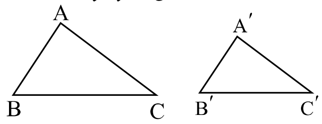
درس سوم: تشابه

در زبان عامیانه دو شکل هندسی را شبیه هم می‌نامیم هرگاه همانند هم باشند، ولی لزومی ندارد که قابل انطباق باشند مثلاً همه دایره‌ها شبیه هم بوده یا همهٔ لوزی‌ها شبیه هم هستند.

حال به زبان هندسی وقتی از وجود تشابه بین دو شکل سخن می‌گوییم یعنی از نظر ساختمان شبیه هم باشند و همچنین از لحاظ اندازه‌ها بین دو شکل، نسبت‌های معینی وجود داشته باشد.

ابتدا به سراغ دو مثلث متشابه می‌رویم.

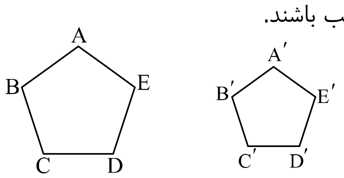
دو مثلث متشابه هستند هرگاه زاویه‌های آن‌ها نظیر به نظیر با هم برابر و ضلع‌های نظیر آن‌ها نیز متناسب باشند. به دو شکل زیر توجه کنید:



$$\hat{A}=\hat{A'},\quad \hat{B}=\hat{B'},\quad \hat{C}=\hat{C'} \quad \text{و} \quad \frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}$$

پس دو مثلث متشابه‌اند.

دو چند ضلعی را متشابه می‌گوییم هرگاه زاویه‌های نظیر در آن‌ها برابر و ضلع‌های نظیر در آن‌ها متناسب باشند.



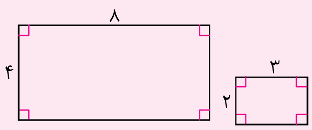
$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=\hat{A'}\,,\,\hat{B}=\hat{B'}\,,\ldots\\ \dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\cdots\end{array}\right\}\to ABCDE\sim A'B'C'D'E'$$

توجه: برای تشابه از نماد $\sim$ استفاده می‌کنیم.

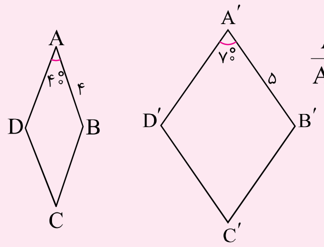
مثال:

۱. آیا تساوی زوایای نظیر دو n ضلعی یا تناسب اضلاع نظیر هر یک به تنهایی می‌تواند دلیلی بر متشابه بودن آن دو n ضلعی باشد؟

پاسخ: خیر، به ۲ شکل مقابل توجه کنید:



دو مستطیل دارای زوایای نظیر برابر هستند ولی: $\frac{4}{2}\neq\frac{8}{3}$.



در ۲ لوزی زیر نیز اَضلاع نظیر به نظیر متناسبند $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DA}{D'A'}=\frac{4}{5}$

اما زوایا نظیر به نظیر برابر نیستند.

۲. اگر A, B و C سه n ضلعی دلخواه باشند آیا می‌توان گفت گزارهٔ مقابل درست است؟ $A\sim B\,,\,B\sim C\to A\sim C$

پاسخ:

$$A\sim B\to\begin{cases}\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\cdots & (1)\\ \hat{A}_1=\hat{B}_1\,,\,\hat{A}_2=\hat{B}_2\,,\ldots & (2)\end{cases}$$

$$B\sim C\to\begin{cases}\dfrac{b_1}{c_1}=\dfrac{b_2}{c_2}=\cdots & (3)\\ \hat{B}_1=\hat{C}_1\,,\,\hat{B}_2=\hat{C}_2\,,\ldots & (4)\end{cases}$$

با ضرب روابط (۱) و (۳) در یکدیگر داریم: $\frac{a_1}{b_1}\times\frac{b_1}{c_1}=\frac{a_2}{b_2}\times\frac{b_2}{c_2}=\cdots\to\frac{a_1}{c_1}=\frac{a_2}{c_2}=\cdots$

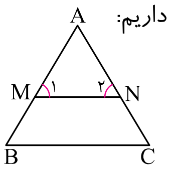
و همچنین با توجه به رابطهٔ (۲) و (۴) داریم: $\hat{A}_1=\hat{C}_1\,,\,\hat{A}_2=\hat{C}_2\,,\ldots$

پس به راحتی مشخص می‌شود که A و C متشابه‌اند.

قضیه اساسی تشابه

اگر خطی موازی یک ضلع مثلث رسم شود و دو ضلع دیگر و یا امتداد آن‌ها را قطع کند، مثلث حاصل با مثلث اصلی متشابه است.

اثبات: با توجه به شکل مقابل MN موازی BC رسم شده است. حال می‌خواهیم نشان دهیم $\overset{\Delta}{AMN} \sim \overset{\Delta}{ABC}$ می‌باشد، داریم:



$$\left.\begin{matrix} MN \parallel BC \\ \text{مورب } AB \end{matrix}\right\} \rightarrow \widehat{M}_1 = \widehat{B}$$

$$\left.\begin{matrix} MN \parallel BC \\ \text{مورب } AC \end{matrix}\right\} \rightarrow \widehat{N}_1 = \widehat{C}$$

و همچنین زاویه $\widehat{A}$ در هر دو مثلث مشترک است.

از طرف از قضیه تالس داریم:

$$MN \parallel BC \longrightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

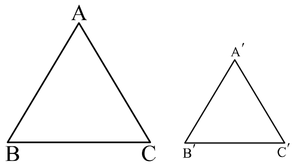
بنابراین زوایای نظیر برابر و اضلاع نظیر متناسب اند، پس طبق تعریف دو شکل متشابه داریم:

$$\overset{\Delta}{AMN} \sim \overset{\Delta}{ABC}$$

برای نشان دادن تشابه دو مثلث می‌توان از سه قضیه‌ای که در ادامه می‌آید استفاده کرد و با داشتن فرض‌های کم‌تری به تشابه مثلث‌ها رسید .

قضیه ۱

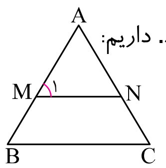
هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر هم‌اندازه باشند، دو مثلث متشابهند.



$$\widehat{A} = \widehat{A'} \text{ و } \widehat{B} = \widehat{B'} \rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

اثبات:

بر روی ضلع AB پاره‌خط AM را مساوی $A'B'$ جدا کرده و از M خطی موازی BC رسم کرده تا AC را در N قطع کند. داریم:



$$\left.\begin{matrix} MN \parallel BC \rightarrow \widehat{B} = \widehat{M}_1 \\ \text{از طرفی}: \widehat{B} = \widehat{B'} \end{matrix}\right\} \rightarrow \widehat{M}_1 = \widehat{B'}$$

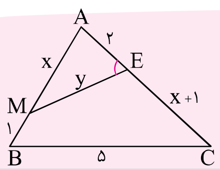
$$\left\{\begin{matrix} \widehat{M}_1 = \widehat{B'} \\ \widehat{A} = \widehat{A'} \\ AM = A'B' \ (۱) \end{matrix}\right. \rightarrow \overset{\Delta}{A'B'C'} \underset{(\text{ز ض ز})}{\cong} \overset{\Delta}{AMN} \rightarrow \left\{\begin{matrix} AN = A'C' \\ MN = B'C' \end{matrix}\right. (۲)$$

$$MN \parallel BC \xrightarrow{\text{نتیجه تالس}} \frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AC} \xrightarrow{(۱),(۲)} \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$$

می‌بینیم اضلاع دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متناسب هستند و از طرف دیگر نیز زوایا نظیر به نظیر برابرند. پس به راحتی تشابه دو مثلث نتیجه خواهد شد.

مثال:

در شکل روبه‌رو $\widehat{E} = \widehat{B}$ است، مقدار x و y را بیابید.



مجهول

$x , y = ?$

داده‌ها

$\widehat{E} = \widehat{B}$, $AE = ۲$

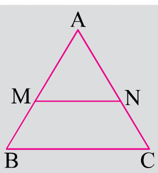
$EC = x+۱$, $AM = x$

$MB = ۱$, $BC = ۵$

فرمول‌ها و روابط

$\overset{\Delta}{AMN} \sim \overset{\Delta}{ABC}$

$$\frac{AM}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{ME}{BC}$$



حل تشریحی

$$\left.\begin{matrix} \widehat{B} = \widehat{E} \\ \widehat{A} \text{ مشترک} \end{matrix}\right\} \rightarrow \overset{\Delta}{AME} \sim \overset{\Delta}{ABC} \quad (۴)$$

حال نسبت تشابه را می‌نویسیم:

$$\frac{AM}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{ME}{BC} \rightarrow \underbrace{\frac{x}{x+۳} = \frac{۲}{x+۱}}_{x(x+۱)=۲(x+۳)} = \frac{y}{۵}$$

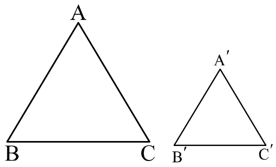
$$\rightarrow x^۲ + x = ۲x + ۶ \rightarrow x^۲ - x - ۶ = ۰$$

$$\rightarrow (x+۲)(x-۳) = ۰ \rightarrow \left\{\begin{matrix} x = -۲ \text{ غ‌ق‌ق} \\ x = ۳ \text{ ق‌ق} \end{matrix}\right.$$

$$\text{از طرفی}: \frac{۲}{x+۱} = \frac{y}{۴} \xrightarrow{x=۳} \frac{۲}{۴} = \frac{y}{۴} \rightarrow y = ۲$$

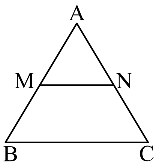
قضیه ۲:

هرگاه اندازه‌های دو ضلع از مثلثی با اندازه‌های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و زاویهٔ بین آن‌ها هم اندازه باشند، دو مثلث متشابه‌اند.



$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{A'} \\ \dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC} \end{cases} \rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{AB'C'}$$

اثبات:



بر روی اضلاع AB و AC به ترتیب نقاط M و N را طوری اختیار می‌کنیم که $AM = A'B'$ و $AN = A'C'$.

حال داریم: $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC} \rightarrow \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} \xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} MN \parallel BC$

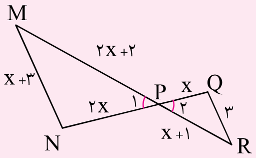
و طبق قضیه اساسی تشابه به راحتی مشخص می‌شود که: $\overset{\Delta}{AMN} \sim \overset{\Delta}{ABC}$ (۱)

از طرفی به حالت برابری دو ضلع و زاویهٔ بین آن‌ها نیز داریم: $\overset{\Delta}{AMN} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'}$ (۲)

حال به کمک روابط (۲) و (۱): $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$

مثال:

در شکل مقابل مقدار x را به دست آورید.



