

فصل ۲: تابع

↔ درس اول: مفاهیم تابع، دامنه و برد

↔ درس دوم: انواع توابع (ثابت، همانی و چندضابطه‌ای)

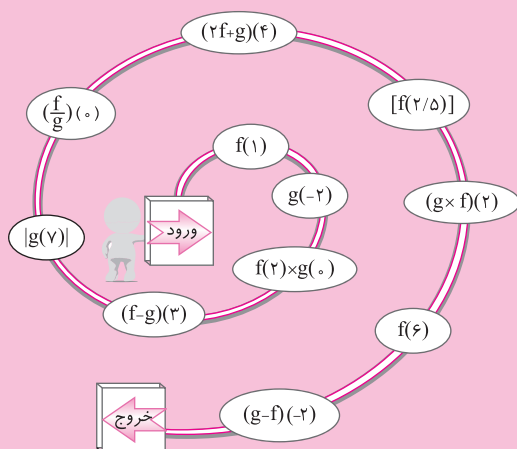
↔ درس سوم: تابع پلکانی

↔ درس چهارم: تابع قدرمطلق

↔ درس پنجم: اعمال بر روی توابع

با دو سکه وارد این ماریج می‌شویم و در هر قسمت به اندازه مقدار به‌دست‌آمده از تابع، سکه می‌گیریم یا از دست می‌دهیم:

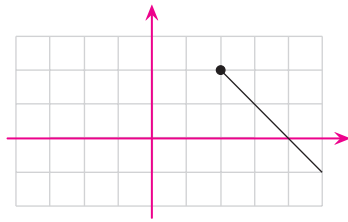
$$(g(x) = -x + 1, f(x) = 2x + 3)$$



آیا می‌توانیم با حداقل ۷۵ سکه از ماریج خارج شویم؟؟

۸. ضابطه تابع زیر و نمودار آن را کامل کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & x < -1 \\ 2 & -1 \leq x < 2 \\ \dots & x \geq 2 \end{cases}$$

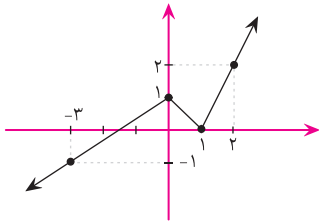


۹. با توجه به نمودار f ، مقدارهای زیر را بیابید.

الف. $f(-1/5)$

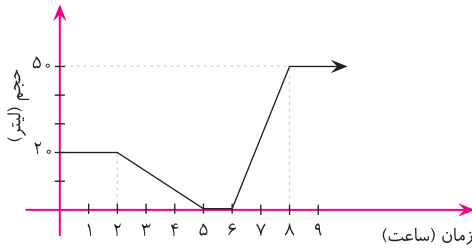
ب. $f(0/2)$

پ. $f(3)$



۱۰. نمودار زیر مربوط به مخزن ذخیره آب یک ساختمان است.

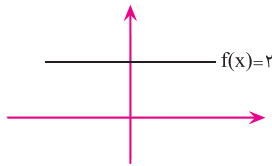
داستان مربوط به این نمودار را نوشته و مشخص کنید گنجایش این مخزن چقدر است؟



درس سوم: تابع پلکانی

تابع پلکانی

یک تابع چندضابطه‌ای را که در هر ضابطه مقدار تابع عددی ثابت است، تابع پلکانی گویند. یک تابع ثابت مثال کوچکی از یک تابع پلکانی است.

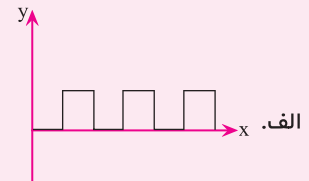


مثال:

۱. کدام یک از موارد زیر یک تابع پلکانی را مشخص می‌کند؟

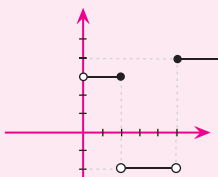
x	$0 < x \leq 2$	$2 < x < 5$	$x \geq 5$
y	۳	-۲	۴

ب.



پاسخ: الف. نمودار رسم‌شده تابع نیست زیرا هر خط موازی محور y ها نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند.

ب. با توجه به نمودار رسم‌شده تابع پلکانی است.



۲. قیمت کالایی در یک عمده‌فروشی بر اساس جدول زیر محاسبه می‌شود.

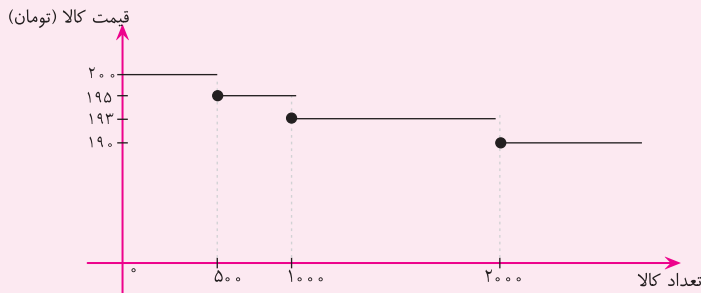
۵۰۰ تای اول با قیمت ۲۰۰ تومان
۵۰۰ تای بعدی با قیمت ۱۹۵ تومان
۱۰۰۰ تای بعدی با قیمت ۱۹۳ تومان
و نهایتاً بالای ۲۰۰۰ کالا با قیمت ۱۹۰ تومان

الف. نمودار مربوط به جدول بالا را رسم کنید.

ب. هزینه خرید ۷۵۰ عدد کالا را محاسبه کنید.

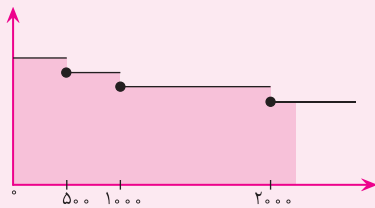
پ. هزینه خرید ۲۱۰۰ عدد کالا را روی نمودار نمایش داده و مقدارش را محاسبه کنید.

پاسخ: الف. با در نظر گرفتن تعداد کالا به عنوان محور افقی و قیمت آنها به عنوان محور عمودی در می‌یابیم که در هر فاصله قیمت خاصی برای کالای خریداری‌شده وجود دارد، که چون در طول آن فاصله ثابت است، می‌توان آن را با پاره خط‌هایی افقی مشخص کرد.

