مقدمه

تقدیم به کسی که بودنش، بهانه زندگی من است.
همسر عزیزم

مقدمه‌ی مؤلف

اهمیت درس ریاضی و تأثیر زیاد آن در قبولی داوطلبان رشتهٔ تجربی در رشته‌های خاص بر کسی پوشیده نیست. در این راستا کتابی که بتواند بدون اضافه‌گویی، با سؤالات استاندارد و در قوارهٔ کنکور، داوطلبان را در این مسیر همراهی کند، بسیار راهگشاست. کتابی که در اختیار دارید منطبق بر کتاب‌های ریاضی رشتهٔ تجربی در نظام جدید نوشته شده است. در این کتاب به بهانهٔ سؤالات سخت، از آوردن مطالب خارج از کتاب پرهیز شده است. آزمون‌های کتاب طوری طراحی و محدوده بندی شده‌اند که عنوان آزمون باعث لو رفتن ایده‌های سؤال نمی‌شود و در یک آزمون، سؤال‌های تکراری نخواهید دید. تک‌تک سؤالات علاوه بر سنجش میزان اطلاعات شما در موضوع مربوطه،به شما کمک می کند که نکته، مفهوم یا تمرینی از کتاب درسی را قبل از دیدن آن‌ها در جلسهٔ کنکور تجربه کنید. در پاسخ بعضی از سؤالات روش‌های کوتاه و میان‌بُر گفته شده و سعی شده هر سؤال به‌طور کامل و با توضیحات کافی حل شود تا پاسخ‌نامه بتواند نقش دوره و یادآوری مطالب را نیز برای شما عزیزان داشته باشد. در مسیر سخت و طولانی تألیف این کتاب دوستان زیادی زحمت کشیدند که لازم می‌دانم کمال قدردانی و تشکر داشته باشم از:

۱ـ مدیریت محترم و فرهیختهٔ انتشارات فار و دریافت آقایان علی امین‌صادقیه و دکتر هامون سبطی که همواره مشوق و حامی من در مسیر تألیف بوده‌اند.

۲ـ جناب آقای افشین ملاک‌پور از اساتید برجسته و به‌نام ریاضیات تجربی کشور که با راهنمایی‌های خود، نقش پررنگی در بهبود کیفیت کتاب داشتند.

۳ـ سرکار خانم زاهدی که زحمات هماهنگی و امور اجرایی کتاب را به عهده داشتند و بدقولی‌های من را صبوری کردند.

۴ـ تمامی همکاران در واحد تایپ و صفحه‌آرایی به سرپرستی خانم سوری درزی که در مراحل آماده‌سازی کتاب متحمل زحمات زیادی شدند و هم‌چنین آقای ایمان خاکسار که زحمت طراحی هنرمندانهٔ جلد کتاب بر عهدهٔ ایشان بود.

۵ـ مشاوران برجستهٔ کنکور؛ آقایان علی خانی، منصور رخشان و حامد علیخانی بابت نظرات سازنده‌شان.

۶ـ اساتید به نام ریاضیات کشور آقایان حسین شفیع‌زاده، عباس نعمتی‌فر، امیر قربانی، معین کرمی، محمدسجاد نقیه، وحید انصاری، امید شیری‌نژاد و محسن مزدایی که با پیشنهادات خود باعث بهتر شدن کتاب شدند.

۷ـ خانم لیلا سمیعی‌عارف از مؤلفین به‌نام کشور که زحمت بازبینی کتاب به عهدهٔ ایشان بود. ممنون بابت همه چیز.

۸ـ شاگرد دیروز جناب آقای امین حاج‌جعفری که زحمات ایشان در ویراستاری کتاب، چندین برابر تلافی یک سال تدریس من به خودش را درآورد.

در پایان وظیفهٔ خود می‌دانم از همسر عزیزم اسوهٔ مهربانی و پدر و مادر بزرگوارم، معلم‌های ایستادگی و صبر که همیشه مدیون ایشان هستم تشکر کنم، امیدوارم روزی بتوانم اندکی از زحماتشان را جبران کنم.

کانال تلگرامی ArashAmid@ پل ارتباطی من و شماست. می‌توانید مطالب مرتبط با ریاضی تجربی را در این کانال دنبال کنید.

خدایا می‌دانم نگاه مهربان تو همیشه حامی من است

موفق و پیروز باشید. آرش عمیـد

زمستان ۱۳۹۷

«روش مطالعه درس ریاضی»

ولفگانگ کُهلر یکی از دانشمندان علم روانشناسی (متولد ۱۸۸۷) آزمایشی را روی یک میمون به نام سلطان انجام داد. او یک موز را با فاصلهٔ زیاد خارج از قفس سـلطان قرار می‌دهد و سه تکه چوب کوچک، متوسط و بزرگ را در داخل قفس می‌گذارد و با دوربین حرکات سلطان را زیر نظر می‌گیرد سلطان که بسیار گرسنه بود سعی می‌کند با دست و پا آن موز را بردارد اما به دلیل فاصلهٔ زیاد موفق نمی‌شود. از چوب متوسط و بعد از آن بقیهٔ چوب‌ها استفاده می‌کند ولی باز موفق نمی‌شـود. دقایق زیادی این تلاش ادامه می‌یابد و در آخر سلطان بسـیار خسته و نا امید در گوشه‌ای از قفس می‌افتد و با چشمانی خسـته نظاره‌گر موز، قفس و چوب‌ها می‌شـود. بعد از چند دقیقه مکث از جای خودش بلند می‌شـود و انتهای چوب‌ها که دارای نری و مادگی بوده را به درون هم جفت کرده و آن چوب را کامل کرده و به بیرون قفس می‌اندازد و موفق می‌شـود تا موز را به سـمت خود بکشد و در نهایت با حس رضایت آن مـوز را نـوش جان می‌کند. فردای همان روز آقای کُهلر آزمایـش دیگری ترتیب می‌دهد و برای دومین بار یک موز از بـالای قفس آویزان می‌کند و چند جعبهٔ چوبی در قفس می‌اندازد. در این آزمایش سلطان بدون فکر کردن بلافاصله جعبه‌ها را روی هم می‌گذارد و به موز دست پیدا می‌کند و سریع آن را می‌بلعد. این آزمایش‌ها ثابت کرد که تا قبل از توجه کافی به مسأله، سلطان نتوانست نکته را بیابد. یعنی سلطان می‌خواست موز را به داخل قفس بکشاند ولی توجه کافی به وسـایل دور و برش مثل چوب‌ها نداشـت اما بعد از توجه عمیق روی مسأله متوجه شده که نری و مادگی (نکتهٔ اصلی مسأله) در سر و ته چوب‌ها است که می‌تواند آن‌ها را به هم وصل کند و چوب بزرگ‌تری که احیاناً به موز می‌رسد را بسازد؛ که بعد از این عمل موفق به خوردن موز شد.

کُهلر نتیجه می‌گیرد: ۱ـ تا زمانی که سـلطان به عمق مسأله پی نبرد نتوانست موفق عمل کند. ۲ـ وقتی سلطان به همهٔ ابزارهای داخل قفس به خوبی نگاه کرد و در ذهنش راه حل را به طور کامل چید (یک‌پارچگی راه حل) و آن وقت توانست بلافاصله بدون هیچ اشتباهی مسأله را حل کند. ۳ـ وقتی که سلطان با مسأله‌ای مواجه شد و با تلاش زیاد و تفکر عمیق و یک‌پارچه آن را حل کرد این موضوع باعث شد تا بتواند مسایل مشابه را راحت‌تر و با صرف وقت کم‌تر حل نماید (مثل آزمایش دوم که سلطان باید موز آویزان شده از قفس را بدست می‌آورد).

در سال‌های بعدی دانشمندان دیگری روی موضوع حل مسأله کار کردند و نتیجه گرفتند کسانی که به دنبال حل مسأله هستند را می‌توان به دو گروه تقسیم کرد:

تازه‌کاران و کهنه‌کاران

۱ـ کهنه‌کاران به دلیل حل مسائل زیاد و تمرین‌های پی در پی، الگوی حل مسائل مختلف را در ذهن می‌پرورانند و از اینکه با مسائل سخت روبه‌رو شوند نمی‌ترسند و ساعت‌ها با آن کلنجار می‌روند ولی تازه‌کاران حوصلهٔ بررسی مسأله را ندارند و با چند یا حتی یک خطا سریع به پاسخ آن در پاسخ‌نامه رجوع می‌کنند بنابراین الگوها در ذهنشان تثبیت نمی‌شود.

۲ـ کهنه‌کاران تا به یک‌پارچگی در حل سوال نرسند شروع به حل نمی‌کنند و صرفاً با کشیدن شکل و برانداز کردن سوال سعی در پیدا کردن نکته سوال می‌کنند و بعد از اینکه توانسـتند به خوبی سـوال را کالبدشکافی کنند به صورت یک‌پارچه شروع به پاسخ می‌کنند. ولی تازه‌کاران از همان ابتدا با دیدن سوال شروع به حل می‌کنند و به طور پراکنده هر چه به ذهنشان می‌رسد را می‌نویسند و در آخر نه تنها حل آن را نیافته‌اند بلکه سردرگم‌تر شده‌اند.

۳ـ کهنه‌کاران بر روی سوال تمرکز می‌کنند تا بتوانند ابتدا محتوا و خواست اصلی سوال را دقیق و درست بفهمند، پس از آن است که جواب از دل سوال بیرون می‌آید ولی تازه‌کاران حل مسأله به صورت سوال توجه کافی ندارند و معمولاً شتاب‌زده از روی سوال می‌گذراند و تمرکزشان بر روی جواب است، غافل از این که جواب سوال را نباید ابداع کرد. بلکه جواب را باید در درون سوال کشف کرد.

این دانشمندان بعد از چنین آزمایش‌هایی توصیه می‌کنند که:

۱ـ برای حل مسأله از دیگران کمک نگیرید و سعی کنید خودتان با گذاشتن وقت و بدون خستگی سوال را موشکافی کنید تا نکته‌های آن را درک نمایید.

۲ـ از کشیدن شکل و توضیح موضوع برای خودتان غافل نشوید تا درک بصری از مسأله پیدا کنید.

۳ـ وقتی مسأله‌ای را حل کردید چند مسأله مشابه آن را مجدد حل کنید.

۴ـ بعد از حل مسأله‌هایی که نکته‌دار هستند خودتان پارامترهای آن مسأله را تغییر دهید و یک مسأله شبیه آن طرح کنید این کار باعث می‌شود خودتان را جای طراح سوال حس نمائید.

۵ـ برای جا افتادن الگوهای متعددی که در مسأله‌های مربوط به یک فصل حل کرده‌ای بعد از چند روز دوباره آن‌ها را تکرار کنید تا آن الگوها در ذهنتان نقش ببندد.

حال با توجه به مطالب بالا می‌توان گفت:

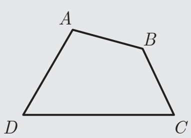
۱ـ سعی کنید به طور مستمر در هفته روی درس ریاضی وقت بگذارید مثلاً ۳ روز از هفته به تمرین ریاضی بپردازید.

۲ـ بلافاصله بعد از تدریس بخشی از درس توسط دبیر خود، یک بار دیگر به جزوه، کتاب و نکته‌های خود در منزل نگاهی بیندازید و مثال‌های حل شده توسط دبیر را مجدد خودتان بدون نگاه کردن به جواب حل کنید.

۳ـ در روزهای بعدی تمرین‌های کتاب درسی و کمک آموزشی خود را بدون نگاه کردن به پاسخ‌نامه حل کنید حتی اگر سوال وقت‌گیر بود نگران نشوید و بدون توجه به زمان مشغول حل آن شوید. فراموش نکنید آنالیز سوال است که، شما را توانمند خواهد کرد و به مرور توان حل مسأله را در شما افزایش خواهد داد. مطمئن باشید که پاسخ همیشه در محتوای سوال مستتر و پنهان است و اگر با دقت سوال را آنالیز کنید حتماً پاسخ را خواهید یافت.

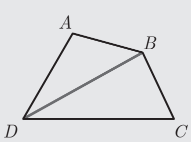
به سوال زیر دقت کنید شاید کمی پیچیده به نظر برسد ولی با اندکی دقت و بررسی شکل و محتوای سوال متوجه خواهید شد که سوال کاملاً برایتان آشنا است.

مثال. **در شکل مقابل $A(۱,۴)$ ، $B(۶,۱)$ ، $C(۸,-۵)$ و $D(-۴,-۳)$ است. مساحت چهارضلعی $ABCD$ کدام است؟**



۱) ۴۲ ۲) ۴۸ ۳) ۵۰ ۴) ۵۹

پاسخ: گزینه ۴ یکی از قطرهای چهارضلعی $ABCD$ را رسم می کنیم تا به دو مثلث تبدیل شود. سپس مساحت هر یک از مثلث‌ها را به‌دست می‌آوریم و باهم جمع می کنیم:



$$S_{ABD}=\frac{۱}{۲}\begin{vmatrix} ۱ & ۴ \\ ۶ & ۱ \\ -۴ & -۳ \\ ۱ & ۴ \end{vmatrix} \Rightarrow S_{ABD}=\frac{۱}{۲}|(۱-۱۸-۱۶)-(-۳-۴+۲۴)|=\frac{۱}{۲}|-۳۳-۱۷|=۲۵$$

$$S_{BCD}=\frac{۱}{۲}\begin{vmatrix} ۶ & ۱ \\ ۸ & -۵ \\ -۴ & -۳ \\ ۶ & ۱ \end{vmatrix} \Rightarrow S_{BCD}=\frac{۱}{۲}|(-۳۰-۲۴-۴)-(-۱۸+۲۰+۸)|=\frac{۱}{۲}|-۵۸-۱۰|=۳۴$$

بنابراین مساحت چهارضلعی $ABCD$ برابر است با: $S=۲۵+۳۴=۵۹$

از این مثال نتیجه می گیریم که سوال‌هایی به ظاهر، پیچیده مثل سوال بالا با اندکی دقت، ابتکار و پردازش به سوالی ساده تبدیل شده و قابل حل می‌شود.

۴ـ حتماً بعد از انجام تمرین در بخش مورد نظر به کتاب فارآزمون مراجعه کنید و از همان بخش، از خودتان آزمون بگیرید. آزمون‌های اولیهٔ این کتاب مویرگی هستند و به شما کمک می کنند تا آن درس در ذهنتان جا بیفتد. از آن‌جایی که سوالات در آزمون‌ها پراکندگی دارند و باعث تمرکز بیش‌تر روی مبحث می‌شوند و ضمناً هنر آزمون دادن را نیز از همین ابتدا به شما آموزش می‌دهند. به علاوه آزمون دادن باعث جمع‌بندی مطالب خوانده شده می‌شود.

۵ـ ضمناً سوالاتی را که از کتاب درسی، کمک آموزشی و فارآزمون نتوانسته‌اید جواب بدهید یا نکته‌دار بوده‌اند را در روزهای بعدی دوباره حل کنید؛ حتی این کار می‌تواند بیش از دو بار اتفاق بیفتد. یادتان باشد با حل مجدد سوالات، ویژگی‌های مطالب یاد گرفته شده و نکته‌های حل مسأله در ذهنتان تثبیت شده و الگوهای لازم (کلید حل مسأله) در حافظه‌تان شکل می گیرد؛ یعنی شما را از یک تازه کار به یک کهنه کار حل مسأله تبدیل می کند.

در انتها توصیه می کنیم که هرگز از ماشین حساب برای بدست آوردن جواب استفاده نکنید. چنانچه یک روز در میان به مقدار یک ساعت و نیم تا دو ساعت مطالعه و تمرین داشته باشید و سعی کنید که خودتان بدون کمک پاسخ‌نامه و یا دیگران پاسخ را بیابید حتماً در ۴ ماه آینده از پیشرفتتان تعجب خواهید کرد.

موفق و پیروز باشید

علی امین‌صادقیه

فهرست

بخش اول: درس‌نامه‌ها و آزمون‌ها

بخش دوم: پاسخ‌نامه‌ها

فهرست

بخش اول: درس‌نامه‌ها و آزمون‌ها

بخش دوم: پاسخ‌نامه‌ها

هندسه

آزمون

آزمون	مبحث	منبع
۶۷	هندسه	فصل دوم ریاضی (۲)
۶۸	هندسه	فصل دوم ریاضی (۲)
۶۹	هندسه	فصل دوم ریاضی (۲)
۷۰	هندسه	فصل دوم ریاضی (۲)
۷۱	هندسه‌تحلیلی	درس اول فصل اول، ریاضی (۲)
۷۲	هندسه‌تحلیلی	درس اول فصل اول، ریاضی (۲)
۷۳	هندسه‌تحلیلی	درس اول فصل اول، ریاضی (۲)
۷۴	تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع	درس اول فصل ششم، ریاضی (۳)
۷۵	تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع	درس اول فصل ششم، ریاضی (۳)
۷۶	تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع	درس اول فصل ششم، ریاضی (۳)
۷۷	دایره	درس دوم فصل ششم، ریاضی (۳)
۷۸	دایره	درس دوم فصل ششم، ریاضی (۳)
۷۹	دایره	درس دوم فصل ششم، ریاضی (۳)
۸۰	دایره	درس دوم فصل ششم، ریاضی (۳)
۸۱	جامع	

سخن مؤلف با شما

آزمونای این فصل مربوط به مباحث هندسه در کتاب ریاضی (۲) و ریاضی (۳) می‌شه. احتمالاً ۶ سؤال از این فصل در کنکور خواهید دید. احتمالاً ۳ سؤال از فصل دوم ریاضی (۲)، ۱ سؤال از هندسه تحلیلی و ۲ سؤال از تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی و دایره. این ۶ سؤال را تشکیل خواهند داد. هندسه یکی از مباحثیه که می‌تونه سرنوشت شما رو تو کنکور خیلی عوض کنه. با قدرت بخونید ...

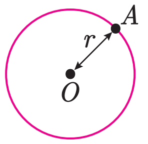
فصل دهم

هندسه

ترسیم‌های هندسی

فاصله‌های مشخص در صفحه

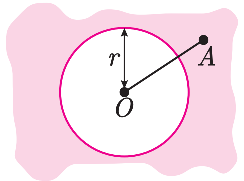
فاصلهٔ مشخص از نقطه: نقاطی از صفحه که از نقطه ثابت O به فاصلهٔ معلوم r هستند روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع r قرار دارند و هر نقطه که روی دایره به مرکز O و شعاع r باشد از نقطهٔ O به فاصلهٔ r است.



