج) $a_n = \frac{۲n+۱}{n+۳} = \frac{۵}{۴} \Rightarrow ۸n+۴ = ۵n+۱۵ \Rightarrow n = \frac{۱۱}{۳}$ غ ق ق

چنین جمله‌ای ندارد.

مثال ۵۰ برای دنباله‌ی زیر دو عدد بعدی را حدس بزنید به طوری که از یک الگوی مشخص پیروی کنند.

$$۱, ۲, ۲, ۴, ۸, ۳۲, ?, ?$$

حل. یافتن جمله‌ی عمومی برای دنباله‌ی فوق دشوار است ولی یک الگو این است که از جمله‌ی سوم به بعد، هر جمله برابر حاصل‌ضرب دو جمله‌ی قبل از خود است. پس می‌توان نوشت:

جمله‌ی هفتم $= ۸ \times ۳۲ = ۲۵۶$

جمله‌ی هشتم $= ۳۲ \times ۲۵۶ = ۸۱۹۲$

دنباله‌ی بازگشتی

دنباله‌ای است که جمله‌ی عمومی آن به جای این که بر حسب n بیان شود، بر حسب جملات قبلی بیان می‌شود.

به عنوان مثال برای دنباله‌ی مثال ۵۰ می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 2 \\ a_n = a_{n-1} \times a_{n-2} \quad n \geq 3 \end{cases}$$

یکی از معروف‌ترین دنباله‌های بازگشتی، دنباله‌ی فیبوناچی است که دو جمله‌ی اول آن برابر ۱ است و از آن به بعد هر جمله برابر مجموع دو جمله‌ی قبل از خود است.

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$$

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad n \geq 3 \end{cases}$$ جمله‌ی عمومی دنباله‌ی فیبوناچی

مثال ۵۱ برای هر یک از دنباله‌های زیر یک جمله‌ی عمومی بازگشتی حدس بزنید.

(الف) $5, 10, 20, \dots$ (ب) $4, \frac{1}{4}, 4, \frac{1}{4}, \dots$ (ج) $1, 1, 3, 5, 11, 21, \dots$

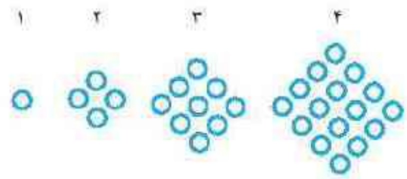
حل.

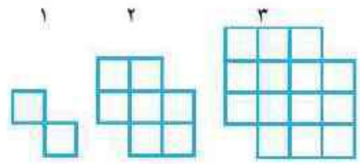
(الف) $\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_n = 2a_{n-1} \quad n \geq 2 \end{cases}$ (ب) $\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_n = \dfrac{1}{a_{n-1}} \quad n \geq 2 \end{cases}$ (ج) $\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} \quad n \geq 3 \end{cases}$

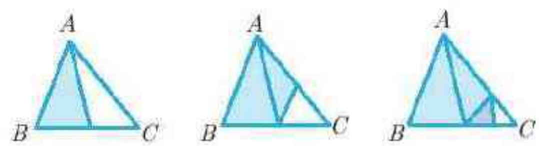
نکته‌ی ۱۲ برخی از دنباله‌ها هم جمله‌ی عمومی بازگشتی و هم جمله‌ی عمومی غیربازگشتی دارند.

به عنوان مثال جمله‌ی عمومی غیربازگشتی مورد الف مثال ۵۱ می‌تواند به صورت $a_n = 5 \times 2^{n-1}$ باشد.

۱ جمله‌ی عمومی الگوهای هندسی زیر را حدس بزنید.







۴ برای هر یک از دنباله‌های زیر یک جمله‌ی عمومی حدس بزنید.

(الف) $\frac{۷}{۹}, \frac{۸}{۱۰}, \frac{۹}{۱۱}, \dots$

(ب) $۱۸, -۲۲, ۲۶, -۳۰, \dots$

(ج) $۰, -\frac{۱}{۳}, -\frac{۲}{۵}, -\frac{۳}{۷}$

(د) $-۲, -۴, ۶, ۸, -۱۰, -۱۲, \dots$

(ه) $۸, \frac{۳}{۲}, -\frac{۲}{۳}, -\frac{۷}{۴}, \dots$

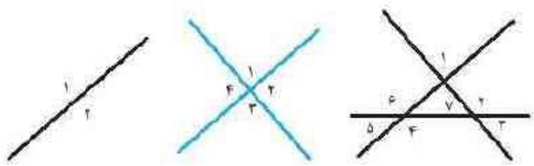
۵ چند تا از جملات دنباله‌ی زیر اعداد طبیعی هستند؟

$$a_n = \frac{n^۲ + ۸}{n + ۲}$$

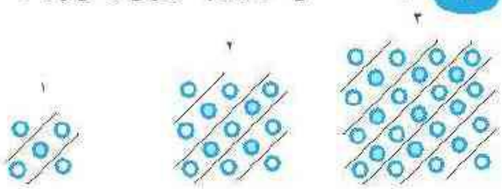
۶ در دنباله‌ی فیبوناچی دو جمله‌ی اول و دوم برابر ۱ هستند. از جمله‌ی سوم به بعد هر جمله برابر است با مجموع دو جمله‌ی قبل از خود. اگر جمله‌ی n اُم دنباله برابر a_n باشد دنباله‌ی زیر را تشکیل داده و برای آن یک جمله‌ی عمومی حدس بزنید.

$$b_n = a_n \times a_{n+۳} - a_{n+۱} \times a_{n+۲}$$

۷ در یک صفحه تعدادی خط دوبه‌دو متقاطع که هیچ سه تایی از آن‌ها از یک نقطه نمی‌گذرد رسم شده و تعدادی ناحیه‌ی جدا از هم ایجاد می‌شود. اگر n تعداد خطوط در مرحله‌ی nام و جمله‌ی عمومی تعداد نواحی به صورت $t_n = \frac{n^۲ + an + b}{۲}$ باشد مقدار a و b را به دست آورید.



۸ به کمک شکل‌های زیر چه فرمولی را می‌توان اثبات کرد؟



انتشارات خوشخوان

۱

(الف) هر یک از شکل‌ها مربع‌های $n \times n$ می‌باشند.

$$a_n = n^2$$

(ب) در واقع تعداد پاره‌خط‌ها برابر است با مجموع تعداد اضلاع و قطرهای n ضلعی. حال به محاسبه‌ی تعداد قطرهای یک n ضلعی می‌پردازیم. اگر از هر راس n ضلعی به‌جز خودش و دو راس مجاور، پاره‌خطی تا راسی دیگر رسم کنیم، یک قطر رسم می‌شود. پس در کل می‌توان $n(n-3)$ پاره‌خط داشت. یعنی از هر یک از n راس به $(n-3)$ راس دیگر. ولی به عنوان مثال قطری فرضی مثل AD دو بار شمرده می‌شود (از A به D و از D به A). بنابراین تعداد قطرهای n ضلعی از فرمول $\frac{n(n-3)}{2}$ به دست می‌آید.

حال در مرحله‌ی n اُم، ما با یک $(n+2)$ ضلعی سر و کار داریم:

$$\text{تعداد قطرهای } (n+2) \text{ ضلعی} = \frac{(n+2)(n+2-3)}{2} = \frac{(n+2)(n-1)}{2}$$

$$\text{تعداد پاره‌خط‌ها} = a_n = \frac{(n+2)(n-1)}{2} + (n+2) = (n+2)\left(\frac{n-1}{2}+1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

برای حل این مساله روش ساده‌تری نیز وجود دارد که در فصل ۶ با آن آشنا خواهید شد.

(ج) در واقع یک مربع شطرنجی $n \times n$ داریم که همواره ۲ تا از خانه‌هایش حذف شده‌اند.

$$a_n = (n+1)^2 - 2$$

۲ دنباله‌ی مساحت‌های قسمت‌های سفید:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$$

$$a_n = \frac{1}{2^n}$$

۳ جملات دنباله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$20, 17, 14, 11, \ldots$$

این یک الگوی خطی است که در آن $a = -3$ می‌باشد. با جاگذاری $n = 1$ مقدار b را به دست می‌آوریم:

$$t_n = an + b \Rightarrow t_1 = (-3) \times 1 + b$$

$$\Rightarrow 20 = -3 + b \Rightarrow b = 23 \Rightarrow t_n = -3n + 23$$

۴

(الف) اعداد مخرج ۲ واحد از اعداد صورت بزرگ‌تر هستند.

$$a_n = \frac{n+6}{n+8}$$

(ب) فرض می‌کنیم همه‌ی جملات مثبت باشند. در این صورت یک الگوی خطی به صورت $4n + 14$ خواهیم داشت. در مرحله‌ی بعد کافیست با ضرب $(-1)^{n+1}$ حالت مثبت و منفی را ایجاد می‌کنیم.

$$a_n = (4n+14)(-1)^{n+1}$$

(ج) صورت کسر در هر مرحله یک واحد کم می‌شود و مخرج در هر مرحله دو واحد افزایش می‌یابد و هر دو الگوی خطی می‌باشند.

$$\begin{array}{l} \text{دنباله‌ی اعداد صورت} = 1 - n \\ \text{دنباله‌ی اعداد مخرج} = 2n - 1 \end{array} \Rightarrow a_n = \frac{1-n}{2n-1}$$

(د) بدون در نظرگرفتن علامت، دنباله به صورت $2n$ است (به نکته‌ی ۱۱ مراجعه کنید).

$$a_n = 2n \times (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

(هـ) صورت کسر در هر مرحله ۵ واحد کم و مخرج آن یک واحد زیاد می‌شود.

$$\begin{array}{l} \text{دنباله‌ی اعداد صورت} = -5n + 13 \\ \text{دنباله‌ی اعداد مخرج} = n \end{array} \Rightarrow a_n = \frac{-5n+13}{n}$$

۵ در این نوع سؤالات باید مضربی از مخرج را در صورت پیدا کنیم و در صورت نیاز از اتحادهای جبری یا فاکتورگیری استفاده کنیم. (در واقع صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم.)

$$a_n = \frac{n^2 - 4 + 12}{n+2} = \frac{n^2-4}{n+2} + \frac{12}{n+2} = n - 2 + \frac{12}{n+2}$$

چون n عددی طبیعی است، برای این که حاصل a_n نیز طبیعی باشد باید $\frac{12}{n+2}$ نیز یک عدد طبیعی باشد. یعنی $(n+2)$ شمارنده‌ی ۱۲ است.

$$n+2 = 1 \Rightarrow n = -1 \qquad n+2 = 6 \Rightarrow n = 4$$
$$n+2 = 2 \Rightarrow n = 0 \qquad n+2 = 12 \Rightarrow n = 10$$
$$n+2 = 3 \Rightarrow n = 1$$
$$n+2 = 4 \Rightarrow n = 2$$

در نتیجه ۴ تا از جملات، عدد طبیعی هستند. و در ضمن توجه داشته باشید که اگر شمارنده‌های منفی عدد ۱۲ را در نظر می‌گرفتیم برای n مقداری طبیعی یافت نمی‌شد.