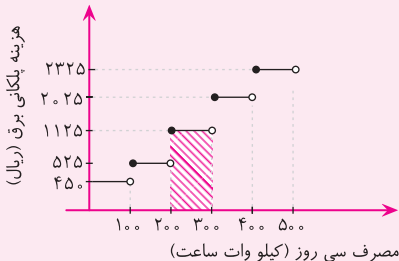


ب.
$$\left. \begin{aligned} 500 \times 200 &= 100000 \\ 250 \times 195 &= 48750 \end{aligned} \right\} + \rightarrow 148750 \text{ تومان}$$

پ.
$$(500 \times 200) + (500 \times 195) + (1000 \times 193) + (100 \times 190) = 409500$$



۳. اگر نمودار زیر مربوط به هزینه مصرف برق بر حسب کیلووات‌ساعت باشد:



الف. مساحت قسمت هاشور خورده چه مفهومی را نشان می‌دهد؟

ب. با توجه به مصرف خانوارهای یک ساختمان ۳ طبقه، هزینه کل برق مصرفی را برای هر کدام به‌طور جداگانه محاسبه کنید.

طبقه اول: ۱۵۳/۲ کیلووات‌ساعت، طبقه دوم: ۲۰۲ کیلووات‌ساعت، طبقه سوم ۴۶/۷ کیلووات‌ساعت.

پ. اگر این ساختمان یک کنتور داشت، با توجه به مقدار مصرف هر طبقه، هزینه کل برق ساختمان را محاسبه کنید.

ت. اختلاف مبلغ محاسبه‌شده در قسمت قبل ناشی از چیست؟

پاسخ: الف. مبلغ مصرف برق از ۲۰۰ تا ۳۰۰ کیلووات ساعت:

ب. ریال $(100 \times 450) + (53/2 \times 525) = 45000 + 27930 = 72930$

ریال $(100 \times 450) + (100 \times 525) + (2 \times 1125) = 45000 + 52500 + 2250 = 99750$

ریال $(46/7 \times 450) = 21015$

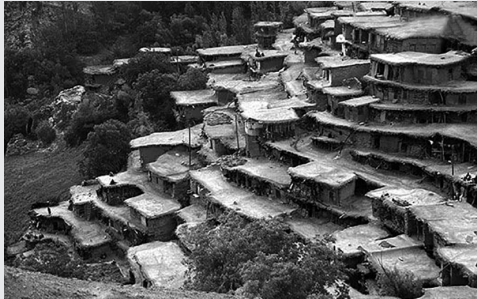
پ. مقدار کل مصرف سه خانواده $= 153/2 + 202 + 46/7 = 401/9$

ریال $(100 \times 450) + (100 \times 525) + (100 \times 1125) + (100 \times 2025) + (1/9 \times 2325) = 416917/5$

ت. مدل‌سازی هزینه پرداختی در جهت حمایت از استفاده بهینه و کمتر برق است. زمانی که کتور هر ۳ طبقه یکی باشد، میزان مصرف بالا نشان داده می‌شود و در نتیجه طبق مدل ارائه شده باید هزینه بیشتری پرداخت شود.

بیشتر بدانیم:

روستاهای پلکانی: روستانشینان با فهم عمیق و دقیق عناصر موجود در طبیعت و تغییرات شرایط آن، تمام سعی خود را برای بهره‌برداری از امکانات طبیعی و انرژی بالقوه موجود در محیط به کار بسته‌اند.



بافت پلکانی این روستاها سبب شده است که سقف هر خانه، حیاط خانه بالایی خود شود، به طوری که در زمستان از اتلاف حرارت جلوگیری می‌کند و به دلیل جهت‌گیری مناسب، در تابستان کمتر در معرض تابش نور خورشید قرار می‌گیرد.

همچنین عملیات‌های بازسازی و بهسازی و توسعه‌های آتی این نوع روستاها که در زمینی با شیب تند قرار دارند، از دیگر مزایای این نوع مدل‌سازی پلکانی است.

تابع علامت

یک تابع چندضابطه‌ای است که مقدار آن:

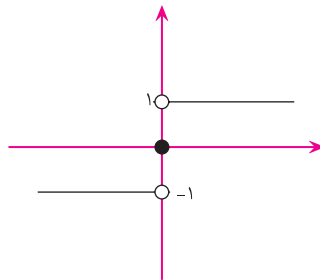
برای اعداد مثبت، ۱ است.

برای اعداد منفی، -۱ است.

برای عدد صفر، ۰ است.

این تابع را با نماد $y = \text{sign}(x)$ نشان می‌دهند.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$



مثال:

۱. مقدار عددی عبارت‌های زیر را بیابید.

الف. $4 \text{sign}(0) - \text{sign}(7) + 2 \text{sign}(-\sqrt{3})$

ب. $\left(\text{sign}\left(\frac{2}{3}\right) - \text{sign}\left(\frac{-2}{3}\right) \right)^2$

$\left. \begin{aligned} \text{sign}(0) &= 0 \\ \text{sign}(7) &= 1 \quad (7 \text{ عددی مثبت است}) \\ \text{sign}(-\sqrt{3}) &= -1 \quad (-\sqrt{3} \text{ عددی منفی است}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 4(0) - 1 + 2(-1) = -3$

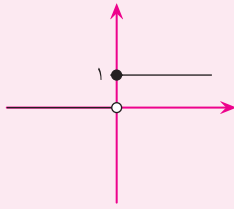
پاسخ: الف.

$\left. \begin{aligned} \text{sign}\left(\frac{2}{3}\right) &= 1 \quad \left(\frac{2}{3} \text{ عددی مثبت است}\right) \\ \text{sign}\left(\frac{-2}{3}\right) &= -1 \quad \left(\frac{-2}{3} \text{ عددی منفی است}\right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow (1 - (-1))^2 = 4$

ب.

۲. ضابطه و نمودار تابعی را مشخص کنید که مقدار آن برای اعداد منفی، صفر و برای اعداد نامنفی یک است. سپس دامنه و برد این تابع را که به تابع «هویساید» (Heaviside) معروف است، بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$



پاسخ: $D_f = \mathbb{R}$ $R_f = \{0, 1\}$

۳. اگر $f(x) = -\frac{2}{3}$ تابعی ثابت و $I(x)$ یک تابع همانی باشد، مقدار عددی $\frac{3f(p)+1}{\text{sign}(p)-I(p)}$ را محاسبه کنید.