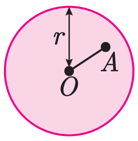
A روی دایره $\Leftrightarrow OA = r$

توجه: دایرهٔ C به مرکز O و شعاع r را با $C(O,r)$ نشان می‌دهند.

نتیجه: نقاط درون دایرهٔ $C(O,r)$ فاصله‌شان از O کم‌تر از r و نقاط بیرون دایرهٔ $C(O,r)$، فاصله‌شان از O بیش‌تر از r است.



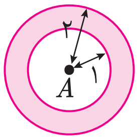
A بیرون دایره $\Leftrightarrow OA > r$



A درون دایره $\Leftrightarrow OA < r$

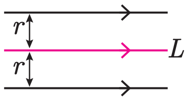
مثلاً نقطهٔ ثابت A در صفحه مفروض است. نقاطی از صفحه که فاصلهٔ آن‌ها از A بیش‌تر از ۱ و کم‌تر از ۲ می‌باشند، در ناحیه‌ای به مساحت ۳π قرار دارند. زیرا:

نقاطی که فاصلهٔ آن‌ها از A بیش‌تر از ۱ اســت، خارج دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۱ قرار دارند. هم‌چنین نقاطی که فاصلهٔ آن‌ها از A کم‌تر از ۲ است درون دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۲ قرار دارند که اشتراک این دو ناحیه به صورت ناحیهٔ رنگی شکل مقابل است که مساحت آن برابر است با:



$$S_{\text{رنگی}} = \pi(۲)^۲ - \pi(۱)^۲ = ۴\pi - \pi = ۳\pi$$

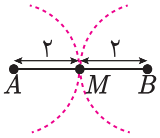
فاصلهٔ مشخص از خط: بـرای پیدا کردن نقاطی از صفحه که از خط L به فاصلهٔ معلوم r هســتند، کافی است دو خط به موازات L و به فاصلهٔ r در طرفین L رسم کنیم.



نکته اگر در مسأله‌ای دنبال نقاطی هستیم که دارای دو ویژگی هستند، باید نقاط هر ویژگی را جداگانه رسم کنیم، آن‌گاه محل تلاقی آن‌ها در صورت وجود، جواب مسأله است.

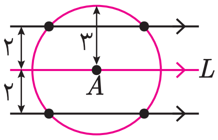
به مثال‌های صفحهٔ بعد دقت کنید.

مثلاً فـرض کنید دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ ۴ از هم قرار دارند. یـک نقطه در صفحه وجود دارد که به فاصلهٔ ۲ واحد از هر کدام از نقاط A و B است. زیرا:

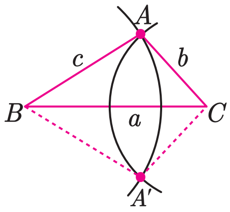


کافی اسـت یک بار به مرکز A و شعاع ۲ و بار دیگر به مرکز B و شعاع ۲ دایره رسم کنیم. همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید فقط نقطهٔ M روی هر دو دایره قرار دارد. پس فقط یک نقطه در صفحه وجود دارد.

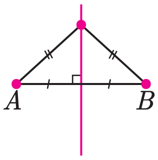
مثلاً فرض کنید نقطهٔ A روی خط L مفروض اسـت. چهار نقطه در صفحه وجود دارند کـه به فاصلهٔ ۲ از خط L و به فاصله ۳ از نقطهٔ A قرار دارند. زیرا:



نقاطـی که به فاصلهٔ ۲ از خط L قرار دارنـد، روی دو خط به موازات L و به فاصلهٔ ۲ از آن می‌باشـند. هم‌چنین نقاطی که به فاصلهٔ ۳ از نقطهٔ A هسـتند روی دایره‌ای به مرکز A و شـعاع ۳ قرار دارند. واضح اسـت دو خط و دایره هم‌دیگر را در ۴ نقطه قطع می‌کنند. پس ۴ نقطه در صفحه وجود دارد.



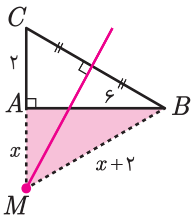
رسم مثلث با معلوم بودن سه ضلع: اگر a، b و c طول سـه ضلع مثلث ABC باشند، برای رسم آن ابتدا پاره‌خط BC را به اندازهٔ a رسـم می‌کنیم. سـپس یک بار به مرکز C و شـعاع b و بار دیگر به مرکز B و شـعاع c دایره‌ای رسـم می‌کنیم. محل تلاقی این دو دایره، رأس A از مثلث ABC است. توجه کنید که دو دایره همدیگر را در دو نقطهٔ A و A' قطع می‌کنند اما مثلث ABC با مثلث $A'BC$ هیچ فرقی ندارد.



عمودمنصف پاره‌خط: عمودمنصف یک پاره‌خط، خطی است که در وسط پاره‌خط بر آن عمود است.

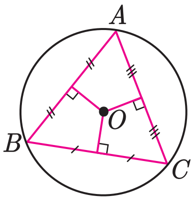
ویژگی عمودمنصف: هر نقطه‌ای که روی عمودمنصف پاره‌خط AB باشد، از نقاط A و B به یک فاصله است و هم‌چنین هر نقطه که از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف AB قرار دارد.

مثلاً فرض کنید در مثلث قائم‌الزاویه‌ای به اضلاع قائم ۶ و ۲، عمودمنصف وتر امتداد ضلع کوچک‌تر را در نقطهٔ M قطع کرده است. می‌خواهیم فاصلهٔ M از نزدیک‌ترین رأس مثلث را به دست آوریم:



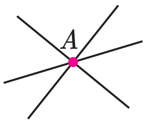
به شـکل مقابل توجه کنید. طول MA مد نظر سـؤال است. با فرض $MA = x$، چون M روی عمودمنصف BC اسـت، پس $MB = MC$ می‌باشـد. بنابراین $MB = x + ۲$ خواهد بود. در مثلـث قائم‌الزاویهٔ MAB به کمک قضیهٔ فیثاغورس داریم:

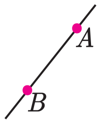
$$MB^{۲} = MA^{۲} + AB^{۲} \Rightarrow (x+۲)^{۲} = x^{۲} + ۳۶ \Rightarrow x^{۲} + ۴x + ۴ = x^{۲} + ۳۶ \Rightarrow ۴x = ۳۲ \Rightarrow x = ۸$$



نتیجه: چون هر نقطه روی عمودمنصف پاره‌خط AB، از نقاط A و B به یک فاصله است، پس محل تلاقی عمودمنصف‌های یک مثلث از سه رأس مثلث به یک فاصله است. از طرفی چون هر نقطه روی دایره از مرکز دایره به یک فاصله است، پس دایره‌ای وجود دارد که مرکز آن محل برخورد عمودمنصف‌های مثلث است و از سه رأس مثلث می‌گذرد.

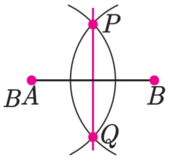
ترسیم‌های معروف





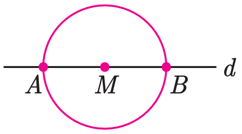
قبل از شروع ترسـیم‌های هندسی باید بدانیم که از یک نقطه در صفحه، بی‌شمار خط می‌گذرد ولی از دو نقطه در یک صفحه، یک و فقط یک خط می‌گذرد.

۱ رسم عمودمنصف یک پاره‌خط



بـرای رسـم عمودمنصـف پاره‌خـط AB، دهانـهٔ پـرگار را بیـش از نصـف طـول AB بـاز کـرده و بـه مراکـز A و B دو کمـان رسـم می‌کنیـم. ایـن دو کمـان یکدیگـر را در نقـاط P و Q قطـع می‌کننـد. چـون P و Q فاصلـهٔ یکسـانی از A و B دارند، پس روی عمودمنصف پاره‌خط AB هستند. خط گذرا از P و Q عمودمنصف پاره‌خط AB است.

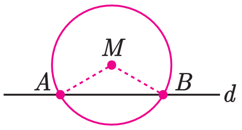
❷ رسم خط عمود بر خط d از نقطهٔ M روی آن



به مرکز M و شعاع دلخواه دایره‌ای رسم می‌کنیم تا خط d را در نقاط A و B قطع کند. M وسط پاره‌خط AB است.

حال اگر عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنیم، بر خط d عمود بوده و از نقطهٔ M می‌گذرد.

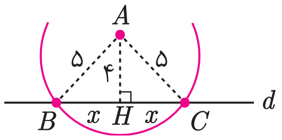
❸ رسم خط عمود بر خط d از نقطهٔ M غیر واقع بر آن



به مرکز M و شعاع مناسب، دایره‌ای رسم می‌کنیم تا خط d را در نقاط A و B قطع کند. $MA = MB$ خواهد بود.

حال اگر عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنیم، بر خط d عمود بوده و از نقطهٔ M می‌گذرد.

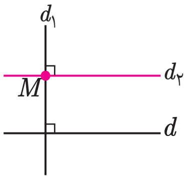
مثلاً فرض کنید نقطهٔ A به فاصلهٔ ۴ از خط d قرار دارد. به مرکز A و شعاع ۵ دایره‌ای رسم می‌کنیم تا خط d را در نقاط B و C قطع کند. در مورد مثلث ABC می‌توان گفت مثلث ABC یک مثلث متساوی‌الساقین با مساحت ۱۲ است، زیرا:



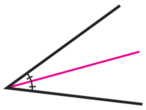
با توجه به شکل مقابل ABC مثلث متساوی‌الساقین با طول ساق ۵ و ارتفاع ۴ است. به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH داریم:

$$x^{۲}+۴^{۲}=۵^{۲} \Rightarrow x^{۲}=۹ \Rightarrow x=۳ \Rightarrow S_{ABC}=\frac{۱}{۲}BC\times AH=\frac{۱}{۲}\times ۶\times ۴=۱۲$$

❹ رسم خط موازی با خط d از نقطهٔ M غیر واقع بر آن

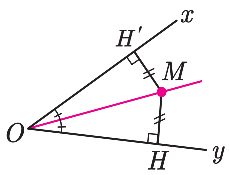


خط d_1 را به گونه‌ای رسم می‌کنیم که از M بگذرد و بر خط d عمود باشد. حال خط d_2 را عمود بر d_1 و گذرا از M رسم می‌کنیم. خط d_2 با خط d موازی است.



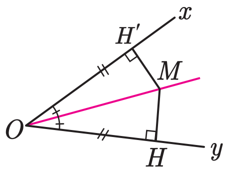
نیمساز زاویه: نیمساز یک زاویه، خطی است که زاویه را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند.

ویژگی‌های نیمساز



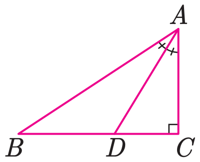
۱ـ هر نقطه که روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

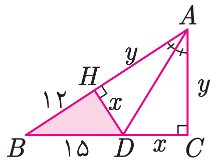
M روی نیمساز $\widehat{xOy}$ است. $\Leftrightarrow MH = MH'$



۲ـ اگر از نقطه‌ای دلخواه روی نیمساز، دو عمود بر دو ضلع زاویه رسم کنیم، پاره‌خط‌هایی که روی دو ضلع زاویه ایجاد می‌شوند با هم برابرند.

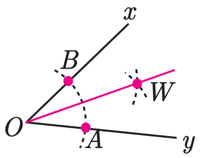
مثلاً در شکل مقابل، AD نیمساز زاویهٔ A می‌باشد. اگر $BD=۱۵$ و $AB-AC=۱۲$ باشد، می‌خواهیم طول پاره‌خط DC را به دست آوریم:





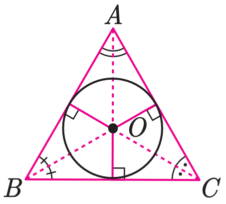
فرض می‌کنیم $DC=x$ و $AC=y$ باشد، از D بر AB عمود می‌کنیم. چون D روی نیمساز $\widehat{A}$ می‌باشد، پس $DC=DH=x$ و $AH=AC=y$ است. از طرفی $AB-AC=۱۲$ می‌باشد، پس طول AB برابر $y+۱۲$ به دست می‌آید، بنابراین $BH=۱۲$ خواهد بود. حال به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث BHD داریم:

$$BD^{۲}=HD^{۲}+BH^{۲} \Rightarrow ۱۵^{۲}=x^{۲}+۱۲^{۲} \Rightarrow x^{۲}=۸۱ \Rightarrow x=۹ \Rightarrow DC=۹$$



۵ رسم نیمساز یک زاویه

برای رسم نیمساز زاویهٔ $\widehat{xOy}$، به مرکز O و شعاع دلخواه کمانی رسم می‌کنیم تا اضلاع زاویه را در A و B قطع کند. دهانهٔ پرگار را بیش از نصف طول AB باز کرده و به مراکز A و B دو کمان می‌زنیم تا همدیگر را در W قطع کنند، از W به O وصل می‌کنیم، OW نیمساز زاویهٔ $\widehat{xOy}$ است.



نتیجه: محل تلاقی نیمسازهای مثلث ABC مرکز دایره‌ای است که اضلاع مثلث بر آن دایره مماس می‌باشند.

استدلال و قضیهٔ تالس

استدلال استقرایی: اگر از مشاهده و بررسی موضوعی در چند حالت، نتیجه‌ای کلی در آن موضوع گرفته شود، آن‌گاه به این استدلال، استدلال استقرایی می‌گویند.

نکته در این نوع استدلال از جزء به کل می‌رسیم.

استدلال استنتاجی: روش نتیجه‌گیری منطقی بر پایهٔ واقعیت‌هایی که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم استدلال استنتاجی گفته می‌شود.

قضیه: به نتایجی که از استدلال استنتاجی به دست می‌آیند، قضیه می‌گویند.

فرض و حکم قضیه: در یک قضیه گزاره یا گزاره‌هایی که درستی آن‌ها را قبول داریم «فرض قضیه» و گزاره یا گزاره‌هایی که می‌خواهیم درستی آن‌ها را از روی فرض نتیجه بگیریم «حکم قضیه» می‌باشند.

عکس قضیه: اگر جای فرض و حکم یک قضیه را عوض کنیم، آن‌چه حاصل می‌شود «عکس قضیه» است که ممکن است درست یا نادرست باشد.

مثلاً عکس قضیهٔ «اگر یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، آن‌گاه قطرهایش یکدیگر را نصف می‌کنند» به صورت «اگر در یک چهارضلعی قطرها یکدیگر را نصف کنند، آن‌گاه آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است» می‌باشد.

قضیهٔ دوشرطی: اگر عکس یک قضیه درست باشد، یعنی عکس قضیه خود یک قضیه باشد، آن‌گاه می‌توان این دو قضیه را در قالب یک قضیهٔ دو شرطی بیان کرد. قضیهٔ دو شرطی را به صورت « $p \Leftrightarrow q$ » نشان می‌دهند و به شکل «p اگر و تنها اگر q» می‌خوانند.

مثلاً قضیهٔ «در یک مثلث دو ضلع برابرند، اگر و تنها اگر زاویه‌های روبه‌روی آن‌ها با هم برابر باشند.» یک قضیهٔ دو شرطی می‌باشد.

روش‌های اثبات قضایا

۱ اثبات مستقیم: در این روش از فرض قضیه، درستی حکم را نتیجه می‌گیریم.

۲ برهان خلف (اثبات غیر مستقیم): در این روش به جای آن که نشان دهیم حکم درست است نشان می‌دهیم حکم نادرست نیست، به این صورت که فرض می‌کنیم حکم نادرست است (فرض خلف)، سپس به کمک استدلال، منطق و حقایق به یک تناقض می‌رسیم.

۳ مثال نقض: به مثالی که نشان دهد یک نتیجه‌گیری کلی غلط است مثال نقض می‌گویند. مثلاً مثال نقض حکم «همهٔ اعداد اول فردند» عدد ۲ می‌باشد، زیرا ۲ عددی اول است در حالی که فرد نمی‌باشد.

نسبت و تناسب

نسبت: اگر واحد اندازه‌گیری کمیت‌های a و b یکسان باشد، آن‌گاه به $\frac{a}{b}$ یک نسبت می‌گوییم که همواره $b \neq 0$ می‌باشد.

تناسب: تساوی بین دو نسبت $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ را با شرط $b,d \neq 0$ یک تناسب می‌گوییم.

توجه: در تناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ به a و d طرفین و به b و c وسطین گفته می‌شود.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow \underbrace{a\div \overbrace{b=c}^{\text{وسطین}}\div d}_{\text{طرفین}}$$

ویژگی‌های تناسب

۱. طرفین وسطین $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow ad=bc$	۲. تبدیل حاصل‌ضرب به تناسب $ad=bc\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$
۳. معکوس کردن تناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$	٤. تعویض جای طرفین با هم $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$
۵. تعویض جای وسطین با هم $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$	٦. ترکیب نسبت در صورت $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$
۷. ترکیب نسبت در مخرج $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$	۸. تفضیل نسبت در صورت $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$
۸. تفضیل نسبت در مخرج $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$	۹. در حالت کلی $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{ax\pm cy}{bx\pm dy}$

نکته در تست‌هایی که یک نسبت داده شده و نسبت دیگری را می‌خواهد، می‌توان صورت کسرها را با هم و مخرج کسرها را نیز با هم برابر در نظر گرفت.

