مجموعه‌ها

فصل ۱

۱. تعریف و شناخت مجموعه (set)

بچه‌ها! آلمانی‌ها در همه‌جای دنیا به نظم و انضباط کاری مشهورن. اونا خودشونو خدای دسته‌بندی و طبقه‌بندی می‌دونن. از همین جا بود که در دانشگاه برلین جناب وایرشتراس[1] و دِدِکیند[2] و از همه مهم‌تر جورج کانتور[3]، که در سال ۱۹۱۸ عمرش رو داد به شما، به شرح و توضیح مفهومی به نام مجموعه پرداختند. دکتر مصاحب، ریاضی‌دان فوق‌العاده ایرانی، در کتابش این جملهٔ عجیب رو نوشته: «ریاضیات، چیزی جز تئوری مجموعه‌ها نیست!»

ببینین! مجموعه‌ها که در انگلیسی آن را set می‌نامند، در واقع از تعریف‌نشده‌هاست. اما آن را گروهی (گردایه‌ای) از اشیا دو به دو متمایز و مشخص توصیف می‌کنند. علامت مجموعه «آکولاد» است و مجموعه را با حروف بزرگ انگلیسی نام‌گذاری می‌کنند. بین اعضای مجموعه از «ویرگول» استفاده می‌شود.

مثال: $A = \{$بستنی، مرتضی پاشایی، ۵$\}$

در این نمونه، نمادهای آکولاد، ویرگول و حرف بزرگ انگلیسی به درستی رعایت شده است.

بچه‌ها! در توصیف مجموعه، گفته شد که باید اعضا دو به دو متمایز باشن. این یعنی چه؟

یعنی عضو تکراری در مجموعه جایی ندارد. عضوهای تکراری خط می‌خورن و در تعداد اعضای مجموعه شمرده نمی‌شن.

مثال: $B = \{۵, ۵, \frac{۱۰}{۲}\} = \{۵\}$

پس مجموعه B یک‌عضوی است.

و باز در توصیف مجموعه به نکته ظریف دیگری نیز اشاره شده؛ اعضا باید مشخص باشند. این یعنی چه؟

یعنی نباید مجموعه به شکلی باشد که عضو بودن یا نبودنِ بعضی از اعداد، اشیا و ... در مجموعه مشخص نباشد و وجود یا عدم وجود عضوها سلیقه‌ای باشد. برای مثال گروه شاعران برجسته ایران از نظر ریاضی مجموعه نیست، چرا که اعضای آن به دقت و درستی مشخص نیست. آیا «سنایی» از اعضای این مجموعه است؟ بعضی از شاعران معاصر چطور؟ اصلاً خود شما چطور؟ همان‌طور که می‌بینید دقیقاً اعضای این گروه مشخص نیستند، پس این گروه مجموعه ریاضی محسوب نمی‌شود.

1- Karl Weierstrass
2- Richard Dedekind
3- George Cantor

(هر سه ریاضی‌دان‌های آلمانی هستند.)

مثال: کدام‌یک از گروه‌های زیر به نظر شما مجموعه‌اند؟

الف) گروه گل‌های زیبا ب) سه فضانوردی که اولین بار به کره ماه قدم گذاشتند

ج) بهترین کتاب آموزش ریاضی سال نهم د) اعداد خیلی بزرگ

: با این‌که لطف شما شامل حال من شده و احتمالاً گزینه (ج) را انتخاب کردین و معتقدید این کتاب، بهترین کتاب آموزش ریاضی سال نهم هست، اما احترام به همکاران عزیزم باعث میشه نتونم این گزینه رو بپذیرم! گل‌های زیبا که کاملاً سلیقه‌ایه و گزینه درستی نیست، اعداد خیلی بزرگ هم در موضوعات مختلف تفاوت می‌کنه. مثلاً برای یک سنگ‌فروش ۲۰ کیلوگرم سنگ، عدد خیلی بزرگی نیست اما برای یک طلافروش ۲۰ کیلو طلا یک عدد باورنکردنیه. سه فضانوردی که اولین بار به کره ماه قدم گذاشتند حتی اگه ما از آن بی‌اطلاع باشیم افرادی مشخص هستند و انتخاب آن‌ها سلیقه‌ای نیست. پس پاسخ سؤال، گزینه (ب) بود. از همراهیتون در اولین تکنیک کتاب متشکرم. تا بعد.

تمرین

۱- **کدام گروه از نظر علم ریاضیات مجموعه به حساب می‌آید؟**

۱) گروه پلیس‌های وظیفه‌شناس راهنمایی و رانندگی تهران بزرگ ۲) گروه سه عدد اول فرد

۳) گروه اعداد اول زوج ۴) گروه اعداد اعشاری کوچک

۲- **ایراد نمایش هریک از مجموعه‌های زیر را در کنار آن بنویسید.**

$a = \{۱,۲,۳\}$

$B = \{$ گوسفند ـ مورچه‌خوار $\}$

$C = (۳,۵,۹)$

۲. عضویت، عدد اصلی و مجموعه تهی

جوزپه پئانو[1] که نامش شباهت‌هایی هم به پیانو دارد، اولین کسی است که علامت $\in$ را به عنوان علامت «عضویت» برگزید. به کاربرد این علامت دقت کنید:

$A = \{۲,۵,م\}$

$۲ \in A \ , \ ۵ \in A \ , \ م \in A$

و البته طبیعی است که: $۷ \notin A$

پس؛ مثلاً عدد ۵ عضو مجموعه A است اما ۷ به مجموعه A تعلق ندارد یا عضو مجموعه A نیست.

حالا چرا جوزپه این علامت را انتخاب کرد؟ چون در انگلیسی عضو یا عامل با کلمه Element مشخص می‌شود. به شباهت حرف «E» در این کلمه و «$\in$» دقت کنید خودتون داستانو متوجه می‌شین.

تعداد عضوهای متمایز یک مجموعه را عدد اصلی آن مجموعه می‌نامیم. مثلاً اگر تعداد اعضای متمایز مجموعه A چهار تا باشد می‌گوییم عدد اصلی مجموعه A چهار است و می‌نویسیم $n(A) = ۴$ (یعنی: number of (A) is 4).

مثال: $C = \{۷,۷,۷,۷\} \Rightarrow n(C) = ۱$ $\quad$ $B = \{۵,۲,۹\} \Rightarrow n(B) = ۳$

1- Giuseppe Peano (ریاضی‌دان ایتالیایی)

در قسمت قبلی متوجه شدیم عضوهای تکراری در مجموعه جایی ندارن؛ در قسمت ۴ هم بیش‌تر در این‌باره تمرین می‌کنیم.
بچه‌ها! در گذشته مجموعه‌ای را که هیچ عضوی نداشت، با حرف یونانی "Λ"، که یادآور کاسهٔ وارون شده است نمایش می‌دادن. امروزه مجموعه‌ای را که شامل هیچ عضوی نباشد مجموعه تهی می‌نامیم و آنرا با یکی از علامت‌های $\varnothing$ (که یک حرف یونانی است و «فی» خوانده می‌شود) و یا $\{\ \}$ نمایش می‌دهیم. عدد اصلی مجموعه تهی صفر است.

مثال: مجموعه اعداد طبیعی منفی $= \{\ \}$
مجموعه گوسفندهای دوزیست $= \{\ \}$

دقت کنید که $\{\circ\}$ مجموعه تهی نیست بلکه مجموعه‌ای یک عضوی است که عضو آن عدد صفر است. همچنین اگر مجموعه تهی را مانند یک کیسه خالی درنظر بگیریم آن‌گاه $\{\{\ \}\}$ یک کیسه است که داخل آن یک کیسهٔ خالی است (به کابینت‌های مامان مراجعه کنید!) پس $\{\{\ \}\}$ یا $\{\varnothing\}$ برابر با مجموعه تهی نمی‌باشد بلکه مجموعه‌ای یک‌عضوی است. بنابراین:
$\{\{\ \}\}=\{\varnothing\}\neq\varnothing \quad , \quad \{\circ\}\neq\varnothing$

تمرین

۳- با توجه به مجموعه $D=\{۵,۷,۹\}$ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) $۵\notin D$ ب) $۷\in D$ ج) $\frac{۱۸}{۲}\in D$ د) $۶\notin D$

۴- عدد اصلی مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

$A=\{۵,۵,۵\}$ $B=\{۷,۲,\frac{۱۴}{۲}\}$ $C=\{۳,۴,...,۱۰\}$

۵- کدام مجموعه تهی است؟ آن را با علامت ✓ مشخص کنید.
الف) مجموعه اعداد اول زوج ب) مجموعه اعداد طبیعی منفی ج) $\{\varnothing\}$

۶- مجموعه A چند عضو دارد؟ $A=\{۲^{۴۰۰}+۲ , ۲^{۴۰۰}+۴ , ۲^{۴۰۰}+۶ , ..., ۲^{۴۰۱}\}$ *(انرژی اتمی ۹۰)*

۱) $۲^{۳۹۹}$ ۲) $۲^{۴۰۰}$ ۳) ۴۰۰ ۴) ۳۹۹

۳. مجموعه درون مجموعه

ممکنه یه مجموعه داخل مجموعهٔ دیگه‌ای باشه. مثال: $A:\{\{۱,۲\}\}$
در این صورت مجموعه A تنها ۱ عضو دارد و آن $\{۱,۲\}$ است؛ بنابراین $\{۱,۲\}\in A$.
اما مثلاً $۱\notin A$ یا $۲\notin A$.