مجهول

$x = ?$

داده‌ها

$MP = ۲x + ۲$,

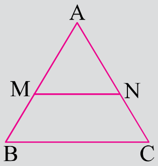
$NP = ۲x$, $PR = x + ۱$ $RQ = ۳$

$MN = x + ۳$

فرمول‌ها و روابط

$\overset{\Delta}{AMN} \sim \overset{\Delta}{ABC}$

$\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$



حل تشریحی

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{MP}{PR} = \dfrac{NP}{PQ} = ۲ \\ \hat{P}_۱ = \hat{P}_۲ \end{array}\right\} \rightarrow \overset{\Delta}{PMN} \sim \overset{\Delta}{PRQ}$$

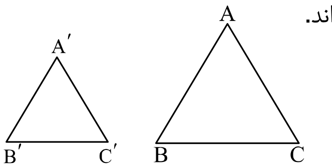
$$\rightarrow \dfrac{NP}{PQ} = \dfrac{MN}{RQ}$$

بنابراین نسبت تشابه عبارت است از:

$$\dfrac{۲\cancel{x}}{\cancel{x}} = \dfrac{x+۳}{۳} \rightarrow ۶ = x + ۳ \rightarrow x = ۳$$

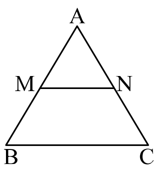
قضیه ۳:

هرگاه اندازه‌های سه ضلع از مثلثی با اندازه‌های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند.



$$\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC} = \dfrac{B'C'}{BC} \rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

اثبات:



بر روی اضلاع AB و AC به ترتیب نقاط M و N را طوری انتخاب می‌کنیم که $AM = A'B'$ و $AN = A'C'$، داریم:

$$\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC} \rightarrow \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} \xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} MN \parallel BC$$

طبق قضیه اساسی تشابه $\overset{\Delta}{AMN} \sim \overset{\Delta}{ABC}$.

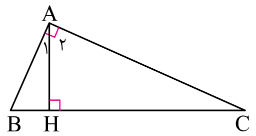
$$MN \parallel BC \xrightarrow{\text{نتیجه تالس}} \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{MN}{BC} \xrightarrow{AM = A'B'} \dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{MN}{BC} \quad (۱)$$

طبق فرض : $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC}$ (۲)

(۱) و (۲) : $\frac{MN}{BC}=\frac{B'C'}{BC}\to MN=B'C'$

کاملاً مشخص است که بنابر برابری ۳ ضلع، ۲ مثلث $\overset{\Delta}{AMN}$ و $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ هم‌نهشت‌اند و در ادامه به راحتی به حکم می‌رسیم.

برخی روابط در مثلث قائم‌الزاویه



$$\begin{cases}\hat{A}_1+\hat{A}_2=90^\circ\\ \hat{A}_2+\hat{C}=90^\circ\end{cases}\to \hat{A}_1=\hat{C}\ (1)$$

$$\begin{cases}\hat{A}_1+\hat{A}_2=90^\circ\\ \hat{A}_1+\hat{B}=90^\circ\end{cases}\to \hat{A}_2=\hat{B}\ (2)$$

می‌توان نشان داد دو مثلث $\overset{\Delta}{ABC},\overset{\Delta}{ABH}$ متشابه‌اند.

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_1=\hat{C}\,(1)\\ \hat{B}\ \text{مشترک}\end{array}\right\}\to \overset{\Delta}{ABH}\sim\overset{\Delta}{ABC}$$

نسبت تشابه را می‌نویسیم:

$$AH\times BC=AB\times AC$$
$$\frac{AB}{BC}=\frac{AH}{AC}=\frac{BH}{AB}$$
$$AB^2=BH\times BC$$

برای دو مثلث دیگر می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_2=\hat{B}\,(2)\\ \hat{C}\ (\text{مشترک})\end{array}\right\}\to \overset{\Delta}{ACH}\sim\overset{\Delta}{ABC}$$

حال نسبت تشابه را می‌نویسیم:

$$\frac{AC}{BC}=\frac{AH}{AB}=\frac{HC}{AC}$$
$$AC^2=HC\times BC$$

طبق مطالب بالا می‌توان گفت:

$$\left.\begin{array}{l}\overset{\Delta}{ABH}\sim\overset{\Delta}{ABC}\\ \overset{\Delta}{ACH}\sim\overset{\Delta}{ABC}\end{array}\right\}\to \overset{\Delta}{ABH}\sim\overset{\Delta}{ACH}$$

حال نسبت تشابه را برای این دو مثلث می‌نویسیم:

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BH}{AH}=\frac{AH}{HC}$$
$$AH^2=BH\times HC$$

از محاسبات قبل به نتیجهٔ جالبی می‌رسیم، دقت کنید:

$$\begin{cases}AB^2=BH\times BC\\ AC^2=HC\times BC\end{cases}\xrightarrow{(+)}AB^2+AC^2=BH\times BC+HC\times BC$$

$$\to AB^2+AC^2=\underbrace{(BH+HC)}_{BC}\times BC\to AB^2+AC^2=BC^2$$

بله به راحتی به رابطهٔ فیثاغورس رسیدیم.

تمرین‌های امتحانی

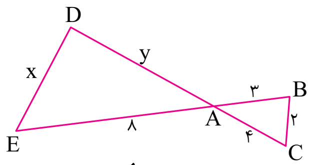
۱. کدام گزاره همواره درست است؟

الف. دو مثلث متساوی‌الساقین که زاویه رأس برابر داشته باشند، متشابه‌اند.

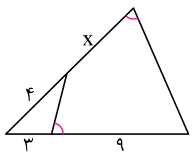
ب. دو لوزی متشابه‌اند.

پ. دو مستطیل متشابه‌اند.

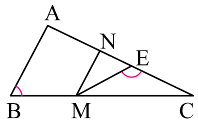
ت. دو مثلث قائم‌الزاویه متشابه‌اند.



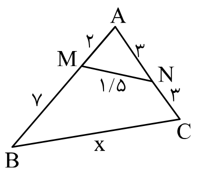
۲. در شکل مقابل $\hat{B}=\hat{D}$ ، مقدار x و y را به دست آورید.



۳. در شکل مقابل، دو زاویهٔ مشخص‌شده مکمل‌اند، اندازهٔ x را به دست آورید.

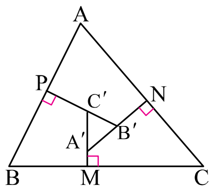


۴. در شکل مقابل، $AB \parallel MN$ و $\hat{E}=\hat{B}$. اگر $CM=۵$ و $EC=۲$ ، نسبت $\frac{MN}{ME}$ را به دست آورید.



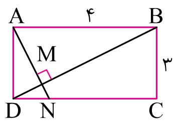
۵. در شکل مقابل مقدار x را به دست آورید.

۶. اگر دو قطر یک ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه بر هم عمود باشند ثابت کنید ارتفاع ذوزنقه واسطه هندسی بین دو قاعده است.



۷. ثابت کنید دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه‌اند و در ادامه نسبت تشابه را بنویسید.

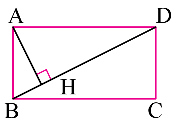
۸. همهٔ زاویه‌های مثلث ABC حاده‌اند. ارتفاع‌های BB' و CC' را رسم کرده و ثابت کنید مثلث ABC با مثلث $AB'C'$ متشابه است.



۹. چهارضلعی ABCD مستطیل است،

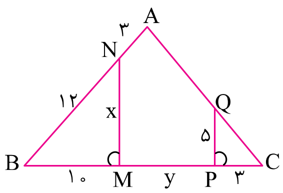
الف. طول DM را به دست آورید.

ب. طول DN را به دست آورید.



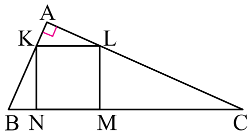
۱۰. اگر در مستطیل روبه‌رو $AB=۳\sqrt{۳}$ و $HD=۶$ آن‌گاه طول BH و AH را به دست آورید.

۱۱. در مثلث قائم الزاویه ABC $(\hat{A}=۹۰^\circ)$، اگر AH ارتفاع و $\tan(B\hat{A}H)=\frac{۱}{۲}$ باشد، آن‌گاه ارتفاع AH، وتر مثلث را با کدام نسبت تقسیم می‌کند؟



۱۲. در شکل روبه‌رو، $\hat{A}=B\hat{M}N=C\hat{P}Q$ ، x و y را به دست آورید.

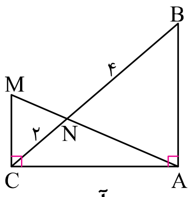
۱۳. چهارضلعی ABCD ذوزنقه است. اگر E نیز وسط AB باشد ثابت کنید F نیز وسط DC است.



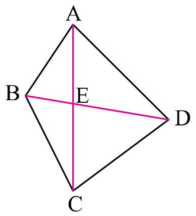
۱۴. الف. چهارضلعی KLMN مربع است، ثابت کنید طول MN میانگین هندسی طول‌های BN و MC است.

ب. اگر طول BC = ۱۴ و طول KL = ۴ باشد آن‌گاه طول BN و MC را به دست آورید.

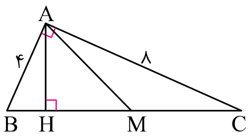
۱۵. در شکل روبه‌رو AC واسطه هندسی AB و CM است. نشان دهید AN واسطه هندسی CN و NB می‌باشد.



۱۶. در چهارضلعی ABCD، قطر BD مساحت چهارضلعی را به دو قسمت مساوی تقسیم کرده است. نسبت $\frac{AE}{EC}$ را به دست آورید.



۱۷. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، AH ارتفاع وارد بر وتر و در مثلث AHC، AM میانه وارد بر ضلع HC است. با توجه به داده‌های مسئله نسبت $\frac{MH}{AH}$ را به دست آورید.



۱۸. در مثلث ABC اگر AB = ۱۲ و AC = ۸ و از نقطهٔ M وسط ضلع BC خطی موازی با AB رسم کنیم تا نیمساز داخلی زاویه A را در نقطه N قطع کند، اندازهٔ MN را به دست آورید.

پاسخ تمرین‌های امتحانی

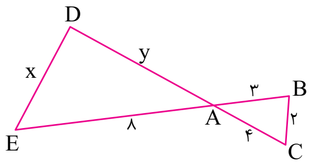
۱ الف. همواره درست است چون می‌دانیم هرگاه اندازه‌های دو ضلع از مثلثی با اندازه‌های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و زاویهٔ بین آن‌ها نیز برابر در این صورت دو مثلث متشابه‌اند.

ب. دو لوزی زمانی با هم متشابه‌اند که زاویه‌های برابری داشته باشند.

پ. دو مستطیل زمانی با هم متشابه‌اند که نسبت طول‌ها و عرض‌های آن‌ها با هم برابر باشد.

ت. دو مثلث قائم‌الزاویه نیز اگر یک زاویهٔ حاده برابر داشته باشند با هم متشابه‌اند.