مثلاً اگر $\frac{a}{b}=\frac{۲۰-a}{۱۵-b}$ باشد، حاصل $\frac{a-b}{a+b}$ را به دو روش زیر می‌توان به دست آورد:

روش اول: با استفاده از ویژگی‌های تناسب داریم:

$$\frac{۲۰-a}{۱۵-b}=\frac{a}{b}\Rightarrow\frac{۲۰-a+a}{۱۵-b+b}=\frac{a}{b}\Rightarrow\frac{۲۰}{۱۵}=\frac{a}{b}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{۴}{۳}$$

حال به کمک تناسب $\frac{a}{b}=\frac{۴}{۳}$ می‌توان گفت:

$$\frac{a}{b}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow\frac{a-b}{a+b}=\frac{۴-۳}{۴+۳}=\frac{۱}{۷}$$

روش دوم: با توجه نکتهٔ گفته شده داریم:

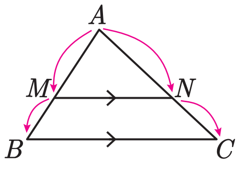
$$\frac{۲۰-a}{۱۵-b}=\frac{a}{b}\Rightarrow\begin{cases}۲۰-a=a\Rightarrow a=۱۰\\ ۱۵-b=b\Rightarrow b=۷/۵\end{cases}$$

حال مقادیر $a=۱۰$ و $b=۷/۵$ را در نسبت $\frac{a-b}{a+b}$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{۱۰-۷/۵}{۱۰+۷/۵}=\frac{۲/۵}{۱۷/۵}=\frac{۱}{۷}$$

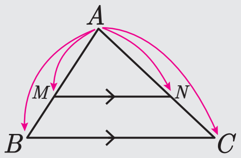
تالس

قضیهٔ تالس: اگر خطی موازی یک ضلع مثلث به گونه‌ای رسم شود که دو ضلع دیگر آن را قطع کند، روی آن دو ضلع، چهار پاره‌خط جدا می‌کند که اندازه‌های آن‌ها نسبت‌های مساوی پدید می‌آورند.



$$MN\parallel BC\Rightarrow\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$$

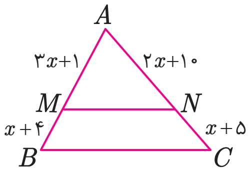
نکته به کمک خواص تناسب می‌توان قضیهٔ تالس را به صورت‌های زیر نیز بیان کرد:



$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}\Rightarrow\frac{AM}{AM+MB}=\frac{AN}{AN+NC}\Rightarrow\boxed{\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}\Rightarrow\frac{AB}{AM}=\frac{AC}{AN}}$$

$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}\Rightarrow\frac{AM+MB}{MB}=\frac{AN+NC}{NC}\Rightarrow\boxed{\frac{AB}{MB}=\frac{AC}{NC}\Rightarrow\frac{MB}{AB}=\frac{NC}{AC}}$$

مثلاً در شکل مقابل $MN \parallel BC$ می‌باشد. می‌خواهیم مقدار x را به دست آوریم:

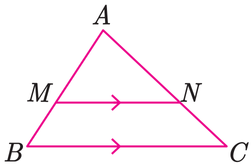


چون $MN \parallel BC$ است به کمک قضیهٔ تالس داریم:

$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{۳x+۱}{x+۴}=\frac{۲x+۱۰}{x+۵} \Rightarrow (۳x+۱)(x+۵)=(x+۴)(۲x+۱۰)$$

$$\Rightarrow ۳x^۲+۱۶x+۵=۲x^۲+۱۸x+۴۰ \Rightarrow x^۲-۲x-۳۵=۰ \Rightarrow (x-۷)(x+۵)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۷ \\ x=-۵ \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

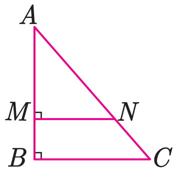
تعمیم قضیهٔ تالس: اگر خطی موازی یک ضلع مثلث به گونه‌ای رسم شود که دو ضلع دیگر آن را قطع کند، آن‌گاه مثلثی پدید می‌آید که اندازهٔ ضلع‌های آن با اندازهٔ ضلع‌های مثلث اصلی متناسب است.



$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

نکته اگر طول پاره‌خط MN جزء داده‌ها یا خواسته‌های مسأله باشد، از تعمیم قضیهٔ تالس استفاده می‌کنیم.

مثلاً در شکل مقابل، $AM=۱۲$ ، $MB=۴$ و $MN=۹$ است. فرض کنید می‌خواهیم مجموع طول‌های دو پاره‌خط BC و NC را به دست آوریم:



چون MN و BC هر دو بر AB عمودند، پس با هم موازی‌اند. از طرفی چون MN جزء داده‌های سؤال است از تعمیم قضیهٔ تالس استفاده می‌کنیم.

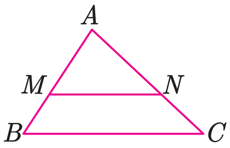
$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{۱۲}{۱۶}=\frac{AN}{AC}=\frac{۹}{BC} \Rightarrow ۱۲BC=۹\times۱۶ \Rightarrow BC=۱۲$$

حال به کمک قضیهٔ فیثاغورس در دو مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$\left\{\begin{array}{l} AN^۲=AM^۲+MN^۲ \Rightarrow AN^۲=۱۴۴+۸۱=۲۲۵ \Rightarrow AN=۱۵ \\ AC^۲=AB^۲+BC^۲ \Rightarrow AC^۲=۲۵۶+۱۴۴=۴۰۰ \Rightarrow AC=۲۰ \end{array}\right. \Rightarrow NC=۲۰-۱۵=۵$$

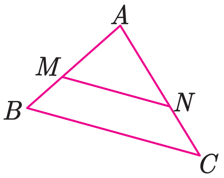
بنابراین $BC+NC=۱۲+۵=۱۷$ است.

عکس قضیهٔ تالس: اگر در یک مثلث، خطی دو ضلع مثلث را به گونه‌ای قطع کند که روی آن دو ضلع، چهار پاره‌خط با نسبت‌های مساوی پدید آورد، آن‌گاه آن خط، موازی ضلع سوم مثلث است.



$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC} \Rightarrow MN \parallel BC$$

مثلاً در شکل مقابل، اگر $AB=۱۴$ ، $AM=۶$ ، $AC=۷$ و $AN=۳$ باشند، آن‌گاه $MN \parallel BC$ است.

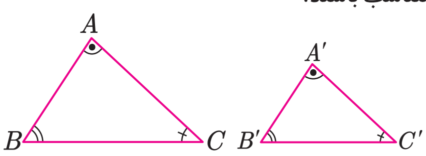


زیرا می‌دانیم طبق عکس قضیهٔ تالس، وقتی $MN \parallel BC$ است که پاره‌خط‌های ایجاد شده روی اضلاع مثلث متناسب باشند که این‌طور هست:

$$\frac{AN}{AC}=\frac{AM}{AB} \Rightarrow \frac{۳}{۷}=\frac{۶}{۱۴}$$

تشابه

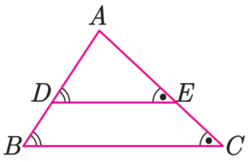
دو مثلث متشابه: دو مثلث را متشابه می‌نامند، هرگاه زاویه‌ها برابر و اضلاع، نظیر به نظیر متناسب باشند.



$$(\hat{A}=\hat{A'}, \hat{B}=\hat{B'}, \hat{C}=\hat{C'}), (\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}) \Leftrightarrow \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

نکته اضلاع متناظر دو مثلث، روبه‌روی زاویه‌های برابر قرار دارند.

نسبت تشابه: به نسبت دو ضلع متناظر در دو مثلث متشابه، نسبت تشابه می‌گویند. واضح است که اگر k نسبت تشابه باشد، $\frac{1}{k}$ نیز نسبت تشابه است.



قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌ها: اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث، دو ضلع دیگر را قطع کند، در این صورت مثلث کوچکی به وجود می‌آید که با مثلث بزرگ اولیه متشابه است.

حالات تشابه دو مثلث: دو مثلث متشابه، زاویه‌های برابر و اضلاع متناظر متناسب دارند. برای اثبات تشابه دو مثلث می‌توان از اطلاعات کم‌تری استفاده کرد که عبارتند از:

❶ **تساوی دو زاویه:** اگر دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، آن دو مثلث متشابه‌اند.

$$\hat{A}=\hat{A'} \quad , \quad \hat{B}=\hat{B'} \Leftrightarrow \overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$$

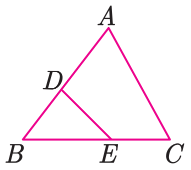
❷ **تناسب دو ضلع و برابری زاویهٔ بین:** اگر اندازه‌های دو ضلع از مثلثی با اندازه‌های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و زاویهٔ بین آن‌ها هم‌اندازه باشد، دو مثلث متشابه‌اند.

$$\left(\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}\right) \text{ و } \hat{A}=\hat{A'} \Leftrightarrow \overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$$

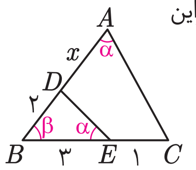
❸ **تناسب سه ضلع:** هرگاه اندازه‌های سه ضلع از مثلثی با اندازه‌های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'} \Leftrightarrow \overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$$

مثلاً در شکل مقابل، $B\hat{A}C=D\hat{E}B$ است. اگر $EC=۱$ ، $DB=۲$ و $BE=۳$ باشند، طول پاره‌خط AD برابر است با:



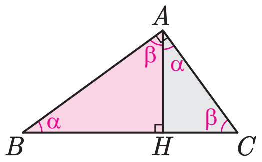
چون $B\hat{A}C=D\hat{E}B$ و زاویهٔ B در دو مثلث مشترک است، پس دو مثلث دو زاویهٔ برابر دارند و متشابه‌اند. بنابراین اضلاع متناظر آن‌ها متناسب‌اند، با فرض $AD=x$ داریم:



$$\frac{BD}{BC}=\frac{BE}{BA} \Rightarrow \frac{۲}{۴}=\frac{۳}{x+۲} \Rightarrow ۲(x+۲)=۱۲ \Rightarrow x+۲=۶ \Rightarrow x=۴$$

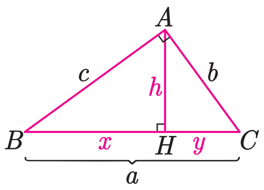
مشابه‌ها در مثلث قائم‌الزاویه: در هر مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، آن را به دو مثلث قائم‌الزاویه تفکیک می‌کند که هر دو با هم و با مثلث اصلی متشابه‌اند.

$$\overset{\triangle}{ABH} \sim \overset{\triangle}{ACH} \sim \overset{\triangle}{ABC}$$



روابط طولی در مثلث: به کمک مثلث‌های متشابهی که توسط ارتفاع وارد بر وتر ایجاد می‌شوند می‌توان نتایج زیر را به دست آورد:

نتیجه ۱: یک بار نسبت اضلاع متناظر را در دو مثلث متشابه ABH و ABC و بار دیگر نسبت اضلاع متناظر را در دو مثلث متشابه ACH و ABC می‌نویسیم:

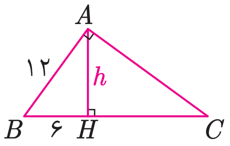


$$\overset{\triangle}{ABH} \sim \overset{\triangle}{ABC} \Rightarrow \frac{c}{a}=\frac{x}{c} \Rightarrow \boxed{c^۲=ax}$$

$$\overset{\triangle}{ACH} \sim \overset{\triangle}{ABC} \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{y}{b} \Rightarrow \boxed{b^۲=ay}$$

یعنی در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع هر ضلع زاویهٔ قائمه برابر است با حاصل‌ضرب وتر در تصویر آن ضلع بر وتر.

مثلاً با توجه به شکل مقابل، طول ضلع AC برابر $۱۲\sqrt{۳}$ است، زیرا:

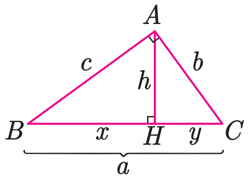


فرض می‌کنیم طول وتر BC برابر a باشد، پس: $۱۲^{۲}=۶\times a\Rightarrow a=۲۴$

واضح است که طول پاره‌خط HC برابر $۲۴-۶=۱۸$ خواهد بود و داریم:

$$AC^{۲}=CH\times a\Rightarrow AC^{۲}=۱۸\times ۲۴\Rightarrow AC=\sqrt{۳\times ۶\times ۶\times ۴}=۶\sqrt{۱۲}=۱۲\sqrt{۳}$$

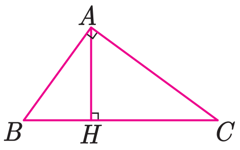
نتیجه ۲: نسبت اضلاع متناسب را در دو مثلث متشابه ABH و ACH می‌نویسیم:



$$\overset{\Delta}{ABH}\sim \overset{\Delta}{ACH}\Rightarrow \frac{x}{h}=\frac{h}{y}\Rightarrow \boxed{h^{۲}=xy}$$

یعنی در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع ارتفاع وارد بر وتر برابر است با حاصل‌ضرب قطعاتی که روی وتر جدا می‌کند.

مثلاً در مثلث شکل مقابل، $HC=۲AH$ و $BH=۲$ می‌باشد. می‌خواهیم طول ضلع AC را به دست آوریم:



فرض می‌کنیم $AH=h$ باشد، پس $HC=۲h$ است. داریم:

$$AH^{۲}=BH\times HC\Rightarrow h^{۲}=۲\times ۲h\Rightarrow h=۴$$

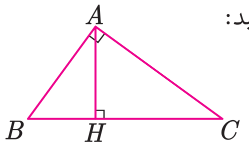
از طرفی داریم:

$$AC^{۲}=HC\times BC\Rightarrow AC^{۲}=۲h\times (۲h+۲)\xRightarrow{h=۴}AC^{۲}=۸\times ۱۰\Rightarrow AC=\sqrt{۸۰}=\sqrt{۱۶\times ۵}=۴\sqrt{۵}$$

نتیجه: با توجه به روابطی که از نتیجهٔ ۱ به دست آمد، داریم:

$$\begin{cases}c^{۲}=ax\\ b^{۲}=ay\end{cases}\Rightarrow c^{۲}+b^{۲}=ax+ay\Rightarrow c^{۲}+b^{۲}=a\underbrace{(x+y)}_{a}\Rightarrow \boxed{c^{۲}+b^{۲}=a^{۲}\quad \text{قضیهٔ فیثاغورس}}$$

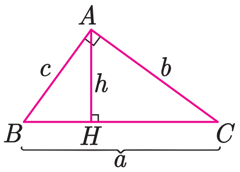
مثلاً در شکل مقابل، $AB=۲$ ، $AC=۳$ و $BC=۴$ است. نحوهٔ به دست آوردن طول پاره‌خط BH را ببینید:



فرض می‌کنیم $AH=h$ و $BH=x$ باشد، در نتیجه $CH=۴-x$ خواهد بود. با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث‌های AHB و AHC داریم:

$$\begin{cases}AB^{۲}=AH^{۲}+BH^{۲}\Rightarrow ۴=h^{۲}+x^{۲}\\ AC^{۲}=AH^{۲}+CH^{۲}\Rightarrow ۹=h^{۲}+(۴-x)^{۲}\Rightarrow ۹=h^{۲}+۱۶-۸x+x^{۲}\end{cases}\Rightarrow ۹-۴=۱۶-۸x\Rightarrow ۸x=۱۱\Rightarrow x=\frac{۱۱}{۸}$$

ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه: مثلث قائم‌الزاویه یک ارتفاع واقعی دارد و دو ارتفاع دیگر همان اضلاع قائم مثلث هستند. این ارتفاع وارد بر وتر به کمک دو بار محاسبهٔ مساحت مثلث به دست می‌آید:



$$\begin{cases}S=\frac{۱}{۲}b.c\\ S=\frac{۱}{۲}a.h\end{cases}\Rightarrow \frac{۱}{۲}b.c=\frac{۱}{۲}a.h\Rightarrow b.c=a.h\Rightarrow \boxed{h=\frac{b.c}{a}}$$

مثلاً در مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائم ۱۵ و ۲۰، طول ارتفاع وارد بر وتر به صورت زیر به دست می‌آید:

ابتدا به کمک قضیهٔ فیثاغورس طول وتر را به دست می‌آوریم: $a^{۲}=۱۵^{۲}+۲۰^{۲}\Rightarrow a^{۲}=۶۲۵\Rightarrow a=۲۵$

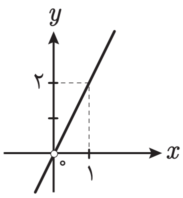
حال ارتفاع وارد بر وتر برابر است با: $h=\frac{bc}{a}\Rightarrow h=\frac{۱۵\times ۲۰}{۲۵}=۱۲$

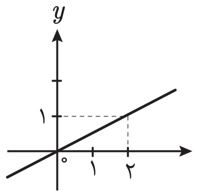
همه چیز در مورد نسبت تشابه: در دو مثلث متشابه ABC و $A'B'C'$ ، اگر نسبت اضلاع یا همان نسبت تشابه k باشد، آن‌گاه تمامی اجزای طولی مثلث ABC (اجزایی که با واحد طول سنجیده می‌شوند) با اجزای نظیرشان در مثلث $A'B'C'$ با همان نسبت k متناسب هستند. اجزای طولی شامل میانه، ارتفاع و محیط مثلث می‌باشند. نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه با مجذور نسبت تشابه یعنی $k^{۲}$ برابر است.