مثال: به مجموعهٔ مقابل توجه کن و به سؤالات زیر پاسخ بده. $B:\{\{۱,۲,۳\},\{۵\},۷\}$
الف) به نظر شما مجموعه B چندعضوی است؟
ب) کدام‌یک از عبارات زیر درست و کدام نادرست است؟

$۱\in B$ $۵\in B$ $\{۵\}\in B$ $\{۷\}\in B$
$۷\in B$ $\{۱,۲,۳\}\in B$ $۲\notin B$

پاسخ: الف) مجموعهٔ B سه‌عضوی است: $\{۱,۲,۳\} , \{۵\} , ۷$

ب) چهار عبارت $\{۱,۲,۳\}\in B , ۲\notin B , ۷\in B , \{۵\}\in B$ درست بودند و بقیه نادرست.

تمرین

۷- در مورد مجموعهٔ $A=\{۳,\{۵\},\{۱,۲\}\}$ کدام گزینه صحیح نیست؟

۱) $۳\in A$ ۲) $۵\notin A$ ۳) $\{۱,۲\}\in A$ ۴) $۲\in A$

۴. حذف عضوهای تکراری در مجموعه

فکر کنم خودت می‌دونی که: عضوهای تکراری در مجموعه‌ها خط می‌خورن و جایی در دل مجموعه ندارن. برای این‌که در این نکته به تسلط بِرسی، به سوال زیر پاسخ بده ببینیم از پسِ چندتاش برمیای.

مثال: مجموعه‌های زیر چند عضویند؟

$D=\{\{۸\},\{۸,۸\},\{۸,۸,۸\}\}$ $C=\{\{\ \},\varnothing,\{\varnothing\}\}$ $B=\{۵,\{۵\}\}$ $A=\left\{۷,۸-۱,\frac{۱۴}{۲}\right\}$

: مجموعهٔ A یک‌عضوی است، زیرا $\frac{۱۴}{۲}=۸-۱=۷$ پس تنها یک عضو شمرده می‌شود: $n(A)=۱$

مجموعهٔ B دوعضوی است، زیرا ۵ با $\{۵\}$ تفاوت دارد: $n(B)=۲$

مجموعهٔ C دوعضوی است زیرا $\varnothing=\{\ \}$ اما $\{\varnothing\}\neq\varnothing$ یعنی دو عضو اول تکرارایند؛ اما عضو سوم با آن‌ها تفاوت دارد پس:

$C=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ و $n(C)=۲$

در مجموعهٔ D که گُلِ سوالات این بخشه، ابتدا در عضو دوم و عضو سوم که خودشان مجموعه‌اند، عضوهای تکراری خط می‌خوره یعنی:

$D=\left\{\{۸\},\{۸,\cancel{۸}\},\{۸,\cancel{۸},\cancel{۸}\}\right\}$

پس $D=\{\{۸\},\{۸\},\{۸\}\}$؛ حالا باز سه عضو تکراری دیده می‌شه. پس:

$D=\left\{\{۸\},\cancel{\{۸\}},\cancel{\{۸\}}\right\}=\{\{۸\}\}$

یعنی مجموعهٔ D یه مجموعهٔ یک‌عضوی است: $n(D)=۱$

تمرین

۸- مجموعهٔ زیر چند عضو دارد؟ *(مسابقات علمی منطقه ۱۴)*

$\left\{۱,۱,۱,۳,۳,\frac{۴}{۸},\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right\}$

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۸

۹- الف) مجموعهٔ حروف عبارت «کشتم شپش شپش کش شش پا را» چندعضوی است؟

ب) مجموعهٔ حروف عبارت «سر بازی سرسره بازی سربازی سر سربازی را شکست» چندعضوی است؟

۵. مجموعه‌های مساوی و هم‌ارز

دو مجموعه را که عضوهایشان یکسان باشد مساوی می‌نامیم. مثلاً:

$A=\{۵,۹\}$, $B=\{۵,۹\}\Rightarrow A=B$

اگر تعداد عضوهای متمایز دو مجموعه برابر باشد، این دو مجموعه را هم‌ارز می‌نامیم.

مثلاً مجموعه‌های C و D هم‌ارزند.

C = {پلنگ صورتی، مورچه‌خوار}
D = {آزمون ورودی، مبتکران}
$\Rightarrow n(C) = n(D) = ۲$

در مجموعه‌ها جابه‌جایی اعضا تأثیری در مجموعه ندارد.

مثال: $\{۱,۷\} = \{۷,۱\}$

تمرین

۱۰- اگر دو مجموعه $A = \{-۲, x-y\}$ و $B = \{۱۲, x+y\}$ با هم برابر باشند $\frac{x}{y}$ چیست؟

۱۱- اگر $\{۱, \{۰, x+۱\}, ۳\} = \{۱, x+y-۱, \{۰\}\}$، حاصل $x^۳ - y$ چیست؟

۱۲- به ازای چند مقدار x دو مجموعه $\{۱, x, x^۲\}$ و $\{y, y^۲\}$ می‌توانند با هم مساوی شوند؟

۶. مجموعه‌های معروف

مجموعه‌های معروف را با حروفی مشخص نامگذاری می‌کنند:

اعداد طبیعی: $N = \{۱,۲,۳,...\}$

اعداد زوج طبیعی: $E = \{۲,۴,۶,۸,...\}$

اعداد فرد طبیعی: $O = \{۱,۳,۵,۷,...\}$

اعداد حسابی: I یا $W = \{۰,۱,۲,۳,...\}$

اعداد صحیح: $Z = \{...,-۲,-۱,۰,۱,۲,...\}$

اعداد گویا: $Q = \{\frac{a}{b} \mid a,b \in z \,,\, b \neq ۰\}$

اعداد گویا: اعدادی که بتوان آن‌ها را کسری نوشت به شرط آن‌که صورت و مخرج عدد صحیح باشد و مخرج صفر نباشد.

اعداد گنگ (اصم): Q' (اعدادی حقیقی که گویا نیستن. مانند: $\sqrt{۲}$ و π و $\sqrt{۳}$ و ...)

اعداد حقیقی: R تمام اعداد (شامل اعداد گویا و گنگ)

اعداد اول: $P = \{۲,۳,۵,۷,۱۱,...\}$

تمرین

۱۳- کدام‌یک از مجموعه‌های زیر مجموعه اعداد حسابی است؟ *(مسابقات علمی تهران)*

۱) $\{۱,۲,۳,...\}$ ۲) $\{۰,۱,۲,۳,...\}$ ۳) $\{...,-۱,۰,۱,...\}$ ۴) $\{-۱,-۲,-۳,...\}$

۱۴- اگر Q نمایش مجموعه اعداد گویا باشد کدام گزینه صحیح نیست؟ *(تیزهوشان ۹۱-۹۰)*

۱) $\sqrt{۸۰} \in Q$ ۲) $\sqrt{۱/۴۴} \in Q$ ۳) $۰ \in Q$ ۴) $\sqrt{۰/۴۹} \in Q$

۷. زیرمجموعه

اگر بگویند تمام زیرمجموعه‌های مجموعه $B=\{۳,۴,۵\}$ را بنویسید، منظور تمام مجموعه‌های کوچک‌تر یا مساوی با مجموعه B است که اعضای آن‌ها از بین عضوهای مجموعه B انتخاب شود.

$\{۵\},\{۴\},\{۳\}$: زیرمجموعه‌های ۱عضوی ‏ ‏ ‏ ‏ ‏ $\varnothing$: زیرمجموعه تهی

$\{۳,۴,۵\}$: زیرمجموعه ۳عضوی ‏ ‏ ‏ ‏ ‏ $\{۴,۵\},\{۳,۵\},\{۳,۴\}$: زیرمجموعه‌های ۲عضوی

چون عدد ۳ با بودن یا نبودن خود دو حالت ایجاد می‌کنه، عدد ۴ نیز همین‌طور و عدد ۵ هم به همین ترتیب:

بودن یا نبودن ‏ $\overset{۳}{\downarrow}$ ‏ $\overset{۴}{\downarrow}$ ‏ $\overset{۵}{\downarrow}$

۲ حالت × ۲ حالت × ۲ حالت $=۲^۳=۸$

پس اگر مجموعه‌ای n عضوی باشد، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۲^n می‌باشد.