پاسخ: تابع f ثابت است $f(p) = -\frac{2}{3}$

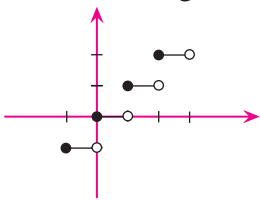
۲ عددی مثبت است بنابراین طبق ضابطه تابع علامت مقدار آن برابر ۱ است. $\text{sign}(p) = 1$

I تابع همانی است و همان عدد ورودی را خارج می‌کند. $I(p) = p$

$$\frac{3f(p)+1}{\text{sign}(p)-I(p)} = \frac{3\left(-\frac{2}{3}\right)+1}{1-p} = \frac{-2+1}{-1} = \frac{-1}{-1} = 1$$

تابع جزء صحیح

تابعی است که به هر عدد صحیح، خود همان عدد و به هر عدد غیر صحیح، بزرگ‌ترین عدد صحیح قبل از آن را نسبت می‌دهد.



ضابطه تابع: $f(x) = [x]$ (براکت x)

دامنه تابع: اعداد حقیقی

برد تابع: اعداد صحیح

اگر x عددی بین دو عدد صحیح متوالی باشد، جزء صحیح آن برابر عدد کوچک‌تر است.



مثال:

۱. حاصل مقدارهای زیر را به کمک تعریف جزء صحیح به دست آورید.

- الف. $[3]$
- ب. $[-3/7]$
- پ. $\left[\frac{7}{3}\right]$
- ت. $[\sqrt{3}]$
- ث. $[-\sqrt{2}+1]$
- ج. $[13/75] + [2/5]$

پاسخ: الف. جزء صحیح هر عدد صحیح خود آن عدد است.

ب. $-3/7$ عددی بین -4 و -3 است.

پ. $2/3 \approx 7/3$ عددی بین 2 و 3 است.

ت. $1/7 \approx \sqrt{3}$ عددی بین 1 و 2 است.

ث. $0/4 \approx -\sqrt{2}+1$ عددی بین -1 و 0 است.

ج. $2/5$ عددی بین 2 و 3 است. $[2/5] = 2$ و $13/75$ عددی بین 13 و 14 است: $[13/75] = 13$ پس در کل:

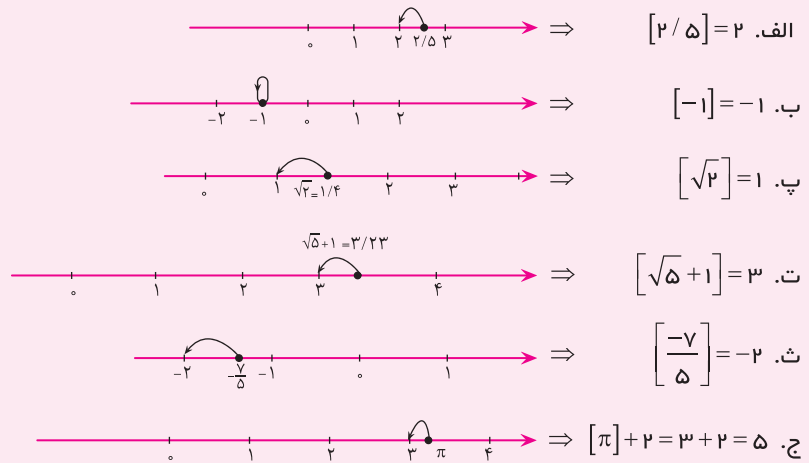
$$[13/75] + [2/5] = 13 + 2 = 15$$

۲. به کمک تعریف جزء صحیح و با استفاده از محور اعداد، مقدارهای زیر را حساب کنید.

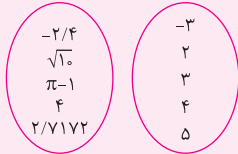
الف. $[2/5]$ ب. $[-1]$ پ. $[\sqrt{2}]$

ت. $[\sqrt{5}+1]$ ث. $[\frac{-7}{5}]$ ج. $[\pi]+2$

پاسخ:



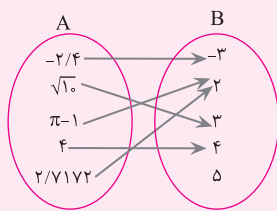
۳. نمودار زیر مربوط به تابع $f(x) = [x]$ است. هر عضو دامنه را به عضو متناظر آن وصل کنید.



پاسخ: $-2/4$ عددی بین -2 و -3 است: $[-2/4] = -3$ ، $\sqrt{10}$ عددی بین 3 و 4 است: $[\sqrt{10}] = 3$ ،

$\pi-1$ عددی بین 2 و 3 است: $[\pi-1] = 2$ ، و $[4] = 4$ است و $2/7172$ عددی بین 2 و 3 است: $[2/7172] = 2$

بنابراین:



۴. اگر $f(x) = 2[x] + [2x]$ باشد، مقدارهای زیر را حساب کنید.

الف. $f(2/5)$ ب. $f(\sqrt{3})$

پاسخ:

الف. $2 < 2/5 < 3 \Rightarrow [x] = 2$
 $2(2/5) = 5 \Rightarrow [2x] = 5 \Rightarrow f(2/5) = 2(2) + 5 = 9$

ب. $1 < \sqrt{3} < 2 \Rightarrow [x] = 1$
 $3 < 2\sqrt{3} < 4 \Rightarrow [2x] = 3 \Rightarrow f(\sqrt{3}) = 2(1) + 3 = 5$

۵. جدول زیر را تکمیل کنید.