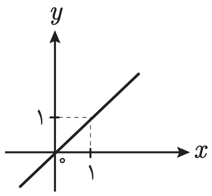
آزمون ۲۳: تابع

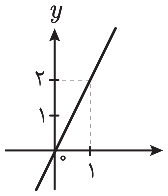
۱۷ دقیقه

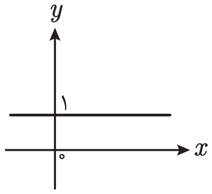
۱. اگر $f(x)=x^{۲}$ و نمودار $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$ به صورت روبه‌رو باشد، کدام می‌تواند نمودار $g(x)$ باشد؟



۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۲. اگر $f^{-۱}(x)=۱+\sqrt{x}$ و $h(x)=\dfrac{۱}{۱+f(x)}$ باشند، دامنهٔ تابع $h^{-۱}(x)$ کدام است؟

۱) $(۰,۱)$ ۲) $[۰,۱)$ ۳) $(۰,۱]$ ۴) $[۰,۱]$

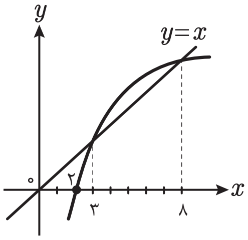
۳. تابع $f(x)=x^{۲}+۲x+۱$ با دامنهٔ $(-۱,+\infty)$ مفروض است. نمودارهای دو تابع f و $f^{-۱}$ در چند نقطه متقاطع هستند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) غیرمتقاطع

۴. اگر $f(x)=\sqrt{x+۳}$ و $g(x)=\dfrac{x^{۲}+۱}{۵-x^{۲}}$ باشند، ضابطهٔ تابع $(f^{-۱}og^{-۱})(x)$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۲x-۴}{x+۱}$ ۲) $\dfrac{x-۳}{x+۲}$ ۳) $\dfrac{۲x+۴}{x-۱}$ ۴) $\dfrac{x+۳}{x-۲}$

۵. شکل مقابل، نمودار تابع $y=f(x)$ و نیمساز ناحیهٔ اول و سوم است. دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $\sqrt{x-f^{-۱}(x)}$ کدام است؟ تجربی ۹۴



۱) $(۰,۲]$ ۲) $[۲,۳]$

۳) $[۲,۸]$ ۴) $[۳,۸]$

۶. اگر $f(x)=۲-|x+۱|$ و $g(x)=x+|x|$ آن‌گاه برد تابع $(\dfrac{f}{g})(x)$ کدام است؟ ریاضی ۹۷

۱) $(-\infty,\dfrac{۱}{۲})$ ۲) $(-۱,+\infty)$ ۳) $(-\dfrac{۱}{۲},+\infty)$ ۴) $(۰,+\infty)$

۷. اگر $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{-x^{۲}+x+۲}}$ و $g(x)=(\dfrac{۱}{۴})^{x}$ باشد، دامنهٔ تابع fog کدام است؟

۱) $(-\dfrac{۱}{۲},+\infty)$ ۲) $(\dfrac{۱}{۲},+\infty)$ ۳) $(-۲,۰)$ ۴) $(-۱,\dfrac{۱}{۲})$

۸. اگر خروجی ماشین شکل مقابل $\dfrac{۴}{۳}$ باشد، مقدار ورودی آن کدام است؟ ریاضی ۹۰

ورودی $\rightarrow \boxed{۲x-۲} \rightarrow \boxed{\dfrac{x}{\sqrt{x}+۱}} \rightarrow$ خروجی

۱) $\dfrac{۱۱}{۹}$ ۲) $\dfrac{۷}{۲}$ ۳) ۳ ۴) ۴

۹. تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۲} & x\leq ۰ \\ g(x) & x>۰ \end{cases}$ اکیداً نزولی است. تابع $g(x)$ کدام است؟

۱) $۲x+۱$ ۲) $-۲x-۱$ ۳) -۳ ۴) $-۲x+۱$

۱۰. دو تابع $f=\{(۱,۹),(۴,۱),(۳,۷),(۶,۳),(۲,۵)\}$ و $g(x)=\dfrac{x}{x-۱}$ مفروض‌اند. اگر $f^{-۱}(g(۲a))=۶$ باشد، a کدام است؟ (تجربی ۹۶)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$

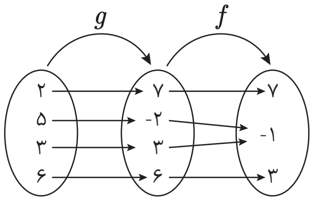
۹ (۱) (۲) (۳) (۴)	۷ (۱) (۲) (۳) (۴)	۵ (۱) (۲) (۳) (۴)	۳ (۱) (۲) (۳) (۴)	۱ (۱) (۲) (۳) (۴)
۱۰ (۱) (۲) (۳) (۴)	۸ (۱) (۲) (۳) (۴)	۶ (۱) (۲) (۳) (۴)	۴ (۱) (۲) (۳) (۴)	۲ (۱) (۲) (۳) (۴)

پاسخ آزمون ۲۳ در صفحهٔ ۲۸۶

آزمون ۲۴: تابع

۱۷ دقیقه

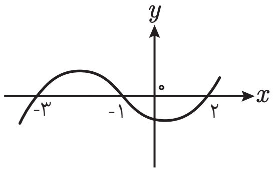
۱. با توجه به نمودار توابع f و g کدام گزینه نادرست است؟



۱) $(f+g)(۳)=۲$ ۲) $(۲f-g)(۶)=۰$

۳) $(\frac{f}{g})(۶)=\frac{۱}{۲}$ ۴) $(f.g)(۳)=۳$

۲. شکل مقابل، نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)$ است. دامنهٔ تابع $\sqrt{(x+۱)f(x)}$ کدام است؟



۱) $[-۳,۲]$ ۲) $[-۱,+\infty)$

۳) $(-\infty,-۱]$ ۴) $\mathbb{R}-\{(-۳,۲)-\{-۱\}\}$

۳. وارون تابع $f(x)=\begin{cases}۳x+۲ & x\geq ۱\\ ۴x+۱ & x<۱\end{cases}$ کدام است؟

۱) $f^{-۱}(x)=\begin{cases}\frac{x}{۲}-\frac{۳}{۲} & x\geq ۶\\ \frac{x}{۳}-\frac{۱}{۳} & x<۶\end{cases}$ ۲) $f^{-۱}(x)=\begin{cases}\frac{x}{۳}-\frac{۲}{۳} & x\geq ۶\\ \frac{x}{۴}-\frac{۱}{۴} & x<۶\end{cases}$

۳) $f^{-۱}(x)=\begin{cases}\frac{x}{۳}-\frac{۲}{۳} & x\geq ۵\\ \frac{x}{۴}-\frac{۱}{۴} & x<۵\end{cases}$ ۴) $f^{-۱}(x)=\begin{cases}۳x-۲ & x\geq ۵\\ ۲x+۴ & x<۵\end{cases}$

۴. نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x+۴}{x-۲}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{۲\}$، نمودار وارون خود را با کدام طول قطع می‌کند؟ تجربی خارج ۹۶

۱) $-۱,-۴$ ۲) $-۱,۴$

۳) $۱,-۴$ ۴) $۱,۴$

۵. کدام یک از تابع‌های زیر یک به‌یک است؟

۱) $f(x)=x+\sqrt{x}$ ۲) $g(x)=x-\sqrt{x}$ ۳) $h(x)=۲x+\frac{۱}{x}$ ۴) $p(x)=\dfrac{x}{x^{۲}+۱}$

۶. برد تابع $f(x)=\dfrac{۲x^{۲}-x-۱}{x-۱}$ شامل کدام عدد نیست؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۲- ۴) ۴-

۷. اگر صفرهای تابع $f(x)$ برابر ۳ و ۵- باشند، آن‌گاه صفرهای تابع $y=۲f(۲x+۱)$ کدام است؟

۱) $۳,-۱$ ۲) $-۳,۱$ ۳) $۳,۱$ ۴) $-۳,-۱$

۸. اگر دامنهٔ و برد تابع f به‌ترتیب برابر $[-۲,۳]$ و $[۰,۶]$ باشد، آن‌گاه دامنه و برد تابع $g(x)=\frac{۱}{۳}f(x-۲)-۱$ به‌ترتیب کدام است؟

۱) $[-۱,۱],[-۴,۱]$ ۲) $[۰,۲],[۰,۵]$ ۳) $[-۱,۱],[۰,۵]$ ۴) $[۰,۲],[-۴,۱]$

۹. $f(x)=\dfrac{۳x+a}{x+۲}$ یک تابع یک‌به‌یک است. حدود a کدام است؟

۱) $a=۶$ ۲) $|a|<۶$ ۳) $a\neq ۶$ ۴) $|a|\neq ۶$

۱۰. تابع با ضابطهٔ $f(x)=|2x-6|-|x+1|$ در یک بازه، صعودی است. ضابطهٔ وارون آن در این بازه کدام است؟

۱) $-x+7, x>8$ ۲) $\frac{1}{3}x+2, x>3$ ۳) $x+7, x>-4$ ۴) $\frac{1}{2}x-1, -4<x<8$

۱ ① ② ③ ④	۳ ① ② ③ ④	۵ ① ② ③ ④	۷ ① ② ③ ④	۹ ① ② ③ ④
۲ ① ② ③ ④	۴ ① ② ③ ④	۶ ① ② ③ ④	۸ ① ② ③ ④	۱۰ ① ② ③ ④

پاسخ آزمون ۲۴ در صفحهٔ ۲۸۸

آزمون ۲۵: جامع

۱۷ دقیقه

۱. اگر $f(2x-3)=4x^2-12x+10$ باشد، حاصل $f(\sqrt{3})$ کدام است؟

۱) $2\sqrt{3}$ ۲) 3 ۳) $5-\sqrt{3}$ ۴) 4

۲. دامنه و برد تابع $f(x)=a\sqrt{bx-x^2}$ بازهٔ $[0,4]$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۸

۳. توابع $f=\{(1,-1),(3,2),(4,-1),(2,3)\}$ و $g=\{(1,3),(2,1),(4,1)\}$ مفروض‌اند. دامنهٔ تابع $\frac{3f}{f+g}$ شامل چند عضو است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴. اگر $f(x)=3x^2-1; x\geq 0$ باشد، حاصل $3\left(f^{-1}(x)\right)^2$ کدام است؟

۱) $x-1$ ۲) $x+1$ ۳) $3x+1$ ۴) $2x-1$

۵. اگر $f(x)=\frac{1}{2}(x+\sqrt{x^2+4})$، حاصل $f^{-1}(x)+f^{-1}(\frac{1}{x})$ کدام است؟

۱) $2x$ ۲) $\frac{2}{x}$ ۳) x^2-1 ۴) صفر

۶. اگر $f(x)=x^2$ و $g(x)=x-1$ باشند، کدام تابع از نقطهٔ تلاقی توابع gof و fog می‌گذرد؟

۱) $y=x+1$ ۲) $y=2x-1$ ۳) $y=x-1$ ۴) $y=x+3$

۷. اگر $f(x)=ax+3$ ، $g(x)=(a-2)x+4$ و $(f+g)(3)=7$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۱-

۸. تابع $y=f(x)$ اکیداً صعودی است. کدام تابع زیر همواره اکیداً صعودی است؟

۱) $xf(x)$ ۲) $2x+f(x)$ ۳) $|x+2|f(x)$ ۴) $|x+2|+f(x)$

۹. اگر $f(x)=\frac{2x+1}{3x+2}$ و $(fof)(x)=\frac{ax+4}{bx+7}$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۵ ۳) ۱۷ ۴) ۱۹

۱۰. به ازای کدام مجموعه مقادیر a، تابع $f(x)=|3x+a|$ در فاصلهٔ $(-1,3)$ وارون‌پذیر است؟

۱) $[-3,9]$ ۲) $[-9,3]$

۳) $(-\infty,-3]\cup[9,+\infty)$ ۴) $(-\infty,-9]\cup[3,+\infty)$

۱ ① ② ③ ④	۳ ① ② ③ ④	۵ ① ② ③ ④	۷ ① ② ③ ④	۹ ① ② ③ ④
۲ ① ② ③ ④	۴ ① ② ③ ④	۶ ① ② ③ ④	۸ ① ② ③ ④	۱۰ ① ② ③ ④

پاسخ آزمون ۲۵ در صفحهٔ ۲۹۰

آزمون ۵۵: مشتق

۱۷ دقیقه

۱. اگر $f(x)=\sqrt{\frac{3x-1}{2x+1}}$، آن‌گاه $f'(2)$ کدام است؟

۱) $-0/2$ ۲) $-0/1$ ۳) $0/1$ ۴) $0/2$

۲. خطی که دو نقطه به‌طول‌های ۱ و ۱- از منحنی به معادلهٔ $y=x^3+ax^2+2x$ را به‌هم وصل می‌کند، بر این منحنی مماس است. a کدام است؟

۱) $-1,1$ ۲) $-1,2$ ۳) $-1,2$ ۴) $-2,1$

۳. تابع $f(x)=(x-1)(x^2+x-2)[x^2]$ در بازهٔ $(-2,2)$ در چند نقطه مشتق‌ناپذیر است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۵ ۴) ۴

۴. اگر تابع f در $x=4$ مشتق‌پذیر و $\lim\limits_{x\to 4}\frac{f(x)+7}{x-4}=-\frac{3}{2}$ باشد، آن‌گاه مشتق $\frac{f(2x)}{x}$ در $x=2$ کدام است؟ ریاضی ۹۶

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۵. عرض از مبدأ خط مماس بر نمودار تابع $y=\frac{2x-1}{x+1}$ در نقطهٔ تقاطعش با محور طول‌ها کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $-\frac{2}{3}$ ۴) $-\frac{1}{3}$

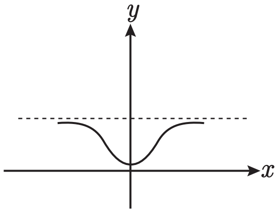
۶. اگر $f(x)=|4-x^2|[x]$ باشد، مقدار $f'_-(-2)$ کدام است؟

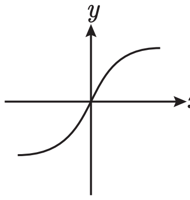
۱) ۶- ۲) ۸ ۳) ۸- ۴) ۱۲

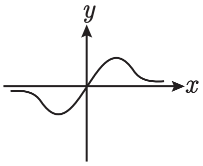
۷. در تابع $y=|x^2-1|$، نیم مماس چپ در نقطهٔ $x=1$ محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

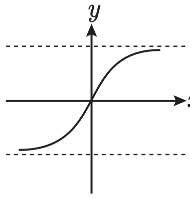
۱) ۱ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{5}{2}$

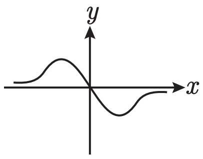
۸. شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y=f(x)$ است. نمودار f' به کدام صورت است؟



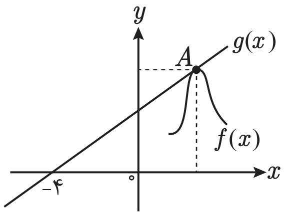
۱)


۲)


۳)


۴)


۹. در شکل زیر، تابع خطی $g(x)$ در نقطهٔ $A(2,4)$ بر منحنی $y=f(x)$ مماس است. مقدار مشتق تابع $y=(gof)(x)$ در $x=2$ کدام است؟



۱) $\frac{2}{3}$
۲) $\frac{4}{9}$
۳) $\frac{3}{8}$
۴) $\frac{4}{3}$

۱۰. آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)=\sqrt{x^2+16}$ نسبت به متغیر x روی بازهٔ $[0,3]$ از آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در $x=\sqrt{2}$ چه‌قدر کم‌تر است؟

۱) صفر ۲) $\frac{1}{18}$ ۳) $\frac{1}{12}$ ۴) $\frac{1}{20}$

۱ (۱) (۲) (۳) (۴)	۳ (۱) (۲) (۳) (۴)	۵ (۱) (۲) (۳) (۴)	۷ (۱) (۲) (۳) (۴)	۹ (۱) (۲) (۳) (۴)
۲ (۱) (۲) (۳) (۴)	۴ (۱) (۲) (۳) (۴)	۶ (۱) (۲) (۳) (۴)	۸ (۱) (۲) (۳) (۴)	۱۰ (۱) (۲) (۳) (۴)

پاسخ آزمون ۵۵ در صفحهٔ ۳۵۸

آزمون ۵۶: مشتق

۱۷ دقیقه

۱. اگر $f(2x+1)=x^3-3x^2+5x-1$ باشد، معادلهٔ خط مماس بر منحنی $y=f(x)$ در نقطهٔ $(3,f(3))$ کدام است؟

۱) $y=1-x$ ۲) $y=2x-4$ ۳) $y=3x-4$ ۴) $y=x-1$

۲. اگر تابع $f(x)=\begin{cases} ax^2+2x & x<1 \\ bx+3 & x\geq 1\end{cases}$ در نقطهٔ $x=1$ مشتق‌پذیر باشد، حاصل ab کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۲

۳. تابع $f(x)=(2x^2+ax+b)[x^3]$ در $x=3$ مشتق‌پذیر است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۸

۴. در تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x|[x]$ مقدار $f'_-(0)-f'_+(0)$ کدام است؟

۱) ۱- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۵. اگر $f(x)=x\sqrt{x^2+3}$ باشد، مقدار $f'(1)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

۶. اگر $f(x)=\frac{x^3+x+1}{x^2+3}$ و $g(x)=\frac{-2x+1}{x^2+3}$ باشند، کدام نتیجه‌گیری درست است؟

۱) $f'(x)-g'(x)=x$ ۲) $f'(x)-g'(x)=1$ ۳) $f'(x)-g'(x)=0$ ۴) $f'(x)-g'(x)=2x$

۷. اگر $f(x)=(\sqrt{x^2+1}+x)^5$ باشد، کدام نتیجه‌گیری درست است؟

۱) $\sqrt{x^2-1}\,f(x)=f'(x)$ ۲) $\sqrt{x^2-1}\,f'(x)=f(x)$ ۳) $\sqrt{x^2+1}\,f'(x)=5f(x)$ ۴) $\sqrt{x^2+1}\,f(x)=5f'(x)$

۸. در ظرفی با ۴۰ لیتر مایع، در لحظهٔ $t=0$ سوراخی در آن ایجاد می‌کنیم. اگر حجم مایع باقی‌مانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطهٔ $V(t)=40(1-\frac{t}{100})^2$ به‌دست آید، در چه زمانی آهنگ تغییر لحظه‌ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازهٔ $[0,100]$ می‌شود؟

۱) ۴۰ ۲) ۵۰ ۳) ۶۰ ۴) ۳۵

۹. تابع $f(x)=|x-2|\sqrt[3]{x+1}$ و تابع درجهٔ دوم $g(x)$ مفروض‌اند. اگر تابع $(f.g)(x)$ روی مجموعهٔ اعداد حقیقی مشتق‌پذیر باشد، مقدار $g'(3)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۲

۱۰. تابع $y=|x^2-3|x||$ در چند نقطه مشتق‌ناپذیر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱ (۱) (۲) (۳) (۴)	۳ (۱) (۲) (۳) (۴)	۵ (۱) (۲) (۳) (۴)	۷ (۱) (۲) (۳) (۴)	۹ (۱) (۲) (۳) (۴)
۲ (۱) (۲) (۳) (۴)	۴ (۱) (۲) (۳) (۴)	۶ (۱) (۲) (۳) (۴)	۸ (۱) (۲) (۳) (۴)	۱۰ (۱) (۲) (۳) (۴)

پاسخ آزمون ۵۶ در صفحهٔ ۳۶۰

هندسه

آزمون

- آزمون ۶۷ — هندسه — فصل دوم ریاضی (۲)
- آزمون ۶۸ — هندسه — فصل دوم ریاضی (۲)
- آزمون ۶۹ — هندسه — فصل دوم ریاضی (۲)
- آزمون ۷۰ — هندسه — فصل دوم ریاضی (۲)
- آزمون ۷۱ — هندسه‌تحلیلی — درس اول فصل اول، ریاضی (۲)
- آزمون ۷۲ — هندسه‌تحلیلی — درس اول فصل اول، ریاضی (۲)
- آزمون ۷۳ — هندسه‌تحلیلی — درس اول فصل اول، ریاضی (۲)
- آزمون ۷۴ — تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع — درس اول فصل ششم، ریاضی (۳)
- آزمون ۷۵ — تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع — درس اول فصل ششم، ریاضی (۳)
- آزمون ۷۶ — تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع — درس اول فصل ششم، ریاضی (۳)
- آزمون ۷۷ — دایره — درس دوم فصل ششم، ریاضی (۳)
- آزمون ۷۸ — دایره — درس دوم فصل ششم، ریاضی (۳)
- آزمون ۷۹ — دایره — درس دوم فصل ششم، ریاضی (۳)
- آزمون ۸۰ — دایره — درس دوم فصل ششم، ریاضی (۳)
- آزمون ۸۱ — جامع

سخن مؤلف با شما

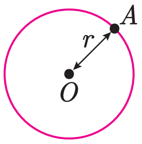
آزمونای این فصل مربوط به مباحث هندسه در کتاب ریاضی (۲) و ریاضی (۳) می‌شه. احتمالاً ۶ سؤال از این فصل در کنکور خواهید دید. احتمالاً ۳ سؤال از فصل دوم ریاضی (۲)، ۱ سؤال از هندسه تحلیلی و ۲ سؤال از تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی و دایره. این ۶ سؤال را تشکیل خواهند داد. هندسه یکی از مباحثیه که می‌تونه سرنوشت شما رو تو کنکور خیلی عوض کنه. با قدرت بخونید ...