طبیعی است که تهی زیرمجموعهٔ تمام مجموعه‌هاست و همچنین هر مجموعه‌ای، زیرمجموعهٔ خودش است.

تعبیر دیگه از زیرمجموعه اینه که هر وقت تمام عضوهای یه مجموعه در مجموعهٔ دیگه‌ای دیده شوند، مجموعهٔ اول، زیرمجموعهٔ مجموعهٔ دوم است.

علامت زیرمجموعه $\subseteq$ است. مثلاً در مجموعهٔ بالا داریم: $\{۳,۴\}\subset B$

دوست دارم به تعبیر زیرمجموعه در زندگی نیز با یک مثال دقت کنید:

فرض کنید سه دوست به نام‌های سارا، دیانا و تارا در یک آزمون بازیگری شرکت کرده‌اند؛ چه نتایجی ممکن است پیش آید؟

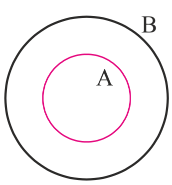
- یا هیچ کدام قبول نمی‌شوند. (به درد سیاهی لشگر هم نمی‌خورن): { }
- یا فقط یکی قبول می‌شود: (و پز می‌ده) {تارا، دیانا، سارا}
- یا دو نفر قبول می‌شوند (و سر یکی بی‌کلاه می‌مونه): {دیانا، تارا} و {دیانا، سارا} و {تارا ، سارا}
- یا هر سه نفر قبول می‌شوند (و جشن می‌گیرن): {تارا، دیانا، سارا}

در آخر به دو نکته مهم توجه کنید:

$A\subseteq B\,,\,B\subseteq A\ \Rightarrow\ A=B$ (تعریفی از تساوی دو مجموعه)

$A\subseteq B\ ,\ B\subseteq C\Rightarrow\ A\subseteq C$ (خاصیت تعدی)

اگر A زیرمجموعه B باشد در نمودار ون، به شکل مقابل نشان داده می‌شود:



اگر تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌ای داده شود و تعداد عضوها خواسته شود، با تجزیهٔ تعداد زیرمجموعه‌ها، توان ۲^n را یافته و عدد اصلی مجموعه را پیدا می‌کنیم.

مثال: مجموعه‌ای ۶۴ زیرمجموعه دارد. این مجموعه چندعضوی است؟

حل:

تعداد عضوهای مجموعه $۶۴=۲^n\Rightarrow ۲^۶=۲^n\Rightarrow n=۶$

تمرین

۱۵- تمام زیرمجموعه‌های مجموعه $A=\{۵,۷,۹\}$ را بنویسید.

۱۶- تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه ۵ عضوی چند تاست؟

۱۷- مجموعه‌ای ۱۲۸ زیرمجموعه دارد. این مجموعه چندعضوی است؟

۱۸- مجموعهٔ مقابل داده شده است، کدام‌یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟ $E=\{۱,۲,\{۱,۲\}\}$ *(المپیاد بلژیک)*

۱) $\{۱,۲\}\subset E$ ۲) $\{۱,۲\}\in E$ ۳) $\varnothing\subset E$ ۴) $\{۱\}\in E$

۱۹- اگر $A=\{۰,۱,\varnothing\}$، کدام رابطه درست است؟ *(نمونه دولتی ۸۱)*

۱) $\{۱\}\in A$ ۲) $\{۱\}\subset A$ ۳) $\{\varnothing\}\not\subset A$ ۴) $۱\subset A$

۲۰- مجموعهٔ $B=\{\{۵,۶,۷,...,۲۰\}\}$ چند زیرمجموعه دارد؟

۲۱- تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ زیر چند تاست؟ *(ورودی مفید ۸۰)*

$A=\{۳,۴,...,۸\}$

۱) ۶ ۲) ۳۲ ۳) ۱۶ ۴) ۶۴

۲۲- اگر هر عضو مجموعه A عضو مجموعه B باشد چه رابطه‌ای بین A و B وجود دارد؟

۲۳- با توجه به مجموعه A کدام گزینه صحیح نیست؟ $A=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\}$

۱) $\{\{\varnothing\}\}\subset A$ ۲) $\varnothing\in A$ ۳) $\{\{\{\ \}\}\}\not\subset A$ ۴) $\{\{\{\{\ \}\}\}\}\subset A$

۲۴- مجموعه $\{\{۹\},\{۹,۹,۹\}\}$ چند زیرمجموعه دارد؟

۸. زیرمجموعه محض

به تمام زیرمجموعه‌های یک مجموعه به‌جز خودش زیرمجموعه‌های محض می‌گوییم. پس تعداد زیرمجموعه‌های محضِ یک مجموعه، از تعداد زیرمجموعه‌های آن یک واحد کم‌تر است. یعنی: $۲^n-۱$

مثال: ۱- زیرمجموعه‌های محض مجموعهٔ $A=\{۳,۵\}$ را بنویسید.

۲- تعداد زیرمجموعه‌های محض مجموعه‌ای ۵ عضوی، چند تاست؟

۳- تعداد زیرمجموعه‌های محض مجموعه‌ای ۱۵ تاست؛ این مجموعه چندعضوی است؟

حل:

۱- $\varnothing,\{۳\},\{۵\}$

۲- $۲^۵-۱=۳۲-۱=۳۱$

۳- $۱۵+۱=۱۶$ $۱۶=۲^۴\ \Rightarrow$ پس مجموعه ۴عضوی است.

تمرین

۲۵- یک مجموعهٔ ۴عضوی چند زیرمجموعه محض دارد؟

۹. خیام و مثلثش

از افتخارات ایران، ریاضی‌دان شاعری به نام خیام است.

او سال‌ها قبل در علم حساب به مثلثی رسید که روز به روز خواص جالب‌تری از اون پیدا می‌شه. سال‌ها بعد در غرب ریاضی‌دانِ بزرگِ دیگری به نام پاسکال هم به این مثلث دست یافت. امروزه به افتخار هر دو، این مثلث را مثلث خیام ـ پاسکال می‌نامند.

ممکن است ما بخواهیم مثلاً تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی یک مجموعهٔ ۵ عضوی را پیدا کنیم. یکی از کاربردهای این مثلث یافتن پاسخ این سوال است.

مثلث خیام ـ پاسکال دارای دو ساق با اعداد ۱ است که مجموع هر دو عدد در وسط و زیر آن دو عدد نوشته می‌شود:

۱ : مجموعه‌های تهی

۱ ۱ : مجموعه‌های ۱عضوی

۱ ۲ ۱ : مجموعه‌های ۲عضوی

۱ ۳ ۳ ۱ : مجموعه‌های ۳عضوی

۱ ۴ ۶ ۴ ۱ : مجموعه‌های ۴عضوی

۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱ : مجموعه‌های ۵عضوی

۱ ۶ ۱۵ ۲۰ ۱۵ ۶ ۱ : مجموعه‌های ۶عضوی

⋮

عدد ردیف اول مربوط به تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ تهی، اعداد ردیف دوم مربوط به تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌ای یک‌عضوی، اعداد ردیف سوم مربوط به تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌ای دوعضوی و الی آخر است. اما اعداد داخل هر ردیف چیست؟ برای یافتن پاسخ سؤال خود یعنی تعداد زیرمجموعه‌های ۳عضوی یک مجموعهٔ ۵ عضوی، ردیف مربوط به مجموعه ۵ عضوی را بررسی می‌کنیم:

	تعداد زیرمجموعه‌های ۵ عضوی	تعداد زیرمجموعه‌های ۴عضوی	تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی	تعداد زیرمجموعه‌های ۲عضوی	تعداد زیرمجموعه‌های ۱عضوی	تعداد زیرمجموعه‌های تهی
مجموعهٔ ۵عضوی	۱	۵	۱۰ ↓	۱۰	۵	۱

پاسخ مسأله اینه (به قول فیلم‌های پلیسی خود ناکسشه!)

به این ترتیب با رسم مثلث خیام ـ پاسکال به‌جزئیات زیرمجموعه‌های یک مجموعه پی می‌بریم.

به دو نکته جالب توجه کنید:

الف) مجموعِ اعداد هر ردیف، در مثلث خیام ـ پاسکال، توانی از ۲ است که همان تعدادِ کلِ زیرمجموعه‌های یک مجموعه است.