۲



$$\left.\begin{matrix}\hat{D}=\hat{B}\\ \hat{A}_۱=\hat{A}_۲\end{matrix}\right\}\to \overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{ADE}$$

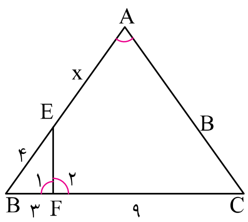
نسبت تشابه را می‌نویسیم:

$$\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DE}=\frac{AC}{AE}\to\frac{۳}{y}=\frac{۲}{x}=\frac{۴}{۸}$$

$$\frac{۲}{x}=\frac{۴}{۸}\to ۴x=۱۶\to x=۴$$

$$\frac{۳}{y}=\frac{۴}{۸}\to ۴y=۲۴\to y=۶$$

۳



$$\left.\begin{matrix}\hat{A}+\hat{F}_۲=۱۸۰^\circ\\ \hat{F}_۱+\hat{F}_۲=۱۸۰^\circ\end{matrix}\right\}\to A=\hat{F}_۱$$

از طرفی داریم:

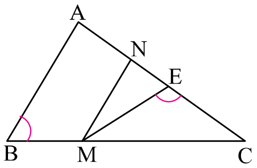
$$\left.\begin{matrix}\hat{A}=\hat{F}_۱\\ \hat{B}\ \text{مشترک}\end{matrix}\right\}\to \overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{BEF}$$

حال نسبت تشابه را می‌نویسیم:

$$\frac{BE}{BC}=\frac{EF}{AC}=\frac{BF}{AB}$$

$$\frac{۴}{۱۲}=\frac{۳}{۴+x}\to\frac{۱}{۳}=\frac{۳}{۴+x}\to ۴+x=۹\to x=۵$$

۴



$$MN\parallel AB\xrightarrow{\text{نتیجه تالس}}\underbrace{\frac{CM}{CB}=\frac{MN}{AB}}_{(۱)}=\frac{CN}{CA}$$

$$\left.\begin{matrix}\hat{C}\ (\text{مشترک})\\ \hat{E}=\hat{B}\end{matrix}\right\}\to \overset{\Delta}{MCE}\sim\overset{\Delta}{ABC}$$

حال نسبت تشابه را می‌نویسیم:

$$\frac{ME}{AB}=\frac{EC}{BC}=\frac{MC}{AC}$$

به عبارت دیگر:

$$\frac{EC}{BC}=\frac{ME}{AB}\ (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱)\div(۲)}\frac{CM}{EC}=\frac{MN}{ME}\to\frac{۵}{۲}=\frac{MN}{ME}$$

۵

$$\left.\begin{matrix}\left.\begin{matrix}\frac{AM}{AC}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}\\ \frac{AN}{AB}=\frac{۳}{۹}=\frac{۱}{۳}\end{matrix}\right\}\to\frac{AM}{AC}=\frac{AN}{AB}\\ \hat{A}\ \text{مشترک}\end{matrix}\right\}\to\overset{\Delta}{AMN}\sim\overset{\Delta}{ABC}$$

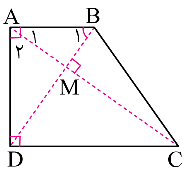
حال نسبت تشابه را می‌نویسیم:

$$\underbrace{\frac{AM}{AC}=\frac{MN}{BC}}=\frac{AN}{AB}$$

$$\frac{۱}{۳}=\frac{۱/۵}{x}\to x=۴/۵$$

۶

$$\begin{cases}\hat{A}_۱+\hat{B}_۱=۹۰^\circ\\ \hat{A}_۱+\hat{A}_۲=۹۰^\circ\end{cases}\to\hat{B}_۱=\hat{A}_۲$$

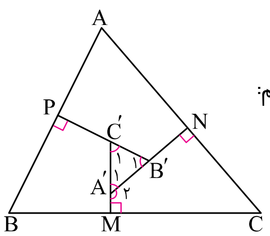


$$\left.\begin{matrix}\hat{B}_۱=\hat{A}_۲\\ \hat{A}=\hat{D}=۹۰^\circ\end{matrix}\right\}\to\overset{\Delta}{ABD}\sim\overset{\Delta}{ADC}$$

حال نسبت تشابه را می‌نویسیم:

$$\frac{BD}{AC}=\underbrace{\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{AD}}_{AD^۲=AB\times DC}$$

۷ در هر چهارضلعی مجموع زوایای داخلی ۳۶۰° است، پس داریم:



$$NCMA' : \widehat{N} = M = ۹۰^\circ \to \left.\begin{matrix} \widehat{A'}_۲ + \widehat{C} = ۱۸۰^\circ \\ \text{ازطرفی}: \widehat{A'}_۱ + \widehat{A'}_۲ = ۱۸۰^\circ \end{matrix}\right\}$$

$$\to \widehat{A}'_۱ = C$$

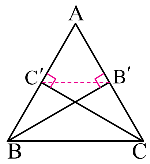
و به طور مشابه می‌توان نشان داد: $\widehat{C'}_۱ = \widehat{B}$ و $\widehat{B'}_۱ = \widehat{A}$

پس دو مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ متشابه‌اند و نسبت تشابه آن‌ها برابر است با:

$$\frac{A'B'}{AC} = \frac{A'C'}{BC} = \frac{B'C'}{AB}$$

۸ دو مثلث $\overset{\Delta}{ABB'}$ و $\overset{\Delta}{ACC'}$ متشابه‌اند زیرا هر کدام یک زاویه قائمه داشته و از طرفی در زاویه حاده $\widehat{A}$ مشترک‌اند و داریم:

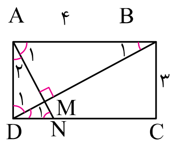
$$\frac{AB'}{AC'} = \frac{AB}{AC} \quad \text{(نسبت تشابه)}$$



از این رو می‌توان گفت:

$$\left.\begin{matrix} \frac{AB'}{AC'} = \frac{AB}{AC} \\ \widehat{A} \text{ مشترک} \end{matrix}\right\} \to \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{AB'C'}$$

۹ **الف.**



$$\left.\begin{matrix} \widehat{A}_۱ + \widehat{B}_۱ = ۹۰^\circ \\ \widehat{A}_۱ + \widehat{A}_۲ = ۹۰^\circ \end{matrix}\right\} \to \widehat{A}_۲ = \widehat{B}_۱$$

کاملاً مشخص است دو مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\Delta}{ADM}$ و $\overset{\Delta}{ABD}$ متشابه‌اند از این رو نسبت تشابه را می‌نویسیم:

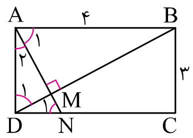
$$\frac{AD}{BD} = \frac{AM}{AB} = \frac{DM}{AD} \quad (۱)$$

از طرفی: $BD^۲ = AB^۲ + AD^۲$

$$\to BD^۲ = ۱۶ + ۹ \to BD = ۵$$

$$(۱): \frac{AD}{BD} = \frac{DM}{AD} \to \frac{۳}{۵} = \frac{DM}{۳} \to DM = \frac{۹}{۵}$$

ب.



$$\left.\begin{matrix} \widehat{D}_۱ + \widehat{A}_۱ = ۹۰^\circ \\ \widehat{N}_۱ + \widehat{A}_۱ = ۹۰^\circ \end{matrix}\right\} \to \widehat{D}_۱ = \widehat{N}_۱$$

دو مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\Delta}{ADN}$ و $\overset{\Delta}{BAD}$ متشابه‌اند از این رو نسبت تشابه عبارت است از:

$$\underbrace{\frac{DN}{AD} = \frac{AN}{BD} = \frac{AD}{AB}} \Longrightarrow \frac{۳}{۴} = \frac{DN}{۳} \to DN = \frac{۹}{۴}$$

۱۰ از روابط گفته شده در مثلث قائم‌الزاویه استفاده می‌کنیم:

$$AB^۲ = BH \times BD$$

$$\to (۳\sqrt{۳})^۲ = BH \times (BH + HD)$$

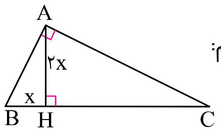
$$\to ۲۷ = BH \times (BH + ۶)$$

$$\to BH^۲ + ۶BH - ۲۷ = ۰$$

$$\to (BH + ۹)(BH - ۳) = ۰ \to \begin{cases} BH = -۹ \text{ غ‌ق‌ق} \\ BH = ۳ \text{ ق‌ق} \end{cases}$$

$$AH^۲ = BH \times HD \to AH^۲ = ۳ \times ۶ \to AH = ۳\sqrt{۲}$$

۱۱ طول BH را x در نظر می‌گیریم و داریم:



$$\tan(B\widehat{A}H) = \frac{BH}{AH} \to \frac{۱}{۲} = \frac{x}{AH} \to AH = ۲x$$

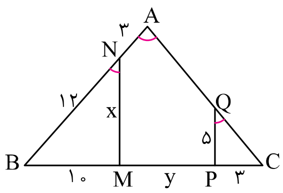
$$AH^۲ = BH \times HC$$

$$۴x^۲ = x \times HC \to HC = ۴x$$

بنابراین:

$$\frac{BH}{HC} = \frac{x}{۴x} = \frac{۱}{۴}$$

۱۲



$$\left.\begin{matrix} \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = ۱۸۰ \\ \widehat{B} + \widehat{M} + \widehat{N}_۱ = ۱۸۰ \\ \widehat{M} = \widehat{A} \end{matrix}\right\} \to \widehat{N}_۱ = \widehat{C}$$

$$\left.\begin{matrix} \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = ۱۸۰ \\ \widehat{C} + \widehat{P} + \widehat{Q}_۱ = ۱۸۰ \\ \widehat{P} = \widehat{A} \end{matrix}\right\} \to \widehat{Q}_۱ = \widehat{B}$$

از این رو دو مثلث $\overset{\Delta}{BMN}$ و $\overset{\Delta}{CPQ}$ متشابه‌اند.

$$\xrightarrow{\text{نسبت تشابه}} \frac{BN}{QC} = \underbrace{\frac{MN}{PC} = \frac{BM}{PQ}} = \frac{x}{۳} = \frac{۱۰}{۵} \to x = ۶$$

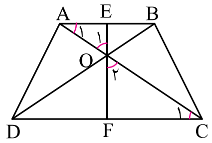
از طرفی دو مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{BMN}$ نیز متشابه‌اند.

$$\xrightarrow{\text{نسبت تشابه}} \underbrace{\frac{AB}{BM} = \frac{AC}{NM} = \frac{BC}{BN}}$$

$$\frac{۱۵}{۱۰} = \frac{۱۰ + y + ۳}{۱۲} \to \frac{۳}{۲} = \frac{۱۳ + y}{۱۲}$$

$$\to ۳۶ = ۲۶ + ۲y \to y = ۵$$

۱۳



$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel DC \to \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{array}\right\} \to \overset{\Delta}{AOE} \sim \overset{\Delta}{COF}$$

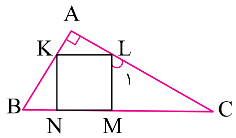
$$\xrightarrow{\text{نسبت تشابه}} \frac{AE}{FC} = \frac{OA}{OC} = \frac{OE}{OF} \quad (1)$$

به همین ترتیب $\overset{\Delta}{BOE} \sim \overset{\Delta}{DOF}$ و نسبت تشابه به صورت روبه‌رو است:

$$\frac{BE}{DF} = \frac{BO}{OD} = \frac{OE}{OF} \quad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \to \frac{AE}{FC} = \frac{BE}{DF} \xrightarrow{AE=BE} FC = DF$$

۱۴ الف.



$$\left.\begin{array}{l} \hat{B} + \hat{C} = 90^\circ \\ \hat{L}_1 + \hat{C} = 90^\circ \end{array}\right\} \to \hat{L}_1 = \hat{B}$$

کاملاً مشخص است که دو مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\Delta}{BNK}$ و $\overset{\Delta}{CML}$ متشابه‌اند و نسبت تشابه عبارت است از:

$$\frac{BN}{LM} = \frac{BK}{LC} = \frac{NK}{MC}$$

و چون $NK = LM = MN$ بنابراین:

$$\frac{BN}{MN} = \frac{MN}{MC} \to MN^2 = BN \times MC$$

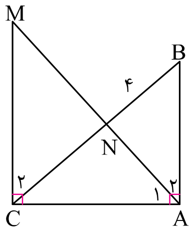
ب.

$$MN^2 = BN \times MC \to 4^2 = BN \times MC$$
$$\to BN \times MC = 16 \quad (1)$$
$$BN + NM + MC = 14 \to BN + MC = 10 \quad (2)$$

تنها اعدادی که در روابط (۱) و (۲) صدق می‌کنند ۲ و ۸ هستند

بنابراین: $BN = 2$ و $MC = 8$

۱۵



$$AC^2 = CM \times AB$$
$$\to \frac{AC}{AB} = \frac{CM}{AC} \quad (1)$$

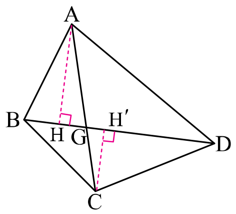
از طرفی $\hat{A} = \hat{C} = 90^\circ$ (۲). بنابراین طبق (۱) و (۲) $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{MAC}$.