فصل دهم

هندسه

ترسیم‌های هندسی

فاصله‌های مشخص در صفحه

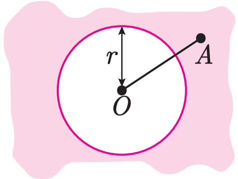


A روی دایره $\Leftrightarrow OA = r$

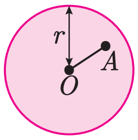
فاصلهٔ مشخص از نقطه: نقاطی از صفحه که از نقطه ثابت O به فاصلهٔ معلوم r هستند روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع r قرار دارند و هر نقطه که روی دایره به مرکز O و شعاع r باشد از نقطهٔ O به فاصلهٔ r است.

توجه: دایرهٔ C به مرکز O و شعاع r را با $C(O,r)$ نشان می‌دهند.

نتیجه: نقاط درون دایرهٔ $C(O,r)$ فاصله‌شان از O کم‌تر از r و نقاط بیرون دایرهٔ $C(O,r)$، فاصله‌شان از O بیش‌تر از r است.

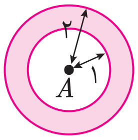


A بیرون دایره $\Leftrightarrow OA > r$



A درون دایره $\Leftrightarrow OA < r$

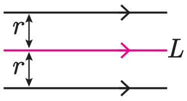
مثلاً نقطهٔ ثابت A در صفحه مفروض است. نقاطی از صفحه که فاصلهٔ آن‌ها از A بیش‌تر از ۱ و کم‌تر از ۲ می‌باشند، در ناحیه‌ای به مساحت ۳π قرار دارند. زیرا:



نقاطی که فاصلهٔ آن‌ها از A بیش‌تر از ۱ اسـت، خارج دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۱ قرار دارند. هم‌چنین نقاطی که فاصلهٔ آن‌ها از A کم‌تر از ۲ است درون دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۲ قرار دارند که اشتراک این دو ناحیه به صورت ناحیهٔ رنگی شکل مقابل است که مساحت آن برابر است با:

$$S_{\text{رنگی}} = \pi(۲)^۲ - \pi(۱)^۲ = ۴\pi - \pi = ۳\pi$$

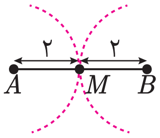
فاصلهٔ مشخص از خط: بـرای پیدا کردن نقاطی از صفحه که از خط L به فاصلهٔ معلوم r هسـتند، کافی است دو خط به موازات L و به فاصلهٔ r در طرفین L رسم کنیم.



نکته اگر در مسأله‌ای دنبال نقاطی هستیم که دارای دو ویژگی هستند، باید نقاط هر ویژگی را جداگانه رسم کنیم، آن‌گاه محل تلاقی آن‌ها در صورت وجود، جواب مسأله است.

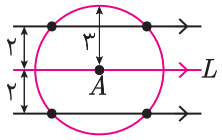
به مثال‌های صفحهٔ بعد دقت کنید.

مثلاً فـرض کنید دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ ۴ از هم قرار دارند. یـک نقطه در صفحه وجود دارد که به فاصلهٔ ۲ واحد از هر کدام از نقاط A و B است. زیرا:

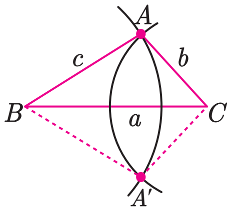


کافی اسـت یک بار به مرکز A و شعاع ۲ و بار دیگر به مرکز B و شعاع ۲ دایره رسم کنیم. همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید فقط نقطهٔ M روی هر دو دایره قرار دارد. پس فقط یک نقطه در صفحه وجود دارد.

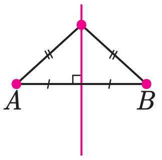
مثلاً فرض کنید نقطهٔ A روی خط L مفروض اسـت. چهار نقطه در صفحه وجود دارند کـه به فاصلهٔ ۲ از خط L و به فاصله ۳ از نقطهٔ A قرار دارند. زیرا:



نقاطـی که به فاصلهٔ ۲ از خط L قرار دارنـد، روی دو خط به موازات L و به فاصلهٔ ۲ از آن می‌باشـند. هم‌چنین نقاطی که به فاصلهٔ ۳ از نقطهٔ A هسـتند روی دایره‌ای به مرکز A و شـعاع ۳ قرار دارند. واضح اسـت دو خط و دایره هم‌دیگر را در ۴ نقطه قطع می‌کنند. پس ۴ نقطه در صفحه وجود دارد.



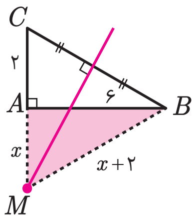
رسم مثلث با معلوم بودن سه ضلع: اگر a، b و c طول سـه ضلع مثلث ABC باشند، برای رسم آن ابتدا پاره‌خط BC را به اندازهٔ a رسـم می‌کنیم. سـپس یک بار به مرکز C و شـعاع b و بار دیگر به مرکز B و شـعاع c دایره‌ای رسـم می‌کنیم. محل تلاقی این دو دایره، رأس A از مثلث ABC است. توجه کنید که دو دایره همدیگر را در دو نقطهٔ A و A' قطع می‌کنند اما مثلث ABC با مثلث $A'BC$ هیچ فرقی ندارد.



عمودمنصف پاره‌خط: عمودمنصف یک پاره‌خط، خطی است که در وسط پاره‌خط بر آن عمود است.

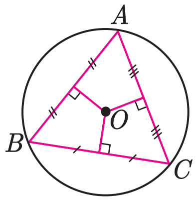
ویژگی عمودمنصف: هر نقطه‌ای که روی عمودمنصف پاره‌خط AB باشد، از نقاط A و B به یک فاصله است و هم‌چنین هر نقطه که از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف AB قرار دارد.

مثلاً فرض کنید در مثلث قائم‌الزاویه‌ای به اضلاع قائم ۶ و ۲، عمودمنصف وتر امتداد ضلع کوچک‌تر را در نقطهٔ M قطع کرده است. می‌خواهیم فاصلهٔ M از نزدیک‌ترین رأس مثلث را به دست آوریم:



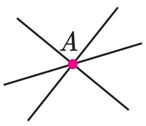
به شـکل مقابل توجه کنید. طول MA مد نظر سـؤال است. با فرض $MA = x$، چون M روی عمودمنصف BC اسـت، پس $MB = MC$ می‌باشـد. بنابراین $MB = x+2$ خواهد بود. در مثلـث قائم‌الزاویهٔ MAB به کمک قضیهٔ فیثاغورس داریم:

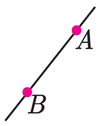
$$MB^2 = MA^2 + AB^2 \Rightarrow (x+2)^2 = x^2 + 36 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = x^2 + 36 \Rightarrow 4x = 32 \Rightarrow x = 8$$



نتیجه: چون هر نقطه روی عمودمنصف پاره‌خط AB، از نقاط A و B به یک فاصله است، پس محل تلاقی عمودمنصف‌های یک مثلث از سه رأس مثلث به یک فاصله است. از طرفی چون هر نقطه روی دایره از مرکز دایره به یک فاصله است، پس دایره‌ای وجود دارد که مرکز آن محل برخورد عمودمنصف‌های مثلث است و از سه رأس مثلث می‌گذرد.

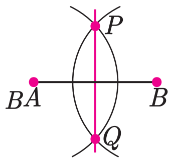
ترسیم‌های معروف





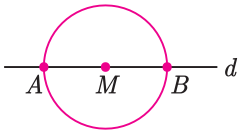
قبل از شروع ترسـیم‌های هندسی باید بدانیم که از یک نقطه در صفحه، بی‌شمار خط می‌گذرد ولی از دو نقطه در یک صفحه، یک و فقط یک خط می‌گذرد.

۱ رسم عمودمنصف یک پاره‌خط



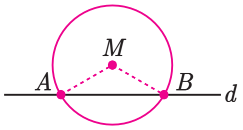
بـرای رسـم عمودمنصـف پاره‌خـط AB، دهانـهٔ پـرگار را بیـش از نصـف طـول AB بـاز کـرده و بـه مراکـز A و B دو کمـان رسـم می‌کنیـم. ایـن دو کمـان یکدیگـر را در نقـاط P و Q قطـع می‌کننـد. چـون P و Q فاصلـهٔ یکسـانی از A و B دارند، پس روی عمودمنصف پاره‌خط AB هستند. خط گذرا از P و Q عمودمنصف پاره‌خط AB است.

❷ رسم خط عمود بر خط d از نقطهٔ M روی آن



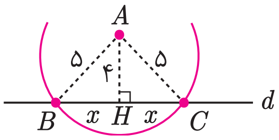
به مرکز M و شعاع دلخواه دایره‌ای رسم می‌کنیم تا خط d را در نقاط A و B قطع کند. M وسط پاره‌خط AB است. حال اگر عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنیم، بر خط d عمود بوده و از نقطهٔ M می‌گذرد.

❸ رسم خط عمود بر خط d از نقطهٔ M غیر واقع بر آن



به مرکز M و شعاع مناسب، دایره‌ای رسم می‌کنیم تا خط d را در نقاط A و B قطع کند. $MA = MB$ خواهد بود. حال اگر عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنیم، بر خط d عمود بوده و از نقطهٔ M می‌گذرد.

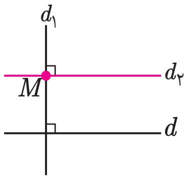
مثلاً فرض کنید نقطهٔ A به فاصلهٔ ۴ از خط d قرار دارد. به مرکز A و شعاع ۵ دایره‌ای رسم می‌کنیم تا خط d را در نقاط B و C قطع کند. در مورد مثلث ABC می‌توان گفت مثلث ABC یک مثلث متساوی‌الساقین با مساحت ۱۲ است، زیرا:



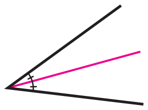
با توجه به شکل مقابل ABC مثلث متساوی‌الساقین با طول ساق ۵ و ارتفاع ۴ است. به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH داریم:

$$x^۲+۴^۲=۵^۲ \Rightarrow x^۲=۹ \Rightarrow x=۳ \Rightarrow S_{ABC}=\frac{۱}{۲}BC\times AH=\frac{۱}{۲}\times۶\times۴=۱۲$$

❹ رسم خط موازی با خط d از نقطهٔ M غیر واقع بر آن

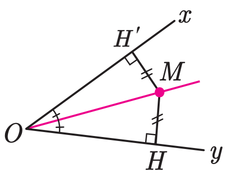


خط $d_۱$ را به گونه‌ای رسم می‌کنیم که از M بگذرد و بر خط d عمود باشد. حال خط $d_۲$ را عمود بر $d_۱$ و گذرا از M رسم می‌کنیم. خط $d_۲$ با خط d موازی است.



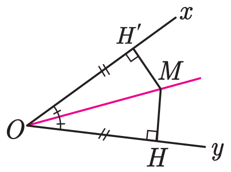
نیمساز زاویه: نیمساز یک زاویه، خطی است که زاویه را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند.

ویژگی‌های نیمساز



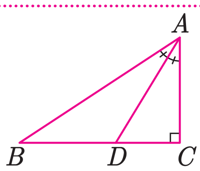
۱ـ هر نقطه که روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

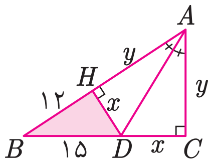
M روی نیمساز $\widehat{xOy}$ است. $\Leftrightarrow MH = MH'$



۲ـ اگر از نقطه‌ای دلخواه روی نیمساز، دو عمود بر دو ضلع زاویه رسم کنیم، پاره‌خط‌هایی که روی دو ضلع زاویه ایجاد می‌شوند با هم برابرند.

مثلاً در شکل مقابل، AD نیمساز زاویهٔ A می‌باشد. اگر $BD=۱۵$ و $AB-AC=۱۲$ باشد، می‌خواهیم طول پاره‌خط DC را به دست آوریم:

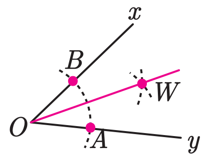




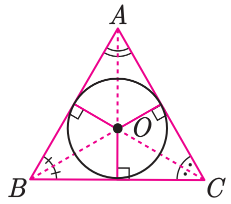
فرض می‌کنیم $DC=x$ و $AC=y$ باشد، از D بر AB عمود می‌کنیم. چون D روی نیمساز $\widehat{A}$ می‌باشد، پس $DC=DH=x$ و $AH=AC=y$ است. از طرفی $AB-AC=۱۲$ می‌باشد، پس طول AB برابر $y+۱۲$ به دست می‌آید، بنابراین $BH=۱۲$ خواهد بود. حال به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث BHD داریم:

$$BD^۲=HD^۲+BH^۲ \Rightarrow ۱۵^۲=x^۲+۱۲^۲ \Rightarrow x^۲=۸۱ \Rightarrow x=۹ \Rightarrow DC=۹$$

۵ رسم نیمساز یک زاویه



برای رسم نیمساز زاویهٔ $\widehat{xOy}$، به مرکز O و شعاع دلخواه کمانی رسم می‌کنیم تا اضلاع زاویه را در A و B قطع کند. دهانهٔ پرگار را بیش از نصف طول AB باز کرده و به مراکز A و B دو کمان می‌زنیم تا همدیگر را در W قطع کنند، از W به O وصل می‌کنیم، OW نیمساز زاویهٔ $\widehat{xOy}$ است.



نتیجه: محل تلاقی نیمسازهای مثلث ABC مرکز دایره‌ای است که اضلاع مثلث بر آن دایره مماس می‌باشند.

استدلال و قضیهٔ تالس

استدلال استقرایی: اگر از مشاهده و بررسی موضوعی در چند حالت، نتیجه‌ای کلی در آن موضوع گرفته شود، آن‌گاه به این استدلال، استدلال استقرایی می‌گویند.

نکته در این نوع استدلال از جزء به کل می‌رسیم.

استدلال استنتاجی: روش نتیجه‌گیری منطقی بر پایهٔ واقعیت‌هایی که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم استدلال استنتاجی گفته می‌شود.

قضیه: به نتایجی که از استدلال استنتاجی به دست می‌آیند، قضیه می‌گویند.

فرض و حکم قضیه: در یک قضیه گزاره یا گزاره‌هایی که درستی آن‌ها را قبول داریم «فرض قضیه» و گزاره یا گزاره‌هایی که می‌خواهیم درستی آن‌ها را از روی فرض نتیجه بگیریم «حکم قضیه» می‌باشند.

عکس قضیه: اگر جای فرض و حکم یک قضیه را عوض کنیم، آن‌چه حاصل می‌شود «عکس قضیه» است که ممکن است درست یا نادرست باشد.

مثلاً عکس قضیهٔ «اگر یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، آن‌گاه قطرهایش یکدیگر را نصف می‌کنند» به صورت «اگر در یک چهارضلعی قطرها یکدیگر را نصف کنند، آن‌گاه آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است» می‌باشد.

قضیهٔ دوشرطی: اگر عکس یک قضیه درست باشد، یعنی عکس قضیه خود یک قضیه باشد، آن‌گاه می‌توان این دو قضیه را در قالب یک قضیهٔ دو شرطی بیان کرد. قضیهٔ دو شرطی را به صورت « $p \Leftrightarrow q$ » نشان می‌دهند و به شکل «p اگر و تنها اگر q» می‌خوانند.

مثلاً قضیهٔ «در یک مثلث دو ضلع برابرند، اگر و تنها اگر زاویه‌های روبه‌روی آن‌ها با هم برابر باشند.» یک قضیهٔ دو شرطی می‌باشد.

روش‌های اثبات قضایا

۱ **اثبات مستقیم:** در این روش از فرض قضیه، درستی حکم را نتیجه می‌گیریم.

۲ **برهان خلف (اثبات غیر مستقیم):** در این روش به جای آن که نشان دهیم حکم درست است نشان می‌دهیم حکم نادرست نیست، به این صورت که فرض می‌کنیم حکم نادرست است (فرض خلف)، سپس به کمک استدلال، منطق و حقایق به یک تناقض می‌رسیم.

۳ **مثال نقض:** به مثالی که نشان دهد یک نتیجه‌گیری کلی غلط است مثال نقض می‌گویند. مثلاً مثال نقض حکم «همهٔ اعداد اول فردند» عدد ۲ می‌باشد، زیرا ۲ عددی اول است در حالی که فرد نمی‌باشد.

نسبت و تناسب

نسبت: اگر واحد اندازه‌گیری کمیت‌های a و b یکسان باشد، آن‌گاه به $\frac{a}{b}$ یک نسبت می‌گوییم که همواره $b \neq 0$ می‌باشد.

تناسب: تساوی بین دو نسبت $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ را با شرط $b, d \neq 0$ یک تناسب می‌گوییم.

توجه: در تناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ به a و d طرفین و به b و c وسطین گفته می‌شود.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \underbrace{a \div \overbrace{b = c}^{\text{وسطین}} \div d}_{\text{طرفین}}$$

ویژگی‌های تناسب

۱. طرفین وسطین $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow ad=bc$	۲. تبدیل حاصل‌ضرب به تناسب $ad=bc \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$
۳. معکوس کردن تناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$	٤. تعویض جای طرفین با هم $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{d}{b}=\frac{c}{a}$
۵. تعویض جای وسطین با هم $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$	٦. ترکیب نسبت در صورت $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$
۷. ترکیب نسبت در مخرج $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$	۸. تفضیل نسبت در صورت $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$
۸. تفضیل نسبت در مخرج $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$	۹. در حالت کلی $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{ax \pm cy}{bx \pm dy}$

نکته در تست‌هایی که یک نسبت داده شده و نسبت دیگری را می‌خواهد، می‌توان صورت کسرها را با هم و مخرج کسرها را نیز با هم برابر در نظر گرفت.