۶ جملات دنباله‌ی فیبوناچی

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$$

$$b_1 = a_1a_4 - a_2a_3 = 1 \times 3 - 1 \times 2 = 1$$

$$b_2 = a_2 \times a_5 - a_3 \times a_4 = 1 \times 5 - 2 \times 3 = -1$$

$$b_3 = a_3 \times a_6 - a_4 \times a_5 = 2 \times 8 - 3 \times 5 = 1$$

$$b_4 = a_4 \times a_7 - a_5 \times a_6 = 3 \times 13 - 5 \times 8 = -1$$

$$\vdots$$

$$b_n = (-1)^{n+1}$$

۷ با توجه به شکل‌ها مشخص است که $t_1 = 2$ و $t_2 = 4$. حال این دو عدد را در جمله‌ی عمومی جایگذاری می‌کنیم.

$$\begin{aligned} t_1 = 2 &\Rightarrow \frac{1+a+b}{2} = 2 \Rightarrow \\ t_2 = 4 &\Rightarrow \frac{4+2a+b}{2} = 4 \Rightarrow \end{aligned} \begin{cases} a+b=3 \\ 2a+b=4 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{حل دستگاه}} a = 1,\ b = 2$$

$$t_n = \frac{n^2+n+2}{2}$$

شما تعداد نواحی را برای $n = 3$ و $n = 4$ امتحان کنید.

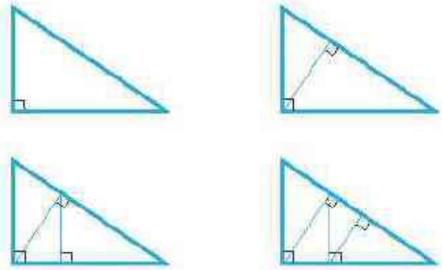
۸

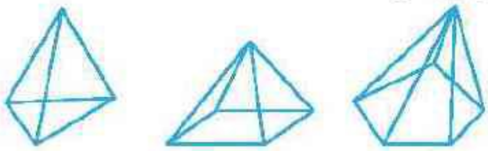
تعداد کل = تعداد مهره‌های رنگی + تعداد مهره‌های سفید

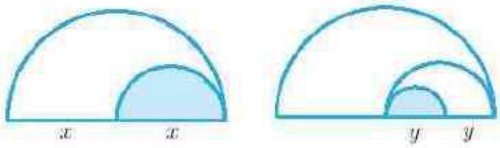
$$(n+1)^2 + n^2 = 2(1+3+\cdots+2n-1) + (2n+1)$$

$$\Rightarrow 1+3+\cdots+(2n-1) = \frac{(n+1)^2 + n^2 - (2n+1)}{2}$$

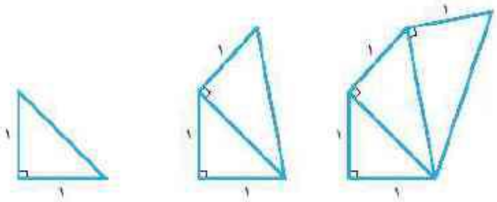
$$\Rightarrow 1+3+\cdots+(2n-1) = n^2$$



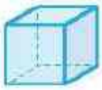




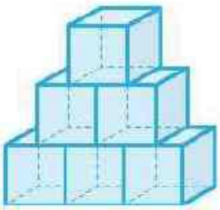
(ز) (طول بزرگ‌ترین پاره‌خط)



۲ فرض کنید با ۱۲ تکه چوب، مکعبی به شکل زیر درست کنیم.



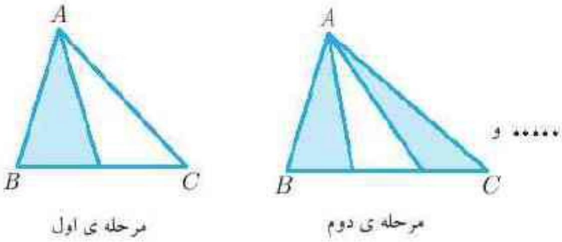
(الف) برای درست کردن برجی به شکل زیر به ارتفاع ۳، چند تکه چوب لازم داریم؟



(ب) برای درست کردن برجی با همان الگو و با ارتفاع n چند چوب کبریت لازم است؟

۳ به کمک شکل زیر چه فرمولی را می‌توان ثابت کرد؟

n نقطه‌ی مشخص به



۵ برای هر یک از دنباله‌های زیر یک جمله‌ی عمومی بنویسید.

الف) $۸, -۱, -۱۰, -۱۹, \dots$

ب) $-۱, ۱, ۵, ۱۱, \dots$

ج) $۰, ۳, ۸, ۱۵, \dots$

د) $\frac{۷}{۵}, \frac{۷۷}{۵۵}, \frac{۷۷۷}{۵۵۵}, \dots$

ه)

$$-\frac{۱۰۰۰}{۵۰۱}, \frac{۹۹۹}{۵۰۲}, -\frac{۹۹۸}{۵۰۳}, \dots$$

۶ برای جملات دنباله‌های زیر، دو جمله‌ی عمومی متفاوت حدس بزنید.

الف) $۱, \frac{۲}{۳}, \frac{۳}{۵}, \dots$

ب) $۰, ۳, ۸, ۱۵, \dots$

۷ برای دنباله‌های زیر یک جمله‌ی عمومی به صورت بازگشتی بنویسید.

الف) $۲, ۵, \frac{۲}{۵}, \frac{۲۵}{۲}, \frac{۴}{۱۲۵}, \dots$

ب) $۳, ۲۷, ۲۷^۹, \dots$

۸ چند تا از جملات دنباله‌ی $a_n = \frac{۲n^۲ + ۲n + ۱۲}{n + ۱}$، اعداد طبیعی هستند؟

۹ دنباله‌های $a_n = \frac{n + ۹}{n + ۱}$ و $b_n = \frac{۲n - ۴}{۲n - ۹}$ چند جمله‌ی مشترک دارند؟

تعریف

دنباله‌ی حسابی. دنباله‌ای است که در آن به‌جز جمله‌ی اول، هر جمله از جمع جمله‌ی قبل از خود با عددی ثابت به نام قدر نسبت به دست می‌آید.
در یک دنباله‌ی حسابی معمولاً جمله‌ی اول را با a و قدر نسبت را با d نمایش می‌دهیم. (دنباله‌ی حسابی را تصاعد حسابی یا عددی نیز می‌نامند

به عنوان مثال دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول ۳ و قدر نسبت ۴ به صورت زیر است:

$$۳, ۷, ۱۱, ۱۵$$

جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی

می‌توان جملات دنباله‌ی حسابی را به صورت زیر نوشت:

$t_{۱}$	$t_{۲}$	$t_{۳}$	$\dots$	t_n	$\dots$
a	$a+d$	$a+۲d$	$\dots$	$a+(n-۱)d$	$\dots$

نکته ۱۳

جمله‌ی عمومی دنباله‌ای حسابی با قدر نسبت d و جمله‌ی اول a عبارت است از: $t_n = a + (n-۱)d$.

مثال ۵۲

اگر جملات سوم و هشتم یک دنباله‌ی حسابی به ترتیب برابر ۱۲ و ۲۷ باشد، دنباله را مشخص کنید.

حل.

$$\begin{aligned} t_{۳} = ۱۲ &\Rightarrow \\ t_{۸} = ۲۷ &\Rightarrow \end{aligned} \begin{cases} a + ۲d = ۱۲ \\ a + ۷d = ۲۷ \end{cases} \Rightarrow ۵d = ۱۵ \Rightarrow d = ۳, a = ۶$$

دنباله: $۶, ۹, ۱۲, \dots$

نکته ۱۴

اگر t_m و t_n جملات mاُم و nاُم یک دنباله‌ی حسابی باشد آن‌گاه خواهیم داشت: $d = \frac{t_m - t_n}{m-n}$.

اثبات:

$$\frac{t_m - t_n}{m-n} = \frac{a + (m-۱)d - (a + (n-۱)d)}{m-n} = \frac{md - nd}{m-n} = d$$

برای نمونه در مثال ۵۲ می‌توان قدر نسبت را به شیوه‌ی زیر محاسبه کرد:

$$d = \frac{۲۷ - ۱۲}{۸ - ۳} = ۳$$

مثال ۵۳

در یک دنباله‌ی حسابی به نام t، حاصل عبارت $\frac{t_{۲۰} - t_{۶}}{t_{۱۶} - t_{۶}}$ را به دست آورید.

حل.

$$\frac{t_{۲۰} - t_{۶}}{t_{۱۶} - t_{۶}} = \frac{a + ۱۹d - (a + ۵d)}{a + ۱۵d - (a + ۵d)} = \frac{۱۴d}{۱۰d} = \frac{۷}{۵}$$

نکته ۱۵

در هر دنباله‌ی حسابی رابطه‌ی زیر برقرار است.

$$\frac{t_m - t_n}{t_p - t_q} = \frac{m-n}{p-q} \quad (\text{با شرط } t_p \neq t_q \text{ و } p \neq q)$$

اثبات:

$$d = \frac{t_m - t_n}{m - n} = \frac{t_p - t_q}{p - q} \Rightarrow \frac{t_m - t_n}{t_p - t_q} = \frac{m - n}{p - q}$$

مثال ۵۴ دنباله‌ی حسابی ... ,۲۱ ,۱۷ ,۱۳ چند جمله‌ی ۳ رقمی دارد؟

حل. جمله‌ی عمومی دنباله را تشکیل می‌دهیم.

$$a = ۱۳ \quad d = ۴$$

$$t_n = ۱۳ + ۴(n - ۱) = ۴n + ۹$$

$$۹۹ < ۴n + ۹ < ۱۰۰۰ \Rightarrow ۹۰ < ۴n < ۹۹۱ \Rightarrow \frac{۴۵}{۲} < n < \frac{۹۹۱}{۴}$$

$$\xrightarrow{n \in \mathbb{N}} ۲۳ \leq n \leq ۲۴۷$$

$$\text{تعداد جملات سه‌رقمی} = ۲۴۷ - ۲۳ + ۱ = ۲۲۵$$

نکته ۱۶ ... a, b, c ... $2b = a + c$.

مثال

مثال

مثال

حل. دنباله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\underbrace{135}_{\text{جمله اول}}\,,\ \underbrace{\quad,\quad,\ \ldots\ ,}_{k\ 8}\ \underbrace{180}_{\text{جمله دهم}}$$

$$t_{10} = 180 \Rightarrow 135 + 9d = 180 \Rightarrow d = 5$$

جملات عبارتند از 140 ,145 ,150 ,155 ,160 ,165 ,170 ,175

نکته ۱۷

اگر بین اعداد a و b، k عدد بنویسیم به طوری که یک دنباله‌ی حسابی تشکیل دهند، گوییم بین a و b، k واسطه‌ی حسابی درج کرده‌ایم و قدر نسبت دنباله از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$d = \frac{b-a}{k+1}$$

با فرمول فوق می‌توان مسائلی مانند مثال ۵۶ را حل کرد. برای اثبات فرمول دقیقاً مشابه حل مثال ۵۶ عمل می‌کنند.