ردیف	جزء صحیح	محدوده	محور
۱	$g(x) = \dots\dots\dots$	$\dots\dots\dots \leq x < \dots\dots\dots$	
۲	$g(x) = \dots\dots\dots$	$1 \leq x < 2$	
۳	$g(x) = 0$	$\dots\dots\dots \leq x < \dots\dots\dots$	
۴	$g(x) = \dots\dots\dots$	$2 \leq x < 2/5$	
۵	$g(x) = \dots\dots\dots$	$\dots\dots\dots \leq x < \dots\dots\dots$	

پاسخ:

ردیف	جزء صحیح	محدوده	محور
۱	$g(x) = -1$	$-1 \leq x < 0$	
۲	$g(x) = 1$	$1 \leq x < 2$	
۳	$g(x) = 0$	$0 \leq x < 1$	
۴	$g(x) = 2$	$2 \leq x < 3$	
۵	$g(x) = -2$	$-2 \leq x < -1$	

۶. اگر $2 \leq x < 6$ باشد، جزء صحیح x را حساب کنید.

پاسخ: محدوده داده شده را به محدوده های اعداد صحیح متوالی تقسیم کرده و در هر کدام جزء صحیح را حساب می کنیم.

$$2 \leq x < 3 \Rightarrow [x] = 2$$

$$3 \leq x < 4 \Rightarrow [x] = 3$$

$$4 \leq x < 5 \Rightarrow [x] = 4$$

$$5 \leq x < 6 \Rightarrow [x] = 5$$

رسم نمودار تابع جزء صحیح

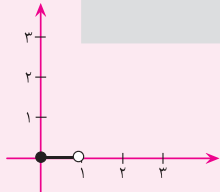
- گام اول: محدوده داده شده را به فاصله های اعداد صحیح متوالی تفکیک می کنیم.
- گام دوم: در هر محدوده جزء صحیح را حساب می کنیم و یک تابع چندضابطه ای تشکیل می دهیم.
- گام سوم: در هر محدوده نمودار تابع به دست آمده را رسم می کنیم.

مثال:

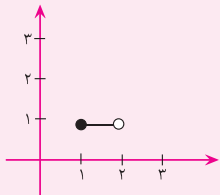
۱. جدول زیر را کامل کنید:

محدوده	جزء صحیح	نمودار	ردیف
$0 \leq x < 1$	$f(x) = [x] = \dots\dots\dots$		۱
	$f(x) = [x] = 1$		۲
			۳

پاسخ: ردیف ۱. در محدوده $0 \leq x < 1$ مقدار تابع $f(x) = 0$ است، که یک تابع ثابت است.



ردیف ۲. از $[x] = 1$ نتیجه می‌شود که $1 \leq x < 2$ است و نمودار آن در این محدوده به صورت زیر است:



ردیف ۳. با توجه به شکل $f(x) = [x] = 2$ و $f(x) = [x] = 2$ در محدوده $2 \leq x < 3$ قرار دارد.

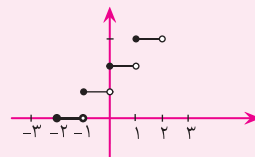
۲. نمودار تابع‌های زیر را در محدوده داده‌شده رسم کنید.

ب. $f(x) = -2[x]$ در محدوده $0 < x < 3$.

الف. $f(x) = [x] + 2$ در محدوده $-2 \leq x < 2$.

پ. $f(x) = 2[x] - 3$ در محدوده $1 \leq x \leq 3$.

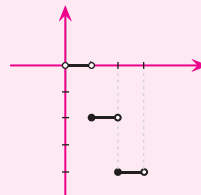
$$\left. \begin{aligned} -2 \leq x < -1 &\Rightarrow [x] = -2 \\ -1 \leq x < 0 &\Rightarrow [x] = -1 \\ 0 \leq x < 1 &\Rightarrow [x] = 0 \\ 1 \leq x < 2 &\Rightarrow [x] = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & (-2 \leq x < -1) \\ 1 & (-1 \leq x < 0) \\ 2 & (0 \leq x < 1) \\ 3 & (1 \leq x < 2) \end{cases}$$



پاسخ:

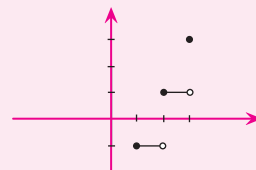
الف.

$$\left\{ \begin{aligned} 0 < x < 1 &\Rightarrow [x] = 0 \\ 1 \leq x < 2 &\Rightarrow [x] = 1 \\ 2 \leq x < 3 &\Rightarrow [x] = 2 \end{aligned} \right. \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & (0 < x < 1) \\ -2 & (1 \leq x < 2) \\ -4 & (2 \leq x < 3) \end{cases}$$



ب.

$$\left\{ \begin{aligned} 1 \leq x < 2 &\Rightarrow [x] = 1 \\ 2 \leq x < 3 &\Rightarrow [x] = 2 \\ x = 3 &\Rightarrow [x] = 3 \end{aligned} \right. \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -1 & (1 \leq x < 2) \\ 1 & (2 \leq x < 3) \\ 3 & (x = 3) \end{cases}$$



پ.

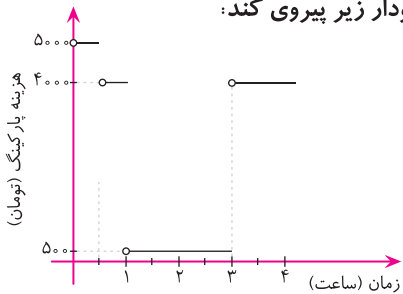
تمرین‌های امتحانی

۱. الف. توابع پلکانی دارای چه ویژگی خاصی هستند؟

ب. کدام یک از توابع زیر پلکانی است؟



۲. اگر هزینه پارکینگ در روز جمعه براساس مدت زمان سپری شده از بازگشایی فروشگاه از نمودار زیر پیروی کند:

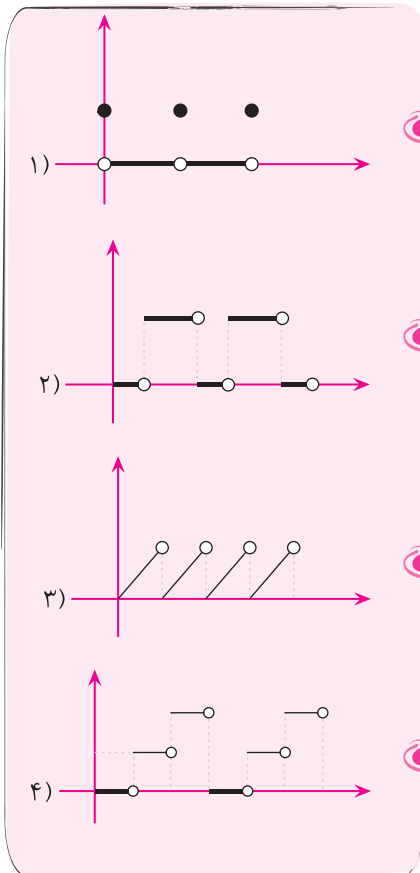


الف. براساس مدل‌سازی ارائه شده نوع تابع را مشخص کنید و ضابطه آن را بنویسید.