مثلاً اگر $\frac{a}{b}=\frac{۲۰-a}{۱۵-b}$ باشد، حاصل $\frac{a-b}{a+b}$ را به دو روش زیر می‌توان به دست آورد:

روش اول: با استفاده از ویژگی‌های تناسب داریم:

$$\frac{۲۰-a}{۱۵-b}=\frac{a}{b} \Rightarrow \frac{۲۰-a+a}{۱۵-b+b}=\frac{a}{b} \Rightarrow \frac{۲۰}{۱۵}=\frac{a}{b} \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{۴}{۳}$$

حال به کمک تناسب $\frac{a}{b}=\frac{۴}{۳}$ می‌توان گفت:

$$\frac{a}{b}=\frac{۴}{۳} \Rightarrow \frac{a-b}{a+b}=\frac{۴-۳}{۴+۳}=\frac{۱}{۷}$$

روش دوم: با توجه نکتهٔ گفته شده داریم:

$$\frac{۲۰-a}{۱۵-b}=\frac{a}{b} \Rightarrow \begin{cases} ۲۰-a=a \Rightarrow a=۱۰ \\ ۱۵-b=b \Rightarrow b=۷/۵ \end{cases}$$

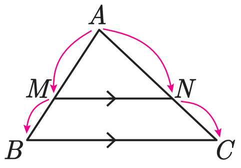
حال مقادیر $a=۱۰$ و $b=۷/۵$ را در نسبت $\frac{a-b}{a+b}$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{۱۰-۷/۵}{۱۰+۷/۵}=\frac{۲/۵}{۱۷/۵}=\frac{۱}{۷}$$

تالس

قضیهٔ تالس: اگر خطی موازی یک ضلع مثلث به گونه‌ای رسم شود که دو ضلع دیگر آن را قطع کند، روی آن دو ضلع، چهار پاره‌خط جدا می‌کند که اندازه‌های آن‌ها نسبت‌های مساوی پدید می‌آورند.

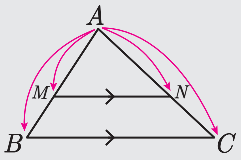
$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$$



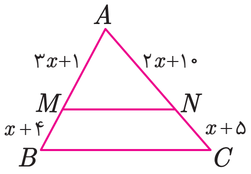
نکته به کمک خواص تناسب می‌توان قضیهٔ تالس را به صورت‌های زیر نیز بیان کرد:

$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{AM}{AM+MB}=\frac{AN}{AN+NC} \Rightarrow \boxed{\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC} \Rightarrow \frac{AB}{AM}=\frac{AC}{AN}}$$

$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{AM+MB}{MB}=\frac{AN+NC}{NC} \Rightarrow \boxed{\frac{AB}{MB}=\frac{AC}{NC} \Rightarrow \frac{MB}{AB}=\frac{NC}{AC}}$$



مثلاً در شکل مقابل $MN\|BC$ می‌باشد. می‌خواهیم مقدار x را به دست آوریم:

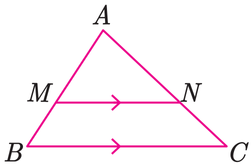


چون $MN\|BC$ است به کمک قضیهٔ تالس داریم:

$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}\Rightarrow\frac{۳x+۱}{x+۴}=\frac{۲x+۱۰}{x+۵}\Rightarrow(۳x+۱)(x+۵)=(x+۴)(۲x+۱۰)$$

$$\Rightarrow ۳x^۲+۱۶x+۵=۲x^۲+۱۸x+۴۰\Rightarrow x^۲-۲x-۳۵=۰\Rightarrow(x-۷)(x+۵)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۷\\x=-۵ & \text{غ ق ق}\end{cases}$$

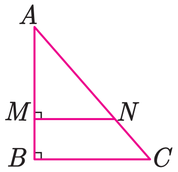
تعمیم قضیهٔ تالس: اگر خطی موازی یک ضلع مثلث به گونه‌ای رسم شود که دو ضلع دیگر آن را قطع کند، آن‌گاه مثلثی پدید می‌آید که اندازهٔ ضلع‌های آن با اندازهٔ ضلع‌های مثلث اصلی متناسب است.



$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

نکته اگر طول پاره‌خط MN جزء داده‌ها یا خواسته‌های مسأله باشد، از تعمیم قضیهٔ تالس استفاده می‌کنیم.

مثلاً در شکل مقابل، $AM=۱۲$ ، $MB=۴$ و $MN=۹$ است. فرض کنید می‌خواهیم مجموع طول‌های دو پاره‌خط BC و NC را به دست آوریم:



چون MN و BC هر دو بر AB عمودند، پس با هم موازی‌اند. از طرفی چون MN جزء داده‌های سؤال است از تعمیم قضیهٔ تالس استفاده می‌کنیم.

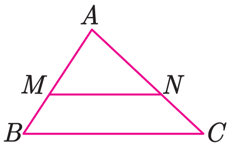
$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}\Rightarrow\frac{۱۲}{۱۶}=\frac{AN}{AC}=\frac{۹}{BC}\Rightarrow ۱۲BC=۹\times۱۶\Rightarrow BC=۱۲$$

حال به کمک قضیهٔ فیثاغورس در دو مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$\begin{cases}AN^۲=AM^۲+MN^۲\Rightarrow AN^۲=۱۴۴+۸۱=۲۲۵\Rightarrow AN=۱۵\\AC^۲=AB^۲+BC^۲\Rightarrow AC^۲=۲۵۶+۱۴۴=۴۰۰\Rightarrow AC=۲۰\end{cases}\Rightarrow NC=۲۰-۱۵=۵$$

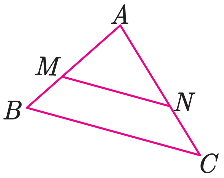
بنابراین $BC+NC=۱۲+۵=۱۷$ است.

عکس قضیهٔ تالس: اگر در یک مثلث، خطی دو ضلع مثلث را به گونه‌ای قطع کند که روی آن دو ضلع، چهار پاره‌خط با نسبت‌های مساوی پدید آورد، آن‌گاه آن خط، موازی ضلع سوم مثلث است.



$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}\Rightarrow MN\|BC$$

مثلاً در شکل مقابل، اگر $AB=۱۴$ ، $AM=۶$ ، $AC=۷$ و $AN=۳$ باشند، آن‌گاه $MN\|BC$ است.

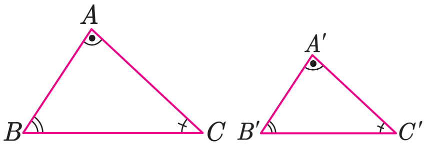


زیرا می‌دانیم طبق عکس قضیهٔ تالس، وقتی $MN\|BC$ است که پاره‌خط‌های ایجاد شده روی اضلاع مثلث متناسب باشند که این‌طور هست:

$$\frac{AN}{AC}=\frac{AM}{AB}\Rightarrow\frac{۳}{۷}=\frac{۶}{۱۴}$$

تشابه

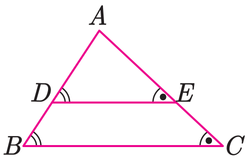
دو مثلث متشابه: دو مثلث را متشابه می‌نامند، هرگاه زاویه‌ها برابر و اضلاع، نظیر به نظیر متناسب باشند.



$$(\hat{A}=\hat{A}',\ \hat{B}=\hat{B}',\ \hat{C}=\hat{C}'),(\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'})\Leftrightarrow \overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{A'B'C'}$$

نکته اضلاع متناظر دو مثلث، روبه‌روی زاویه‌های برابر قرار دارند.

نسبت تشابه: به نسبت دو ضلع متناظر در دو مثلث متشابه، نسبت تشابه می‌گویند. واضح است که اگر k نسبت تشابه باشد، $\frac{۱}{k}$ نیز نسبت تشابه است.



قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌ها: اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث، دو ضلع دیگر را قطع کند، در این صورت مثلث کوچکی به وجود می‌آید که با مثلث بزرگ اولیه متشابه است.

حالات تشابه دو مثلث: دو مثلث متشابه، زاویه‌های برابر و اضلاع متناظر متناسب دارند. برای اثبات تشابه دو مثلث می‌توان از اطلاعات کم‌تری استفاده کرد که عبارتند از:

❶ **تساوی دو زاویه:** اگر دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، آن دو مثلث متشابه‌اند.

$$\hat{A}=\hat{A'} \quad , \quad \hat{B}=\hat{B'} \Leftrightarrow \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

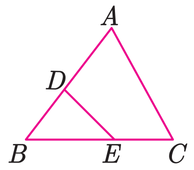
❷ **تناسب دو ضلع و برابری زاویهٔ بین:** اگر اندازه‌های دو ضلع از مثلثی با اندازه‌های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و زاویهٔ بین آن‌ها هم‌اندازه باشد، دو مثلث متشابه‌اند.

$$(\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}) \text{ و } \hat{A}=\hat{A'} \Leftrightarrow \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

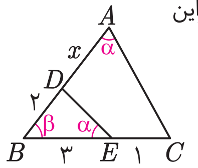
❸ **تناسب سه ضلع:** هرگاه اندازه‌های سه ضلع از مثلثی با اندازه‌های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'} \Leftrightarrow \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

مثلاً در شکل مقابل، $B\hat{A}C=D\hat{E}B$ است. اگر $EC=۱$ ، $DB=۲$ و $BE=۳$ باشند، طول پاره‌خط AD برابر است با:



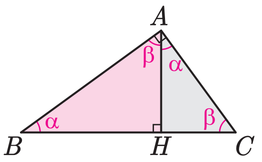
چون $B\hat{A}C=D\hat{E}B$ و زاویهٔ B در دو مثلث مشترک است، پس دو مثلث دو زاویهٔ برابر دارند و متشابه‌اند. بنابراین اضلاع متناظر آن‌ها متناسب‌اند. با فرض $AD=x$ داریم:



$$\frac{BD}{BC}=\frac{BE}{BA} \Rightarrow \frac{۲}{۴}=\frac{۳}{x+۲} \Rightarrow ۲(x+۲)=۱۲ \Rightarrow x+۲=۶ \Rightarrow x=۴$$

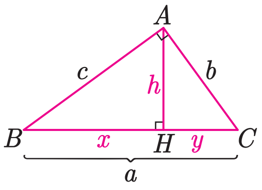
مشابه‌ها در مثلث قائم‌الزاویه: در هر مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، آن را به دو مثلث قائم‌الزاویه تفکیک می‌کند که هر دو با هم و با مثلث اصلی متشابه‌اند.

$$\overset{\Delta}{ABH} \sim \overset{\Delta}{ACH} \sim \overset{\Delta}{ABC}$$



روابط طولی در مثلث: به کمک مثلث‌های متشابهی که توسط ارتفاع وارد بر وتر ایجاد می‌شوند می‌توان نتایج زیر را به دست آورد:

نتیجه ۱: یک بار نسبت اضلاع متناظر را در دو مثلث متشابه ABH و ABC و بار دیگر نسبت اضلاع متناظر را در دو مثلث متشابه ACH و ABC می‌نویسیم:

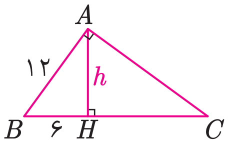


$$\overset{\Delta}{ABH} \sim \overset{\Delta}{ABC} \Rightarrow \frac{c}{a}=\frac{x}{c} \Rightarrow \boxed{c^۲=ax}$$

$$\overset{\Delta}{ACH} \sim \overset{\Delta}{ABC} \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{y}{b} \Rightarrow \boxed{b^۲=ay}$$

یعنی در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع هر ضلع زاویهٔ قائمه برابر است با حاصل‌ضرب وتر در تصویر آن ضلع بر وتر.

مثلاً با توجه به شکل مقابل، طول ضلع AC برابر $۱۲\sqrt{۳}$ است، زیرا:

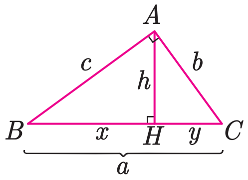


فرض می‌کنیم طول وتر BC برابر a باشد، پس: $۱۲^۲ = ۶\times a \Rightarrow a = ۲۴$

واضح است که طول پاره‌خط HC برابر $۲۴ - ۶ = ۱۸$ خواهد بود و داریم:

$$AC^۲ = CH\times a \Rightarrow AC^۲ = ۱۸\times ۲۴ \Rightarrow AC = \sqrt{۳\times ۶\times ۶\times ۴} = ۶\sqrt{۱۲} = ۱۲\sqrt{۳}$$

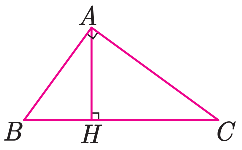
نتیجه ۲: نسبت اضلاع متناسب را در دو مثلث متشابه ABH و ACH می‌نویسیم:



$$\overset{\triangle}{ABH} \sim \overset{\triangle}{ACH} \Rightarrow \frac{x}{h} = \frac{h}{y} \Rightarrow \boxed{h^۲ = xy}$$

یعنی در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع ارتفاع وارد بر وتر برابر است با حاصل‌ضرب قطعاتی که روی وتر جدا می‌کند.

مثلاً در مثلث شکل مقابل، $HC = ۲AH$ و $BH = ۲$ می‌باشد. می‌خواهیم طول ضلع AC را به دست آوریم:



فرض می‌کنیم $AH = h$ باشد، پس $HC = ۲h$ است. داریم:

$$AH^۲ = BH\times HC \Rightarrow h^۲ = ۲\times ۲h \Rightarrow h = ۴$$

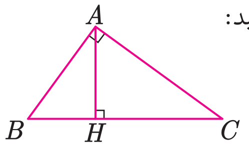
از طرفی داریم:

$$AC^۲ = HC\times BC \Rightarrow AC^۲ = ۲h\times(۲h+۲) \xRightarrow{h=۴} AC^۲ = ۸\times ۱۰ \Rightarrow AC = \sqrt{۸۰} = \sqrt{۱۶\times ۵} = ۴\sqrt{۵}$$

نتیجه: با توجه به روابطی که از نتیجهٔ ۱ به دست آمد، داریم:

$$\begin{cases} c^۲ = ax \\ b^۲ = ay \end{cases} \Rightarrow c^۲ + b^۲ = ax + ay \Rightarrow c^۲ + b^۲ = a\underbrace{(x+y)}_{a} \Rightarrow \boxed{c^۲ + b^۲ = a^۲ \quad \text{قضیهٔ فیثاغورس}}$$

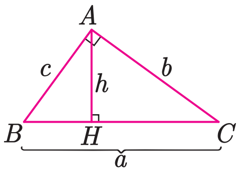
مثلاً در شکل مقابل، $AB = ۲$ ، $AC = ۳$ و $BC = ۴$ است. نحوهٔ به دست آوردن طول پاره‌خط BH را ببینید:



فرض می‌کنیم $AH = h$ و $BH = x$ باشد، در نتیجه $CH = ۴ - x$ خواهد بود. با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث‌های AHB و AHC داریم:

$$\begin{cases} AB^۲ = AH^۲ + BH^۲ \Rightarrow ۴ = h^۲ + x^۲ \\ AC^۲ = AH^۲ + CH^۲ \Rightarrow ۹ = h^۲ + (۴-x)^۲ \Rightarrow ۹ = h^۲ + ۱۶ - ۸x + x^۲ \end{cases} \Rightarrow ۹ - ۴ = ۱۶ - ۸x \Rightarrow ۸x = ۱۱ \Rightarrow x = \frac{۱۱}{۸}$$

ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه: مثلث قائم‌الزاویه یک ارتفاع واقعی دارد و دو ارتفاع دیگر همان اضلاع قائم مثلث هستند. این ارتفاع وارد بر وتر به کمک دو بار محاسبهٔ مساحت مثلث به دست می‌آید:



$$\begin{cases} S = \frac{۱}{۲}b.c \\ S = \frac{۱}{۲}a.h \end{cases} \Rightarrow \frac{۱}{۲}b.c = \frac{۱}{۲}a.h \Rightarrow b.c = a.h \Rightarrow \boxed{h = \frac{b.c}{a}}$$

مثلاً در مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائم ۱۵ و ۲۰، طول ارتفاع وارد بر وتر به صورت زیر به دست می‌آید:

ابتدا به کمک قضیهٔ فیثاغورس طول وتر را به دست می‌آوریم: $a^۲ = ۱۵^۲ + ۲۰^۲ \Rightarrow a^۲ = ۶۲۵ \Rightarrow a = ۲۵$

حال ارتفاع وارد بر وتر برابر است با: $h = \frac{bc}{a} \Rightarrow h = \frac{۱۵\times ۲۰}{۲۵} = ۱۲$

همه چیز در مورد نسبت تشابه: در دو مثلث متشابه ABC و $A'B'C'$ ، اگر نسبت اضلاع یا همان نسبت تشابه k باشد، آن‌گاه تمامی اجزای طولی مثلث ABC (اجزایی که با واحد طول سنجیده می‌شوند) با اجزای نظیرشان در مثلث $A'B'C'$ با همان نسبت k متناسب هستند. اجزای طولی شامل میانه، ارتفاع و محیط مثلث می‌باشند. نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه با مجذور نسبت تشابه یعنی $k^۲$ برابر است.

پاسخ آزمون ۲۳: تابع

۱. گزینه ۱

روش اول: با توجه به نمودار تابع $(\frac{f}{g})(x)$ می‌توان فهمید که $(\frac{f}{g})(۱)=۲$ می‌باشد، پس:

$$(\frac{f}{g})(۱)=۲\Rightarrow \frac{f(۱)}{g(۱)}=۲\Rightarrow \frac{۱}{g(۱)}=۲\Rightarrow g(۱)=\frac{۱}{۲}$$

با توجه به گزینه‌ها فقط در گزینهٔ «۱»، $g(۱)=\frac{۱}{۲}$ است.