مثال ۵۸ جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی حسابی به صورت $t_n = (m-1)n^2 + mn + n + 3m$ است. این دنباله را مشخص کنید.

حل. جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی حسابی همیشه از الگوی خطی پیروی می‌کند بنابراین بر حسب n حداکثر از درجه‌ی ۱ می‌تواند باشد بنابراین ضریب n^2 باید برابر صفر باشد:

$$m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1$$
$$\Rightarrow t_n = n + n + 3 = 2n + 3$$
$$t_1 = 2 \times 1 + 3 = 5$$
$$t_2 = 2 \times 2 + 3 = 7$$
$$\vdots$$

دنباله: $5, 7, 9, \ldots$

نکته ۱۸

اگر t یک دنباله‌ی حسابی باشد و داشته باشیم: $m + n = p + q$ می‌توان نتیجه گرفت: $t_m + t_n = t_p + t_q$.

اثبات:

$$t_m + t_n = a + (m-1)d + a + (n-1)d$$
$$= a + a + (m+n)d - d - d = a + a + (p+q)d - d - d$$
$$= a + (p-1)d + a + (q-1)d = t_p + t_q$$

مثال ۵۹ در یک دنباله‌ی حسابی، مجموع جملات دهم تا شانزدهم برابر ۷۰ است. جمله‌ی سیزدهم دنباله چند است؟

حل.

$$a_{10} + a_{16} = a_{11} + a_{15} = a_{12} + a_{14} = 2a_{13}$$
$$\Rightarrow a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} + a_{16} = 7a_{13} = 70 \Rightarrow a_{13} = 10$$

مثال ۶۰ مجموع ۳۰ جمله‌ی اول دنباله‌ای حسابی زیر را به دست آورید.

$$4, 7, 10, 13, \ldots$$

حل. کافی است آن دنباله را یک بار از کوچک به بزرگ و بار دیگر از بزرگ به کوچک به صورت زیر نوشته و با هم جمع کنید لازم به ذکر است که جمله‌ی سی‌اُم برابر $۳ \times ۲۹ + ۴$ یعنی ۹۱ می‌باشد:

$$
\begin{array}{rl}
& S = ۴ + ۷ + ۱۰ + \cdots + ۸۵ + ۸۸ + ۹۱ \\
+ & S = ۹۱ + ۸۸ + ۸۵ + \cdots + ۱۰ + ۷ + ۴ \\
\hline
& ۲S = \underbrace{۹۵ + ۹۵ + ۹۵ + \cdots + ۹۵ + ۹۵ + ۹۵}_{۳۰\ \text{تا}}
\end{array}
$$

$$
۲S = ۳۰ \times ۹۵ \Rightarrow S = \frac{۳۰ \times ۹۵}{۲} = ۱۴۲۵
$$

۱ اگر ۶، $x - y$، ۲ و x جملات متوالی دنباله‌ی حسابی باشند، x و y را بیابید.

۲ در یک دنباله‌ی حسابی جملات پنجم و نهم به ترتیب برابر ۱۰ و ۷۴ هستند. دنباله را مشخص کنید.

۳ مجموع دو جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی برابر ۱ است. اگر جمله‌ی بیستم دنباله ۱۳۰ باشد، جمله‌ی هفتم دنباله را به دست آورید.

٤ مجموع جملات دهم و چهاردهم یک دنباله‌ی حسابی، برابر ۲۶ است. اگر جمله‌ی سی‌اُم این دنباله برابر ۷۹ باشد، جمله‌ی بیست‌ویکم دنباله را بیابید.

۵ بین اعداد ۱۳ و ۵۵، شش واسطه‌ی حسابی درج کنید.

۶ بین اعداد $(k^2 + k + 2)$ و $(k^2 + 4k + 5)$، k واسطه‌ی حسابی درج کرده‌ایم قدر نسبت این دنباله را بیابید.

۷ مقادیر a و b را طوری به دست آورید که $t_n = (a + 2b)n^3 + (a - b + 3)n^2 + 2an - b$ جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی حسابی باشد.

۸ در دنباله‌ی حسابی $3, 7, 11, \cdots$ جمله‌ی nاُم کوچک‌تر از ۴۰۰ و جمله‌ی بعدی آن بزرگ‌تر از ۴۰۰ است. n را بیابید.

۹ دو دنباله‌ی حسابی زیر چند جمله‌ی مشترک بین ۲۰۰ و ۷۰۰ دارند؟

$1, 4, \ldots$

$2, 7, \ldots$

۱۰ حاصل‌ضرب جملات دوم و ششم یک دنباله‌ی حسابی برابر ۶ است. اگر مجموع جملات سوم و پنجم دنباله برابر ۵ باشد دنباله را مشخص کنید.

۱۱ جمله‌ی اول و قدر نسبت یک دنباله‌ی حسابی به ترتیب ۷− و ۳ هستند. مجموع ۴۱ جمله‌ی اول آن را بیابید.

۱۲ حاصل‌ضرب سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی برابر ۱۶۲۰ و حاصل جمعشان برابر ۳۶ است. قدر نسبت دنباله را بیابید.

۱۳ مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی از فرمول $S_n = 3n^2 + 4n$ به دست می‌آید. دنباله را مشخص کنید.

۱٤ ثابت کنید اگر $\frac{1}{a+b}$، $\frac{1}{a+c}$ و $\frac{1}{b+c}$ جملات متوالی یک دنباله‌ی حسابی باشند، a^2، b^2 و c^2 نیز جملات متوالی یک دنباله‌ی حسابی هستند.

۱۵ ثابت کنید اگر جملات هم‌مرتبه از دو دنباله‌ی حسابی را با هم جمع کنیم، دنباله‌ی حاصل حسابی است.

۱۶ در یک دنباله‌ی حسابی حاصل‌ضرب جملات دوم و پنجم برابر ۱۱۲ و حاصل جمع جملات دوم تا پنجم برابر ۴۶ است. دنباله را مشخص کنید.

۵

$a = ۱۳ \qquad b = ۵۵ \qquad k = ۶$

$$d = \frac{b-a}{k+۱} = \frac{۵۵-۱۳}{۶+۱} = \frac{۴۲}{۷} = ۶$$

واسطه‌ها $= ۱۹, ۲۵, ۳۱, ۳۷, ۴۳, ۴۹$

۶

$a = k^۲ + k + ۲ \qquad b = k^۲ + ۴k + ۵$

$$d = \frac{b-a}{k+۱} = \frac{(k^۲+۴k+۵)-(k^۲+k+۲)}{k+۱} = \frac{۳k+۳}{k+۱}$$

حل دستگاه

۱۰

$$2+6=3+5 \Rightarrow t_2+t_6=t_3+t_5=5$$
$$\Rightarrow t_6=5-t_2$$
$$t_2\times t_6=6 \Rightarrow t_2(5-t_2)=6$$
$$\Rightarrow t_2^2-5t_2+6=0$$
$$(t_2-2)(t_2-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} t_2=2 \Rightarrow t_6=3 \\ \text{یا} \\ t_2=3 \Rightarrow t_6=2 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a+d=2 \\ a+5d=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} d=\frac{1}{4} \\ a=\frac{7}{4} \end{matrix}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a+d=3 \\ a+5d=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} d=-\frac{1}{4} \\ a=\frac{13}{4} \end{matrix}$$

دنباله‌ها به یکی از صورت‌های زیر است:

$$\frac{7}{4}, 2, \frac{9}{4}, \dots$$
$$\frac{13}{4}, 3, \frac{11}{4}, \dots$$

۱۱ دنباله عبارت است از:

$$-7, -4, -1, \dots$$

کافی است دنباله را یک بار از کوچک به بزرگ و بار دیگر از بزرگ به کوچک نوشته و با هم جمع کنیم.

$$t_{41}=a+40d=-7+40\times 3=113$$

$$S=(-7)+(-4)+(-1)+\dots+107+110+113$$
$$S=113+110+107+\dots+(-1)+(-4)+(-7)$$
$$2S=\underbrace{106+106+106+\dots+106+106+106}_{\text{۴۱ جمله}}$$
$$2S=106\times 41 \Rightarrow S=\frac{106\times 41}{2}=2173$$

۱۲ جملات را به صورت $(a+d)$، a و $(a-d)$ در نظر می‌گیریم.

$$a-d+a+d+a=36 \Rightarrow a=12$$
$$a(a-d)(a+d)=1620$$
$$\Rightarrow 12(12^2-d^2)=1620 \Rightarrow 144-d^2=135$$
$$\Rightarrow d^2=9 \Rightarrow d=\pm 3$$

۱۳ جمله‌ی اول دنباله همان S_1 و مجموع دو جمله‌ی اول دنباله برابر S_2 است.

$$a=S_1=3+4 \Rightarrow a=7$$
$$a+a+d=S_2 \Rightarrow 14+d=20 \Rightarrow d=6$$

دنباله: $7, 13, 20, \dots$

۱۴ $\frac{1}{a+b}$، $\frac{1}{a+c}$ و $\frac{1}{b+c}$ جملات متوالی دنباله‌ی حسابی هستند یعنی:

$$\frac{2}{a+c}=\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+b}$$
$$\Rightarrow \frac{2}{a+c}=\frac{a+b+b+c}{(b+c)(a+b)}$$
$$\Rightarrow (a+c)(a+2b+c)=2(b+c)(a+b)$$
$$\Rightarrow a^2+c^2+2ab+2ac+2bc=2b^2+2ac+2bc+2ab$$
$$\Rightarrow a^2+c^2=2b^2$$

در نتیجه a^2، b^2 و c^2 جملات متوالی یک دنباله‌ی حسابی هستند.

۱۵ روش اول: جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی حسابی حداکثر از درجه‌ی ۱ است پس مجموع دو دنباله‌ی حسابی نیز از درجه‌ی ۱ و طبیعتاً جمله‌ی عمومی دنباله حسابی است.

روش دوم: دو دنباله را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$b_n=a+(n-1)d$$
$$c_n=a'+(n-1)d'$$
$$\Rightarrow b_n+c_n=(a+a')+(n-1)(d+d')$$

دنباله‌ی حاصل دنباله‌ای است حسابی با جمله‌ی اول $a+a'$ و قدر نسبت $d+d'$.

۱۶

$$t_2\times t_5=112$$
$$t_2+t_3+t_4+t_5=2(t_2+t_5)=46$$
$$\Rightarrow t_2\times t_5=112,\ t_2+t_5=23$$

از ترکیب دو تساوی نتیجه می‌گیریم:

$$t_2(23-t_2)=112 \Rightarrow t_2^2-23t_2+112=0$$
$$\Rightarrow (t_2-7)(t_2-16)=0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} t_2=7 \Rightarrow t_5=16 \\ t_2=16 \Rightarrow t_5=7 \end{cases}$$

ادامه‌ی حل به عهده‌ی خودتان!