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{B} \; (\text{طبق نسبت } \frac{CM}{AC}) \\ \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 90^\circ \end{array}\right\} \to \hat{B} + \hat{A}_2 = 90^\circ$$

پس مثلث ANB نیز قائم‌الزاویه است و می‌دانیم ارتفاع وارد بر وتر واسطه هندسی بین دو قطعهٔ ایجاد شده روی وتر است

بنابراین: $AN^2 = CN \times NB$

۱۶



$$S_{ABD} = S_{BDC}$$
$$\to \frac{1}{2} AH \times BD = \frac{1}{2} CH' \times BD$$
$$\to AH = CH'$$

کاملاً مشخص است که $\overset{\Delta}{AEH}$ و $\overset{\Delta}{CH'E}$ بنا به تساوی دو زاویه با هم متشابه‌اند و نسبت تشابه عبارت است از:

$$\frac{AH}{CH'} = \frac{AE}{EC} = \frac{EH}{EH'} \xrightarrow{AH=CH'} 1 = \frac{AE}{EC} = \frac{EH}{EH'}$$

۱۷ می‌دانیم ارتفاع وارد بر وتر مثلث‌های متشابه ایجاد می‌کند پس:

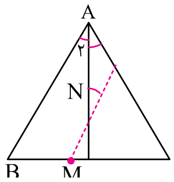
$$\overset{\Delta}{ACH} \sim \overset{\Delta}{ABC} \to \underbrace{\frac{CH}{AC} = \frac{AH}{AB}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\frac{CH}{8} = \frac{AH}{4} \to CH = 2AH \quad (1)$$

از طرفی: $CH = 2MH \quad (2)$

$$(1) \text{ و } (2):\; 2MH = 2AH \to \frac{MH}{AH} = 1$$

۱۸ طبق قضیه اساسی تشابه چون $MM' \parallel AB$ است می‌توان گفت:



$$\overset{\Delta}{CMM'} \sim \overset{\Delta}{CBA} \rightarrow \frac{MM'}{AB} = \frac{CM}{CB} = \frac{CM'}{CA} = \frac{۱}{۲}$$

$$\rightarrow MM' = \frac{AB}{۲} = \frac{۱۲}{۲} = ۶$$

از طرف دیگر می‌توان نوشت:

$$MM' \parallel AB \rightarrow \left.\begin{matrix} \widehat{N} = \widehat{A}_۲ \\ \widehat{A}_۲ = \widehat{A}_۱ \end{matrix}\right\} \rightarrow \widehat{A}_۱ = \widehat{N}$$

مثلث $\overset{\Delta}{ANM'}$ متساوی‌الساقین است و یعنی:

$$AM' = NM' \quad (۱)$$

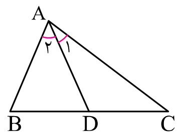
از طرفی مشخص است که $AM' = \frac{۱}{۲}AC$ از این رو داریم:

$$AM' = \frac{۱}{۲}AC = \frac{۱}{۲} \times ۸ = ۴ \rightarrow NM' = ۴$$

در نهایت: $MN = MM' - NM' = ۶ - ۴ = ۲$

درس چهارم: کاربردهایی از قضیه تالس و تشابه مثلث‌ها

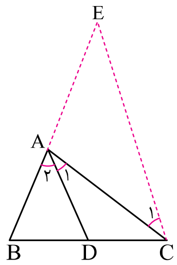
قضیه نیمساز



در هر مثلث، نیمساز هر زاویهٔ داخلی، ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت اندازه‌های ضلع‌های آن زاویه تقسیم می‌کند.

$$\hat{A}_1=\hat{A}_2 \rightarrow \frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$$

اثبات:



از رأس C، خطی به موازات نیمساز AD رسم کرده تا امتداد BA را در نقطهٔ E قطع کند.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}AD \parallel CE\\ AC(\text{مورب})\end{array}\right\} \rightarrow \hat{A}_1=\hat{C}_1\\ \hat{A}_1=\hat{A}_2\end{array}\right\} \rightarrow \hat{A}_2=\hat{C}_1 \quad (۱) \text{ و } \left.\begin{array}{l}AD \parallel CE\\ BE(\text{مورب})\end{array}\right\} \rightarrow \hat{A}_2=\hat{E} \quad (۲)$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \rightarrow \hat{E}=\hat{C}_1 \xrightarrow{\text{مثلث } \overset{\Delta}{AEC} \text{ متساوی‌الساقین}} AE=AC \quad (۳)$$

$$\text{طبق فرض: } AD \parallel CE \longrightarrow \frac{AB}{AE}=\frac{BD}{DC} \xrightarrow{(۳)} \frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$$

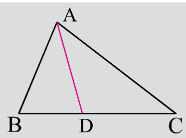
مثال:

۱. سه ضلع مثلثی ۹ و ۵ و ۶ سانتی‌مترند. اندازهٔ پاره‌خط‌هایی را که نیمساز درونی زاویه بزرگ‌تر مثلث بر ضلع مقابل آن پدید می‌آورد، تعیین کنید.

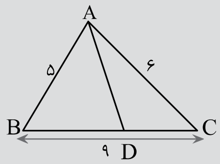
مجهول: $DC=?$ و $BD=?$

داده‌ها: $AB=۵ , AC=۶ , BC=۹$

فرمول‌ها و روابط: $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$



حل تشریحی: زاویهٔ بزرگ‌تر روبه‌روی ضلع بزرگ‌تر قرار می‌گیرد و حال طبق قضیه نیمساز داریم:



$$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC} \rightarrow \frac{۵}{۶}=\frac{BD}{DC} \rightarrow \frac{۵}{۵+۶}=\frac{BD}{BD+DC}$$

$$\rightarrow \frac{۵}{۱۱}=\frac{BD}{۹} \rightarrow BD=\frac{۴۵}{۱۱}$$

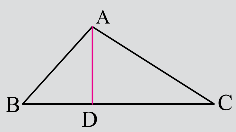
$$DC=BC-BD=۹-\frac{۴۵}{۱۱}=\frac{۵۴}{۱۱}$$

۲. در مثلث ABC اگر AD نیمساز و $AC=\frac{۳}{۴}BC$ و $AB=\frac{۲}{۳}AC$ باشد، آن‌گاه BD چند برابر BC خواهد بود؟

مجهول: $\frac{BD}{BC}=?$

داده‌ها: AD نیمساز و $AC=\frac{۳}{۴}BC \; , \; AB=\frac{۲}{۳}AC$

فرمول‌ها و روابط: $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$



حل تشریحی:

$$AB=\frac{۲}{۳}AC$$

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC} \rightarrow \frac{۲}{۳}=\frac{BD}{DC}$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب درمخرج}} \frac{۲}{۲+۳}=\frac{BD}{BD+DC}$$

$$\rightarrow \frac{۲}{۵}=\frac{BD}{BC} \rightarrow BD=\frac{۲}{۵}BC$$

نکته: عکس قضیه نیمسازها نیز برقرار می‌باشد.

قضیه:

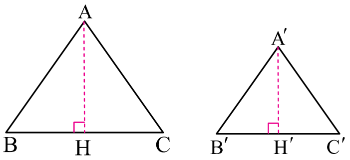
هرگاه دو مثلث متشابه باشند، آن‌گاه نسبت اندازه‌های هر دو جزء متناظر (ارتفاع‌ها، میانه‌ها، نیمساز و محیط‌ها) مساوی نسبت تشابه و نسبت مساحت‌های آن‌ها مساوی مربع نسبت تشابه است.

قضیه گفته شده را تفکیک شده اثبات می‌نماییم.

الف. در دو مثلث متشابه نسبت اندازه‌های ارتفاع‌های متناظر با نسبت تشابه برابر است.

اثبات:

فرض کنیم دو مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ متشابه باشند، حال نسبت تشابه را می‌نویسیم:
(k نسبت تشابه است)

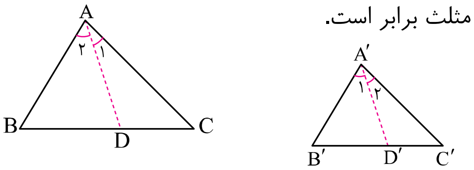


$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}=k \quad \text{(۱)}$$

از تشابه این ۲ مثلث به راحتی نتیجه می‌شود که $\widehat{B}=\widehat{B'}$. بنابراین به حالت دو زاویه مساوی می‌توان گفت که دو مثلث $\overset{\Delta}{ABH}$ و $\overset{\Delta}{A'B'H'}$ متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AH}{A'H'}\xrightarrow{(۱)}\frac{AH}{A'H'}=k$$

ب. در دو مثلث متشابه نسبت اندازه‌های نیمسازهای زوایای متناظر با نسبت تشابه دو مثلث برابر است.



اثبات:

فرض کنیم دو مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ متشابه باشند و حال نسبت تشابه را می‌نویسیم:

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}=k \quad \text{(۱)}$$

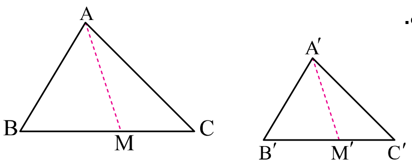
از تشابه این دو مثلث به راحتی نتیجه می‌شود که $\widehat{B}=\widehat{B'}$ و $\widehat{A}=\widehat{A'}$.

$$\widehat{A}=\widehat{A'}\rightarrow ۲\widehat{A}_۱=۲\widehat{A'}_۱\rightarrow \widehat{A}_۱=\widehat{A'}_۱$$

در ادامه می‌توان گفت که $\overset{\Delta}{ABD}$ و $\overset{\Delta}{A'B'D'}$ با یک‌دیگر متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AD}{A'D'}\xrightarrow{(۱)}\frac{AD}{A'D'}=k$$

پ. در دو مثلث متشابه نسبت اندازه‌های میانه‌های متناظر با نسبت تشابه دو مثلث برابر است.