مثلاً در ردیف مربوط به مجموعهٔ ۵ عضوی داریم: $۱+۵+۱۰+۱۰+۵+۱=۳۲=۲^{۵}$

ب) با کمک مثلث خیام ـ پاسکال می‌بینیم که تعداد زیرمجموعه‌های m عضوی از یه مجموعهٔ n عضوی که از دو طرف به یک فاصله هستن برابر است. مثلاً تعدادِ زیرمجموعه‌های تهی با تعداد زیرمجموعه‌های ۵ عضویِ یه مجموعهٔ ۵ عضوی برابر است یا تعداد زیرمجموعه‌های ۱عضوی با تعداد زیرمجموعه‌های ۴عضویِ یه مجموعهٔ ۵ عضوی برابر است یا تعداد زیرمجموعه‌های ۲عضوی با تعداد زیرمجموعه‌های ۳عضویِ یه مجموعهٔ ۵ عضوی برابر است.

با هم برابرند

۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱

با هم برابرند

با هم برابرند

به عبارت دیگر در یک مجموعهٔ n عضوی، تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی با تعداد زیرمجموعه‌های $(n-k)$ عضوی برابر است.

تمرین

۲۶- مجموعه $D=\{۷,۹,۱۰,۱۱,۲۰\}$ چند زیرمجموعه دارد که لااقل ۲ عضوی باشند؟

۲۷- در تیم فوتبال چلسی (!۴۰۳۰) مربی ۱۵ بازیکن در اختیار دارد که ۹ نفر آن‌ها به‌طور ثابت در زمین قرار می‌گیرند. ۲ نفر هم مصدوم هستند. با نفرات باقی‌مانده به چند شکل می‌توان تیم را به میدان فرستاد؟ (بازی فوتبال ۱۱ نفره است)

۱۰. تعداد زیرمجموعه‌های m عضویِ یک مجموعه و البته فاکتوریل

از جمله علامت‌های مشترک ادبیات و ریاضیات علامت دوست‌داشتنیِ (!) است.

این علامت که در ریاضیات فاکتوریل نامیده می‌شود به چه معناست؟ ببینید:

$$۱!=۱$$

$$۲!=۱\times۲$$

$$۳!=۱\times۲\times۳$$

$$۴!=۱\times۲\times۳\times۴$$

خب پس مثلاً چهار فاکتوریل برابر است با ۲۴.

!۴ را می‌توان !۳×۴ نوشت زیرا:

$$۴!=\underbrace{۱\times۲\times۳}_{۳!}\times۴$$

و یا مثلاً !۵ را می‌توان !۴×۵ و یا !۳×۴×۵ نیز نوشت زیرا:

$$۵!=\underbrace{۱\times۲\times۳\times۴}_{۴!}\times۵$$

و یا:

$$۵!=\underbrace{۱\times۲\times۳}_{۳!}\times۴\times۵$$

از نکته بالا در ساده کردنِ کسرهای دارای فاکتوریل استفاده می‌کنیم:

$$\frac{۵!}{۳!}=\frac{۵\times۴\times\cancel{۳!}}{\cancel{۳!}}=۲۰$$

برای یافتن تعداد زیرمجموعه‌های m عضوی از یک مجموعه n عضوی، فرمولی به نام ترکیب m از n را در سال‌های بعد می‌خونید که به علت کارآیی خوب این فرمول، اون رو به شما معرفی می‌کنم.

$$\text{ترکیب } m \text{ از } n \quad \binom{n}{m}=\frac{n!}{m!(n-m)!} \quad ,(n\geq m)$$

مثلاً تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضویِ یک مجموعهٔ ۵ عضوی چند تاست؟

$$\binom{۵}{۳}=\frac{۵!}{۳!(۵-۳)!}=\frac{۵!}{۳!۲!}=\frac{۵\times۴\times\cancel{۳!}}{\cancel{۳!}\times۲!}=\frac{۲۰}{۲\times۱}=۱۰$$

خوش باشین.

تمرین

۲۸- یک مجموعهٔ ۷ عضوی چند زیرمجموعهٔ ۴ عضوی و چند زیرمجموعهٔ ۶ عضوی دارد؟

۱۱. افزودن و کاستن عضوها و اثر آن روی زیرمجموعه

دیدین بعضی آدما وجودشون یه آدم نیست، خیلی آدمه؟!

دیدین پدر و مادر دو تا آدمن، اما بودنشون نیروی آدمو چندین هزار برابر می‌کنه ...؟

افزودنِ یه عضو به تعداد اعضای یک مجموعه، تعداد زیرمجموعه‌ها را یکی افزایش نمی‌دهد بلکه چندین برابر می‌کند؛ به این نمودار توجه کنید:

تعداد زیرمجموعه	تعداد عضو
۱	۰
۲	۱
۴	۲
۸	۳
۱۶	۴
۳۲	۵
⋮	⋮

می‌بینین که با افزودن هر عضو، تعداد زیرمجموعه‌ها ۲ برابر می‌شود و با کاستن هر عضو، تعداد زیرمجموعه‌ها $\frac{۱}{۲}$ برابر می‌شود.

پس با افزودن مثلاً ۳ عضو، زیرمجموعه‌ها $۸=۲^۳=۲\times۲\times۲$ برابر می‌شوند و با کاستن ۳ عضو، زیرمجموعه‌ها $\frac{۱}{۸}=(\frac{۱}{۲})^۳=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}$ برابر.

این خاصیت جالب را می‌شود با معادلهٔ توانی هم نمایش داد. مثلاً با افزودن یک عضو زیرمجموعه‌ها چه تغییری می‌کنند؟

$$\frac{۲^{n+۱}}{۲^n}=۲^{n+۱-n}=۲^۱$$ (دو برابر می‌شود)

تمرین

۲۹- اگر ۴ عضو از اعضای مجموعه‌ای کم کنیم، نسبت زیرمجموعه‌های مجموعهٔ جدید به مجموعهٔ اولیه چه‌قدر می‌شود؟

۱۲. زیارت عضوها در زیرمجموعه‌های یک مجموعه!

آیا مجموعه‌ای دوعضوی می‌توان نوشت که هر عضوش زیرمجموعه‌اش نیز باشد؟

پاسخ به این سؤال در ابتدا ساده به نظر می‌رسد. مثلاً به طور ساده‌لوحانه‌ای ممکن است بگوییم $A=\{۲,\{۲\}\}$ اما این پاسخ غلط است زیرا زیرمجموعه‌های A عبارتند از $\{\{۲\},۲\},\{\{۲\}\},\{۲\},\varnothing$ که از دو عضو مجموعه A تنها $\{۲\}$ در زیرمجموعه‌ها دیده می‌شود و از ۲ خبری نیست.

جواب مناسب برای این سؤال عبارت است از $B=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ زیرا زیرمجموعه‌های آن عبارتند از:

$\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ که هر دو عضو در زیرمجموعه‌ها وجود دارد.

حال اگر مجموعه‌ای سه‌عضوی با این شرایط می‌خواستیم پاسخ، عبارت بود از: $\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\}$

جواب چالش‌برانگیز دیگری هم گاهی در این‌جا مطرح می‌شود که هنوز در بین ریاضی‌دانان قابل بحث است و بعضی‌ها این‌که مجموعه‌ای خودش عضو خودش باشد را مورد اشکال می‌دانند اما به جهت عجیب و غریب بودن این پاسخ، آن را نیز مطرح می‌کنم:

$A=\{\varnothing,A\}$

با زیرمجموعه‌های عجیب $\varnothing,\{\varnothing\},\{A\},A$!!!

تمرین

۳۰- مجموعه‌ای سه‌عضوی بنویسید که هر عضوش زیرمجموعه‌اش نیز باشد.

۱۳. مجموعه‌های دربند (مجموعه‌های زنجیری!)

آیا می‌توان مجموعه‌ای سه‌عضوی نوشت که از هر دو عضو آن یکی عضو دیگری باشد؟

پاسخ مثبت است؛ سوال هم سوال جالبی است. کمی فکر کنید و بعد به پاسخ در چند سطر پایین‌تر توجه کنید!

$$\{۷,\{۷\},\{۷,\{۷\}\}\}$$

گاهی نیز می‌توان از داخل یک مجموعه زیرمجموعه‌هایی جدا کرد که بین هر دو تای آن‌ها رابطه زیرمجموعه بودن برقرار باشد (که آن را زنجیر نیز می‌نامیم).

مثال: در مجموعه $\{۵,۶,۷\}$ یک زنجیر سه‌تایی می‌توان نوشت: $\{۵\},\{۵,۶\},\{۵,۶,۷\}$ زیرا با انتخاب هر دوتای موردنظر از بین این سه زیرمجموعه یکی زیرمجموعه دیگری است.

تمرین

۳۱- مجموعه‌ای ۴عضوی بنویسید که از هر دو عضو یکی زیرمجموعهٔ دیگری باشد.