... کنید $-(a^2-b^2)^2$ و a^2b^2 و a^4+b^4 به ازای تمام

۸ در یک دنباله‌ی حسابی، مجموع ۴ جمله‌ی اوّل صفر و مجموع جملات پنجم و ششم برابر ۲۴− است. جمله‌ی دوم دنباله را به دست آورید.

۹ در یک دنباله‌ی حسابی روابط زیر برقرار است. دنباله را مشخص کنید.

$$\begin{cases} t_1 \times t_8 = t_4 \times t_5 \\ t_3 + t_2 = 12 \end{cases}$$

۱۰ مجموع سه جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی برابر ۵۱ و مجموع چهار جمله‌ی بعد از آن برابر ۱۱۰ است. مجموع هشت جمله‌ی اول دنباله را به دست آورید.

۱۱ در یک دنباله‌ی حسابی مجموع ۱۲ جمله‌ی اول برابر ۲۴۰ و جمله‌ی هشتم برابر ۲۳ است. قدر نسبت دنباله را به دست آورید.

۱۲ چند عدد ۲ رقمی داریم که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر ۴ برابر ۳ باشد؟

۱۳ در ۲۰۰ جمله‌ی اول دو دنباله‌ی حسابی زیر چند عدد مشترک وجود دارد؟

$$۷, ۱۱, ۱۵, \cdots$$

$$۶, ۹, ۱۲, \cdots$$

۱۴ در دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول ۷ و قدر نسبت ۳، مجموع جملات دهم تا بیستم را بیابید.

۱۵ اگر مجموع جملات دوم و پنجم یک دنباله‌ی حسابی برابر ۱ و مجموع جملات چهارم و هفتم و هشتم آن برابر ۲۷ باشد، جمله‌ی دهم آن را مشخص کنید.

۱۶ ثابت کنید اگر $\frac{۱}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ و $\frac{۱}{\sqrt{x}+\sqrt{z}}$ و $\frac{۱}{\sqrt{y}+\sqrt{z}}$ جملات متوالی یک دنباله‌ی حسابی باشند، اعداد x و y و z نیز جملات متوالی یک دنباله‌ی حسابی هستند.

۱۷ طول اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC، جملات متوالی یک دنباله‌ی حسابی هستند. محیط مثلث چند برابر طول وتر آن است؟

۱۸ اگر $t_۱, t_۲, \cdots, t_n$ مخالف صفر بوده و جملات یک دنباله‌ی حسابی باشند ثابت کنید:

$$\frac{۱}{\sqrt{t_۱}+\sqrt{t_۲}}+\frac{۱}{\sqrt{t_۲}+\sqrt{t_۳}}+\cdots+\frac{۱}{\sqrt{t_{n-۱}}+\sqrt{t_n}}$$
$$=\frac{\sqrt{t_n}-\sqrt{t_۱}}{d}$$

۱۹ در یک دنباله‌ی حسابی $t_m = n$ و $t_n = m$ قدر نسبت دنباله را به دست آورید.

۲۰ اگر مجموع جملات یک دنباله‌ی حسابی از فرمول $S_n = kn^۲ + ۲n$ به دست آید و جمله‌ی سوم آن برابر ۲۲ باشد دنباله را مشخص کنید.

۲۱ مجموع ۵ جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی برابر ۲۵ و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر صفر است. قدر نسبت را بیابید. $(d \in \mathbb{Z})$

۲۲ حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$A = (۲۰۱۶^۲ + ۲۰۱۴^۲ + \cdots + ۲^۲) - (۲۰۱۵^۲ + ۲۰۱۳^۲ + \cdots + ۱^۲)$$

۲۳ اگر a و d به ترتیب نشانگر جمله‌ی اول و قدر نسبت یک دنباله‌ی حسابی باشند آن‌گاه با الگو گرفتن از مثال ۶۰ ثابت کنید مجموع n جمله‌ی اول آن دنباله، برابر است با:

$$S_n = \frac{n}{۲}[۲a + (n - ۱)d]$$

۲٤ اگر a و b و c و d جملات متوالی یک دنباله‌ی حسابی باشند ثابت کنید $abcd + (b - c)^۴$ مربع کامل است. $(a, b, c, d \in \mathbb{Z})$

پاسخ تمرین — درس ۳

۲	۱۴	۸	۲	۱۳	۵۰	۱۷	$\frac{۱۲}{۵}$
٤	۳	۱۰	۱۹۶	۱٤	۵۳۹	۱۹	-۱
۵	$\frac{۴}{۳}$	۱۱	۲	۱۵	۲۰	۲۱	$d = \pm ۵$

تعریف دنباله‌ی هندسی. دنباله‌ای که در آن به جز جمله‌ی اول که غیر صفر هم هست، هر جمله از ضرب جمله‌ی قبل از خود در عددی ثابت و غیر صفر به نام قدرنسبت به دست آید را سری هندسی می‌گویند. در یک دنباله‌ی هندسی معمولاً جمله‌ی اول را با a و قدرنسبت را با r یا q نمایش می‌دهیم.

به عنوان مثال دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول ۴ و قدر نسبت ۳ به صورت زیر است:

$$۴, ۱۲, ۳۶, \cdots$$

به عنوان مثالی دیگر فرض کنید جمعیت کشوری ۱۰ میلیون نفر باشد. اگر جمعیت این کشور به طور ثابت هر سال ۳ درصد افزایش یابد، جمعیت این کشور در سال‌های پی‌درپی دنباله‌ای هندسی است. در واقع جمعیت این کشور هر سال برابر است با جمعیت سال گذشته ضرب در ۱/۰۳. دنباله‌ی جمعیت این کشور بر حسب میلیون نفر به صورت زیر است:

$$۱۰ , ۱۰ \times ۱/۰۳ , ۱۰ \times ۱/۰۳^۲ , ۱۰ \times ۱/۰۳^۳ , \cdots$$

$t_n = ۱۰ \times (۱/۰۳)^{n-۱}$ جمله‌ی عمومی دنباله

جمله‌ی عمومی دنباله‌ی هندسی

نکته جمله‌ی عمومی دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت r و جمله‌ی اول a عبارت است از: $t_n = ar^{n-۱}$.

مثال

(الف)

(ب)

حل. (الف)

(ب)

مثال

حل.

نکته ۲۰

به دست آوردن قدر نسبت دنباله‌ی هندسی با دانستن دو جمله‌ی t_m و t_n $(n > m)$

$$\begin{aligned} t_n = ar^{n-1} \\ t_m = ar^{m-1} \end{aligned} \Rightarrow \frac{t_n}{t_m} = \frac{ar^{n-1}}{ar^{m-1}} = r^{n-m}$$

$$\Rightarrow r = \sqrt[n-m]{\frac{t_n}{t_m}}$$

تذکر

در فرمول قبل اگر $n - m$ عددی زوج باشد، r را می‌توان برابر قرینه‌ی رادیکال فوق نیز در نظر گرفت.

در مثال ۶۲ می‌توانستیم قدر نسبت را به صورت زیر به دست آوریم:

$$r = \sqrt[5-2]{\frac{24}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

مثال ۶۳ جمله‌ی عمومی یک دنباله به صورت $t_n = 5 \times \sqrt{6}^{\,n+1}$ است. جمله‌ی اول و قدر نسبت دنباله را تعیین کنید.

حل.

$$n = 1 \Rightarrow t_1 = 5 \times \sqrt{6}^{\,2} = 30$$

$$n = 2 \Rightarrow t_2 = 5 \times \sqrt{6}^{\,3} = 5 \times 6\sqrt{6} = 30\sqrt{6}$$

$$r = \frac{t_2}{t_1} = \frac{30\sqrt{6}}{30} = \sqrt{6}$$

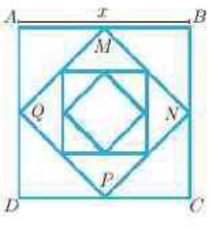
مثال ۶۴ در یک دنباله‌ی هندسی ۲ برابر جمله‌ی اول به‌علاوه‌ی جمله‌ی دوم برابر جمله‌ی سوم است. قدر نسبت دنباله را تعیین کنید.

حل.

$$2t_1 + t_2 = t_3 \Rightarrow 2a + ar = ar^2$$

$$\Rightarrow r^2 - r - 2 = 0 \Rightarrow (r-2)(r+1) = 0 \Rightarrow r = 2 \quad \text{یا} \quad r = -1$$

مثال ۶۵ مربع $ABCD$ به ضلع x را در نظر می‌گیریم. وسط‌های اضلاع را به هم وصل می‌کنیم تا مربع جدیدی به دست آید. به همین ترتیب اضلاع هر مربع ایجاد شده را به هم وصل می‌کنیم تا داخل آن مربع جدیدی حاصل شود و همین طور ادامه می‌دهیم. جمله‌ی عمومی مساحت‌های مربع‌ها را به دست آورید و مساحت مربع چهارم را بر حسب x بنویسید.



حل.

$$PN = \sqrt{NC^2 + PC^2} = \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{4}} = \sqrt{\frac{x^2}{2}} = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

یعنی طول ضلع هر مربع $\frac{1}{\sqrt{2}}$ برابر طول ضلع مربع قبل و مساحت هر مربع $\frac{1}{2}$ مساحت مربع قبلی است. پس یک دنباله‌ی هندسی تشکیل می‌دهند.

$$\text{مساحت مربع اول} = a = x^2, \quad r = \frac{1}{2} \Rightarrow t_n = ar^{n-1} = x^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\text{مساحت مربع چهارم} = t_4 = x^2\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{x^2}{8}$$

نکته ۲۱ شرط آن که a و b و c جملات متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند این است که: $b^2 = ac$.

اثبات: می‌توان جملات را به صورت $a = \frac{b}{r}$ و b و $c = br$ در نظر گرفت. بنابراین: $ac = \frac{b}{r} \times br = b^2$.

مثال ۶۶ مقدار x را طوری تعیین کنید که اعداد $(x-2)$ و $(x+1)$ و $(x+3)$ جملات متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند.

حل.
$$(x+1)^2 = (x-2)(x+3) \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 + x - 6 \Rightarrow x = -7$$

مثال ۶۷ بین اعداد ۸ و ۲۵۶، چهار عدد چنان درج کنید به طوری که شش عدد یک دنباله‌ی هندسی تشکیل دهند.

حل. دنباله را به صورت روبه رو می‌نویسیم.
$$\underset{\text{جمله‌ی اول}}{8}, \quad , \quad , \quad , \quad , \underset{\text{جمله‌ی ششم}}{256}$$

$$a = 8 ,\ t_6 = 256 \Rightarrow 8 \times r^5 = 256 \Rightarrow r^5 = 32 \Rightarrow r = 2$$

جملات عبارتند از ۱۶ و ۳۲ و ۶۴ و ۱۲۸

نکته ۲۲ اگر بین اعداد a و b، k عدد بنویسیم به طوری که یک دنباله‌ی هندسی تشکیل دهند، گوییم بین a و b، k واسطه‌ی هندسی درج کرده‌ایم و قدر نسبت دنباله از فرمول زیر به دست می‌آید.
$$r = \sqrt[k+1]{\frac{b}{a}}$$

اثبات:
$$\underset{\text{جمله‌ی اول}}{a}, \underbrace{\quad , \quad , \cdots ,}_{k \text{ تا}} \underset{\text{جمله‌ی } (k+2) \text{ام}}{b}$$
$$t_{(k+2)} = b \Rightarrow a \times r^{k+1} = b \Rightarrow r^{k+1} = \frac{b}{a} \Rightarrow r = \sqrt[k+1]{\frac{b}{a}}$$

تذکر در فرمول فوق اگر k عددی فرد باشد ($k+1$ زوج باشد) می‌توان از قرینه‌ی رادیکال فوق نیز استفاده کرد.