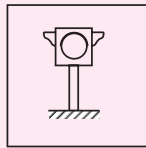
ب. هزینه پارکینگ را برای یک، دو و نیم و چهار ساعت توقف محاسبه کنید.

پ. این نوع مدل‌سازی برای دریافت هزینه پارکینگ چه معایب و محاسنی می‌تواند داشته باشد؟

۳. هر کدام از نمودارهای توابع سمت چپ را به تصویری که بیانگر آن مفهوم است مرتبط کنید. (یک مورد اضافی است.)

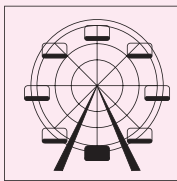


الف. چراغ راهنمایی چشمک‌زن



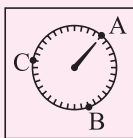
ب. در چرخ‌وفلکی که با سرعت ثابت در حال چرخش است، قرار گرفتن

یک کابین خاص در پایین‌ترین نقطه



پ. کلید سه‌حالتی تایمردار که جریان برق را به یکی از وسایل A، B و

C می‌رساند.



۴. با توجه به ضابطه تابع علامت، مقدار عددی عبارات زیر را بیابید.

پ. $\text{sign}(x^2 + 1)$

ب. $\text{sign}(1 - \sqrt{3}) - \text{sign}(\sqrt{3} - 1)$

الف. $2\text{sign}(\pi - 1) + 1$

۵. به کمک تعريف تابع جزء صحيح و با استفاده از محور زير، حاصل مقدارهاي خواسته شده را به دست آوريد.



- الف. $[-2]$ ب. $[1/7777\dots]$ پ. $[-\sqrt{3}]$
 ت. $[\frac{5}{3}] + 1$ ث. $[1/7] + [-1/7]$ ج. $2[-2/1] + 3[1/2]$

۶. اگر $f(x) = \frac{[x]+1}{[2x]}$ باشد، مقدارهاي زير را حساب كنيد.

- الف. $f(1/1) + f(3/1)$ ب. $f(-1/7) + 2$

۷. جدول زير را كامل كنيد:

محور	محدوده	تابع $f(x) = [x]$	ردیف
	$\dots \leq x < \dots$	$f(x) = \dots$	۱
	$1 \leq x < 2$	$f(x) = \dots$	۲
	$\dots \leq x < \dots$	$f(x) = -1$	۳

۸. اگر $-1 < x < 3$ باشد، مقدارهاي $f(x) = 2[x] + 1$ را حساب كنيد.

۹. اگر دامنه تابع $f(x) = 3[x] - 2$ به صورت $1/2 \leq x < 3/5$ باشد، برد تابع را حساب كنيد.

۱۰. برد تابع $f(x) = [x]$ برابر مجموعه $R = \{2, 3\}$ است. دامنه تابع را مشخص كنيد.

۱۱. نمودار تابعهاي زير را در محدوده داده شده رسم كنيد.

- الف. $f(x) = 2[x] - 2$ در محدوده $0 \leq x < 3$ ب. $f(x) = \frac{[x]}{[x]+2}$ در محدوده $-1 \leq x \leq 1$

۱۲. در تابع $f(x) = m[x] - 2mx$ مقدار m را چنان بيابيد كه $f(2/5) = 10$ باشد.

۱۳. در تابع $f(x) = 3 - [x]$ دامنه برابر $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 2\}$ است. برد را حساب کرده، نمودار آن را رسم كنيد.

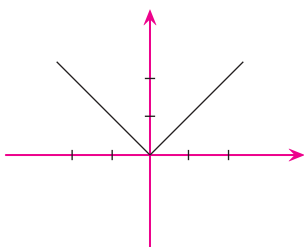
۱۴. مجموع جواب معادله $[2x+1] = 2$ را به دست آوريد.

درس چهارم: تابع قدر مطلق

قدر مطلق هر عدد نامنفی، خود آن عدد و قدر مطلق هر عدد منفی، قرینه آن عدد است.

قدر مطلق عبارتي مانند x ، يك تابع دوضابطه‌اي به صورت مقابل است.

$$|x| = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$$



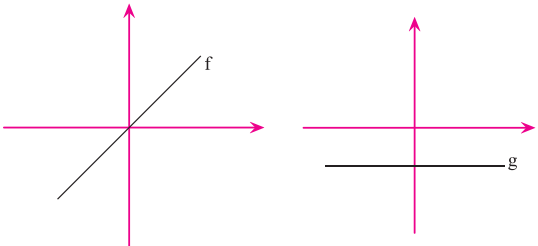
نمودار تابع در زير آمده است. لازم به ذكر است كه دامنه و برد چنين تابعي عبارت است از:

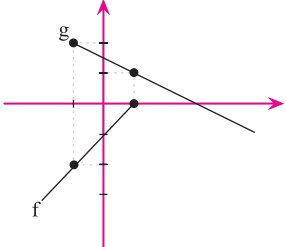
$$D = \mathbb{R}$$

$$R = \mathbb{R} - \{x \mid x < 0\}$$



نمونه سؤال امتحانی فصل دوم

ردیف	سؤالات	بارم
۱	تابع f به صورت زیر تعریف شده است. $f = \{ \dots, (-۲, ۴), (-۱, ۲), (۰, ۰), (۱, ۰-۲), \dots \}$ الف. دامنه و برد تابع f را مشخص کنید. ب. نمایش جبری تابع f را بنویسید. پ. حاصل $\frac{f(۵)}{۲} - ۳f(-۳)$ را به دست آورید.	۲
۲	با توجه به نمودار توابع f و g ، مقدارهای مجهول را به دست آورید. $f = \left\{ (۳, m^۲ - ۲m), \left(\frac{-t}{۲t+۱}, t \right) \right\}$ $g = \{ (\sqrt{t}, -۳), (۵, m^۲ + ۲n), (-۲, m - ۲) \}$ 	۱/۵
۳	الف. نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^۲ & x < -۱ \\ -۱ & -۱ \leq x < ۱ \\ ۲x+۱ & x \geq ۱ \end{cases}$ را رسم کنید. ب. حاصل $f(-۳) + ۲f(۱)$ را به دست آورید.	۲
۴	وزارت اقتصاد برای یک شغل خاص، مالیات T را برای درآمد x برحسب هزار تومان به صورت زیر وضع کرده است. برای درآمد ۱۵۰۰۰۰۰۰ تومانی چه مالیاتی دریافت می‌شود؟ $T(x) = \begin{cases} ۰ & ۰ \leq x \leq ۱۰۰۰۰ \\ ۰/۰۸x & ۱۰۰۰۰ < x \leq ۲۰۰۰۰ \\ ۱۶۰۰۰ + ۰/۱۵x & x > ۲۰۰۰۰ \end{cases}$	۱
۵	مقدارهای زیر را به کمک محور مختصات حساب کنید. الف. $[\pi] + ۲[\sqrt{۵}]$ ب. $-۲[۲] + ۳\left[\frac{۷}{۱۳}\right]$	۲
۶	نمودار تابع $f(x) = ۲[x] - ۳$ را در محدوده $۰ \leq x < ۳$ رسم کرده و بُرد آن را مشخص کنید.	۲
۷	اگر $f(x) = \text{sign}(x)$ و $g(x) = [x] - ۱$ و $h(x) = x - ۲ $ باشند، مقدارهای زیر را حساب کنید. الف. $\frac{f(-۲) + g(-۱/۲)}{h(-۱)}$ ب. $\frac{f(۰) + ۲}{g(\sqrt{۲}) - h(۰)}$	۲

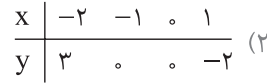
ردیف	سؤالات	بارم
۸	حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید. $ 2\sqrt{2}-\sqrt{3} - \sqrt{2}-\sqrt{3} + -\sqrt{2} $	۱
۹	تابع‌های زیر را به صورت تابع چندضابطه‌ای نوشته، نمودار آن را رسم کنید. الف. $f(x) = - 2x + 2 $ ب. $f(x) = x - 3 + 1$	۳
۱۰	اگر $f(x) = x^2 - 2x$ و $g(x) = x - 1$ باشند، ضابطه تابع‌های زیر را به دست آورید. الف. $(2f + 3g)(x)$ ب. $(fg)(x)$	۱
۱۱	دو تابع $f = \{(-2, 3), (4, 0), (5, -2)\}$ و $g = \{(1, 2), (4, -4), (7, 6)\}$ داده شده‌اند. توابع زیر را مشخص کنید. الف. $\left(\frac{2f - g}{f}\right)$ ب. $2g - 3f$	۱
۱۲	نمودار تابع $f + g$ را با توجه به شکل مقابل رسم کنید. 	۱/۵
جمع نمره ۲۰		

پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل دوم

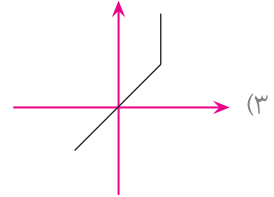
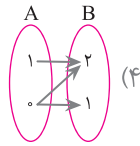
۱. رابطه $A = \{(3, m^2), (2, 1), (-3, m), (-2, m), (3, m+2), (m, 4)\}$ به ازای کدام مقدار m یک تابع است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) هیچ مقدار m

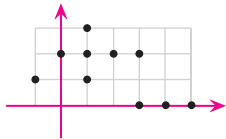
۲. کدام یک از گزینه‌های زیر نشان‌دهنده یک تابع است؟



(۱) $R = \{(1, 0), (1, 2)\}$



۳. نمودار یک رابطه به صورت مقابل است. حداقل چند نقطه باید حذف شود تا رابطه به یک تابع تبدیل شود؟



- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

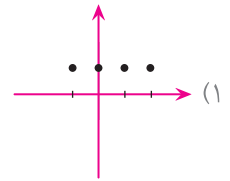
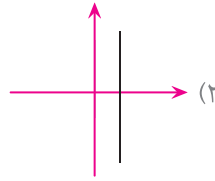
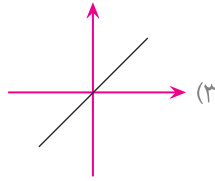
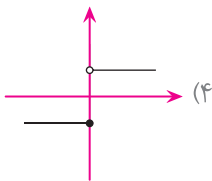
۴. اگر $f = \{(-1, 0), (0, -1), (1, 0)\}$ باشد، کدام گزینه ضابطه این تابع را مشخص می‌کند؟

- (۱) $x = y^2 + 1$ (۲) $x = y^2 - 1$ (۳) $y = x^2 + 1$ (۴) $y = x^2 - 1$

۵. اگر $f(x) = -5$ باشد، آن‌گاه حاصل $f(-5) - f(-2) \times f(-3)$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) -۲ (۳) ۳ (۴) -۳

۶. کدام نمودار می‌تواند یک تابع ثابت باشد؟



۷. تابع با برد $\{1\}$:

- (۱) اگر دامنه آن تک‌عضوی باشد، ثابت نیست. (۲) اگر دامنه آن تک‌عضوی باشد، همانی است.
 (۳) می‌تواند، هم‌زمان، هم تابعی ثابت و هم تابعی همانی باشد. (۴) اگر دامنه آن دو‌عضوی باشد، نمی‌تواند تابع ثابت باشد.