روش دوم: با توجه به این که $\frac{f}{g}$ یک تابع خطی و f درجهٔ دوم است پس g باید خطی باشد. چون $x=۰$ در دامنه نیست پس $x=۰$ ریشهٔ مخرج یعنی ریشهٔ $g(x)=۰$ است:

حال داریم:

$$\frac{f}{g}=\frac{x^{۲}}{ax}=۲x\Rightarrow \frac{x}{a}=۲x\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}\Rightarrow g(x)=\frac{۱}{۲}x$$

۲. گزینه ۳

دامنهٔ تابع $f^{-۱}(x)$ برابر $[۰,+\infty)$ است، پس برد تابع f نیز $[۰,+\infty)$ می‌باشد، لذا داریم:

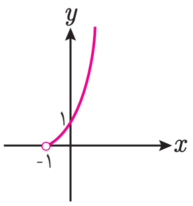
$$۰\le f(x)<+\infty\Rightarrow ۱\le ۱+f(x)<+\infty\Rightarrow ۰<\frac{۱}{۱+f(x)}\le ۱\Rightarrow ۰<h(x)\le ۱$$

یعنی برد $h(x)$ برابر $(۰,۱]$ است، پس دامنهٔ $h^{-۱}(x)$ برابر $(۰,۱]$ می‌باشد.

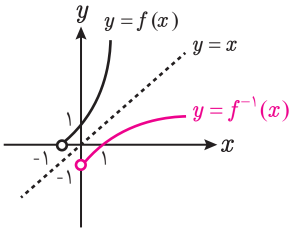
۳. گزینه ۴

تابع $y=f(x)$ یک سهمی است. با توجه به دامنهٔ آن، $f(x)$ را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=x^{۲}+۲x+۱\Rightarrow f(x)=(x+۱)^{۲}\xrightarrow{D_f=(-۱,+\infty)}$$



حال وارون تابع را رسم می‌کنیم:



$\Rightarrow$ توابع f و $f^{-۱}$ غیرمتقاطع‌اند.

۴. گزینه ۱

می‌دانیم $(f^{-۱}og^{-۱})(x)=(gof)^{-۱}(x)$ است. پس ابتدا ضابطهٔ gof را به‌دست آورده، سپس وارون آن را تعیین می‌کنیم:

$$(gof)(x)=g(f(x))=\frac{(\sqrt{x+۳})^{۲}+۱}{۵-(\sqrt{x+۳})^{۲}}\Rightarrow (gof)(x)=\frac{x+۴}{-x+۲}\Rightarrow (gof)^{-۱}(x)=\frac{-۲x+۴}{-x-۱}=\frac{۲x-۴}{x+۱}$$

۵. گزینه ۴

ابتدا دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $\sqrt{x-f^{-۱}(x)}$ را به دست می‌آوریم:

$$x-f^{-۱}(x)\ge ۰\Rightarrow f^{-۱}(x)\le x$$

بنابراین باید x هایی را پیدا کنیم که به ازای آن‌ها نمودار $y=f^{-۱}(x)$ بالای خط $y=x$ نباشد. از طرفی می‌دانیم نمودار تابع $f^{-۱}$ با قرینه کردن نمودار f نسبت به خط $y=x$ به دست می‌آید. پس باید x هایی را پیدا کنیم که نمودار تابع f پایین خط $y=x$ نباشد که با توجه به نمودار در $۳\le x\le ۸$ چنین اتفاقی می‌افتد.

۶. گزینه ۳

ابتدا ضابطهٔ تابع $(\frac{f}{g})$ را به دست می‌آوریم، اگر $x \le ۰$ باشد $g(x)=۰$ می‌شود و تابع $(\frac{f}{g})(x)$ تعریف نمی‌شود. پس $x>۰$ می‌باشد و داریم:

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{۲-(x+۱)}{x+x}=\frac{۱}{۲x}-\frac{۱}{۲}$$

حال برای به دست آوردن برد تابع $y=\frac{۱}{۲x}-\frac{۱}{۲}$ می‌توانیم از یکی از روش‌های زیر استفاده کنیم:

روش اول: واضح است که برای $x>۰$ مقدار $\frac{۱}{۲x}$ همواره مثبت است، پس همواره مقدار $\frac{۱}{۲x}-\frac{۱}{۲}$ بزرگ‌تر از $-\frac{۱}{۲}$ است، بنابراین برد تابع $(\frac{f}{g})(x)$، بازهٔ $(-\frac{۱}{۲},+\infty)$ می‌باشد.

روش دوم: در تابع $y=\frac{۱}{۲x}-\frac{۱}{۲}$، x را برحسب y می‌نویسیم:

$$y=\frac{۱}{۲x}-\frac{۱}{۲}\Rightarrow y+\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲x}\Rightarrow ۲xy+x=۱\Rightarrow x(۲y+۱)=۱\Rightarrow x=\frac{۱}{۲y+۱}$$

چون $x>۰$ است، پس باید $۲y+۱>۰$ باشد و این یعنی $y>-\frac{۱}{۲}$. پس برد تابع $(\frac{f}{g})(x)$ به صورت $(-\frac{۱}{۲},+\infty)$ می‌باشد.

---

۷. گزینه ۲

ابتدا $f(\sqrt{۳})$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f(\sqrt{۳})=(\sqrt{۳})^۲-۲[\sqrt{۳}]\xrightarrow{\sqrt{۳}=۱/۷}f(\sqrt{۳})=۳-۲(۱)=۱$$

بنابراین $f\left(-\frac{۱}{۲}f(\sqrt{۳})\right)$ برابر است با:

$$f\left(-\frac{۱}{۲}\underbrace{f(\sqrt{۳})}_{۱}\right)=f(-\frac{۱}{۲})=(-\frac{۱}{۲})^۲-۲[-\frac{۱}{۲}]=\frac{۱}{۴}-۲\times(-۱)=\frac{۱}{۴}+۲=\frac{۹}{۴}=۲/۲۵$$

---

۸. گزینه ۳

چون خروجی از ماشین دوم بیرون آمده است، آن را پیدا می‌کنیم:

$$\text{ورودی}\longrightarrow\boxed{\frac{x}{\sqrt{x}+۱}}\longrightarrow\frac{۴}{۳}$$

$$\frac{x}{\sqrt{x}+۱}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow ۳x=۴\sqrt{x}+۴\Rightarrow ۳x-۴\sqrt{x}-۴=۰$$

با فرض $\sqrt{x}=t$ داریم:

$$۳t^۲-۴t-۴=۰\xrightarrow{\Delta=۱۶-۴(۳)(-۴)=۶۴}t=\frac{۴\pm۸}{۶}\Rightarrow t=۲,t=-\frac{۲}{۳}$$

از آن‌جایی که x را به‌عنوان ورودی می‌خواهیم، داریم:

$$\sqrt{x}=۲\Rightarrow x=۴\quad,\quad\sqrt{x}=-\frac{۲}{۳}\Rightarrow\text{غ‌ق‌ق}$$

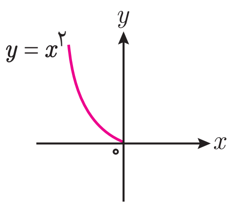
می‌دانیم ورودی ماشین دوم، خروجی ماشین اول است. پس:

$$۲x-۲=۴\Rightarrow ۲x=۶\Rightarrow x=۳\Rightarrow\text{ورودی}=۳$$

---

۹. گزینه ۲

با توجه به نمودار مقابل، برای آن که تابع $f(x)$ اکیداً نزولی شود، باید اولاً $g(x)$ اکیداً نزولی باشد و ثانیاً زیر محور xها باشد. در گزینه‌ها فقط $-۲x-۱$ این دو شرط را دارد.



---

۱۰. گزینه ۲

ابتدا $f^{-۱}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f=\{(۲,۵),(۶,۳),(۳,۷),(۴,۱),(۱,۹)\}\Rightarrow f^{-۱}=\{(۵,۲),(۳,۶),(۷,۳),(۱,۴),(۹,۱)\}$$

چون $f^{-۱}(g(۲a))=۶$ است، پس $g(۲a)=۳$ می‌باشد. حال به راحتی مقدار a معلوم می‌شود:

$$g(۲a)=۳\Rightarrow ۳=\frac{۲a}{۲a-۱}\Rightarrow ۶a-۳=۲a\Rightarrow ۴a=۳\Rightarrow a=\frac{۳}{۴}$$

پاسخ آزمون ۲۴: تابع

۱. گزینه ۴

با توجه به نمودار توابع f و g تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $(f+g)(۳)=f(۳)+g(۳)=-۱+۳=۲$ ✓

۲) $(۲f-g)(۶)=۲f(۶)-g(۶)=۲(۳)-۶=۰$ ✓

۳) $(\frac{f}{g})(۶)=\frac{f(۶)}{g(۶)}=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$ ✓

۴) $(f.g)(۳)=f(۳)g(۳)=(-۱)\times ۳=-۳$ ×

۲. گزینه ۴

باید $(x+۱)f(x)\geq ۰$ باشد. پس:

x		-۳		-۱		۲	
$f(x)$	$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$
$x+۱$	$-$		$-$	۰	$+$		$+$
$(x+۱)f(x)$	$+$	۰	$-$	۰	$-$	۰	$+$

بنابراین دامنهٔ تابع $\mathbb{R}-\{(-۳,۲)\}$ می‌باشد.

۳. گزینه ۳

وارون تک‌تک ضابطه‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} y=۳x+۲\Rightarrow x=۳y+۲\Rightarrow y=\frac{x-۲}{۳} \\ y=۴x+۱\Rightarrow x=۴y+۱\Rightarrow y=\frac{x-۱}{۴} \end{cases}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\begin{cases} \frac{x}{۳}-\frac{۲}{۳} \\ \frac{x}{۴}-\frac{۱}{۴} \end{cases}$$

حال باید دامنهٔ هر ضابطه را پیدا کنیم. بنابراین برد هر یک از ضابطه‌های $f(x)$ را به دست می‌آوریم:

$x\geq ۱\Rightarrow ۳x\geq ۳\Rightarrow ۳x+۲\geq ۵\Rightarrow y\geq ۵$ و $x<۱\Rightarrow ۴x<۴\Rightarrow ۴x+۱<۵\Rightarrow y<۵$

بنابراین ضابطهٔ $f^{-۱}(x)$ به صورت $f^{-۱}(x)=\begin{cases} \frac{x}{۳}-\frac{۲}{۳} & x\geq ۵ \\ \frac{x}{۴}-\frac{۱}{۴} & x<۵ \end{cases}$ است.

۴. گزینه ۲

ابتدا ضابطهٔ تابع وارون f را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=\frac{x+۴}{x-۲}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{۲x+۴}{x-۱}$$

حال با حل معادلهٔ $f(x)=f^{-۱}(x)$، نقاط برخورد دو تابع را می‌یابیم:

$$\frac{x+۴}{x-۲}=\frac{۲x+۴}{x-۱}\Rightarrow x^۲+۳x-۴=۲x^۲-۸\Rightarrow x^۲-۳x-۴=۰\Rightarrow (x+۱)(x-۴)=۰\Rightarrow x=-۱,x=۴$$

۵. گزینه ۳

حرفه‌ای باش

مجموع دو تابع اکیداً صعودی، اکیداً صعودی و مجموع دو تابع اکیداً نزولی، اکیداً نزولی است.

توابع $y=x$ و $y=\sqrt{x}$ اکیداً صعودی‌اند، پس مجموع آن‌ها یعنی $f(x)=x+\sqrt{x}$ نیز اکیداً صعودی است و در نتیجه یک به یک می‌باشد.

۶. گزینه ۱

ابتدا تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{(۲x+۱)(x-۱)}{x-۱}\Rightarrow f(x)=۲x+۱\ ;\ x\neq ۱$$

دامنهٔ تابع به‌صورت $\mathbb{R}-\{۱\}$ است، پس برد تابع $\mathbb{R}-\{f(۱)\}$ یعنی $\mathbb{R}-\{۳\}$ است. بنابراین برد تابع شامل ۳ نیست.

۷. گزینه ۲

می‌دانیم صفرهای تابع $f(x)$ همان ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=0$ هستند، پس $f(3)=0$ و $f(-5)=0$ است. حال صفرهای تابع $y=2f(2x+1)$ را می‌خواهیم. در نتیجه:

$$2f(2x+1)=0 \Rightarrow f(2x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} 2x+1=3 \Rightarrow 2x=2 \Rightarrow x=1 \\ 2x+1=-5 \Rightarrow 2x=-6 \Rightarrow x=-3 \end{cases}$$

۸. گزینه ۳

ضریب $\frac{1}{3}$ و عدد ثابت -1 در دامنه تأثیری ندارند ولی برد تابع را تغییر می‌دهند. پس:

$$-2 \le x-2 \le 3 \Rightarrow 0 \le x \le 5 \Rightarrow D_g=[0,5]$$

$$R_g=\frac{1}{3}[0,6]-1=[0,2]-1=[-1,1]$$

۹. گزینه ۳

روش اول: برای آن‌که f یک‌به‌یک باشد، باید از تساوی $f(x_1)=f(x_2)$ به تساوی $x_1=x_2$ برسیم:

$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow \frac{3x_1+a}{x_1+2}=\frac{3x_2+a}{x_2+2} \Rightarrow \cancel{3x_1x_2}+6x_1+ax_2+\cancel{2a}=\cancel{3x_1x_2}+ax_1+6x_2+\cancel{2a}$$

$$\Rightarrow 6x_1-ax_1=6x_2-ax_2 \Rightarrow (6-a)x_1=(6-a)x_2$$

اگر $a=6$ باشد، آن‌گاه x_1 و x_2 هر مقداری می‌توانند بپذیرند، بنابراین لزوماً برابر نیستند. اما اگر $a \ne 6$ باشد، حتماً $x_1=x_2$ خواهد شد.

حرفه‌ای باش

تابع $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ زمانی یک‌به‌یک نیست که به یک تابع ثابت تبدیل شود.

روش دوم: پس تابع f زمانی که تابع ثابت شود یک‌به‌یک نیست:

$$3x+a \ne 3(x+2) \Rightarrow \cancel{3x}+a \ne \cancel{3x}+6 \Rightarrow a \ne 6$$

۱۰. گزینه ۳

ابتدا قدرمطلق‌ها را برمی‌داریم:

$$f(x)=|2x-6|-|x+1| \xRightarrow{x=3\,,\,x=-1} f(x)=\begin{cases} -x+7 & x<-1 \\ -3x+5 & -1 \le x \le 3 \\ x-7 & x>3 \end{cases}$$

واضح است تابع $f(x)$ به‌ازای $x>3$ با ضابطهٔ $f(x)=x-7$ صعودی است. پس وارون آن را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} f(x)=x-7 \\ D_f=(3,+\infty) \end{cases} \Rightarrow R_f=(-4,+\infty)\ ,\ y=x-7 \Rightarrow x=y-7 \Rightarrow y=x+7 \Rightarrow \begin{cases} f^{-1}(x)=x+7 \\ D_{f^{-1}}=R_f=(-4,+\infty) \end{cases}$$

پاسخ آزمون ۲۵: جامع

۱. گزینه ۴

ابتدا $f(۲x-۳)$ را ساده می‌کنیم:

$$f(۲x-۳)=۴x^۲-۱۲x+۹+۱=(۲x-۳)^۲+۱$$

با فرض $۲x-۳=t$ تابع $f(t)=t^۲+۱$ می‌شود. پس:

$$f(\sqrt{۳})=(\sqrt{۳})^۲+۱=۴$$

۲. گزینه ۳

چون دامنهٔ تابع $[۰,۴]$ است، پس صفر و ۴ ریشه‌های $bx-x^۲$ هستند، بنابراین $b=۴$ می‌باشد. حال برد تابع $f(x)=a\sqrt{۴x-x^۲}$ برابر $[۰,۴]$ است، پس:

$$y=۴x-x^۲\Rightarrow x_S=\frac{-۴}{-۲}=۲\Rightarrow y_S=۴\Rightarrow\sqrt{۴x-x^۲}\in[۰,۲]\Rightarrow a\sqrt{۴x-x^۲}\in[۰,۲a]$$

بنابراین $۲a=۴$ بوده و داریم $a=۲$. پس مقدار $a+b$ برابر $۲+۴=۶$ می‌باشد.

۳. گزینه ۲

دامنهٔ تابع $\frac{۳f}{f+g}$ به صورت $D_f\cap D_g-\{x\,|\,(f+g)(x)=۰\}$ می‌شود، پس:

$$\begin{cases}D_f=\{۱,۳,۴,۲\}\\ D_g=\{۱,۲,۴\}\end{cases}\Rightarrow D_f\cap D_g=\{۱,۲,۴\}$$

حال $(f+g)(x)$ را تشکیل می‌دهیم تا ببینیم به ازای کدام مقادیر x، $(f+g)(x)=۰$ می‌شود:

$$(f+g)(x)=\{(۱,۲),(۲,۴),(۴,۰)\}$$

همان‌طور که دیدید $(f+g)(۴)=۰$ می‌شود، پس:

$$D_{\frac{۳f}{f+g}}=\{۱,۲,۴\}-\{۴\}=\{۱,۲\}$$

۴. گزینه ۲

می‌دانیم $f\left(f^{-۱}(x)\right)=x$ می‌باشد. پس:

$$f\left(f^{-۱}(x)\right)=x\Rightarrow ۳\left(f^{-۱}(x)\right)^۲-۱=x\Rightarrow ۳\left(f^{-۱}(x)\right)^۲=x+۱$$

۵. گزینه ۴

در تابع $y=\frac{۱}{۲}(x+\sqrt{x^۲+۴})$، x را برحسب y به‌دست می‌آوریم:

$$y=\frac{۱}{۲}(x+\sqrt{x^۲+۴})\Rightarrow ۲y=x+\sqrt{x^۲+۴}\Rightarrow ۲y-x=\sqrt{x^۲+۴}\Rightarrow(۲y-x)^۲=x^۲+۴$$

$$\Rightarrow ۴y^۲-۴xy+x^۲=x^۲+۴\Rightarrow ۴xy=۴y^۲-۴\Rightarrow x=\frac{y^۲-۱}{y}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x^۲-۱}{x}=x-\frac{۱}{x}$$

بنابراین حاصل $f^{-۱}(x)+f^{-۱}(\frac{۱}{x})$ برابر است با:

$$f^{-۱}(x)+f^{-۱}(\frac{۱}{x})=x-\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x}-x=۰$$

۶. گزینه ۳

ابتدا توابع gof و fog را می‌یابیم:

$$(gof)(x)=g(f(x))=x^{۲}-۱$$

$$(fog)(x)=f(g(x))=(x-۱)^{۲}=x^{۲}-۲x+۱$$

حال نقطهٔ تلاقی دو تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$(gof)(x)=(fog)(x)\Rightarrow x^{۲}-۱=x^{۲}-۲x+۱\Rightarrow ۲x=۲\Rightarrow x=۱\Rightarrow \text{نقطهٔ تلاقی } (۱,۰)$$

حال باید بررسی کنیم که نقطهٔ $(۱,۰)$ در معادلهٔ کدام تابع صدق می‌کند. پس گزینهٔ «۳» پاسخ صحیح است.