تذکر اگر a و b هم‌علامت نباشند تعداد واسطه‌ها نمی‌تواند عددی فرد باشد.

نکته ۲۳ اگر t_n یک دنباله‌ی هندسی باشد و داشته باشیم $m + n = p + q$ می‌توان نوشت: $t_m \times t_n = t_p \times t_q$.

اثبات:
$$t_p \times t_q = a \times r^{p-1} \times a \times r^{q-1} = a \times r^{p+q} \times r^{-1} \times r^{-1} \times a$$
$$= a \times r^{m+n} \times r^{-1} \times r^{-1} \times a = a \times r^{m-1} \times a \times r^{n-1} = t_m \times t_n$$

مثال ۶۸ در یک دنباله‌ی هندسی، حاصل‌ضرب جملات ششم تا دوازدهم، ۶۴ برابر جمله‌ی نهم است. جمله‌ی نهم دنباله را به دست آورید.

حل.
$$t_6 \times t_{12} = t_7 \times t_{11} = t_8 \times t_{10} = t_9^2$$
$$\frac{t_6 \times t_{12} \times t_7 \times t_{11} \times t_8 \times t_{10} \times t_9}{t_9} = 64 \Rightarrow \frac{t_9^7}{t_9} = 64 \Rightarrow t_9 = \pm 2$$

مثال ۶۹ مجموع ۱۰ جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی زیر، چند برابر جمله‌ی اول آن است؟

$$۳, ۶, ۱۲, \cdots$$

حل. مجموع حاصل را با S نمایش می‌دهیم. جمله‌ی دهم دنباله برابر است با $۳ \times ۲^{۱۰-۱} = ۳ \times ۲^{۹}$
جمله‌ی نهم برابر است با $۳ \times ۲^{۹\ ۱} = ۳ \quad ۲^{۸}$

$$S = ۳ + ۶ + ۱۲ + \quad + ۳ \quad ۲^{۸} + ۳ \quad ۲^{۹}$$
$$۲S = ۶ + ۱۲ + ۲۴ + \quad + ۳ \quad ۲^{۹} + ۳ \quad ۲^{۱۰}$$
$$۲S \quad S = (۶ + ۱۲ + ۲۴ + \quad + ۳ \quad ۲^{۹} + ۳ \quad ۲^{۱۰}) \quad (۳ + ۶ + \quad + ۳ \quad ۲^{۹})$$
$$S = ۳ \quad ۲^{۱۰} \quad ۳ = ۳(۲^{۱۰} \quad ۱)$$

بنابراین مجموع ده جمله‌ی اول، $(۱ \quad ۲^{۱۰})$ یعنی ۱۰۲۳ برابر جمله‌ی اول است.

مثال ۷۰ مجموع بیست‌وهشت جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول $(۱ \quad)$ و قدر نسبت $(۳ \quad)$ را بیابید.

دنباله به صورت روبرو است: $۱ \ ۳ \quad ۹ \ ۲۷$

$$t_{۲۷} = (\quad ۱) \quad (\quad ۳)^{۲۶} = \quad ۳^{۲۶}$$
$$t_{۲۸} = (\quad ۱) \quad (\quad ۳)^{۲۷} = ۳^{۲۷}$$

$$S = (\quad ۱) + ۳ + (\quad ۹) + ۲۷ + \quad + (\quad ۳^{۲۶}) + ۳^{۲۷}$$
$$۳S = ۳ + (\quad ۹) + ۲۷ + (\quad ۸۱) + \quad + ۳^{۲۷} + (\quad ۳^{۲۸})$$
می‌توانیم طرفین را در ۳ یا $\frac{۱}{۳}$ ضرب کنیم.

$$S \quad (\quad ۳S) = \quad ۱ \quad (\quad ۳^{۲۸})$$
دو تساوی را از هم کم می‌کنیم
$$۴S = ۳^{۲۸} \quad ۱$$
$$S = \frac{۳^{۲۸} \quad ۱}{۴}$$

مثال ۷۱ در دنباله‌ی هندسی $\quad ۱۶ \ ۸ \ ۴$ حداقل چند جمله‌ی اول را با هم جمع کنیم تا حاصل از ۵۰۰۴ بزرگ‌تر شود؟

فرض کنید اگر جملات را تا جمله‌ی nاُم با هم جمع کنیم، حاصل از ۵۰۰۴ بزرگ‌تر می‌شود.

$$S = ۴ + ۸ + ۱۶ + \quad + \frac{t_n}{۲} + t_n$$
طرفین را در ۲ یا $\frac{۱}{۲}$ ضرب می‌کنیم و
$$۲S = ۸ + ۱۶ + ۳۲ + \quad + t_n + ۲t_n$$
تساوی بالا را از تساوی پایین کم می‌کنیم.
$$S = ۲t_n \quad ۴$$
مشابه مثال‌های قبل، جملات مشابه حذف می‌شوند.

حال قرار می‌دهیم $S > ۵۰۰۴$

$$۲t_n \quad ۴ > ۵۰۰۴ \qquad ۲t_n > ۵۰۰۸ \qquad t_n > ۲۵۰۴$$
$$۴ \quad ۲^{n\ ۱} > ۲۵۰۴ \qquad ۲^{n\ ۱} > ۶۲۶$$

چون $۲^{۱۰} > ۶۲۶ > ۲^{۹}$ پس نتیجه می‌گیریم:

$$n \quad ۱ > ۹ \qquad n > ۱۰ \qquad n \quad ۱۱$$

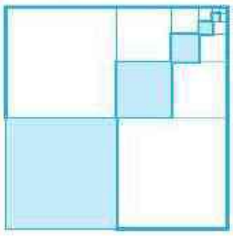
باید حداقل ۱۱ جمله‌ی اول را با هم جمع کنیم.

بیشتر بدانیم ٤

یک تعبیر هندسی زیبا

می‌خواهیم برای مجموع جملات دنباله‌ی هندسی روبه‌رو یک تعبیر هندسی انجام دهیم:

$$A = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots$$



مربع ABCD به ضلع واحد را در نظر می‌گیریم. مطابق شکل آن را به ٤ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و گوشه‌ی پایین سمت چپ را رنگ‌آمیزی می‌کنیم. حال از شکل باقی‌مانده، همین مراحل را در مورد مربع بالا سمت راست که بی‌رنگ است تکرار کرده و $\frac{1}{4}$ آن را رنگ‌آمیزی می‌کنیم و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم. اگر این عمل را به صورت بی‌شمار تکرار کنیم، کل مساحت رنگ شده برابر است با:

$$S_{\text{رنگی}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \cdots$$

حال اگر به شکل دقت کنیم، مساحت هر مربع رنگ شده برابر مساحت هر یک از مربع‌های بی‌رنگ سمت راست یا بالای آن است پس کل مساحت رنگ شده برابر $\frac{1}{3}$ مساحت مربع ABCD است.

$$S = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots = \frac{1}{3}$$

حال مقدار S را بدون در نظر گرفتن مدل هندسی و در واقع مشابه مثال ۷۱ به دست می‌آوریم.

با توجه به این که $r = \frac{1}{4}$، باید طرفین را در $\frac{1}{4}$ یا ٤ ضرب کنیم.

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots \\ 4S &= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots \\ \hline 4S - S &= (1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots) - (\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots) \\ &\Rightarrow 3S = 1 \Rightarrow S = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

تذکر مهم

برای این که بتوانیم روش فوق را برای یک دنباله‌ی هندسی با بی‌شمار جمله به کار ببریم، لازم است که قدر نسبت آن دنباله در بازه‌ی $(-1, 1)$ باشد یعنی $-1 < r < 1$. برای مثال فرض کنید می‌خواهیم مجموع جملات یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول ۲ و قدر نسبت ۳ که دارای بی‌شمار جمله است را به دست آوریم.

$$\begin{aligned} S &= 2 + 6 + 18 + 54 + \cdots \\ 3S &= 6 + 18 + 54 + 162 + \cdots \\ \hline 3S - S &= (6 + 18 + 54 + 162 + \cdots) - (2 + 6 + 18 + 54 + \cdots) \\ &\Rightarrow 2S = -2 \Rightarrow S = -1 \end{aligned}$$

که به وضوح نادرست است!

دلیل نادرست بودن حل فوق این است که شرط $-1 < r < 1$ رعایت نشده است. اثبات نکته‌ی گفته شده، در ریاضیات دانشگاهی انجام می‌شود.

مثال ۷۲ مجموع زیر را به دست آورید. (اعداد، جملات یک دنباله‌ی هندسی هستند.)

$$S = 12 + 4 + \frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \cdots$$

حل. طرفین را در $\frac{۱}{۳}$ یا ۳ ضرب می‌کنیم.

$$S = ۱۲ + ۴ + \frac{۴}{۳} + \cdots$$

$$۳S = ۳۶ + ۱۲ + ۴ + \cdots$$

$$۲S = ۳۶ \Rightarrow S = ۱۸$$

۱ جمله‌ی نهم یک دنباله‌ی هندسی، معکوس جمله‌ی سیزدهم آن است. جمله‌ی یازدهم دنباله را به دست آورید.

۲ در یک دنباله‌ی هندسی، مجموع ۳ جمله‌ی اول برابر ۴۵ و جمله‌ی چهارم ۱۳۵ واحد از جمله‌ی اول بزرگ‌تر است. جمله‌ی اول دنباله را به دست آورید.

۳ در یک دنباله‌ی هندسی، پانزده برابر جمله‌ی اول به‌علاوه‌ی دو برابر جمله‌ی دوم برابر جمله‌ی سوم است. در این دنباله جمله‌ی هشتم چند برابر جمله‌ی ششم است؟ (جمله‌ی اول دنباله غیر صفر است)

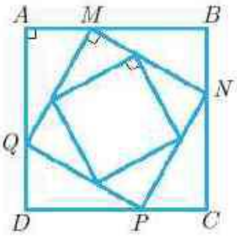
٤ مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله‌ی هندسی از فرمول $S_n = ۳^n - ۱$ به دست می‌آید. دنباله را مشخص کنید.

۵ در یک دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت ۴ و جمله‌ی اول ۲، حاصل‌ضرب چند جمله‌ی اول دنباله $۲^{۶۳}$ برابر جمله‌ی اول است؟

۶ روی اضلاع مربع ABCD به ضلع ۳، مطابق شکل نقاط M و N و P و Q را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که هر نقطه یکی از اضلاع مربع را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کند و با وصل کردن این نقاط به هم مربع جدیدی حاصل شود. همین عمل را متناوباً تکرار می‌کنیم.