۸. تابع $f = \{(2, \sqrt{a}), (0, |b-1|), (c^2, 4)\}$ تابعی همانی است. کمترین مقدار ممکن برای میانگین a ، b و c کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{3}$ (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) ۷

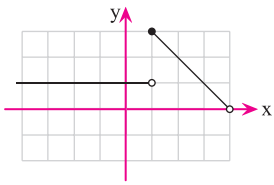
۹. اگر f تابعی ثابت و g تابعی همانی باشد و رابطه $(f(3))^2 + g(3) = 4f(4)$ برقرار باشد، $g(5) + f(5)$ کدام است؟

- (۱) -۵ (۲) -۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۱۰. در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x \geq 1 \\ x + 4 & x < 1 \end{cases}$ ، حاصل $f(\sqrt{2} + 1)$ کدام است؟

- (۱) $f(-1)$ (۲) $f(-2)$ (۳) $f(-3)$ (۴) $f(-5)$

۱۱. کدام گزینه، ضابطه نمودار زیر را درست نشان می‌دهد؟



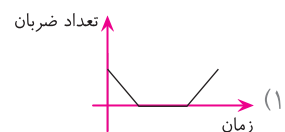
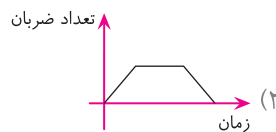
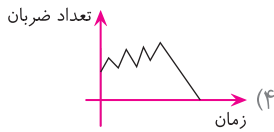
$$f(x) = \begin{cases} 1 & x < 1 \\ 4 - x & 1 \leq x \leq 4 \end{cases} \quad (۲)$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x < 1 \\ x - 4 & 1 \leq x \leq 4 \end{cases} \quad (۴)$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 1 \\ 4 - x & 1 < x < 4 \end{cases} \quad (۱)$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x < 1 \\ 4 - x & 1 \leq x < 4 \end{cases} \quad (۳)$$

۱۲. کدام نمودار زیر بیانگر تعداد ضربان‌های قلب شخصی است که در اتاق عمل پس از مدتی قلبش ایستاده و کمی بعد مجدداً شروع به کار کرده است؟



۱۳. اگر ضابطه تابع f به صورت $f(x) = \begin{cases} ax - 3 & x < 0 \\ 2bx^2 + 5 & x \geq 0 \end{cases}$ باشد و داشته باشیم $f(-2) = 3$ و نمودار f از نقطه $A(2, -3)$ بگذرد، مقدار $(b - a)$ کدام است؟

-۳ (۴)

-۱ (۳)

۲ (۲)

-۲ (۱)

۱۴. حاصل $[1] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \dots + [\sqrt{10}]$ کدام است؟

۲۱ (۴)

۱۹ (۳)

۱۸ (۲)

۱۷ (۱)

۱۵. جزء صحیح عدد $(2 + \sqrt{3})^2$ کدام است؟

۱۳ (۴)

۱۰ (۳)

۹ (۲)

۱۴ (۱)

۱۶. اگر $f(x) = |x| + |x - 1|$ ، حاصل $f(\sqrt{3} - 1) + f(\sqrt{2} - 1)$ کدام است؟

$\sqrt{3} - \sqrt{2}$ (۴)

۱ (۳)

۲ (۲)

$\sqrt{3} + \sqrt{2}$ (۱)

۱۷. اگر $a = 5$ و $b = -7$ ، آن‌گاه حاصل $\frac{|-a| + |-b|}{|a - b|}$ برابر است با:

$\frac{1}{3}$ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

$\frac{1}{6}$ (۱)

۱۸. حاصل $|(-1)^n| - |-2| - |-1|$ که n عددی صحیح است، برابر است با:

۳ (۴)

-۲ (۳)

صفر (۲)

۲ (۱)

۱۹. نمودار دو تابع $f(x) = x + |x|$ و $g(x) = 2x$ چند نقطه مشترک دارند؟

بی‌شمار (۴)

صفر (۳)

دو (۲)

یک (۱)

۲۰. نمودار $y - |x| = 2$ از کدام نواحی مختصات می‌گذرد؟

سوم و چهارم (۴)

اول و سوم (۳)

دوم و سوم (۲)

اول و دوم (۱)

۲۱. اگر $f = \{(1, 3), (2, 5)\}$ و $g = \{(2, 3), (5, 1)\}$ مجموعه $f + 2g$ کدام است؟

$\{(2, 1), (1, 4)\}$ (۴)

$\{(2, 7), (1, 4)\}$ (۳)

$\{(2, 7)\}$ (۲)

$\{(2, 1)\}$ (۱)

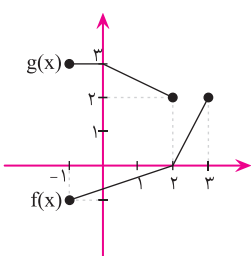
۲۲. نمودار f و g در شکل روبه‌رو مشخص شده است. حاصل $\frac{(f - g)(2)}{(f \times g)(-1)}$ کدام است؟

$-\frac{2}{3}$ (۲)

$\frac{2}{3}$ (۱)

-۱ (۴)

صفر (۳)



الف. $f(-1/5) = \frac{2}{3}(-1/5) + 1 = 0$

ب. $f(0/2) = -0/2 + 1 = 0/8$

پ. $f(3) = 2(3) - 2 = 4$

۱۰. ۲۰ لیتر آب داخل مخزن ساختمانی وجود داشت که بعد از ۲ ساعت به دلیل قطع آب، ساکنان مجبور به استفاده از آن شدند. ساکنین ساختمان در مدت ۳ ساعت آب مخزن را مصرف کرده و یک ساعت بدون آب ماندند. سپس آب ساختمان وصل شد. طی ۲ ساعت آب مخزن پر شده و به مقدار نهایی آن یعنی ۵۰ لیتر رسید. (برای این سوال پاسخ‌های دیگری هم می‌توان نوشت.)

$$\begin{cases} (0,1) \\ (-3,-1) \end{cases} \Rightarrow m = \frac{1+1}{0+3} = \frac{2}{3}$$

$$y-1 = \frac{2}{3}(x-0) \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + 1$$

$$\begin{cases} (0,1) \\ (1,0) \end{cases} \Rightarrow m = \frac{1-0}{0-1} = -1, y-0 = -1(x-1)$$

$$\Rightarrow y = -x + 1$$

$$\begin{cases} (1,0) \\ (2,2) \end{cases} \Rightarrow m = \frac{2-0}{2-1} = 2, y-0 = 2(x-1)$$

$$\Rightarrow y = 2x - 2$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x + 1 & x < 0 \\ -x + 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 2x - 2 & x > 1 \end{cases}$$

پاسخ تمرین‌های امتحانی درس سوم

۱ الف. در هر قسمت مقدار تابع، ثابت است.

ب. نمودار (۳)، (۴).

نمودار (۱) در هر فاصله تابع ثابت نیست و نمودار (۲) تابع نیست.