اثبات:

فرض کنیم دو مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ متشابه باشند و طبق آن نسبت، تشابه را می‌نویسیم:

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}=k \quad \text{(۱)}$$

داریم : $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}\rightarrow\frac{AB}{A'B'}=\frac{\frac{۱}{۲}BC}{\frac{۱}{۲}B'C'}\rightarrow\frac{AB}{A'B'}=\frac{BM}{B'M'} \quad \text{(۲)}$

از تشابه دو مثلث به راحتی نتیجه می‌شود که $\widehat{B}=\widehat{B'}$ (۳).

$$\text{(۲) و (۳)}\rightarrow \overset{\Delta}{ABM}\sim\overset{\Delta}{A'B'M'}$$

حال برای این ۲ مثلث نسبت تشابه را می‌نویسیم:

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AM}{A'M'}\xrightarrow{(۱)}\frac{AM}{A'M'}=k$$

ت. نسبت محیط‌های دو مثلث متشابه با نسبت تشابه برابر است.

اثبات:

فرض کنیم دو مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ متشابه باشند و برای نسبت تشابه داریم:

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}=k$$

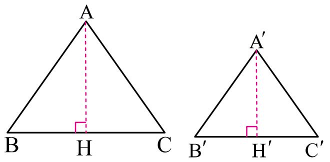
حال داریم:

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AB+AC+BC}{A'B'+A'C'+B'C'}=k\rightarrow\frac{\text{محیط } \overset{\Delta}{ABC}}{\text{محیط } \overset{\Delta}{A'B'C'}}=k$$

ث. نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه با مجذور نسبت تشابه آن‌ها برابر است.

اثبات:

فرض کنیم دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه باشند، نسبت تشابه عبارت است از:



$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}=k$$

داریم:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}=\frac{\frac{1}{2}AH\times BC}{\frac{1}{2}A'H'\times B'C'}=(\frac{AH}{A'H'})(\frac{BC}{B'C'})=k\times k=k^2$$

مثال:

۱. نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه $\frac{81}{121}$ است، نسبت ارتفاع‌ها و میانه‌ها را به دست آورید.

مجهول: $\frac{AM_2}{AM_1}=?,\frac{AH_2}{AH_1}=?$

داده‌ها: $\frac{S_1}{S_2}=\frac{81}{121}$

فرمول‌ها و روابط: $\frac{S_1}{S_2}=k^2\ ,\ \frac{AM_2}{AM_1}=\frac{AH_2}{AH_1}=k$

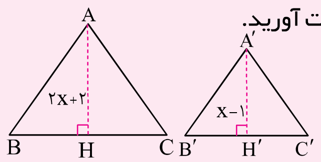
حل تشریحی:

$$\frac{81}{121}=k^2\rightarrow k=\frac{9}{11}$$

بنابراین:

$$\frac{AM_2}{AM_1}=\frac{AH_2}{AH_1}=k=\frac{9}{11}$$

۲. دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه‌اند. اگر $\frac{S_{\overset{\Delta}{A'B'C'}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}=\frac{4}{25}$، مقدار x را به دست آورید.



مجهول: $x=?$

داده‌ها: $AH=2x+2, A'H'=x-1$

$\overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{A'B'C'}\ ,\ \frac{S_{\overset{\Delta}{A'B'C'}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}=\frac{4}{25}$

فرمول‌ها و روابط: $\frac{S_{\overset{\Delta}{A'B'C'}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}=k^2$ ، $\frac{A'H'}{AH}=k$

حل تشریحی: در دو مثلث متشابه نسبت مساحت‌ها با مجذور نسبت تشابه برابر است:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{A'B'C'}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}=\frac{4}{25}\rightarrow\frac{4}{25}=k^2\rightarrow k=\frac{2}{5}$$

$$\frac{A'H'}{AH}=k=\frac{2}{5}\rightarrow\frac{x-1}{2x+2}=\frac{2}{5}$$

$$\rightarrow 5x-5=4x+4\rightarrow x=9$$

مثال:

۳. نشان دهید در دو چهارضلعی متشابه با نسبت تشابه k، نسبت محیط‌های آن‌ها مساوی k و نسبت مساحت‌های آن‌ها $k^۲$ می‌باشد.

مجهول

$$\frac{ABCD \text{ مساحت}}{A'B'C'D' \text{ مساحت}} = k^۲ \quad \text{و} \quad \frac{ABCD \text{ محیط}}{A'B'C'D' \text{ محیط}} = k$$

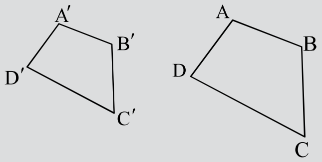
داده‌ها

$ABCD \sim A'B'C'D'$

فرمول‌ها و روابط

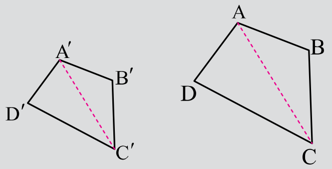
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{DC}{D'C'} = \frac{AD}{A'D'} = k$$

$$\widehat{A} = \widehat{A'} \ , \ \widehat{B} = \widehat{B'} \ , \ \widehat{C} = \widehat{C'} \ , \ \widehat{D} = \widehat{D'}$$



حل تشریحی

قطرهای AC و $A'C'$ را رسم می‌کنیم، داریم:



$$\left.\begin{matrix} \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \end{matrix}\right\} \rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

$$\rightarrow \left\{\begin{matrix} \dfrac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{S_{\overset{\Delta}{A'B'C'}}} = k^۲ \\ \dfrac{ABC \text{ محیط}}{A'B'C' \text{ محیط}} = k \end{matrix}\right. \qquad (۱)$$

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{AD}{A'D'} = \dfrac{DC}{D'C'} \\ \widehat{D} = \widehat{D'} \end{matrix}\right\} \rightarrow ADC \sim A'D'C'$$

$$\rightarrow \left\{\begin{matrix} \dfrac{S_{\overset{\Delta}{ADC}}}{S_{\overset{\Delta}{A'D'C'}}} = k^۲ \\ \dfrac{ADC \text{ محیط}}{A'D'C' \text{ محیط}} = k \end{matrix}\right. \qquad (۲)$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{S_{\overset{\Delta}{A'B'C'}}} = \frac{S_{\overset{\Delta}{ADC}}}{S_{\overset{\Delta}{A'D'C'}}} = k^۲$$

$$\rightarrow \frac{S_{ABC} + S_{ADC}}{S_{A'B'C'} + S_{A'D'C'}} = k^۲ \rightarrow \frac{S_{ABCD}}{S_{A'B'C'D'}} = k^۲$$

$$\rightarrow (۱) \text{و} (۲) \ \frac{ABC \text{ محیط}}{A'B'C' \text{ محیط}} = \frac{ADC \text{ محیط}}{A'D'C' \text{ محیط}} = k$$

$$\rightarrow \frac{ABC \text{ محیط} + ADC \text{ محیط}}{A'B'C' \text{ محیط} + A'D'C' \text{ محیط}} = k$$

$$\rightarrow \frac{ABCD \text{ محیط}}{A'B'C'D' \text{ محیط}} = k$$

از حل سؤال بالا می‌توان به نتیجه‌گیری کلی زیر رسید:

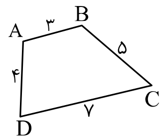
هرگاه دو چند ضلعی با نسبت k متشابه باشند، نسبت محیط‌های آن‌ها مساوی k و نسبت مساحت‌های آن‌ها $k^۲$ است.

تمرین‌های امتحانی

۱. مثلث ABC با مثلثی به اضلاع ۲ و ۳ و ۴ متشابه است. اگر کوچک‌ترین ضلع مثلث ۸ واحد باشد و نیمساز زاویهٔ کوچک‌تر، ضلع مقابل را به دو جزء تقسیم کند، آن‌گاه طول دو جزء را به دست آورید.

۲. در مثلث ABC با اضلاع $AB = ۹$ ، $AC = ۱۲$ و $BC = ۵$، نیمساز درونی زاویه B را رسم می‌کنیم. فاصله پای نیمساز تا پای میانهٔ وارد بر ضلع AC کدام است؟

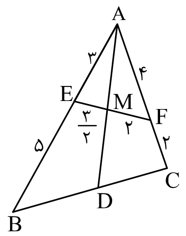
۳. در چهارضلعی روبه‌رو نیمساز زاویه A و C را رسم کرده و محل تلاقی آن‌ها با قطعه BD را به ترتیب $D_۱$ و $D_۲$ می‌نامیم. طول پاره‌خط DD' را به دست آورید.



۴. در مثلث ABC داریم $AB = ۱۰$ و $AC = ۴$ و $BC = ۸$ و O محل برخورد نیمسازهای داخلی می‌باشد. حاصل $\frac{BO}{BD}$ را به دست آورید.

۵. نیمساز زاویه قائمه یک مثلث قائم‌الزاویه، وتر آن را به نسبت ۳ و ۴ تقسیم کرده است. اگر مساحت مثلث ۵۴ باشد، آن‌گاه وتر را به دست آورید.

۶. با توجه به شکل روبه‌رو، طول BD را به دست آورید.

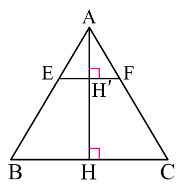


۷. در دو مثلث متشابه، مساحت مثلث بزرگ‌تر ۸ برابر مساحت مثلث کوچک‌تر است.

الف. اگر طول یک ضلع مثلث کوچک‌تر ۳ سانتی‌متر باشد طول ضلع متناظر در مثلث بزرگ‌تر را بیابید.

ب. نسبت محیط مثلث بزرگ‌تر به مثلث کوچک‌تر کدام است؟

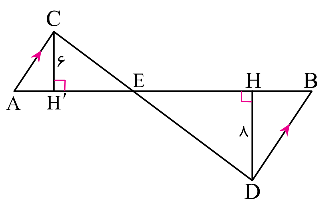
۸. در شکل مقابل $EF \parallel BC$. اگر $AE = ۳$ و $AB = ۷$ آن‌گاه نسبت ارتفاع‌های متناظر را به دست آورید.



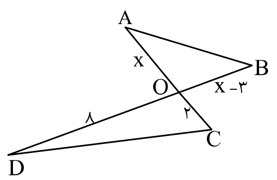
۹. با توجه به شکل، اگر $AB = ۳۵cm$ باشد به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف. نسبت مساحت مثلث‌های BDE و ACE را بیابید.

ب. مساحت مثلث BDE را بیابید.



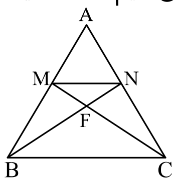
۱۰. در شکل روبرو، دو مثلث متشابه‌اند. نسبت مساحت این دو مثلث را به دست آورید.



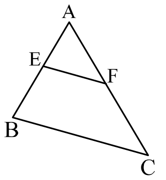
۱۱. طول ضلع‌های مثلثی ۳، ۴ و ۵ است. طول ضلع‌های مثلثی متشابه با این مثلث را پیدا کنید که محیط و مساحت آن با یک‌دیگر برابر باشد.

۱۲. در مثلث ABC میانه‌های نظیر رأس‌های B و C را رسم کرده و نقاط تلاقی با اضلاع AB و AC را به ترتیب M و N می‌نامیم، نشان دهید:

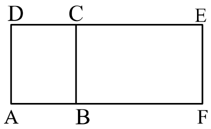
$$S_{\overset{\triangle}{MNF}} = \frac{۱}{۴} S_{\overset{\triangle}{BFC}}$$



۱۳. در شکل مقابل $\frac{۳}{۴} = \frac{AF}{FC} = \frac{AE}{EB}$ ، مساحت چهارضلعی BEFC چند برابر مساحت مثلث AEF است؟

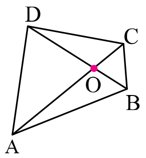


۱۴. در شکل زیر مستطیل‌های ABCD و BCEF متشابه‌اند. اگر $AB = ۲$ و $AD = ۴$ ، آن‌گاه مساحت ADEF چند برابر BCEF است؟



۱۵. از نقطهٔ O داخل مثلث ABC، سه خط موازی اضلاع مثلث رسم کرده‌ایم تا از برخورد آن‌ها با اضلاع مثلث، سه مثلث که در رأس مشترک‌اند، ایجاد شود. اگر مساحت این سه مثلث ۴ و ۹ و ۱۶ باشد، مساحت مثلث ABC را به دست آورید.