(الف) نشان دهید دنباله‌ی مساحت‌های مربع‌ها، دنباله‌ای هندسی است. این دنباله را تشکیل دهید.

(ب) مجموع تمام مساحت‌های این مربع‌ها را به دست آورید.

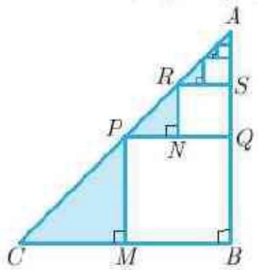


۷ جملات دوم، چهارم و پنجم یک دنباله‌ی حسابی، به ترتیب جملات متوالی یک دنباله‌ی هندسی هستند. قدر نسبت دنباله‌ی هندسی را به دست آورید. (دنباله‌ها ثابت نیستند)

۸ معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$۱ + x + x^۲ + \cdots = \frac{۱}{۲x} \quad (۰ < x < ۱)$$

۹ مطابق شکل مثلث ABC قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است. اگر M وسط BC و N وسط PQ و ... باشند، مجموع مساحت‌های مثلث‌های هاشورخورده چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟



۱

$$t_9 = \frac{1}{t_{13}} \Rightarrow t_9 t_{13} = 1$$

$$\xrightarrow{\text{نکته ۲۳}} t_{11}^2 = 1 \Rightarrow t_{11} = \pm 1$$

۲

$$t_1 + t_2 + t_3 = 45 \ (\mathrm{I}) \qquad t_4 - t_1 = 135 \ (\mathrm{II})$$

$$(\mathrm{I}) \Rightarrow a + aq + aq^2 = 45$$

$$(\mathrm{II}) \Rightarrow aq^3 - a = 135$$

طرفین رابطه‌ی (II) را بر رابطه‌ی (I) تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{a(q^3 - 1)}{a(q^2 + q + 1)} = \frac{135}{45}$$

$$\Rightarrow \frac{(q-1)(q^2+q+1)}{(q^2+q+1)} = 3 \Rightarrow q = 4$$

$$(\mathrm{I}) \Rightarrow a(1 + 4 + 4^2) = 45 \Rightarrow a = \frac{45}{21}$$

(قدر نسبت $= q$)

۳

$$15t_1 + 2t_2 = t_3, \quad \frac{t_8}{t_6} = ?$$

$$15a + 2ar = ar^2$$

$$r^2 - 2r - 15 = 0 \Rightarrow (r-5)(r+3) = 0$$

$\Rightarrow r = 5$ یا $r = -3$

$$\frac{t_8}{t_6} = \frac{ar^7}{ar^5} = r^2$$

$$\frac{t_8}{t_6} = \begin{cases} 25 \\ 9 \end{cases}$$

٤

جمله‌ی اول برابر مجموع یک جمله‌ی اول است!

یعنی $a = S_1 = 3 - 1 = 2$

مجموع دو جمله‌ی اول برابر است با S_2

$$a + ar = S_2 \Rightarrow 2 + 2r = 8$$

$$\Rightarrow r = 3$$

دنباله: $2, 6, 18, \cdots$

۵

$$r = 4 \quad , \quad a = 2$$

حاصل‌ضرب n جمله‌ی اول $= a \times ar \times ar^2 \times \cdots \times ar^{n-1}$

$$= a^n \times r^{1+2+\cdots+(n-1)}$$

$$= a^n \times r^{\frac{(n-1)n}{2}}$$

$$\Rightarrow 2^n \times 4^{\frac{(n-1)n}{2}} = 2^{63} \times 2$$

$$\Rightarrow 2^n \times 2^{n(n-1)} = 2^{64}$$

$$\Rightarrow n + n^2 - n = 64 \Rightarrow n = 8$$

حاصل‌ضرب ۸ جمله‌ی اول 2^{63} برابر جمله‌ی اول است.

۶

(الف) ابتدا طول ضلع MN را به کمک فیثاغورس به دست می‌آوریم.

$$MB = 2 \quad , \quad BN = 1$$

$$MN = \sqrt{MB^2 + BN^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

$$\frac{MN}{AB} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

یعنی در هر مرحله طول ضلع مربع $\frac{\sqrt{5}}{3}$ طول ضلع مربع در مرحله‌ی قبل است. یعنی مساحت هر مربع $\frac{5}{9}$ مساحت مربع قبل از خود است. مساحت‌های مربع‌ها یک دنباله‌ی هندسی به صورت زیر تشکیل می‌دهند.

$$9, 5, 5 \times \frac{5}{9}, 5 \times \frac{5}{9} \times \frac{5}{9}, \cdots$$

$$a = 9 \qquad r = \frac{5}{9}$$

(ب)

$$S = 9 + 5 + \frac{5^2}{9} + \frac{5^3}{9^2} + \cdots$$

طرفین را در $\frac{5}{9}$ ضرب می‌کنیم. $\frac{5}{9}S = 5 + \frac{5^2}{9} + \frac{5^3}{9^2} + \cdots$

طرفین را از هم کم می‌کنیم. $S - \frac{5}{9}S = 9$

$$\Rightarrow \frac{4}{9}S = 9 \Rightarrow S = \frac{81}{4}$$

۷

جملات دنباله‌ی حسابی را به صورت $t_2 = a + d$ و $t_4 = a + 3d$ و $t_5 = a + 4d$ در نظر می‌گیریم. حال چون این‌ها جملات متوالی یک دنباله‌ی هندسی هستند پس مربع وسطی با حاصل‌ضرب دو تای دیگر برابر است یعنی:

$$(a + 3d)^2 = (a + d)(a + 4d)$$

$$\Rightarrow a^2 + 6ad + 9d^2 = a^2 + 5ad + 4d^2$$

$$\Rightarrow 5d^2 = -ad \Rightarrow a = -5d$$

جملات را دوباره می‌نویسیم:

$$t_2 = a + d = -4d$$

$$t_4 = a + 3d = -2d$$

$$t_5 = a + 4d = -d$$

قدر نسبت دنباله‌ی هندسی از تقسیم دو جمله‌ی متوالی به دست می‌آید.

$$r_{\text{هندسی}} = \frac{-d}{-2d} = \frac{1}{2}$$

۸

$$\begin{array}{rl} & 1 + x + x^2 + \cdots = \dfrac{1}{2x} \\ - & x + x^2 + x^3 + \cdots = \dfrac{1}{2} \\ \hline & 1 = \dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{2} \\ & \Rightarrow \dfrac{1}{2x} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow x = \dfrac{1}{3} \end{array}$$

دقت کنید که محاسبه‌ی مجموع بی‌شمار جمله‌ی دنباله‌ی هندسی به خاطر رعایت شرط $0 < x < 1$ درست است.

۹ P وسط AC و M وسط BC است بنابراین $PM = \frac{AB}{2}$. مثلث‌های $P\hat{M}C$ و $A\hat{B}C$ متشابهند و نسبت تشابه $\frac{1}{2}$ است. بنابراین $\frac{S_{P\hat{M}C}}{S_{A\hat{B}C}} = \frac{1}{4}$. در هر مرحله مساحت هاشور $\frac{1}{4}$ مرحله‌ی قبل از خود است. اگر مساحت $A\hat{B}C$ را برابر ۱ در نظر بگیریم نسبت مساحت‌های هاشورخورده دنباله‌ای هندسی به صورت زیر تشکیل می‌دهد.

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{4^2}, \frac{1}{4^3}, \cdots$$

$$\begin{array}{l} S = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{64} + \cdots \\ 4S = 1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{16} + \cdots \\ \hline 4S - S = (1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{16} + \cdots) - (\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{64} + \cdots) \\ \Rightarrow 3S = 1 \Rightarrow S = \dfrac{1}{3} \end{array}$$

۱ بین $\frac{۱}{۲۷}$ و ۸۱، شش واسطه‌ی هندسی درج کرده‌ایم. واسطه‌ی چهارم چقدر از واسطه‌ی سوم بزرگ‌تر است؟

۲ بین $۳a$ و $۳۸۴a$ چند جمله می‌توان درج کرد به طوری که [illegible] ند؟

۳ [illegible]

۴ [illegible]

۵ [illegible]
۱۷ [illegible]

۶ [illegible]
۱۰۲۴ است. جمله‌ی وسطی چند است؟

۷ مجموع ۸ جمله‌ی اول یک دنباله‌ی هندسی، ۸۲ برابر مجموع ۴ جمله‌ی اول آن است. قدر نسبت دنباله را مشخص کنید.

۸ در یک دنباله‌ی هندسی ۲ برابر جمله‌ی اول به‌علاوه‌ی جمله‌ی دوم برابر جمله‌ی سوم است. اگرجمله‌ی اول مخالف صفر باشد، قدر نسبت دنباله را تعیین کنید.

۹ اگر $\frac{۱}{b-a}$ و $\frac{۱}{۲b}$ و $\frac{۱}{b-c}$ جملات متوالی یک دنباله‌ی حسابی باشند ثابت کنید a و b و c جملات متوالی یک دنباله‌ی هندسی هستند.

۱۰ اگر a و b و c به ترتیب هم جملات متوالی یک دنباله‌ی حسابی باشند و هم جملات متوالی یک دنباله‌ی هندسی چه ارتباطی بین a و b و c وجود دارد؟

۱۱ در یک دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت $r \neq \pm ۱$، حاصل $\frac{S_{۲n}}{S_n}$ را بر حسب n و r به دست آورید.

۱۲ معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$۱ + x + x^{۲} + \cdots = \frac{۲}{x} \qquad ۰ < x < ۱$$

۱۳ مجموع ۳ جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی برابر ۲۵۸ است. اگر این ۳ عدد به ترتیب جملات اول، دوم وهشتم یک دنباله‌ی حسابی باشند آن‌ها را بیابید.

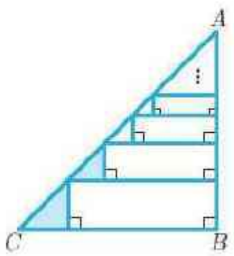
۱۴ جملات دوم، چهارم و هشتم یک دنباله‌ی حسابی جملات متوالی یک دنباله‌ی هندسی هستند. قدر نسبت دنباله‌ی هندسی را بیابید.

۱۵ قدر نسبت یک دنباله‌ی حسابی برابر ۴ است. اگر به جملات اول، دوم و سوم آن به ترتیب اعداد ۱، ۳ و ۶ را اضافه کنیم، دنباله‌ای هندسی تشکیل می‌شود. جملات عمومی دنباله‌ها را بنویسید.

۱۶ مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله‌ی هندسی از فرمول $S_n = 2^{n+2} - 4$ به دست می‌آید. دنباله را مشخص کنید.