۱۴. اجتماع و اشتراک دو مجموعه

دو اصطلاح اجتماع و اشتراک در مجموعه‌ها، دنیای جدیدی در این علم نوین ایجاد کردند.

منظور از اجتماع که هم‌خانوادهٔ جمع است، کنار هم قرار دادن اعضای دو یا چند مجموعه است. یعنی گردهمایی اعضای مجموعه‌ها!

$$\left.\begin{array}{l}A=\{۲,۵\}\\ B=\{۳,۵,۶\}\end{array}\right\}\Rightarrow A\overset{\overset{\text{علامت اجتماع}}{\uparrow}}{\cup}B=\{۲,۳,۵,۶\}$$

طبیعی است که عضو تکراری ۵ تنها یک بار نوشته می‌شه.

به عنوان مثال اگر نفر ۲ و ۵ لیست کلاس برای تیم پینگ پنگ مدرسه، نفرات ۳ و ۵ و ۶ برای تیم شطرنج مدرسه و نفرات ۵ و ۹ لیست برای تیم بارفیکس انتخاب شده باشند و معلم ورزش بگوید: بچه‌های تیم‌های پینگ‌پنگ و شطرنج بیان داخل حیاط، مفهوم ریاضیاتی اجتماع اتفاق افتاده است و افراد با شماره‌های ۲ و ۳ و ۵ و ۶ به حیاط خواهند رفت.

منظور از اشتراک (که هم‌خانواده مشترک است) انتخاب اعضای مشترک دو یا چند مجموعه است. یعنی اعضای همیشه و همه جا حاضر:

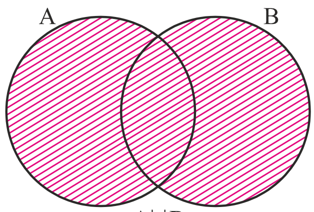
$$\left.\begin{array}{l}A=\{۲,۵\}\\ B=\{۳,۵,۶\}\\ C=\{۵,۹\}\end{array}\right\}\Rightarrow A\underset{\underset{\text{علامت اشتراک}}{\downarrow}}{\cap}B=\{۵\}$$

در مثال ورزشی ما، به این معنیه که معلم ورزش بگوید: اگه کسی هست که در هر سه تیم پینگ‌پنگ، شطرنج و بارفیکس مدرسه حضور داره از کلاس بیرون بیاد؛ در این صورت تنها عضو همیشه حاضر در سه مجموعه، عضو شماره ۵ است.

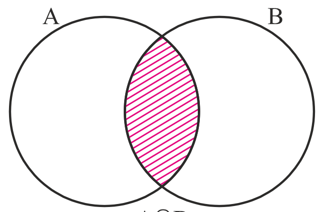
در مبحث مجموعه‌ها، به نموداری که با تصاویر نشان داده شود، نمودار وِن می‌گوییم؛ که بعداً بیش‌تر با آن آشنا خواهید شد.

به بیان نمودار وِن از اجتماع و اشتراک و مثال‌های زیر دقت کنید:

۲ مجموعه :

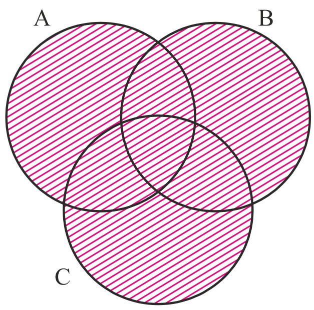


$A \cup B$

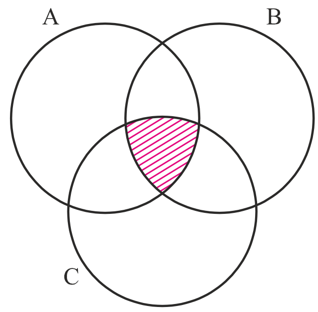


$A \cap B$

۳ مجموعه :



$(A \cup B) \cup C$



$(A \cap B) \cap C$

ـ دو مجموعه که هیچ عضو مشترکی نداشته باشند و اشتراک آن‌ها تهی باشد را دو مجموعهٔ جدا از هم می‌نامیم.

مثال:

$$\left.\begin{array}{l} A:\{۱,۲\} \\ B:\{۵\} \end{array}\right\} \Rightarrow A \cap B = \varnothing$$ **(A و B جدا از هم‌اند.)**

تمرین

۳۲- اجتماع دو مجموعهٔ $A=\{a,a,b,c,d,d,e\}$ و $B=\{a,b,b,d,e,f,f\}$ چند عضو دارد؟ *(انرژی اتمی)*

۱) ۵ عضو ۲) ۶ عضو ۳) ۱۰ عضو ۴) ۱۴ عضو

۳۳- اگر X یک مجموعه باشد و $A = X \cup \{a\}$ ، کدام‌یک از موارد زیر همواره درست است؟

۱) تعداد زیرمجموعه‌های A دو برابر تعداد زیرمجموعه‌های X است.

۲) در مجموعهٔ A عضوی وجود دارد که در X وجود ندارد.

۳) هر عضوی که در X وجود دارد در مجموعهٔ A نیز وجود دارد.

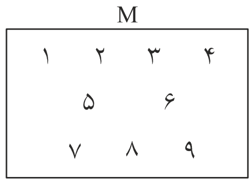
۳۴- هر گاه داشته باشیم: $E \cap \{۳,۵,۸,۱۱\} = \{۵,۸\}$ ، $E \cup \{۴,۵,۱۱,۱۳\} = \{۴,۵,۷,۸,۱۱,۱۳\}$ ، $E \subset \{۵,۷,۸,۹,۱۱,۱۳\}$ و $۱۳ \in E$ ؛ مجموعهٔ E چند عضو دارد؟ *(المپیاد بلژیک)*

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) نمی‌توان تعیین کرد.

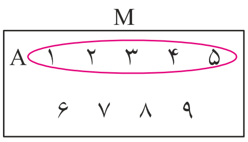
۱۵. مجموعه مرجع و مجموعه متمم

مجموعه‌ای که تمام موضوعات مورد بحثِ ما عضو آن هستند را مجموعه مرجع می‌نامند و با M نمایش می‌دهند. مثلاً در بحث انتخاب تعدادی از دانش‌آموزان مدرسهٔ شما، کل دانش‌آموزان مدرسه، مجموعه مرجع موردنظر ما هستند.

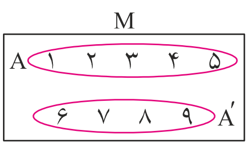
اگر بخواهیم در بین اعداد طبیعی یک‌رقمی تعدادی را انتخاب کنیم، مجموعه مرجع تمام اعداد طبیعی یک‌رقمی است. یعنی:



حال اگر در بین اعداد طبیعی یک‌رقمی، اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۶ را انتخاب کنیم و آن را مجموعه A بنامیم:



عضوهایی را که انتخاب نکرده‌ایم، متمم A یا A' (که A پریم خوانده می‌شود) نامیده می‌شوند:



طبیعی است که اجتماع A و A' کل مجموعه M را تشکیل می‌دهد. یعنی: $A \cup A' = M$

و همچنین اشتراک A و A' برابر مجموعه $\varnothing$ می‌باشد. یعنی: $A \cap A' = \varnothing$

پس به‌طور خلاصه:

متمم یک مجموعه شامل اعضایی از مجموعهٔ مرجع است که در آن مجموعه دیده نمی‌شوند.

تمرین

۳۵- اگر $M = \{۵,۱۰,۱۵,۲۰,۲۵\}$ و $A = \{۱۰,۲۵\}$، A' را با اعضا مشخص کنید.

۳۶- اگر $n(A) = n(A')$، $n(M)$ می‌تواند فرد باشد؟

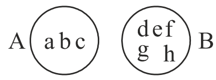
۳۷- اگر C مجموعه دانشجویانی باشد که در درس ریاضی حداقل نمرهٔ ۱۸ گرفته‌اند و S مجموعه دانشجویانی باشد که نمرهٔ آن‌ها حداکثر ۱۶ شده است، $C \cup S'$ را به زبان فارسی ترجمه کنید.

۱۶. می‌نیمم و ماکزیمم در $A \cup B$ و $A \cap B$

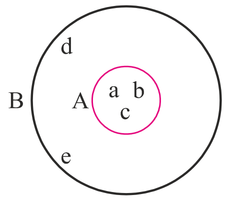
گاهی تعداد اعضای دو مجموعه A و B را می‌دهند و حداکثر یا حداقل تعداد اعضای $A \cup B$ و $A \cap B$ را می‌خواهند. حداکثر تعداد اعضای $A \cup B$ زمانی اتفاق می‌افتد که A و B هیچ عضو مشترکی نداشته باشند و دو مجموعه جدا از هم باشند. در چنین شرایطی $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ و حداقل تعداد اعضای $A \cup B$ زمانی اتفاق می‌افتد که مجموعه با تعداد اعضای کم‌تر، زیرمجموعهٔ مجموعه با تعداد اعضای بیش‌تر باشد. در چنین شرایطی تعداد اعضای مجموعه بزرگ‌تر پاسخ مسئله است.