۷. گزینه ۱

می‌دانیم $(f+g)(۳)=f(۳)+g(۳)$ می‌باشد، پس:

$$\begin{cases} f(۳)=۳a+۳ \\ g(۳)=(a-۲)(۳)+۴=۳a-۲ \end{cases}\Rightarrow (f+g)(۳)=f(۳)+g(۳)=۳a+۳+۳a-۲=۶a+۱$$

با توجه به این که $(f+g)(۳)=۷$ است، پس:

$$۶a+۱=۷\Rightarrow ۶a=۶\Rightarrow a=۱$$

۸. گزینه ۲

مجموع دو تابع اکیداً صعودی، حتماً اکیداً صعودی است. $y=۲x$ اکیداً صعودی است، پس $۲x+f(x)$ هم حتماً اکیداً صعودی است.

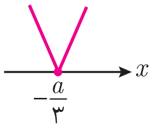
۹. گزینه ۴

تابع $(fof)(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$(fof)(x)=f(f(x))\Rightarrow (fof)(x)=\frac{۲(\frac{۲x+۱}{۳x+۲})+۱}{۳(\frac{۲x+۱}{۳x+۲})+۲}=\frac{۷x+۴}{۱۲x+۷}$$

با مقایسهٔ ضابطهٔ به‌دست آمده و $\frac{ax+۴}{bx+۷}$ مقادیر a و b به ترتیب برابر ۷ و ۱۲ هستند، پس $a+b=۱۹$ است.

۱۰. گزینه ۴



نمودار تابع $y=|۳x+a|$، به شکل زیر است. برای این که تابع در بازه‌ای وارون‌پذیر باشد، $-\frac{a}{۳}$ نباید در آن بازه بیفتد، یعنی $-\frac{a}{۳}$ از ابتدای بازه نابیش‌تر یا از انتهای بازه ناکم‌تر باشد.

$$\begin{cases} -\frac{a}{۳}\le -۱\Rightarrow a\ge ۳ \\ -\frac{a}{۳}\ge ۳\Rightarrow a\le -۹ \end{cases}\Rightarrow a\in(-\infty,-۹]\cup[۳,+\infty)$$

پاسخ آزمون ۵۵: مشتق

۱. گزینه ۳

می‌دانیم مشتق تابع $y=\sqrt{u}$ برابر $y'=\dfrac{u'}{۲\sqrt{u}}$ می‌باشد، پس ابتدا مشتق عبارت $\dfrac{۳x-۱}{۲x+۱}$ را به دست می‌آوریم:

$$u=\frac{۳x-۱}{۲x+۱}\Rightarrow u'=\frac{۳(۲x+۱)-۲(۳x-۱)}{(۲x+۱)^{۲}}=\frac{۵}{(۲x+۱)^{۲}}$$

بنابراین داریم:

$$f'(x)=\frac{\frac{۵}{(۲x+۱)^{۲}}}{۲\sqrt{\frac{۳x-۱}{۲x+۱}}}\Rightarrow f'(۲)=\frac{\frac{۵}{۵^{۲}}}{۲\sqrt{\frac{۵}{۵}}}=\frac{\frac{۱}{۵}}{۲}=\frac{۱}{۱۰}=۰/۱$$

۲. گزینه ۱

می‌دانیم معادلهٔ حاصل از تقاطع خط مماس و منحنی دارای ریشهٔ مضاعف است. با توجه به این مطلب امکان ندارد که خط مماس در نقطه‌ای غیر از ۱ یا ۱- بر منحنی $y=x^{۳}+ax^{۲}+۲x$ مماس شود، چون در این صورت معادلهٔ تقاطع دارای ۴ ریشه است که امکان ندارد (معادلهٔ درجهٔ سوم حداکثر سه ریشه دارد.). حال شیب خط را به دست می‌آوریم و با $f'(۱)$ و $f'(-۱)$ برابر قرار می‌دهیم:

$$m_{\text{مماس}}=\frac{y(۱)-y(-۱)}{۱-(-۱)}=\frac{(۳+a)-(-۳+a)}{۲}=۳$$

$$f'(۱)=۳\xRightarrow{f'(x)=۳x^{۲}+۲ax+۲}۳+۲a+۲=۳\Rightarrow a=-۱$$

$$f'(-۱)=۳\xRightarrow{f'(x)=۳x^{۲}+۲ax+۲}۳-۲a+۲=۳\Rightarrow a=۱$$

۳. گزینه ۳

تابع $y=[x^{۲}]$ در نقاطی که $x^{۲}$ عددی صحیح شود، ناپیوسته و در نتیجه مشتق‌ناپذیر است. مگر نقطهٔ $x=۰$ که مینیمم تابع $y=x^{۲}$ است:

$$x^{۲}=k\Rightarrow x=\pm\sqrt{k}\Rightarrow x=\overset{\text{غقق}}{\underset{\uparrow}{۰}},\ \pm۱,\ \pm\sqrt{۲}\ ,\ \pm\sqrt{۳}$$

از طرفی داریم:

$$(x-۱)(x^{۲}+x-۲)=(x-۱)(x-۱)(x+۲)=(x-۱)^{۲}(x+۲)$$

بنابراین تابع $f(x)$ به صورت $f(x)=(x+۲)(x-۱)^{۲}[x^{۲}]$ بوده و چون عامل صفرکنندهٔ مرتبهٔ دوم $(x-۱)^{۲}$ داریم، پس تابع $f(x)$ در $x=۱$ مشتق‌پذیر خواهد بود. بنابراین $f(x)$ در نقاط $x=-۱$، $x=\pm\sqrt{۲}$ و $x=\pm\sqrt{۳}$ مشتق‌ناپذیر است که تعداد آن‌ها برابر ۵ می‌باشد.

۴. گزینه ۳

می‌دانیم $f'(۴)=\lim\limits_{x\to۴}\dfrac{f(x)-f(۴)}{x-۴}$، با توجه به صورت سؤال که گفته شده تابع f در $x=۴$ مشتق دارد و $\lim\limits_{x\to۴}\dfrac{f(x)+۷}{x-۴}=-\dfrac{۳}{۲}$ می‌توان گفت $f(۴)=-۷$ و $f'(۴)=-\dfrac{۳}{۲}$ است. حال از تابع $y=\dfrac{f(۲x)}{x}$ مشتق می‌گیریم:

$$\left(\frac{f(۲x)}{x}\right)'=\frac{(۲f'(۲x))(x)-(۱)(f(۲x))}{x^{۲}}$$

بنابراین مقدار مشتق تابع در $x=۲$ برابر است با:

$$x=۲\Rightarrow\frac{(۲f'(۴))(۲)-(۱)(f(۴))}{۴}=\frac{۴f'(۴)-f(۴)}{۴}=\frac{۴(-\frac{۳}{۲})+۷}{۴}=\frac{-۶+۷}{۴}=\frac{۱}{۴}$$

۵. گزینه ۳

ابتدا نقطهٔ تلاقی تابع با محور طول‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\circ = \frac{۲x-۱}{x+۱} \Rightarrow ۲x-۱=\circ \Rightarrow x=\frac{۱}{۲} \Rightarrow A(\frac{۱}{۲},\circ)$$

حال شیب خط مماس را به دست می‌آوریم:

$$y' = \frac{۲(x+۱)-۱(۲x-۱)}{(x+۱)^۲} \Rightarrow m_{\text{مماس}} = y'(\frac{۱}{۲}) = \frac{۳}{(\frac{۱}{۲}+۱)^۲} = \frac{۴}{۳}$$

بنابراین معادلهٔ خط مماس را می‌نویسیم و سپس عرض از مبدأ خط مماس را به دست می‌آوریم:

$$y-\circ = \frac{۴}{۳}(x-\frac{۱}{۲}) \xrightarrow[x=\circ]{\text{عرض از مبدأ}} y=-\frac{۴}{۶}=-\frac{۲}{۳}$$

---

۶. گزینه ۴

به کمک تعریف مشتق داریم:

$$f'_-(-۲) = \lim_{x\to(-۲)^-} \frac{|۴-x^۲|[x]-\circ}{x+۲} = \lim_{x\to(-۲)^-} \frac{(x^۲-۴)\times(-۳)}{x+۲} = -۳\lim_{x\to(-۲)^-}(x-۲)=۱۲$$

دقت کنید مقدار $۴-x^۲$ وقتی $x\to(-۲)^-$، منفی است و هم‌چنین $[(-۲)^-]=-۳$ می‌شود.

---

۷. گزینه ۳

عرض از مبدأ نیم مماس چپ تابع $y=|x^۲-۱|$ در نقطهٔ $x=۱$ خواسته شده است. پس:

$$f'_-(۱) = \lim_{x\to۱^-} \frac{|x^۲-۱|-\circ}{x-۱} = \lim_{x\to۱^-} \frac{-(x^۲-۱)}{x-۱} = \lim_{x\to۱^-}(-x-۱)=-۲$$

بنابراین شیب نیم مماس چپ برابر ۲- است و از نقطهٔ $(۱,\circ)$ می‌گذرد:

$$y-\circ=-۲(x-۱) \Rightarrow y=-۲x+۲ \xrightarrow[x=\circ]{\text{عرض از مبدأ}} y=۲$$

---

۸. گزینه ۲

با توجه به نمودار $y=f(x)$ واضح است که شیب خط مماس در xهای منفی، عددی منفی است و این یعنی مشتق تابع در این نقاط عددی منفی می‌باشد، پس گزینهٔ (۴) نادرست است. ضمناً در $+\infty$ و $-\infty$ تابع به خطی افقی نزدیک می‌شود، پس در $+\infty$ و $-\infty$ باید مشتق تابع برابر صفر باشد که در گزینه‌های (۱) و (۳) این‌چنین نیست.

---

۹. گزینه ۲

ابتدا مشتق $y=(gof)(x)$ را در $x=۲$ به‌دست می‌آوریم تا ببینیم به چه چیزهایی احتیاج داریم:

$$y=g(f(x)) \Rightarrow y'=f'(x)g'(f(x)) \Rightarrow y'(۲)=f'(۲)g'(f(۲))$$

بنابراین $f'(۲)$ و $g'(f(۲))$ را می‌خواهیم. $f'(۲)$ همان شیب تابع خطی $g(x)$ است که از نقاط $(۲,۴)$ و $(-۴,\circ)$ می‌گذرد:

$$f'(۲)=\frac{۴-\circ}{۲-(-۴)}=\frac{۲}{۳}$$

از طرفی $g'(f(۲))$ نیز همان شیب تابع خطی $g(x)$ می‌باشد که برابر $\frac{۲}{۳}$ است. پس:

$$y'(۲)=f'(۲)g'(f(۲))=\frac{۲}{۳}\times\frac{۲}{۳}=\frac{۴}{۹}$$

۱۰. **گزینه ۱**

آهنگ متوسط تابع $f(x)=\sqrt{x^2+16}$ برابر است با:

$$\text{آهنگ متوسط}=\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=\frac{\sqrt{9+16}-\sqrt{0+16}}{3-0}=\frac{5-4}{3}=\frac{1}{3}$$

حال آهنگ لحظه‌ای را در $x=\sqrt{2}$ به‌دست می‌آوریم:

$$x=\sqrt{2}\ \text{آهنگ لحظه‌ای در}=f'(\sqrt{2})\Rightarrow f'(x)=\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+16}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+16}}\Rightarrow f'(\sqrt{2})=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+16}}=\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{3\cancel{\sqrt{2}}}=\frac{1}{3}$$

بنابراین تفاضل آهنگ متوسط از آهنگ لحظه‌ای برابر صفر است.

پاسخ آزمون ۵۶: مشتق

۱. **گزینه ۴**

ابتدا $f(3)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(2x+1)=x^3-3x^2+5x-1\xrightarrow{x=1}f(3)=2$$

از طرفی شیب خط مماس در نقطهٔ $(3,f(3))$ برابر $f'(3)$ می‌باشد، پس:

$$f(2x+1)=x^3-3x^2+5x-1\Rightarrow 2f'(2x+1)=3x^2-6x+5\xrightarrow{x=1}2f'(3)=2\Rightarrow f'(3)=1$$

بنابراین معادلهٔ خط مماس به صورت زیر است:

$$y-2=1(x-3)\Rightarrow y=x-1$$

۲. **گزینه ۴**

باید تابع $f(x)$ در $x=1$ پیوسته باشد، پس:

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^-}f(x)=f(1)\Rightarrow b+3=a+2\Rightarrow a-b=1\quad(*)$$

از طرفی باید مشتق چپ و راست تابع در $x=1$ برابر باشند، پس:

$$f'(x)=\begin{cases}2ax+2 & x<1\\ b & x\ge1\end{cases}\xrightarrow{f'_+(1)=f'_-(1)}b=2a+2\Rightarrow 2a-b=-2\quad(**)$$

با توجه به روابط $(*)$ و $(**)$ داریم:

$$\begin{cases}a-b=1\\ 2a-b=-2\end{cases}\Rightarrow -a=3\Rightarrow a=-3\Rightarrow b=-4\Rightarrow ab=(-3)\times(-4)=12$$

۳. **گزینه ۳**

در $x=3$، عبارت x^3 عددی صحیح می‌شـــود، پس $[x^3]$ در $x=3$ مشتق‌ناپذیر است. اما اگر $2x^2+ax+b$ به صورت $2(x-3)^2$ باشد، تابع $f(x)$ در $x=3$ مشتق‌پذیر خواهد بود. بنابراین داریم:

$$(x-3)^2=2x^2+ax+b\Rightarrow 2x^2-12x+18=2x^2+ax+b\Rightarrow\begin{cases}a=-12\\ b=18\end{cases}\Rightarrow a+b=6$$

۴. **گزینه ۳**

ابتدا مشتق راست تابع را به دست می‌آوریم. در 0^+ داریم:

$$|x|=x,[x]=\left[0^+\right]=0\Rightarrow f(x)=0\Rightarrow f'_+(0)=0$$

حال مشتق چپ تابع را به دست می‌آوریم، در 0^- داریم:

$$|x|=-x,[x]=\left[0^-\right]=-1\Rightarrow f(x)=x\Rightarrow f'_-(x)=1\Rightarrow f'_-(0)=1$$

بنابراین حاصل $f'_-(0)-f'_+(0)$ برابر $1-0=1$ می‌باشد.

۵. گزینه ۲

تابع $f(x)$ به صورت ضرب x و $\sqrt{x^۲+۳}$ می‌باشد، پس:

$$f'(x)=\sqrt{x^۲+۳}+\frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲+۳}}\times x\Rightarrow f'(۱)=\sqrt{۱+۳}+\frac{۱}{\sqrt{۱+۳}}\times ۱=۲+\frac{۱}{۲}=\frac{۵}{۲}$$

---

۶. گزینه ۲

ابتدا $f(x)-g(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)-g(x)=\frac{x^۳+x+۱}{x^۲+۳}-\frac{-۲x+۱}{x^۲+۳}=\frac{x^۳+۳x}{x^۲+۳}=\frac{x(x^۲+۳)}{x^۲+۳}=x$$

حال از طرفین رابطهٔ $f(x)-g(x)=x$ مشتق می‌گیریم:

$$f(x)-g(x)=x\Longrightarrow f'(x)-g'(x)=۱$$

---

۷. گزینه ۳

مشتق $f(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=(\sqrt{x^۲+۱}+x)^۵\Rightarrow f'(x)=۵(\frac{x}{\sqrt{x^۲+۱}}+۱)(\sqrt{x^۲+۱}+x)^۴$$

$$\Rightarrow f'(x)=۵(\frac{x+\sqrt{x^۲+۱}}{\sqrt{x^۲+۱}})(\sqrt{x^۲+۱}+x)^۴\Rightarrow f'(x)=\frac{۵(\sqrt{x^۲+۱}+x)^۵}{\sqrt{x^۲+۱}}\Rightarrow f'(x)=\frac{۵f(x)}{\sqrt{x^۲+۱}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^۲+۱}f'(x)=۵f(x)$$

---

۸. گزینه ۲

روش اول: ابتدا آهنگ متوسط را در بازهٔ $[۰,۱۰۰]$ به‌دست می‌آوریم:

$$\text{آهنگ متوسط}=\frac{V(۱۰۰)-V(۰)}{۱۰۰-۰}=\frac{۰-۴۰}{۱۰۰}=-۰/۴$$

حال باید t را طوری تعیین کنیم که $V'(t)=-۰/۴$ بشود. پس:

$$V'(t)=۴۰\times ۲\times(-\frac{۱}{۱۰۰})(۱-\frac{t}{۱۰۰})\Rightarrow -۰/۴=-۰/۸(۱-\frac{t}{۱۰۰})\Rightarrow ۱-\frac{t}{۱۰۰}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \frac{۱}{۲}=\frac{t}{۱۰۰}\Rightarrow t=۵۰$$

روش دوم: می‌دانیم در توابع درجه دوم، آهنگ متوسط تغییر در یک بازه با آهنگ لحظه‌ای در وسط بازه برابر است. بنابراین:

$$t=\frac{۰+۱۰۰}{۲}=۵۰$$

---

۹. گزینه ۳

واضح است که تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=۲$ و $x=-۱$ مشتق‌ناپذیر است. پس باید $g(x)$ در این نقاط عامل صفرکننده داشته باشد تا $(f.g)(x)$ در مجموعهٔ اعداد حقیقی مشتق‌پذیر باشد، بنابراین $g(x)=(x-۲)(x+۱)$ است و داریم:

$$g(x)=(x-۲)(x+۱)=x^۲-x-۲\Rightarrow g'(x)=۲x-۱\Rightarrow g'(۳)=۵$$

---

۱۰. گزینه ۳

تابع در ریشه‌های سادهٔ داخل قدرمطلق مشتق‌ناپذیر است. پس داریم:

$$y=\left|x^۲-۳|x|\right|\Rightarrow y=\left||x^۲|-۳|x|\right|\Rightarrow y=||x|(|x|-۳)|\Rightarrow y=|x|||x|-۳|$$

$$x=۰,|x|-۳=۰\Rightarrow |x|=۳\Rightarrow x=\pm ۳$$

بنابراین تابع در سه نقطه مشتق‌ناپذیر است.