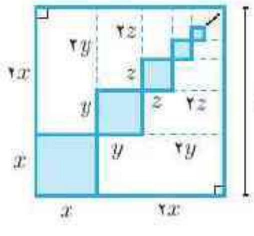
۱۷ روی اضلاع مربع ABCD به ضلع ۴، نقاط M و N و P و Q را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که هر نقطه یکی از اضلاع مربع را به نسبت ۱ به ۳ تقسیم کند و با وصل کردن این نقاط به هم، مربع جدیدی حاصل شود. همین کار را به تکرار در مورد هر مربع به وجود آمده‌ای ادامه می‌دهیم. مجموع مساحت‌های تمام مربع‌های پدید آمده را بیابید.

۱۸ مطابق شکل مثلث ABC قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است. اگر قاعده‌ی هر مثلث قائم‌الزاویه هاشورخورده، $\frac{1}{4}$ پاره‌خط افقی که قاعده‌اش بر روی آن قرار دارد باشد مساحت هاشورخورده چه کسری از مساحت $A\hat{B}C$ است؟



۱۹ توپی داریم که از هر ارتفاعی که رها می‌شود پس از برخورد با زمین تا $\frac{3}{5}$ ارتفاع قبلی خود بالا می‌آید. اگر این توپ از ارتفاع ۱۰ متری رها شود، کل مسافت طی شده در این رفت و برگشت‌ها را حساب کنید.

۲۰ برای شکل زیر یک معادل به صورت مجموع بی‌شمار جمله‌ی دنباله‌ی هندسی بنویسید. (مطابق بخش بیشتر بدانیم عمل کنید.)



پاسخ تمرین — درس ٤

١) ٢

٢) ۶

٤) ٣

۵) ۱۶

۶) ۴

٧) $\pm$٣

٨) ۱- و ٢

١٤) ٢ یا ١

١٧) $\frac{۱۲۸}{٣}$

١٨) $\frac{۱}{٧}$

٢١) ۴۰m

۱ سه مجموعه‌ی A، B و C را در نظر بگیرید. کدام یک از گزینه‌ها، برابر مجموعه اعضایی است که دست کم عضو دو تا از این سه مجموعه است؟ «المپیاد ریاضی در ایران دوره‌ی ۳۰»

الف) $(A\cup B\cup C)-(A\cap B\cap C)$ ب) $A\cup B\cup C\cup(A\cap B\cap C)$ ج) $(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(A\cap C)$

د) $(A\cup B)\cap(B\cup C)\cap(A\cup C)$ هـ) گزینه‌های ج و د هر دو صحیح هستند

۲ A، B، C و D مجموعه‌هایی هستند که در روابط زیر صدق می‌کنند. کدام گزینه لزوماً درست است؟ «المپیاد ریاضی در ایران دوره‌ی ۲۵»

$$\begin{cases} A\cup C=B\cup C \\ A\cap C=(B\cap C)\cup D \end{cases}$$

الف) $D=\varnothing$

ب) $C=D$

ج) $A\subseteq B$

د) $A=B\cup D$

هـ) $D=A\cap B$

۳ A، B و C سه زیرمجموعه‌ی دلخواه مجموعه‌ی اعداد طبیعی هستند. با دو عمل اجتماع و مکمل، حداکثر چند مجموعه‌ی مختلف می‌توان ساخت؟ «المپیاد ریاضی در ایران دوره‌ی ۲۲»

الف) ۷ ب) ۸ ج) ۱۸ د) ۱۲۸ هـ) ۲۵۶

٤ مجموعه‌ی $\{۶, ۷, ۱۲, ۱۳, ۲۱, ۲۵, ۳۰, ۳۱\}$ چند زیرمجموعه دارد که حاصل جمع اعداد آن زوج است؟

«المپیاد کامپیوتر در ایران دوره‌ی ۱۹»

الف) ۱۶ ب) ۳۲ ج) ۶۴ د) ۹۶ هـ) ۱۲۸

۵ فرض کنید $A_1, A_2, \ldots, A_n$ زیرمجموعه‌هایی از مجموعه‌ی $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$ باشند، به طوری که اشتراک هر دو زیرمجموعه‌ی A_i و A_j حداقل ۲ عضو دارد. در این صورت بیش‌ترین مقدار n کدام یک از مقادیر زیر است؟ «المپیاد ریاضی در ایران دوره‌ی ۱۶»

الف) ۲۱ ب) ۲۲ ج) ۲۳ د) ۲۴ هـ) ۲۵

۶ A، B و C سه مجموعه‌ی دلخواه هستند و از سطر دوم به بعد، هر مجموعه تفاضل دو مجموعه‌ی بالای سر خودش است (سمت چپ منهای سمت راست). مثلاً $D=A-B$. کدام گزینه حتماً درست است؟ «المپیاد ریاضی در ایران دوره‌ی ۲۲»

A	B	C
D	E	
F		

الف) $F\subseteq C$

ب) $B\subseteq F$

ج) $F\subseteq A\cap C$

د) $A\cap C\subseteq F$

هـ) $D\cap C\subseteq F$

۷ A، B و C سه مجموعه هستند و می‌دانیم تعداد اعضای $A-B$، $A-C$، $B-C$، $B-A$، $C-A$ و $C-B$، به ترتیب ۳، ۲، ۲، ۴، ۲ و ۵ است. تعداد اعضای $A-C$ چند است؟ «المپیاد ریاضی در ایران دوره‌ی ۲۲»

الف) صفر ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ هـ) ۴

۸ در ابتدای روز اول یک ویروس موذی وارد بدن شده است. در انتهای هر روز، هر ویروس موذی که k روز عمر کرده باشد، k ویروس موذی جدید تولید می‌کند و خودش نیز به زندگی ادامه می‌دهد. در انتهای روز ششم چند ویروس موذی متولد می‌شود؟

«المپیاد ریاضی در ایران دوره‌ی ۳۴»

الف) ۸۹ ب) ۱۱۲ ج) ۱۲۸ د) ۱۴۴ هـ) ۲۴۳

۹ در برکه‌ای ۷ قطعه سنگ وجود دارد که از چپ به راست با اعداد ۱ تا ۷ شماره‌گذاری شده‌اند. قورباغه‌ای روی سنگ شماره‌ی یک نشسته است. فاصله‌ی سنگ‌ها به گونه‌ای است که اگر قورباغه روی سنگ i اُم باشد می‌تواند حداکثر تا i سنگ جلو بپرد. به چند طریق ممکن است قورباغه، بدون برگشت به سمت چپ، به سنگ شماره‌ی ۷ برود؟ «المپیاد ریاضی در ایران دوره‌ی ۲۳»

الف) ۱۰ ب) ۱۱ ج) ۱۲ د) ۱۳ ه) ۱۴

الف) ۲ ب) ۴ ج) ۶ د) ۸ ه) ۹

$$,۲,۳,\ldots,۱۰,۱۱,۱۲,\ldots,۱۳۸۲,۱۳۸۳$$

از چپ شروع می‌کنیم و به تعداد رقم یکان عدد فعلی جلو می‌رویم، بنابراین اعدادی که به آن‌ها برمی‌خوریم عبارتند از: $۱,۲,۴,۸,\ldots$.
تعداد این اعداد چند تاست؟ «المپیاد کامپیوتر در ایران دوره‌ی ۱۵»

الف) ۲۳۱ ب) ۲۴۶ ج) ۳۴۵ د) ۲۲۷ ه) ۲۷۸

۱۲ دنباله‌ی $a_n = \sqrt{۱۲۳ + n^۲}$ و $b_n = n + ۳$ $(n = ۱,۲,۳,\ldots)$ داده شده‌اند. فرض کنید که r کوچک‌ترین عدد صحیح باشد که $a_r < b_r$ و s نیز بزرگ‌ترین عدد صحیح باشد که $a_s > b_s + ۱$. در این صورت $r + s$ برابر است با: «المپیاد ریاضی در ایران دوره‌ی ۱۵»

الف) ۳۰ ب) ۳۱ ج) ۳۲ د) ۳۳ ه) ۳۸

۱۳ چند تا عدد صحیح x که $۹ < x < ۱۵$ وجود دارد که دنباله‌ی متناهی: $۱,۲,۶,۷,۹,x,۱۵,۱۸,۲۰$ مشتمل بر هیچ سه جمله‌ای نباشد که تشکیل یک تصاعد عددی بدهند؟ «المپیاد ریاضی در ایران دوره‌ی ۱۸»

الف) صفر ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) ۵

۱٤ دنباله‌ی $a_۱, a_۲, a_۳, \ldots$ «برگشتی خطی» نامیده می‌شود اگر و فقط اگر اعداد صحیح p و q موجود باشند که $a_{n+۲} = pa_{n+۱} + qa_n$. دو جمله‌ی بعدی در دنباله‌ی $۲,۵,۱۴,۴۱,\ldots$ کدام یک از دو عدد زیر است با این شرط که این دنباله «برگشتی خطی» باشد؟

«المپیاد ریاضی در ایران دوره‌ی ۱۸»

الف) ۲۸ و ۸۲ ب) ۲۸ و ۱۲۳ ج) ۱۳۶ و ۳۲۸ د) ۱۲۲ و ۳۶۵ ه) ۲۴۴ و ۴۸۷

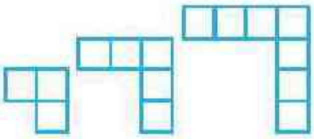
۱۵ جدول اعداد زیر را در نظر بگیرید:

حاصل جمع کلیه سطرهای از سطر اول تا سطر ۱۳۷۹ (با خود سطر ۱۳۷۹) برابر است با: «المپیاد ریاضی در ایران دوره‌ی ۱۹»

الف) ۶۹۰
ب) ۱
ج) صفر
د) ۱۳۷۹
ه) ۶۸۹

۱
۱ −۱
۱ −۱ ۱
۱ −۱ ۱ −۱
۱ −۱ ۱ −۱ ۱

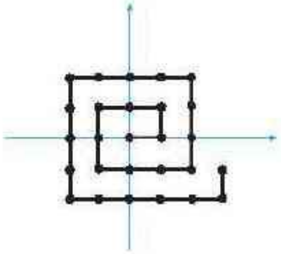
۱۶ شکل‌های زیر را با چوب کبریت ساخته‌اند. اگر ۵۰۰ تا چوب کبریت داشته باشیم تعداد مربع‌ها در بزرگ‌ترین شکل مشابهی که می‌توانیم بسازیم چند است؟ «المپیاد ریاضی در ایران دوره‌ی ۱۹»



الف) ۱۶۷
ب) ۱۶۶
ج) ۱۶۵
د) ۱۶۴
ه) هیچ‌کدام

۱۷ دنباله‌ای از اعداد حقیقی بدین شکل تعریف می‌شوند. $x_0 = 3$ و $x_1 = 8$ و برای هر $n \geq 1$، $x_{n+1} = 3x_n - 4x_{n-1}$. بطور مثال: $x_2 = 12, x_3 = 4, \dots$. در بین ۲۰۰۱ جمله‌ی ابتدای این دنباله از x_0 تا x_{2000} چند مضرب ۳ داریم؟ «المپیاد ریاضی در ایران دوره‌ی ۱۹»

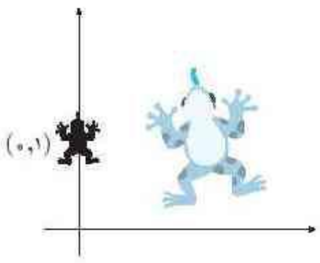
الف) ۹۹۹ ب) ۱۰۰۰ ج) ۱۰۰۱ د) ۱۵۰۰ ه) ۱۵۰۱



۱۸ حلزونی در صفحه‌ی مختصات با سرعت ۱ میلی‌متر بر ثانیه شروع به حرکت می‌کند. او حرکت خود را از مبدأ آغاز می‌کند و مسیری مشابه شکل روبه‌رو را طی می‌کند (محورهای مختصات بر حسب میلی‌متر مدرج شده‌اند). اگر حلزون حرکت خود را در لحظه‌ی $t = 0$ آغاز کرده باشد، در لحظه‌ی $t = 1381$ (بر حسب ثانیه) حلزون در چه نقطه‌ای قرار دارد؟ «المپیاد ریاضی در ایران دوره‌ی ۲۱»

(به عنوان مثال در لحظه‌ی $t = 5$ حلزون در نقطه‌ی $(-1, 0)$ و در لحظه‌ی $t = 10$ در نقطه‌ی $(2, 0)$ قرار دارد).