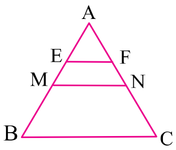
۱۶. در شکل مقابل اگر $OA = ۴$ و $OC = ۲$ و $S_{\overset{\triangle}{ABD}} = ۸$، در این صورت $S_{\overset{\triangle}{BDC}}$ را بیابید.



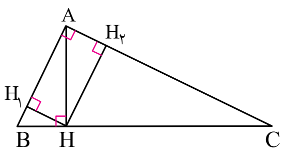
۱۷. در مثلث ABC نقاط N و M وسط اضلاع AC و AB و نقاط E و F وسط اضلاع AM و AN می‌باشند.

الف. نسبت مساحت $\overset{\triangle}{AEF}$ به مساحت $\overset{\triangle}{ABC}$ چقدر است؟

ب. نسبت مساحت EFCB به مساحت $\overset{\triangle}{ABC}$ چقدر است؟

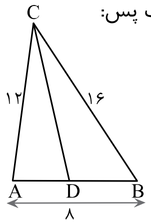


۱۸. در مثلث قائم‌الزاویه ABC $(\widehat{A} = ۹۰^\circ)$، اگر $S_{\overset{\triangle}{ABH}} = \frac{۱}{۳} S_{\overset{\triangle}{ABC}}$ مطلوبست نسبت $\frac{HH_۱}{HH_۲}$ ؟



پاسخ تمرین‌های امتحانی

۱ ABC با مثلثی به اضلاع ۲ و ۳ و ۴ متشابه است پس:



$$\frac{AB}{۲}=\frac{BC}{۳}=\frac{AC}{۴}$$

AB کوچک‌ترین ضلع است بنابراین: $\frac{۸}{۲}=\frac{BC}{۳}=\frac{AC}{۴}$

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{BC}{۳}=۴ \rightarrow BC=۱۲ \\ \frac{AC}{۴}=۴ \rightarrow AC=۱۶ \end{cases}$$

و کاملاً مشخص است که کوچک‌ترین زاویه روبه‌روی AB قرار می‌گیرد.

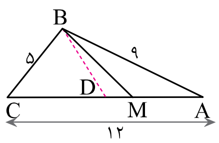
حال طبق قضیه نیمساز $\frac{CA}{CB}=\frac{AD}{DB} \rightarrow \frac{۱۲}{۱۶}=\frac{AD}{DB}$

$$\rightarrow \frac{۱۲}{۲۸}=\frac{AD}{AD+DB}.$$

$$\rightarrow \frac{۱۲}{۲۸}=\frac{AD}{۸} \rightarrow AD=\frac{\overset{۳}{\cancel{۱۲}}\times ۸}{\underset{۷}{\cancel{۲۸}}}=\frac{۲۴}{۷},$$

$$DB=۸-\frac{۲۴}{۷}=\frac{۳۲}{۷}$$

۲



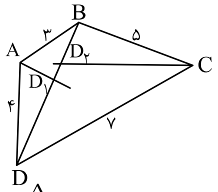
طبق قضیه نیمساز $\Rightarrow \frac{BC}{BA}=\frac{CD}{DA} \rightarrow \frac{۵}{۹}=\frac{CD}{DA}$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب درمخرج}} \frac{۵}{۱۴}=\frac{CD}{CD+DA}$$

$$\rightarrow \frac{۵}{۱۴}=\frac{CD}{۱۲} \rightarrow CD=\frac{\overset{۶}{\cancel{۱۲}}\times ۵}{\underset{۷}{\cancel{۱۴}}}=\frac{۳۰}{۷}$$

$$MD=CM-CD=۶-\frac{۳۰}{۷}=\frac{۴۲-۳۰}{۷}=\frac{۱۲}{۷}$$

۳ کافیست دو مثلث بسازیم و قضیه نیمساز را برایشان بنویسیم:



$$\overset{\Delta}{ABD}: \frac{AD}{AB}=\frac{DD_۱}{D_۱B} \Rightarrow \frac{۴}{۴}=\frac{DD_۱}{D_۱B}$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب درمخرج}} \frac{۴}{۷}=\frac{DD_۱}{DB} \Rightarrow DD_۱=\frac{۴}{۷}DB$$

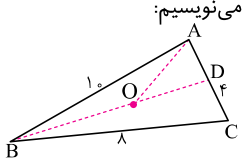
$$\overset{\Delta}{CDB}: \frac{CB}{CD}=\frac{BD_۲}{D_۲D} \rightarrow \frac{۵}{۷}=\frac{BD_۲}{D_۲D}$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب درمخرج}} \frac{۵}{۱۲}=\frac{BD_۲}{DB} \rightarrow BD_۲=\frac{۵}{۱۲}DB$$

$$DD_۱+D_۱D_۲+BD_۲=DB$$

$$\rightarrow \frac{۴}{۷}DB+D_۱D_۲+\frac{۵}{۱۲}DB=DB \rightarrow D_۱D_۲=\frac{۱}{۸۴}DB$$

۴ ابتدا قضیه نیمساز را برای $\overset{\Delta}{BAC}$ می‌نویسیم:



$$\frac{BC}{BA}=\frac{CD}{DA} \rightarrow \frac{۸}{۱۰}=\frac{CD}{DA}$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب درمخرج}} \frac{۸}{۱۸}=\frac{CD}{۴} \rightarrow CD=\frac{\overset{۴}{\cancel{۸}}\times ۴}{\underset{۹}{\cancel{۱۸}}}=\frac{۱۶}{۹}$$

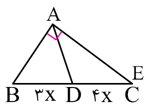
$$CD=\frac{۱۶}{۹}\ ,\ AD=۴-\frac{۱۶}{۹}=\frac{۳۶-۱۶}{۹}=\frac{۲۰}{۹}$$

حال قضیه نیمساز را برای $\overset{\Delta}{ABD}$ می‌نویسیم:

$$\frac{AB}{AD}=\frac{BO}{OD} \rightarrow \frac{۱۰}{\frac{۲۰}{۹}}=\frac{BO}{OD}$$

$$\rightarrow \frac{۹}{۲}=\frac{BO}{OD} \xrightarrow{\text{ترکیب درمخرج}} \frac{۹}{۱۱}=\frac{BO}{BD}$$

۵



$$\frac{AB}{AC}=\frac{۳x}{۴x} \rightarrow \frac{AB}{AC}=\frac{۳}{۴} \rightarrow AB=\frac{۳}{۴}AC$$

$$S=۵۴ \rightarrow \frac{۱}{۲}AC\times AB=۵۴ \rightarrow \frac{۱}{۲}AC\times\frac{۳}{۴}AC=۳^۳\times ۲$$

$\to AC^۲ = \frac{۲^۳ \times ۳^۳ \times ۲}{۳} = ۲^۴ \times ۳^۲ \Rightarrow AC = ۱۲$

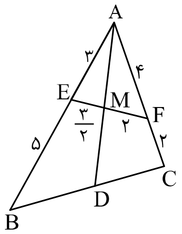
طبق قضیه فیثاغورس:

$AB = \frac{۳}{۴}AC = \frac{۳}{۴} \times ۱۲ = ۹$

$BC^۲ = AB^۲ + AC^۲$

$= ۹^۲ + ۱۲^۲ = ۸۱ + ۱۴۴ = ۲۲۵ \to BC = ۱۵$

۶



$\left.\begin{array}{l}\frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AB} = \frac{۱}{۲} \\ \hat{A}\ \text{مشترک}\end{array}\right\} \to \overset{\triangle}{AEF} \sim \overset{\triangle}{ABC}$

طبق نسبت تشابه: $\frac{EF}{BC} = \frac{۱}{۲} \to \frac{\frac{۷}{۲}}{BC} = \frac{۱}{۲} \to BC = ۷$

ازطرفی: $\frac{AE}{AF} = \frac{EM}{MF} = \frac{۳}{۴}$

$\xrightarrow[\text{نیمساز}]{\text{عکس قضیه}} \hat{A}$ نیمساز $AM \to AD$ نیمسازاست

حال می‌توان گفت:

$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \to \frac{۸}{۶} = \frac{BD}{DC} \xrightarrow[\text{مخرج}]{\text{ترکیب در}} \frac{۸}{۱۴} = \frac{BD}{۷}$

$\to BD = ۴$

۷ الف. می‌دانیم نسبت مساحت‌ها با مجذور نسبت اضلاع متناظر برابر است پس:

$\frac{S_۱}{S_۲} = (\frac{BC}{B'C'})^۲ \to ۸ = (\frac{۳}{B'C'})^۲$

$\to ۲\sqrt{۲} = \frac{۳}{B'C'} \to B'C' = \frac{۳}{۲\sqrt{۲}}$

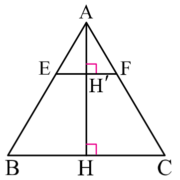
$\to B'C' = \frac{۳\sqrt{۲}}{۲ \times ۲} = \frac{۳\sqrt{۲}}{۴}$

ب. نسبت مساحت‌ها با مجذور نسبت محیط‌ها برابر است پس:

$\frac{S_۱}{S_۲} = (\frac{\text{محیط } ABC}{\text{محیط } A'B'C'})^۲ \to \frac{۱}{۸} = (\frac{\text{محیط } ABC}{\text{محیط } A'B'C'})^۲$

$\to \frac{\text{محیط } ABC}{\text{محیط } A'B'C'} = \frac{۱}{۲\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۴}$

۸



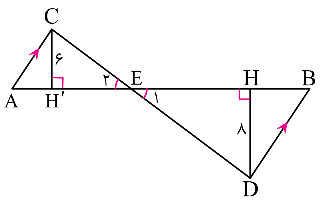
$EF \parallel BC \to \overset{\triangle}{AEF} \sim \overset{\triangle}{ABC} \xrightarrow{\text{نسبت تشابه}} \frac{AE}{AB} = k$

از طرفی: از این رو داریم:

$\frac{AH'}{AH} = k \to \frac{AH'}{AH} = \frac{۳}{۷}$

$\frac{AE}{AB} = \frac{۳}{۷} = k$

۹ الف.



$\left.\begin{array}{l} BD \parallel AC \to \hat{B} = \hat{A} \\ \hat{E}_۱ = \hat{E}_۲\ \text{متقابل‌به‌راس}\end{array}\right\} \to \overset{\triangle}{BDE} \sim \overset{\triangle}{ACE}$

در دو مثلث متشابه نسبت مساحت‌ها با مجذور نسبت ارتفاع‌ها برابر است پس:

$\frac{S_{\overset{\triangle}{BDE}}}{S_{\overset{\triangle}{ACE}}} = (\frac{DH}{CH'})^۲ = (\frac{۸}{۶})^۲ = \frac{۱۶}{۹}$

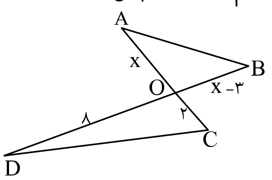
ب. $\overset{\triangle}{BDE} \sim \overset{\triangle}{ACE} \longrightarrow \frac{BE}{AE} = \frac{DH}{CH'} \to \frac{BE}{AE} = \frac{۸}{۶}$

نسبت اضلاع متناظر با نسبت ارتفاع‌ها برابر است.