مثال: اگر A مجموعهٔ ۳عضوی و B مجموعهٔ ۵ عضوی باشد، حداقل و حداکثر تعداد عضوهای $A\cup B$ چیست؟

حل:



$۸=۳+۵$: حداکثر



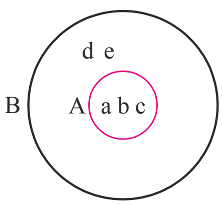
۵ : حداقل

اما در مورد $A\cap B$ حداکثر تعداد عضوها زمانی اتفاق می‌افتد که یکی از مجموعه‌ها زیرمجموعهٔ دیگری باشد. در چنین شرایطی تعداد اعضای $A\cap B$ برابر با تعداد اعضای مجموعهٔ کوچک‌تر خواهد بود.

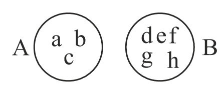
حداقل تعداد عضوها زمانی است که دو مجموعه جدا از هم باشند که در این صورت تعداد اعضای $A\cap B$ برابر صفر خواهد شد.

مثال: اگر مجموعهٔ A، ۳ عضوی و مجموعه B، ۵ عضوی باشد، حداقل و حداکثر تعداد عضوهای $A\cap B$ چیست؟

حل:



(۳ : حداکثر)



۰ (صفر: حداقل)

تمرین

۳۸- اگر A مجموعه‌ای ۴ عضوی و B مجموعه‌ای ۵ عضوی باشد، $A\cup B$ و $A\cap B$ حداقل و حداکثر چندعضوی‌اند؟

۱۷. اجتماع و اشتراک تمام زیرمجموعه‌ها

دوست عزیزم! اگه بگن اشتراک تمام زیرمجموعه‌های ۲ عضوی مجموعه $A=\{۱,۲,۳\}$ چیست، جواب چیه؟

بذارین به زیرمجموعه‌های ۲ عضوی A نگاه دقیق‌تری بندازیم: $\{۱,۲\}\cap\{۱,۳\}\cap\{۲,۳\}$

آیا عدد یا اعدادی مشترک در هر سه مجموعه دیده می‌شوند؟ خیر، پس پاسخ $\varnothing$ است.

حالا فرض کنید بگن اجتماع تمام زیرمجموعه‌های ۲ عضوی مجموعه $A=\{۱,۲,۳\}$ چیست؟

$$\{۱,۲\}\cup\{۱,۳\}\cup\{۲,۳\}=\{۱,۲,۳\}=A$$

حالا می‌توان مسأله را گسترش داد:

اشتراک تمام زیرمجموعه‌های ۳ عضوی مجموعه $A=\{۱,۲,...,۱۰۰\}$ چیست؟ $\varnothing$

اجتماع تمام زیرمجموعه‌های ۳ عضوی مجموعه $A=\{۱,۲,۳,...,۱۰۰\}$ چیست؟ A

تمرین

۳۹- اشتراک تمام زیرمجموعه‌های ۲عضوی مجموعه $F=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ چیست؟

۴۰- اجتماع تمام زیرمجموعه‌های ۲عضوی مجموعه $G=\{a,b,c,d,e,f\}$ چیست؟

۱۸. سه تساوی و سه نتیجه‌گیری

سوفسطایی‌ها گروهی از دانشمندان منطق و فلسفه یونان بودند که با بیان جملاتی ثابت می‌کردند: ماست سیاه و زغال سفیده! اونا اونقدر در بیان جملات و نتیجه‌گیری‌های منطقی غلط تبحّر داشتن که با ذکر چند جمله زمین‌های کشاورزی مردم رو در دادگاه غصب می‌کردند. امروزه علم ریاضیات و علم منطق بخشی از آن نتیجه‌گیری‌های غلط را برملا کرده. این بخش نیم‌نگاهی به سفسطه‌های این پلیدان روزگار می‌کنه. به مثال‌ها و تمرین این بخش خوب توجه کنید.

مثال: آیا اگر $A\cup B=A\cup C$، حتماً $B=C$ خواهد بود؟

حل: پاسخ منفی است؛ با یک مثال نقض موضوع را بررسی می‌کنیم. فرض کنید:

$A=\{۱\}\qquad B=\{۱,۲\}\qquad C=\{۲\}$

(مثال نقض مثالی است که برای رد یک موضوع استفاده می‌شود.)

$\Rightarrow A\cup B=A\cup C$ اما $B\neq C$

$\{۱,۲\}=\{۱,۲\}\qquad \{۱,۲\}\neq\{۲\}$

در مثال بالا اگرچه اجتماع A و B با اجتماع A و C برابر است اما $B\neq C$.

مثال: آیا اگر $A\cap B=A\cap C$، حتماً $B=C$ خواهد بود؟

حل: باز هم پاسخ منفی است. مثال:

$A=\{۱,۲\}\qquad B=\{۱\}\qquad C=\{۱,۴\}$

$A\cap B=A\cap C$ اما $B\neq C$

$\{۱\}=\{۱\}\qquad \{۱\}\neq\{۱,۴\}$

تمرین

۴۱- با یک مثال دیگر نشان دهید که اگر $A\cap B=A\cap C$، لزوماً $B=C$ نیست.

۱۹. بودن یا نبودن! (فرمول ۲^{n-a-b})

در نمایش «هَملِت» شکسپیر، هملت، شاهزاده دانمارکی است که از سفر آلمان برگشته و طی داستان به یک سؤال معروف می‌رسد:

بودن یا نبودن مسأله اینست.

در موضوع مورد بحث ما هم سوال، سوالِ هملت در یافتن تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $\{a,b,c\}$ است که با بودن یا نبودن a و b و c حالات متنوعی پدیدار می‌شود:

$A=\{a,b,c\}$

$\downarrow\ \downarrow\ \downarrow$ (بودن یا نبودن)

زیرمجموعهٔ $۸=۲^۳=۲\times۲\times۲$ حالت

حالا اگه بگیم در مجموعهٔ A چند زیرمجموعه وجود داره که عضو a را حتماً داشته باشه، چه اتفاقی می‌افته؟

$A=\{a\quad,\quad b\quad,\quad c\}$

$\downarrow\qquad\downarrow\qquad\downarrow$

(بودن) (بودن یا نبودن) (بودن یا نبودن)

$۱\times۲\times۲=۲^۲$

یعنی از توان عدد $۲^۳$ یک واحد کم میشه.

و اگه بگیم در مجموعهٔ A چند زیرمجموعه وجود دارد که عضو a را حتماً نداشته باشد، چه اتفاقی می‌افتد؟

$$A=\{a \quad , \quad b \quad , \quad c\}$$

↓ ↓ ↓

(نبودن) (بودن یا نبودن) (بودن یا نبودن)

$1 \times 2 \times 2 = 2^2$

یعنی باز هم از توان عدد 2^3 یک واحد کم میشه.

عجیب نیست؟ عضوهایی که حتماً می‌خوان باشن و عضوهایی که اصلاً نباید باشن هر دو یکسان عمل می‌کنن و به تعداد عضوها از توان کم میشه.

پس اگه بگیم در مجموعهٔ $B=\{a,b,c,d,e\}$ چند زیرمجموعه داریم که حتماً عضو a و c را داشته باشند و عضو d را نداشته باشند باید دوعضوی که حتماً هستند و یک عضوی که حتماً نیست را از توان کم کنیم. یعنی: $2^2 = 2^{5-2-1}$

a (بودن) ↓ ، b (بودن یا نبون) ↓ ، c (بودن) ↓ ، d (نبودن) ↓ ، e (بودن یا نبودن) ↓

$1 \times 2 \times 1 \times 1 \times 2 = 2^2$

پس اگه در مجموعه‌ای n عضوی، a عضوِ خاص را حتماً داشته باشیم و b عضوِ خاص را اصلاً نداشته باشیم، تعداد زیرمجموعه‌ها عبارت خواهد بود از: 2^{n-a-b}

تمرین

۴۲- چند زیرمجموعه از مجموعهٔ $M=\{1,2,3,...,10\}$ وجود دارد که ۵ و ۷ را داشته باشد اما ۶ را نداشته باشد؟

۲۰. یافتن تعداد مجموعه‌ها با محدودیت‌های خاص

دو تیپ سوال خیلی معروف وجود داره که در واقع به نکتهٔ قبلی خیلی مرتبطه!