الف) $(10, -18)$ ب) $(-8, -18)$ ج) $(19, 12)$ د) $(17, -18)$ ه) $(19, -6)$



۱۹ یک قورباغه در نقطه‌ای به مختصات $(0, 1)$ از صفحه قرار دارد و هر بار در جهت عمود بر خطی که مبدأ مختصات را به مکان فعلی‌اش وصل می‌کند (طوری که مبدأ در سمت راستش قرار بگیرد) به اندازه‌ی فاصله‌ی همان لحظه‌اش از مبدأ، جهش می‌کند. اگر قورباغه پس از ۱۵ جهش به نقطه‌ی (a, b) برسد، a چند است؟ «المپیاد ریاضی در ایران دوره‌ی ۲۲»

الف) صفر ب) 256 ج) $-128\sqrt{2}$ د) -256 ه) -128

۲۰ اعداد طبیعی را مطابق الگوی مقابل در یک جدول قرار داده‌ایم. مثلاً ۱۴ در سطر دوم و ستون چهارم آمده است. مکان ۱۳۷۷ کدام است؟ «المپیاد ریاضی در ایران دوره‌ی ۱۷»

۱	۲	۶	۷	۱۵
۳	۵	۸	۱۴	
۴	۹	۱۳		
۱۰	۱۲			
۱۱				

الف) سطر ۲، ستون ۵۲
ب) سطر ۵۲، ستون ۲
ج) سطر ۲، ستون ۵۱
د) سطر ۵۱، ستون ۲
ه) هیچ‌کدام

۲۱ جمله‌ی ۱۳۸۰اُم در دنباله‌ی مقابل کدام است؟ $1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, \dots$ «المپیاد ریاضی در ایران دوره‌ی ۲۰»

الف) ۵۰ ب) ۵۱ ج) ۵۲ د) ۵۳ ه) ۵۴

را پوچ کنید! (یعنی تهی بودنشان را نتیجه بگیرید.)

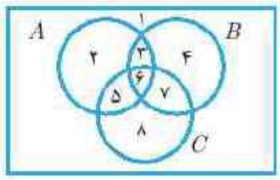
b. با استفاده از رابطه‌ی دوم جایگاه مجموعه‌ی D را در نمودار ون مشخص کنید.

c. جواب گزینه‌ی «د» می‌باشد.

* در صورت صلاحدید و داشتن حوصله می‌توانید به رابطه‌ی دوم $A\cup$ اضافه کرده و با استفاده از قوانین مجموعه‌ها به $A = B \cup D$ برسید.

۳ a. نمودار ون مربوط به سه مجموعه را رسم کنید.

b. ناحیه‌ی ۵ به صورت $(B \cup A' \cup C')'$ فقط با دو عمل اجتماع و متمم نمایش داده شده است.



c. سعی کنید هر یک از ناحیه‌های ۸گانه را فقط با دو عمل اجتماع و متمم نشان دهید.

d. هر زیرمجموعه‌ای از مجموعه آن ۸ ناحیه، می‌تواند جواب باشد.

e. جواب گزینه‌ی «ه» می‌باشد.

۴ a. یکی از اعضا مانند ۳۱ را کنار گذاشته و تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی هفت عضوی باقی‌مانده را بیابید.

b. تکلیف عضو آخر در هر یک از زیرمجموعه‌های قبلی را روشن کنید.

c. جواب گزینه‌ی «ه» می‌باشد.

۵ a. ثابت کنید اگر تمام زیرمجموعه‌های چهار، پنج و شش عضوی را انتخاب کنیم شرایط مسئله را دارد.

b. ثابت کنید که اگر زیرمجموعه‌ای دو یا سه عضوی را انتخاب کنیم بهینه نیست.

c. معلوم است که زیرمجموعه‌های صفر و یک عضوی نیز جزء منتخبین نمی‌باشد.

d. جواب گزینه‌ی «ب» می‌باشد.

۶ a. ثابت کنید D و E جدا از هم هستند.

b. ثابت کنید F همان D است.

c. جواب گزینه‌ی «ه» می‌باشد.

۷ a. نمودار ون مربوطه را رسم کنید.

b. سعی کنید با نوشتن اطلاعات مسئله که شامل پنج معادله‌ی دومجهولی می‌شود مقدار خواسته شده را به دست آورید.

c. جواب گزینه‌ی «ج» می‌باشد.

۸ a. در انتهای روز اول چند ویروس وجود دارد؟

b. با توجه به این که در روز دوم یک ویروس یک روزه و یک ویروس دو روزه داریم چند ویروس در انتهای آن روز خواهیم داشت؟

... حل را برای روزهای سوم تا

b. اگر فقط اعداد یک رقمی، دو رقمی و سه رقمی را بنویسیم بر روی هم $۴۵۰(۳) + ۴۵(۲) + ۴$ یعنی ۱۴۴۴ رقم نوشته‌ایم که از ۱۳۸۸ بیش‌تر است پس باید تعدادی از آن‌ها را کم کنیم. از انتهای اعداد به تعداد مورد نیاز رقم کم کنید تا به جواب برسید.

c. جواب گزینه‌ی «هـ» می‌باشد.

۱۱ a. دنباله رقم یکان نظم خاصی پیدا می‌کند آن را پیدا کنید.

b. در هر بازه‌ی ۲۰ تایی به غیر از بازه‌ی اول دقیقاً به ۴ عدد برخورد می‌کنیم و در بازه‌ی اول به ۵عدد، بنابراین با تقسیم اعداد از ۱ تا ۱۳۸۰ به بازه‌های ۲۰ تایی تعداد اعدادی که به آن‌ها برخورد کرده‌ایم را شمرده و عدد ۱۳۸۲ را به آن اضافه کنید.

c. جواب گزینه‌ی «هـ» می‌باشد.

۱۲ a. نابرابری $a_r < b_r$ را حل کرده و به $r > ۱۹$ برسید.

b. نابرابری $a_s > b_s + ۱$ را حل کرده و به $s < ۱۳٫۳۷۵$ برسید.

c. جواب گزینه‌ی «د» می‌باشد.

۱۳ a. x را برابر ۱۰ قرار داده و سه جمله که تشکیل تصاعد حسابی می‌دهند پیدا کنید.

b. x را برابر ۱۱، ۱۲ و ۱۳ قرار داده و قسمت قبل را تکرار کنید.

c. به ازای $x = ۱۴$ سه جمله‌ای که تشکیل تصاعد حسابی بدهد یافت نخواهد شد.

d. جواب گزینه‌ی «د» می‌باشد.

۱۴ a. مقدار n را برابر ۳ قرار داده و به معادله‌ی $۱۴ = ۵p + ۲q$ برسید.

b. مقدار n را برابر ۴ قرار داده و به معادله‌ای جدید برسید.

c. دستگاه دو معادله دو مجهول به دست آمده را حل کرده و p و q را بیابید.

d. با پیدا کردن p و q مقادیر a_5، a_6، ... را بیابید.

e. جواب گزینه‌ی «د» می‌باشد.

۱۵ a. مجموع اعداد موجود در سطر i اُم یک بار وقتی i زوج است و یک بار وقتی i فرد است را یافته و حاصل جمع کل را بیابید.

b. جواب گزینه‌ی «الف» می‌باشد.

۱۶ a. از روی الگوی نوشته شده، تعداد مربع‌ها در شکل n اُم و سپس تعداد چوب کبریت‌ها در آن شکل را به ترتیب برابر $(۲n + ۱)$ و $۳(۲n + ۱) + ۱$ به دست آورید.

b. نابرابری $۳(۲n + ۱) + ۱ \leq ۵۰۰$ را حل کرده و به جواب برسید.

c. جواب گزینه‌ی «ج» می‌باشد.

۱۷ a. چند جمله‌ی اول را نوشته و مضرب ۳ بودن آن‌ها را بررسی کنید.

b. ثابت کنید a_i ها به ازای i های زوج مضرب ۳ هستند.

c. جواب گزینه‌ی «ج» می‌باشد.

۱۸ a. فرض کنید بعد از گذشت a_i ثانیه در نقطه‌ی $(i, ۰)$ باشد، در این صورت a_1 ، a_2، a_3، ... و a_n را پیدا کنید.

b. به ازای $n = ۱۹$ حاصل $a_{۱۹}$ برابر ۱۳۸۷ به دست می‌آید.

c. با برگشتن ۶ واحد به عقب جواب را خواهید یافت.

d. جواب گزینه‌ی «هـ» می‌باشد.

۱۹ a. چند حرکت نخست (مثلاً ۶ حرکت) قورباغه را ترسیم کنید.

b. با الگو گرفتن از شکل به دست آمده جایگاه قورباغه در حرکت پانزدهم را پیش‌بینی کرده و به جواب برسید.

c. جواب گزینه‌ی «هـ» می‌باشد.

۲۰ a. قطرها را شماره‌گذاری کرده و نتیجه بگیرید که اولاً اعداد قطر i اُم از بالا به پایین است اگر i زوج باشد و از پایین به بالا است اگر i فرد باشد و ثانیاً بزرگ‌ترین عدد موجود در قطر i اُم $\frac{i(i+۱)}{۲}$ می‌باشد.

b. بزرگ‌ترین عدد موجود در قطر ۵۲ را بیابید (به جواب خیلی نزدیک شده‌اید).

c. جواب گزینه‌ی «د» می‌باشد.

۲۱ a. آخرین ۴، آخرین ۵، ...، آخرین n، جمله‌ی چندم دنباله می‌باشد؟

b. با فرض این که متوجه شده‌اید که آخرین n، جمله‌ی $\frac{n(n+۱)}{۲}$ اُم از دنباله است آخرین ۵۲ جمله‌ی چندم خواهد بود؟

c. جواب گزینه‌ی «د» می‌باشد.

یادداشت