$\xrightarrow{\text{ترکیب درمخرج}} \frac{BE}{AB} = \frac{۸}{۱۴} \to \frac{BE}{\cancel{۳۵}_{۵}} = \frac{۴}{\cancel{۷}} \to BE = ۲۰$

$S_{\overset{\triangle}{BDE}} = \frac{۱}{۲} BE \times DH \to S_{\overset{\triangle}{BDE}} = \frac{۱}{۲} \times ۲۰ \times ۸ = ۸۰$

۱۰ دو مثلث $\overset{\triangle}{OAB}$ و $\overset{\triangle}{ODC}$ با هم متشابه‌اند پس نسبت تشابه را می‌نویسیم:

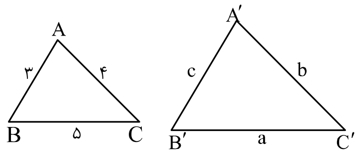


توجه کنید در نسبت‌نویسی اضلاع کوچک‌تر با هم و اضلاع بزرگ‌تر با هم متناسبند.

$\frac{x-۳}{۲} = \frac{x}{۸} \to ۸x - ۲۴ = ۲x \to ۶x = ۲۴ \to x = ۴$

$\frac{S_{\overset{\triangle}{OAB}}}{S_{\overset{\triangle}{ODC}}} = (\frac{x}{۸})^۲ = (\frac{۴}{۸})^۲ = \frac{۱}{۴}$

۱۱



$\overset{\triangle}{ABC}$ با $\overset{\triangle}{A'B'C'}$ متشابه است پس:

$$\frac{a}{۵}=\frac{b}{۴}=\frac{c}{۳}=k \rightarrow \begin{cases} a=۵k \\ b=۴k \\ c=۳k \end{cases}$$

متوجه می‌شویم که $(۵k)^۲=(۴k)^۲+(۳k)^۲$ پس مثلث $A'B'C'$ قائم‌الزاویه است و داریم:

$$S_{\overset{\triangle}{A'B'C'}}=\frac{۱}{۲}bc=\frac{۱}{۲}\times ۴k\times ۳k=۶k^۲$$

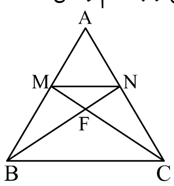
$$\text{محیط}\ \overset{\triangle}{A'B'C'}=a+b+c=۵k+۴k+۳k=۱۲k$$

$$۱۲k=۶k^۲ \rightarrow k^۲-۲k=۰ \rightarrow k(k-۲)=۰ \rightarrow \begin{cases} k=۰ \times \\ k=۲ \checkmark \end{cases}$$

بنابراین: $a=۱۰\ ,\ b=۸\ ,\ c=۶$

---

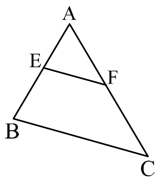
۱۲ می‌دانیم پاره‌خطی که وسط‌های دو ضلع مثلثی را به هم وصل کند، با ضلع سوم موازی و نصف آن خواهد بود.



پس کاملاً مشخص می‌شود که $\overset{\triangle}{MFN}\sim\overset{\triangle}{BFC}$

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{MNF}}}{S_{\overset{\triangle}{BFC}}}=\left(\frac{MN}{BC}\right)^۲=\left(\frac{MN}{۲MN}\right)^۲=\frac{۱}{۴}$$

۱۳



$$\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}=\frac{۳}{۴}\xrightarrow{\text{ترکیب درمخرج}}\left.\begin{array}{l}\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AF}{AC}=\dfrac{۳}{۷} \\ \hat{A}(\text{مشترک})\end{array}\right\}$$

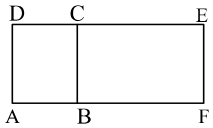
$$\rightarrow \overset{\triangle}{AEF}\sim\overset{\triangle}{ABC}$$

از طرفی: $$\frac{S_{\overset{\triangle}{AEF}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}=\left(\frac{۳}{۷}\right)^۲=\frac{۹}{۴۹}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل درمخرج}}\frac{S_{\overset{\triangle}{AEF}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}-S_{\overset{\triangle}{AEF}}}=\frac{۹}{۴۹-۹}$$

$$\rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{AEF}}}{S_{BEFC}}=\frac{۹}{۴۰}\rightarrow S_{BEFC}=\frac{۴۰}{۹}S_{\overset{\triangle}{AEF}}$$

۱۴



ABCD و BCEF متشابه‌اند پس:

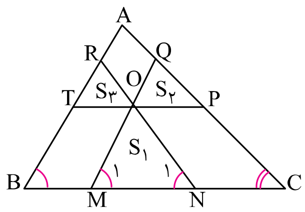
$$\frac{S_{ABCD}}{S_{BCEF}}=\left(\frac{AB}{EF}\right)^۲\rightarrow\frac{S_{ABCD}}{S_{BCEF}}=\left(\frac{۲}{۴}\right)^۲=\frac{۱}{۴}$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب درصورت}}\frac{S_{ABCD}+S_{BCEF}}{S_{BCEF}}$$

$$=\frac{۱+۴}{۴}\rightarrow\frac{S_{ABCE}}{S_{BCEF}}=\frac{۵}{۴}$$

$$\rightarrow S_{ADEF}=\frac{۵}{۴}S_{BCEF}$$

۱۵



$$\left.\begin{array}{l}RN \parallel AC \\ BC(\text{مورب})\end{array}\right\}\rightarrow \hat{N}_۱=\hat{C}$$

$$\left.\begin{array}{l}MQ \parallel AB \\ BC(\text{مورب})\end{array}\right\}\rightarrow \hat{B}=\hat{M}_۱$$

کاملاً مشخص است که $\overset{\triangle}{OMN}\sim\overset{\triangle}{ABC}$ و به همین ترتیب و استدلال می‌توان گفت که:

$$\overset{\triangle}{QOP}\sim\overset{\triangle}{ABC}\ \text{و}\ \overset{\triangle}{ROT}\sim\overset{\triangle}{ABC}$$

داریم:

$$\frac{S_۱}{S}=\left(\frac{MN}{BC}\right)^۲$$

$$\frac{S_۲}{S}=\left(\frac{OP}{BC}\right)^۲\xrightarrow[\text{متوازی‌الاضلاع } OPNC]{OP=NC}\frac{S_۲}{S}=\left(\frac{NC}{BC}\right)^۲$$

$$\frac{S_۳}{S}=\left(\frac{OT}{BC}\right)^۲\xrightarrow[\text{متوازی‌الاضلاع } OPNC]{OP=NC}\frac{S_۳}{S}=\left(\frac{BM}{BC}\right)^۲$$

حال داریم:

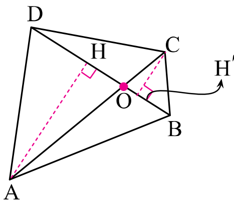
$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\sqrt{S_۱}}{\sqrt{S}}=\dfrac{NC}{BC} \\ \dfrac{\sqrt{S_۲}}{\sqrt{S}}=\dfrac{NC}{BC} \\ \dfrac{\sqrt{S_۳}}{\sqrt{S}}=\dfrac{BM}{BC}\end{array}\right\}\xrightarrow{(+)}\frac{\sqrt{S_۱}+\sqrt{S_۲}+\sqrt{S_۳}}{\sqrt{S}}$$

$$=\frac{MN+NC+BM}{BC}=۱\rightarrow\sqrt{S}=\sqrt{S_۱}+\sqrt{S_۲}+\sqrt{S_۳}$$

حال به راحتی خواهیم داشت:

$$\sqrt{S}=\sqrt{۱۶}+\sqrt{۴}+\sqrt{۹}=۴+۲+۳=۹$$

۱۶ از A و C عمودهای AH و CH' را بر BD رسم می‌کنیم و کاملاً مشخص است که



$$\overset{\triangle}{OAH}\sim\overset{\triangle}{OCH'}$$

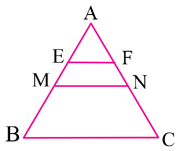
داریم:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ABD}}}{S_{\overset{\triangle}{BDC}}}=\frac{AH}{CH'}\quad (۱)$$

$$\overset{\triangle}{OAH}\sim\overset{\triangle}{OCH'}\rightarrow\frac{OA}{OC}=\frac{AH}{CH'}\quad (۲)$$

$$(۱) \text{ و } (۲)\rightarrow\frac{S_{\overset{\triangle}{ABD}}}{S_{\overset{\triangle}{BDC}}}=\frac{OA}{OC}\rightarrow\frac{۸}{S_{\overset{\triangle}{BDC}}}=\frac{۴}{۲}\rightarrow S_{\overset{\triangle}{BDC}}=۴$$

۱۷ الف.



$$\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{۱}{۴}\rightarrow EF\parallel BC$$

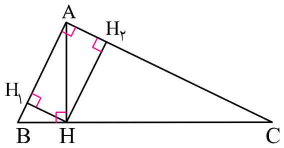
$$\rightarrow\overset{\triangle}{AEF}\sim\overset{\triangle}{ABC}\rightarrow\frac{S_{\overset{\triangle}{AEF}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}=(\frac{۱}{۴})^۲=\frac{۱}{۱۶}$$

ب.