اولیش اینه که چند مجموعه مانند A وجود دارد که در رابطهٔ $\{1,2\}\subset A\subset\{1,2,3,4,5\}$ صدق کند؟

خب! برای پاسخ به این سوال در واقع می‌دونیم که A حتماً اعضای ۱ و ۲ رو داره و از بین اعضای ۳ و ۴ و ۵ می‌تونه بعضیارو داشته باشه. پس سوال مشابه اینه که بگیم: در چند زیرمجموعه از مجموعهٔ $\{1,2,3,4,5\}$ حتماً اعضای ۱ و ۲ دیده می‌شه که بنا به نکتهٔ قبلی می‌دونید که پاسخ $8=2^3=2^{5-2}$ میشه.

در واقع تنها عضوهای ۳ و ۴ و ۵ با بودن و یا نبودنشون ۲ حالت ایجاد می‌کنن و: «حالت $8=2\times2\times2$»!

گرفتین؟!

و دومیش اینه که چند مجموعه مانند B وجود داره که در رابطهٔ $B\bigcup\{1,2,3\}=\{1,2,3,4,5\}$ صدق می‌کند؟ خب! در این‌جا B حتماً اعضای ۴ و ۵ را باید داشته باشد و بودن یا نبودن اعضای ۱ و ۲ و ۳ در B دلخواهه؛ پس باز هم پاسخ عبارت است از: $2^{5-2}=2^3$

تمرین

۴۳- تعداد مجموعه‌های E به گونه‌ای که $\{1\}\subset E\subset\{1,2,3,4,5\}$ برابر است با: *(المپیاد بلژیک)*

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۱۶ ۴) ۸

۴۴- اگر $A=\{1,2,3,4,5\}$ و $B=\{5,6\}$ و بدانیم $(A\bigcap B)\subset C\subset(A\bigcup B)$، آن‌گاه چند مجموعه با شرایط C می‌توان یافت؟

۲۱. تفاضل دو مجموعه

در مجموعه‌ها علامت جمع وجود ندارد و به نوعی «اجتماع» کمبود آن را جبران می‌کند؛ اما علامت تفریق (تفاضل) وجود دارد؛ با معنایی خاص و جالب!

فرض کنید در لیست کلاس شما افراد شماره ۲ و ۵ و ۶ در المپیاد ریاضی و افراد شماره ۶ و ۱۷ در المپیاد فیزیک شرکت کرده‌اند. اگه معلم شما بگه: تمام بچه‌های المپیاد ریاضی بیان بیرون به‌جز کسانی‌که تو المپیاد فیزیک هم هستن، چه کسانی از بچه‌های المپیاد ریاضی بیرون میان؟

$\{۲,۵,۶\}-\{۶,۱۷\}=\{۲,۵\}$

بله افراد شماره ۲ و ۵. اولاً حاصل فقط از اعضای مجموعه اول می‌باشند. ثانیاً عضو شماره ۶ که در هر دو مجموعه مشترک است در پاسخ دیده نمی‌شود.

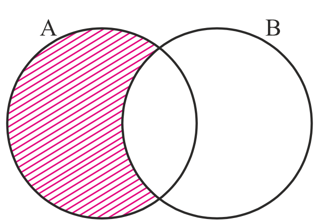
به مثال دیگری توجه کنید:

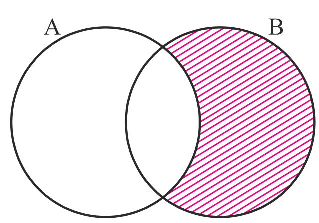
$$\left.\begin{array}{l} A=\{۱,۲,۳,۴,۵\} \\ B=\{۳,۴,۹\} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A-B=\{۱,۲,۵\} \\ B-A=\{۹\} \end{array}$$

باز هم یادآوری می‌کنم که $A-B$ عضوهایی هستن که در A وجود دارن اما در B وجود ندارن. این اعضا از مجموعهٔ A انتخاب می‌شن و $B-A$ عضوهایی هستن که در B وجود دارن اما در A وجود ندارن. این اعضا از مجموعهٔ B انتخاب می‌شن. نکتهٔ قابل توجه دیگه در مثال بالا اینه که در تفاضل دو مجموعه لزوماً جابه‌جایی وجود نداره. یعنی:

$A-B\neq B-A$

به بیان تصویری تفاضل هم نگاهی بیندازین:

A-B:


B-A:


تمرین

۴۵- اگر A مجموعهٔ اعداد طبیعی فرد یک‌رقمی و B مجموعهٔ اعداد اول یک‌رقمی باشد، $A-B$ دارای چند زیرمجموعه است؟ *(کنکور آزاد ۸۶)*

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

۴۶- کدام گزینه نادرست است؟ *(کنکور آزاد ۹۰)*

۱) $N\cap W=N$ ۲) $W-N=\varnothing$ ۳) $N-W=\varnothing$ ۴) $W\cup N=W$

۴۷- برای دو مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳\}$ و $B=\{۲,۳,۴\}$ حاصل $(A-B)-(B-A)$ کدام است؟ *(کنکور آزاد ۷۷)*

۴۸- اگر مجموعه‌های A و $B-A$ به ترتیب ۵ و ۸ عضو داشته باشند، $A\cup B$ چند عضوی است؟

۲۲. مختصرنویسی

در ادامهٔ شناختی که از اجتماع، اشتراک، مجموعهٔ تهی، مجموعهٔ مرجع، تفاضل و متمم به‌دست آوردید، به عباراتِ قابل توجه زیر بیش‌تر توجه کنید: (درک کردن بهتر از حفظ کردنه! می‌دونید که چی می‌خوام بگم؟!)

$A\cup\varnothing=A$	$A'\cup\varnothing=A'$	$M-A=A'$	$\varnothing\cup M=M$
$A\cup M=M$	$A'\cup M=M$	$M-A'=A$	$\varnothing\cap M=\varnothing$
$A\cap\varnothing=\varnothing$	$A'\cap\varnothing=\varnothing$	$M-\varnothing=M$	$A\cup A'=M$
$A\cap M=A$	$A'\cap M=A'$	$M-M=\varnothing$	$A\cap A'=\varnothing$
$A-A'=A$	$A'-\varnothing=A'$	$A-\varnothing=A$	
$A'-A=A'$	$A'-M=\varnothing$	$A-M=\varnothing$	

دوست دارم به طور ویژه به این نکته هم توجه کنید که:

متمم مجموعهٔ $\varnothing$ مجموعهٔ مرجع M است. یعنی: $\varnothing'=M$

و متمم مجموعهٔ M مجموعهٔ $\varnothing$ است. یعنی: $M'=\varnothing$

همچنین مشخصه که اگر تعداد «پریم‌ها» زوج باشه حاصل، خود عبارت و اگه فرد باشه حاصل، متممِ عبارت می‌شه. مثلاً:

$(\varnothing')'=\varnothing$	$(A')'=A$	$(M')'=M$
$((\varnothing')')'=M$	$((A')')'=A'$	$((M')')'=\varnothing$

فراموش نکنید اگه $A\subset B$، $A\cap B=A$ و $A\cup B=B$.

تمرین

۴۹- کدام گزینه صحیح است؟

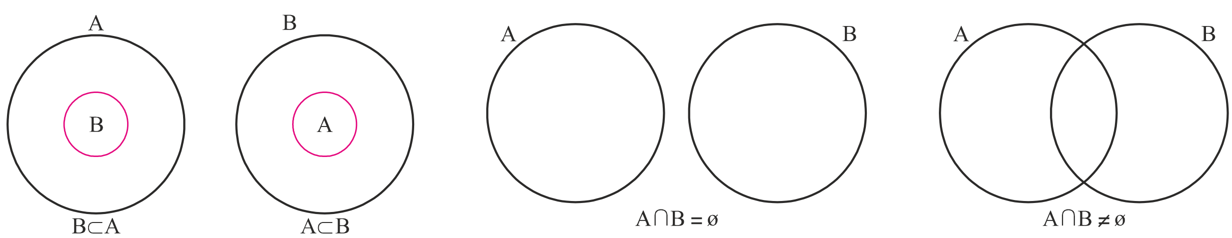
۱) $A'\cap M=A'$ ۲) $M\cup\varnothing=\varnothing$ ۳) $A\cup A'=\varnothing$ ۴) $\varnothing\cup A=\varnothing$

۵۰- حاصل $[(M'\cup A)\cap((\varnothing')'-A)]\cup[(A'\cap M)\cup(A-M')]=$ چیست؟

۲۳. جان وِن و نمودار به درد بخورش

جان وِن (Venn) که گاهی آن را اشتباهاً وَن (یه نوع تاکسی بزرگ!) می‌نامند، در انگلستان و در خانواده‌ای مذهبی به دنیا آمد. در کمبریج دکترای علوم گرفت و جالب است که مدت‌ها کشیش بود. او بـه خـاطر اسـتفاده از نمودارهـای هندسـی خـود در تشـریح وضعیت مجموعه‌ها معروف است. البته جالب است بدانید «لایبنیتز[1]» اولین کسی است که از ایـن نمودارهـا در ریاضـیات اسـتفاده کرد، امّا وِن به توسعه و گسترش این نمودارها آنقدر کمک کرد که شایستهٔ این نامگذاری شد.