۲ الف. تابع پلکانی

$$f(t) = \begin{cases} 5000 & t \leq 0/5 \\ 4000 & 0/5 < t \leq 1 \\ 500 & 1 < t \leq 3 \\ 4000 & t > 3 \end{cases}$$

ب. برای یک ساعت ۴۰۰۰ تومان زیرا $f(1) = 4000$

برای دو و نیم ساعت ۵۰۰۰ تومان زیرا $f(2/5) = 5000$

برای چهار ساعت ۴۰۰۰ تومان زیرا $f(4) = 4000$

پ. با توجه به اینکه برای توقف‌های کوتاه هزینه پارک بیشتر از میان‌مدت است، مشتریان را به بازدید طولانی‌تر و از همه غرفه‌ها تشویق کرده و مانع از پارک کردن‌های گذری در خیابان‌های اطراف می‌شود.

از معایب این روش می‌توان به توقف‌های بدون دلیل یا شلوغی پارکینگ یا ... اشاره کرد.

۳ الف. نمودار شماره (۲) که در آن محور افقی، زمان (t) و محور عمودی نشان‌دهنده وضعیت (روشن بودن یا نبودن) است.

ب. نمودار شماره (۱) که در آن محور افقی، زمان (t) و محور عمودی نشان‌دهنده وضعیت دیده‌شدن کابین به‌خصوص در پایین‌ترین نقطه است.

پ. نمودار شماره (۴) که در آن محور افقی، زمان (t) و محور عمودی اتصال برق به یکی از وسایل A، B و C است.

۴ الف. چون $\pi - 1 = 3/14 - 1 = 2/14$ عددی نامنفی است، پس $\text{sign}(\pi - 1) = 1$ و در نتیجه

$$2\text{sign}(\pi - 1) + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3$$

ب. چون $1 - \sqrt{3} = 1 - 1/7 = -0/7$ عددی منفی و $\sqrt{3} - 1 = 1/7 - 1 = 0/7$ عددی نامنفی است، پس:

$$\text{sign}(1 - \sqrt{3}) - \text{sign}(\sqrt{3} - 1) = -1 - 1 = -2$$

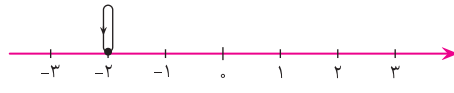
پ. با توجه به وجود توان ۲ روی X، مقدار X^2 (بدون توجه به مقدار X) همواره نامنفی است و $X^2 + 1$ همواره مثبت خواهد بود. پس $\text{sign}(X^2 + 1) = 1$

$$۲[-۲/۱] + ۳[۱/۲] = ۲(-۳) + ۳(۱) = -۳$$



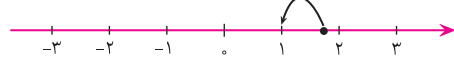
ج.

$$[-۲] = -۲$$



۵ الف.

$$[۱/۷۷۷۰۰۰] = ۱$$



ب.

$$[-\sqrt{۳}] = -۲$$



ب.

$$\left[\frac{۵}{۳} \right] + ۱ = ۱ + ۱ = ۲$$



ت.

$$[۱/۷] + [-۱/۷] = ۱ + (-۲) = -۱$$



ث.

$$\left. \begin{aligned} f(1/1) &= \frac{[1/1] + 1}{[2/2]} = \frac{1 + 1}{2} = 1 \\ f(3/1) &= \frac{[3/1] + 1}{[6/2]} = \frac{4}{6} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{4}{6} = \frac{6 + 4}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

$$f(-1/7) = \frac{[-1/7] + 1}{[-3/4]} = \frac{-2 + 1}{-4} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} + 2 = \frac{1 + 8}{4} = \frac{9}{4}$$

۶ الف.

ب.

۷

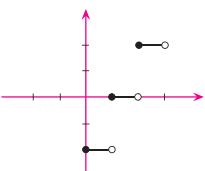
محدوده	تابع $f(x) = [x]$	ردیف
$-۲ \leq x < -۱$	$f(x) = -۲$	۱
$۱ \leq x < ۲$	$f(x) = ۱$	۲
$-۱ \leq x < ۰$	$f(x) = -۱$	۳

فصل ۳: تابع

$$۰ \leq x < ۱ \Rightarrow [x] = ۰ \Rightarrow f(x) = -۲$$

$$۱ \leq x < ۲ \Rightarrow [x] = ۱ \Rightarrow f(x) = ۰$$

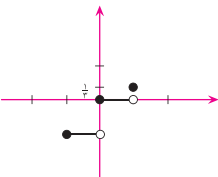
$$۲ \leq x < ۳ \Rightarrow [x] = ۲ \Rightarrow f(x) = ۲$$



$$-۱ \leq x < ۰ \Rightarrow [x] = -۱ \Rightarrow f(x) = \frac{-۱}{۱} = -۱$$

$$۰ \leq x < ۱ \Rightarrow [x] = ۰ \Rightarrow f(x) = ۰$$

$$x = ۱ \Rightarrow [x] = ۱ \Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}$$



۱۱ الف.

$$-۱ < x < ۰ \Rightarrow [x] = -۱ \Rightarrow f(x) = ۲(-۱) + ۱ = -۱$$

$$۰ \leq x < ۱ \Rightarrow [x] = ۰ \Rightarrow f(x) = ۲(۰) + ۱ = ۱$$

$$۱ \leq x < ۲ \Rightarrow [x] = ۱ \Rightarrow f(x) = ۲(۱) + ۱ = ۳$$

$$۲ \leq x < ۳ \Rightarrow [x] = ۲ \Rightarrow f(x) = ۲(۲) + ۱ = ۵$$

۸

$$\left. \begin{aligned} 1/2 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow f(x) &= 3(1) - 2 = 1 \\ 2 \leq x < 3 \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow f(x) &= 3(2) - 2 = 4 \\ 3 \leq x \leq 3/5 \Rightarrow [x] = 3 \Rightarrow f(x) &= 3(3) - 2 = 7 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow R = \{1, 4, 7\}$$

۹

$$\left. \begin{aligned} [x] = 2 \Rightarrow 2 \leq x < 3 \\ [x] = 3 \Rightarrow 3 \leq x < 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow D = \{x \mid 2 \leq x < 4\}$$

۱۰