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{AEF}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}=\frac{۱}{۱۶}\xrightarrow[\text{درصورت}]{\text{تفاضل}}\frac{S_{\overset{\triangle}{ABC}}-S_{\overset{\triangle}{AEF}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}=\frac{۱۶-۱}{۱۶}$$

$$\rightarrow\frac{S_{EFCB}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}=\frac{۱۵}{۱۶}$$

۱۸



$$\overset{\triangle}{ABH}\sim\overset{\triangle}{ABC}\rightarrow\frac{S_{\overset{\triangle}{ABH}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}=(\frac{AB}{BC})^۲$$

$$\rightarrow\frac{۱}{۳}=(\frac{AB}{BC})^۲$$

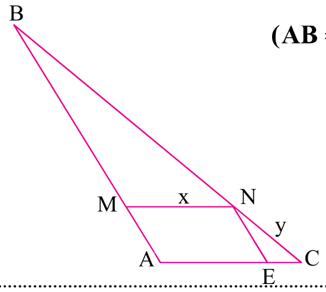
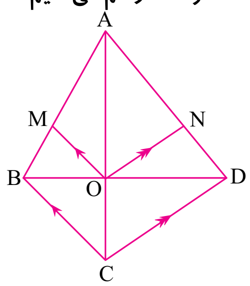
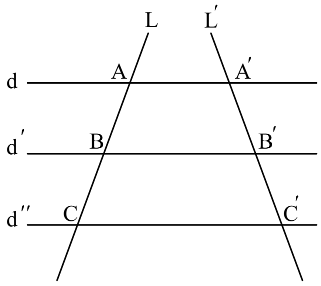
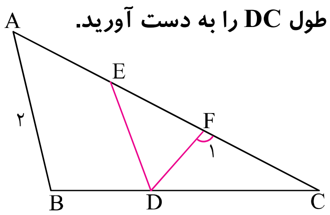
$$\xrightarrow{\text{تفاضل درمخرج}}\frac{۱}{۳-۱}=\frac{AB^۲}{BC^۲-AB^۲}\rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{AB^۲}{AC^۲}$$

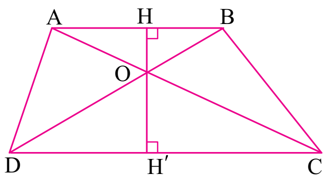
توجه داریم که: $BC^۲=AB^۲+AC^۲$

از طرفی $\overset{\triangle}{ABH}\sim\overset{\triangle}{AHC}$ بنابراین:

$$\frac{AB}{AC}=\frac{HH_۱}{HH_۲}\rightarrow\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{HH_۱}{HH_۲}\rightarrow\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{HH_۱}{HH_۲}$$

نمونه سؤالات امتحانی فصل ۲

ردیف	سؤالات	بارم
۱	اگر $۲x$ واسطه هندسی بین دو عدد طبیعی a و b باشد و $\frac{b}{۲x-۱}=\frac{۲x+۲}{a}$، مقدار x را بیابید.	۲
۲	به ازای چه‌مقداربرای x و y، AMNE لوزی است؟ $(AB=۱۲\,,\,AC=۶\,,\,BC=۱۵)$ 	۲/۵
۳	از نقطه O محل برخورد دو قطر چهارضلعی ABCD، OM و ON را به ترتیب موازی ضلع CB و CD رسم می‌کنیم، ثابت کنید $MN \parallel BD$. 	۲
۴	در شکل مقابل، دو خط L و L' سه خط d، d' و d'' را قطع کرده‌اند. اگر $\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}$، ثابت کنید d'' با d و d' موازی است. 	۲
۵	با توجه به شکل اگر $\hat{F}_۱=\hat{B}$ ، $DE \parallel BA$ ، $EC=۹$ و $FC=۷$، آن‌گاه طول DC را به دست آورید. 	۲
۶	ثابت کنید اگر در یک ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه قطرها بر هم عمود باشند آن‌گاه ارتفاع ذوزنقه واسطه هندسی بین دو قاعده است.	۲

ردیف	سؤالات	بارم
۷	اگر محیط مثلثی ۲۶ واحد باشد و نیمساز داخلی یکی از زوایا بر ضلع مقابلش پاره‌خط‌هایی به طول ۳/۶ و ۲/۴ به وجود آورد، آن‌گاه طول دو ضلع دیگر را به دست آورید.	۲
۸	نسبت مساحت دو مثلث متشابه برابر $\frac{۴}{۹}$ است. اگر محیط مثلث بزرگ‌تر ۱۸ باشد، محیط مثلث کوچک‌تر کدام است؟	۱/۵
۹	در مثلث ABC، میانه‌های AM و BN در نقطه O متقاطع‌اند. مساحت مثلث OAB چند برابر مساحت مثلث OMN است؟	۲
۱۰	در ذوزنقه شکل مقابل $\frac{۲}{۳}=\frac{OH}{OH'}$. نسبت $\frac{OC}{AC}$ را به دست آورید. 	۲
	جمع نمره	۲۰

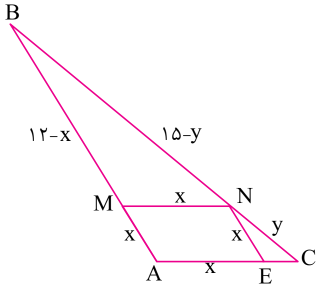
پاسخنامه نمونه سؤالات امتحانی

۱ ۲x واسطه هندسی بین a و b می‌باشد پس: $(۲x)^{۲}=ab$

از طرفی: $\frac{۲x+۲}{a}=\frac{b}{۲x-۱} \to (۲x+۲)(۲x-۱)=ab$

$\to ۴x^{۲}+۲x-۲=۴x^{۲} \to ۲x=۲ \to x=۱$

۲



AMNE باید لوزی باشد، بنابراین طول اضلاعش برابر بوده و $MN \parallel AE$ و $AM \parallel EN$ است. حال:

$MN \parallel AC \xrightarrow{\text{نتیجه تالس}} \frac{MN}{AC}=\frac{MB}{AB}=\frac{BN}{BC}$

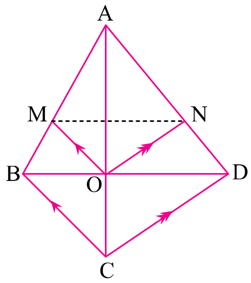
$\to \underbrace{\frac{x}{۶}=\frac{۱۲-x}{۱۲}}=\frac{۱۵-y}{۱۵}$

$\frac{x}{۶}=\frac{۱۲-x}{۱۲} \to ۱۲x=۷۲-۶x \to ۱۸x=۷۲ \to x=۴$

$\frac{x}{۶}=\frac{۱۵-y}{۱۵} \xrightarrow{x=۴} \frac{۴}{۶}=\frac{۱۵-y}{۱۵} \to ۶۰=۹۰-۶y$

$\to ۶y=۳۰ \to y=۵$

۳



$$\left.\begin{array}{l}\overset{\Delta}{ABC}: OM \parallel CB \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AM}{MB}=\frac{AO}{OC}\\ \overset{\Delta}{ACD}: ON \parallel CD \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AN}{ND}=\frac{AO}{OC}\end{array}\right\} \to$$

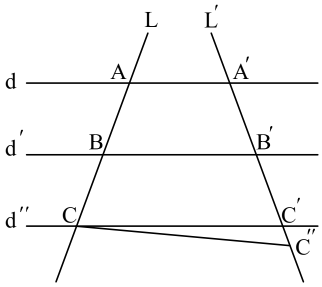
$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{ND} \xrightarrow{\text{عکس تالس}} MN \parallel BD$

۴

حکم: $d'' \parallel d'$ و $d'' \parallel d$

فرض: $d \parallel d'$ و $\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}$

فرض کنیم d'' با d و d' موازی نباشد حال از نقطهٔ C خطی موازی d و d' رسم می‌کنیم تا L' را در C'' قطع کند و حال داریم:



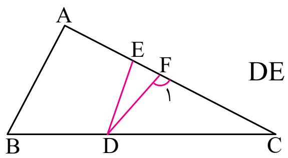
طبق خطوط موازی و تالس: $\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C''}$ (۱)

طبق فرض: $\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}$ (۲)

(۱) و (۲) $\Rightarrow \frac{A'B'}{B'C'}=\frac{A'B'}{B'C''}$

پس $B'C'=B'C''$ و کاملاً مشخص می‌گردد که C' و C'' بر یکدیگر منطبق‌اند و حکم ثابت می‌شود.

۵



$DE \parallel BA \to \hat{B}=E\hat{D}C$ (۱)

از طرفی: $\hat{B}=\hat{F}_{۱}$ (۲)

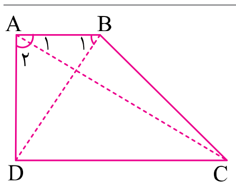
(۱) و (۲): $\to E\hat{D}C=\hat{F}_{۱}$

ازطرف دیگرچون: $\hat{C}=\hat{C}$ (۳) $\xrightarrow{(۱)و(۲)و(۳)} \overset{\Delta}{FDC} \sim \overset{\Delta}{EDC}$

نسبت تشابه: $\frac{DC}{EC}=\frac{FC}{DC}=\frac{DF}{DE}$

$\to DC^{۲}=EC \times FC \to DC^{۲}=۹ \times ۷=DC=۳\sqrt{۷}$

۶



فرض: $AC \perp BD$

حکم: $AD^{۲}=AB \times DC$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{B}_{۱}+\hat{A}_{۱}=۹۰^\circ\\ \hat{A}_{۱}+\hat{A}_{۲}=۹۰^\circ\end{array}\right\} \to \hat{B}_{۱}=\hat{A}_{۲} \text{ (۱)}$$

از طرفی: $\hat{A}=\hat{D}=۹۰^\circ$ (۲)

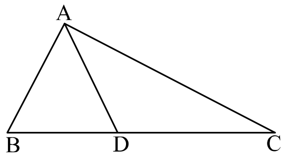
(۱) و (۲): $\overset{\triangle}{ABD} \sim \overset{\triangle}{ADC}$

نسبت تشابه را می‌نویسیم: $\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{AD} \to AD^{۲} = AB\times DC$

۷ فرض: $BD=۲/۴$ و $AB+AC+BC=۲۶$ و

$DC=۳/۶$

$AC=?$ و $AB=?$



قضیه نیمساز: $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}\to\frac{AB}{AC}=\frac{۲/۴}{۳/۶}\xrightarrow{\text{ترکیب درصورت}}$

$AB+BC+AC=۲۶\xrightarrow{BC=۶}AB+AC=۲۰$

$\frac{AB+AC}{AC}=\frac{۲/۴+۳/۶}{۳/۶}\Rightarrow\frac{۲۰}{AC}=\frac{۶}{۳/۶}$

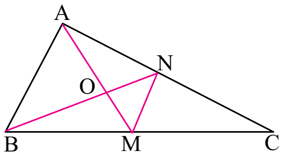
$\Rightarrow AC=۱۲, AB=۸$

۸ نسبت مساحت دو مثلث متشابه برابر مربع نسبت تشابه آن دو مثلث است. پس: $k^{۲}=\frac{۴}{۹}\to$ (نسبت تشابه)$k=\frac{۲}{۳}$

$\frac{\text{محیط مثلث کوچکتر}}{\text{محیط مثلث بزرگتر}}=\frac{۲}{۳}$

محیط مثلث کوچکتر $=\frac{۲}{۳}\times ۱۸=۱۲$

۹



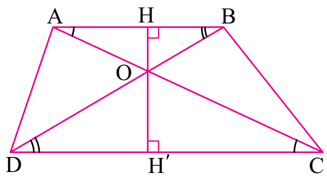
$\frac{CN}{CA}=\frac{CM}{CB}=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\text{عکس تالس}}MN\parallel AB\to\frac{MN}{AB}=\frac{۱}{۲}$

$MN\parallel AB\to \overset{\triangle}{OMN}\sim\overset{\triangle}{OAB}$ (تساوی دو زاویه)

پس: $k=\frac{MN}{AB}=\frac{۱}{۲}\to\frac{S_{\overset{\triangle}{OMN}}}{S_{\overset{\triangle}{OAB}}}=k^{۲}=\frac{۱}{۴}$

$\to S_{\overset{\triangle}{OAB}}=۴S_{\overset{\triangle}{OMN}}$

۱۰



$\overset{\triangle}{OAB}\sim\overset{\triangle}{ODC}\xrightarrow{\text{نسبت تشابه}}\left.\begin{array}{l}\frac{OA}{OC}=k\\ k=\frac{OH}{OH'}\end{array}\right\}\to\frac{OA}{OC}=\frac{۲}{۳}$

(دو زاویه برابر)

$\xrightarrow[\text{صورت}]{\text{ترکیب در}}\frac{OA+OC}{OC}=\frac{۲+۳}{۳}\to\frac{AC}{OC}=\frac{۵}{۳}$

$\to\frac{OC}{AC}=\frac{۳}{۵}$