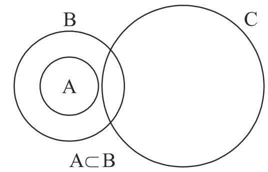
وضعیت دو مجموعه A و B می‌تونه شامل حالت‌های زیر باشه:



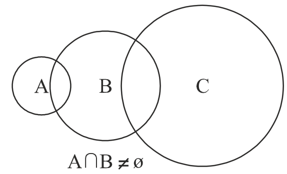
(دو مجموعه جدا از هم)

۱- گاتفرید ویلهلم لایبنیتز، فیلسوف، سیاستمدار، فیزیک‌دان و ریاضی‌دان آلمانی. Gottfried Wilhelm Leibniz.

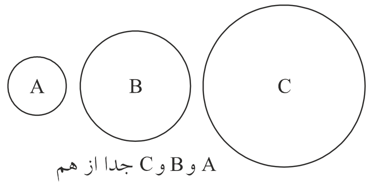
وضعیت سه مجموعه، حالت‌های بسیار متنوعی داره که به بعضی از آن‌ها اشاره می‌کنیم:



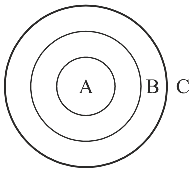
$A \subset B$
$B \cap C \neq \varnothing$



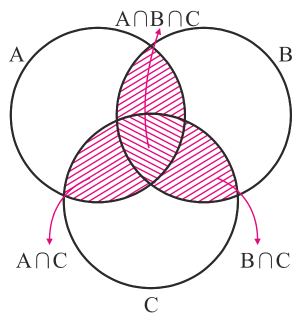
$A \cap B \neq \varnothing$
$C \cap B \neq \varnothing$
$A \cap C = \varnothing$



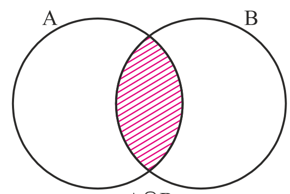
A و B و C جدا از هم



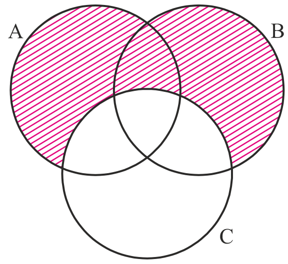
اما حالت زیر در بیان سه مجموعه، عمومیت بیش‌تری داره و ما اکثر اوقات آن را به عنوان حالت کلی در نظر می‌گیریم.



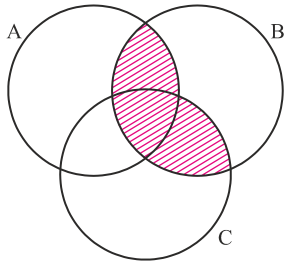
در نمودار وِن، بیان قسمت مشخص شده یا هاشورخورده به زبان ریاضی و یا بالعکس اهمیت داره. مثال‌های زیر می‌تونه به درک شما از نمودار ون کمک کنه.



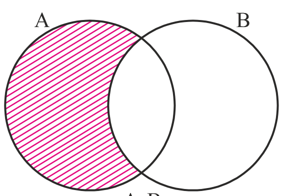
$A \cap B$



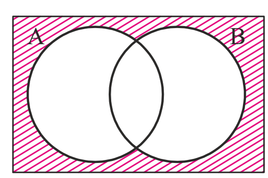
$(A \cup B) - C$



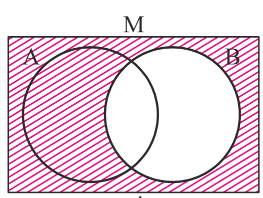
$(A \cap B) \cup (B \cap C)$



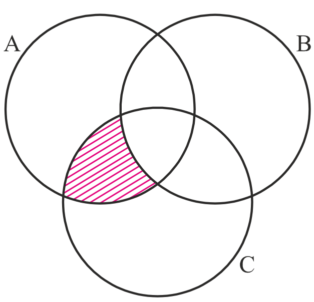
$A - B$



$(A \cup B)'$



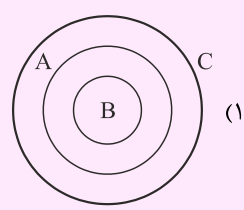
B'

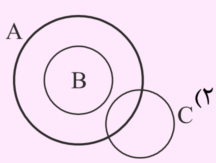


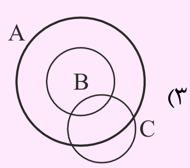
$(A \cap C) - B$ یا $(A \cap C) - (A \cap B \cap C)$

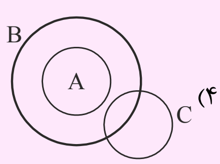
تمرین

۵۱- **مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های عدد ۴۸ را با A، مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های عدد ۱۲ را با B و مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های عدد ۳۹ را با C نمایش داده‌ایم. کدام‌یک از نمودارهای زیر می‌توانند برای این سه مجموعه مناسب باشد؟**

۱)


۲)


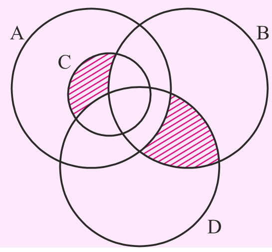
۳)


۴)


۵۲- **اگر پزشکی بپذیرد که «ویروس‌ها میکروب هستند» و «بعضی از میکروب‌ها بیماری‌زا هستند» و «بعضی از عوامل بیماری‌زا میکروب نیستند» با نمودار ون وضعیت را ترسیم کنید.**

۵۳- **نمودار مجموعه‌های زیر در شکل زیر رسم شده است. مجموعه عددهای واقع در قسمت‌های سایه‌خوردهٔ این نمودار چند است؟** *(آزمون تیزهوشان)*

$$A=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\} \quad B=\{۱,۳,۵,۷,۹\} \quad C=\{۳,۴,۵,۶\} \quad D=\{-۳,-۱,۱,۳,۴,۹\}$$



۱) ۹

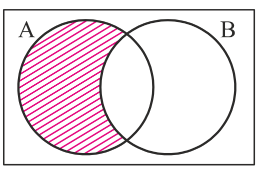
۲) ۱۵

۳) ۱۸

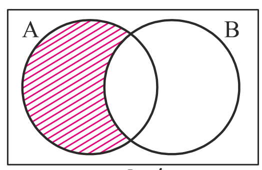
۴) ۲۰

۲۴. تبدیل تفاضل به اشتراک

دوست دارم $A-B$ و $A\cap B'$ رو روی نمودار ون ببینید و مقایسه کنید:



A - B



$A\cap B'$

نتیجه اینه که این دو با هم برابرن یعنی: $A-B=A\cap B'$

به عبارت دیگر می‌تونیم تفاضل رو به اشتراک تبدیل کنیم و مجموعهٔ دوم رو متمم کنیم. بنابراین:

$A-A=A\cap A'=\varnothing$ $\quad$ $A-\varnothing=A\cap\varnothing'=A\cap M=A$ $\quad$ $A-M=A\cap M'=A\cap\varnothing=\varnothing$

تمرین

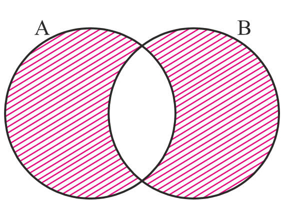
۵۴- **با تبدیل تفاضل به اشتراک عبارات زیر را ساده کنید.**

ج) **خوانندهای بالای ۳۰ سال − خوانندهای عینکی =** $\quad$ ب) $M-A'=$ $\quad$ الف) $A'-\varnothing=$

۲۵. تفاضل متقارن

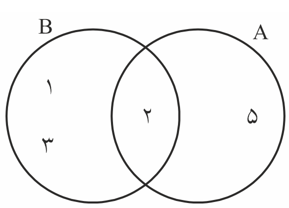
تفاضل متقارن همان‌طور که از اسمش پیداست، یعنی: $(A-B)\cup(B-A)$. بیان تصویریِ اون نیز خالی از لطف نیست.

علامت تفاضل متقارن به شکل زیره: (Δ، دلتا خونده می‌شه.)



$$A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$$

با یه مثال موضوع رو بهتر درک کنیم:



$$\left.\begin{array}{l}A=\{۲,۵\}\\ B=\{۱,۲,۳\}\end{array}\right\}\Rightarrow A\Delta B=\{۱,۳,۵\}$$