به نام پروردگار مهربان

HANDBOOK

فرمول‌نامه ریاضیات

هفتم تا دوازدهم

تعاریف ▪ روابط ▪ فرمول‌ها ▪ نمودارها

▪ احسان لعل

▪ مدیر و ناظر علمی گروه ریاضی: عباس اشرفی

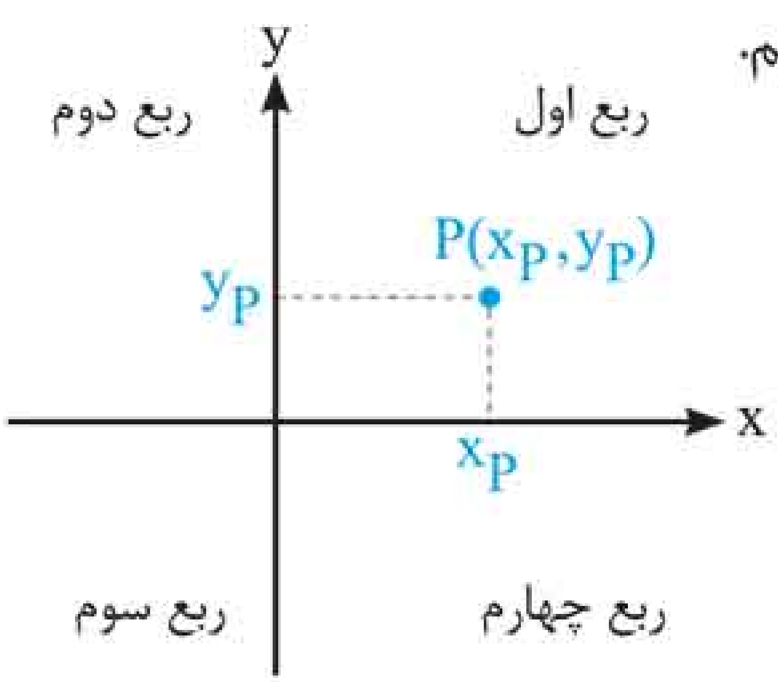
مهروماه | لقمه

فهرست

فصل ۶
خط و معادلهٔ خط

خط و معادلهٔ خط

محورهای مختصات، صفحه را به چهار ناحیه تقسیم می‌کنند که هر ناحیه یک ربع نامیده می‌شود. نقاط روی محورها در هیچ ربعی نیستند. به هر نقطه مانند P در صفحهٔ مختصات یک زوج مرتب (x, y) نظیر می‌شود که مختصات نقطهٔ P را نشان می‌دهد. طول نقطهٔ P را با x_P و عرض آن را با y_P نشان می‌دهیم.



علامت ربع‌ها:

ربع	اول	دوم	سوم	چهارم
x	+	−	−	+
y	+	+	−	−

فاصلهٔ بین دو نقطه: فاصلهٔ بین دو نقطهٔ $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ را با AB نمایش می‌دهیم و به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

فاصلهٔ نقطهٔ A تا مبدأ: $OA = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

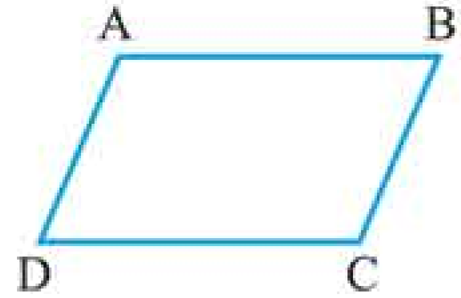
اگر A و B هم‌عرض باشند: $AB = |x_2 - x_1|$

اگر A و B هم‌طول باشند: $AB = |y_2 - y_1|$

مختصات نقطهٔ وسط یک پاره‌خط: اگر A و B دو نقطه در صفحه و M وسط پاره‌خط AB باشد، مختصات M برابر است با:

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$

رابطهٔ بین مختصات رئوس متوازی‌الاضلاع: اگر A و C رئوس مقابل به هم و هم‌چنین B و D رئوس مقابل هم باشند داریم:



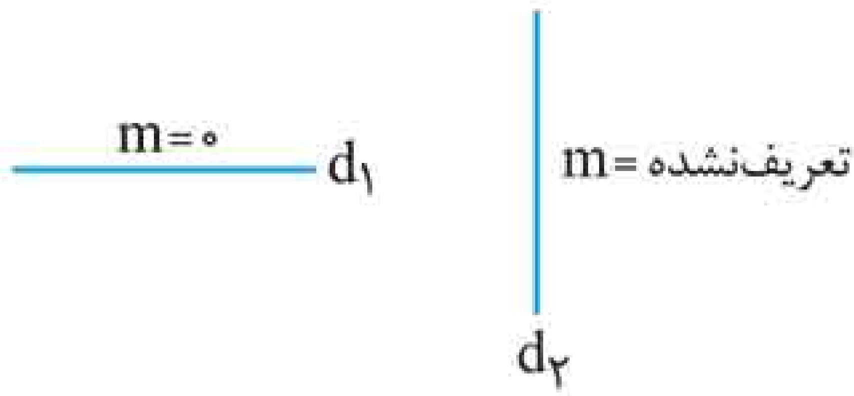
$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}$$

شیب خط

شیب خط گذرنده از دو نقطهٔ $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ به صورت m_{AB} نمایش می‌دهند و برابر است با:

$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

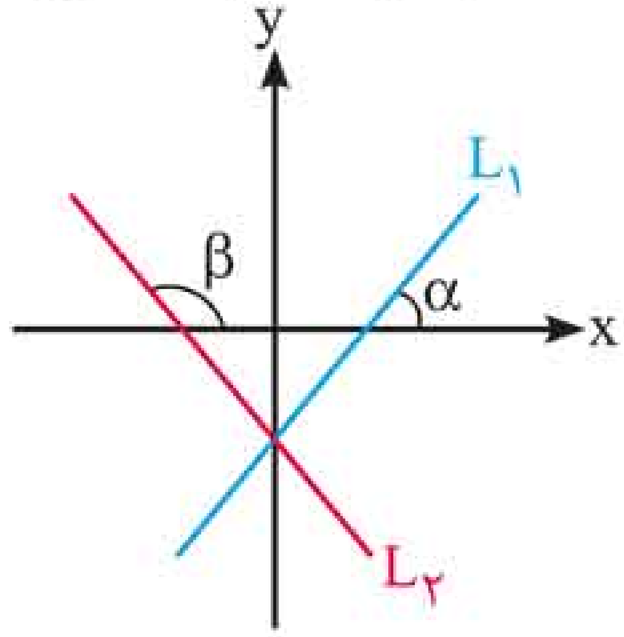
شیب خط افقی صفر و شیب خط عمودی تعریف نشده است.



محاسبهٔ شیب خط:

۱ تانژانت زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور طول‌ها می‌سازد، برابر شیب خط است.

$$m_1 = \tan\alpha$$
$$m_2 = \tan\beta$$

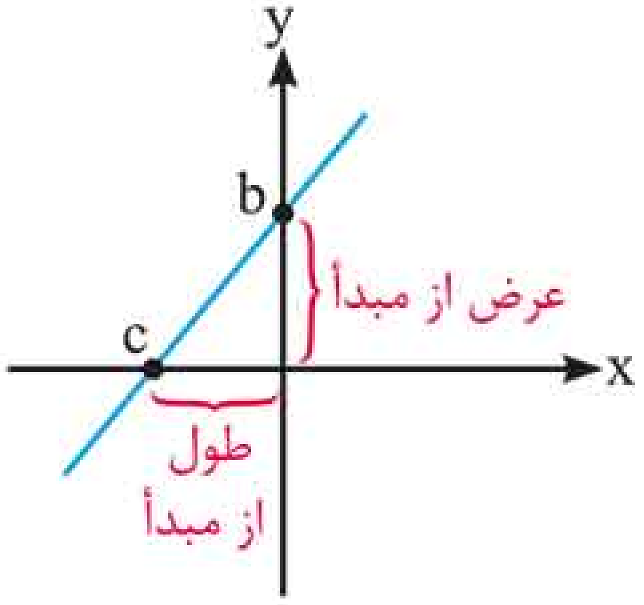


۲ مقدار شـــیب در معادلهٔ خط $y = ax + b$ برابر ضریب x یعنی a است.

عرض از مبدأ و طول از مبدأ:

اگر خطی محور عرض‌ها را در $(0, b)$ قطع کند، عرض از مبدأ خط برابر b است.

اگر خطی محور طول‌ها را در $(c, 0)$ قطع کند، طول از مبدأ خط برابر c است.



معادلهٔ خط

به رابطهٔ بین طول و عرض تمام نقاط واقع بر یک خط، معادلهٔ آن خط گفته می‌شود.

به دست ردن معادلهٔ خط:

۱ اگر خطی با شیب m از نقطهٔ $A(x_\circ, y_\circ)$ بگذرد معادلهٔ خط برابر است با: $y - y_\circ = m(x - x_\circ)$

۲ اگر خطی از دو نقطهٔ $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ بگذرد ابتدا شیب خط را محاسبه می‌کنیم:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

سپس با استفاده از یکی از دو نقطهٔ A یا B معادلهٔ خط را می‌نویسیم:

$y - y_1 = m(x - x_1)$ یا $y - y_2 = m(x - x_2)$

وضعیت شیب دو خط موازی یا دو خط عمود:

۱ اگر دو خط موازی باشند، شیب‌های آن‌ها برابر است.

$$d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$$

۲ اگر دو خط عمود بر هم باشند، حاصل‌ضرب شیب‌های آن‌ها برابر -1 است. $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m_1 \times m_2 = -1$

اگر θ زاویهٔ بین دو خط متقاطع $y = mx + b$ و $y = m'x + b'$ باشد، $\tan\theta$ از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$\tan\theta = \left| \frac{m - m'}{1 + mm'} \right|$$

فاصلهٔ نقطه از خط:

فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_\circ, y_\circ)$ از خط d به معادلهٔ $ax + by + c = \circ$ برابر است با:

پایهٔ نهم

پایهٔ یازدهم ریاضی و تجربی

۱۱ ریاضی و ۱۲ تجربی

جدول نسبت‌های مثلثاتی:

تابع	رادیان	$\circ$	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
	درجه	۰	۳۰	۶۰	۴۵	۹۰	۱۸۰	۲۷۰	۳۶۰
$\sin\alpha$		۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	۱	۰	-۱	۰
$\cos\alpha$		۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	۰	-۱	۰	۱
$\tan\alpha$		۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	$\sqrt{۳}$	۱	ت.ن	۰	ت.ن	۰
$\cot\alpha$		ت.ن	$\sqrt{۳}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	۰	ت.ن	۰	ت.ن

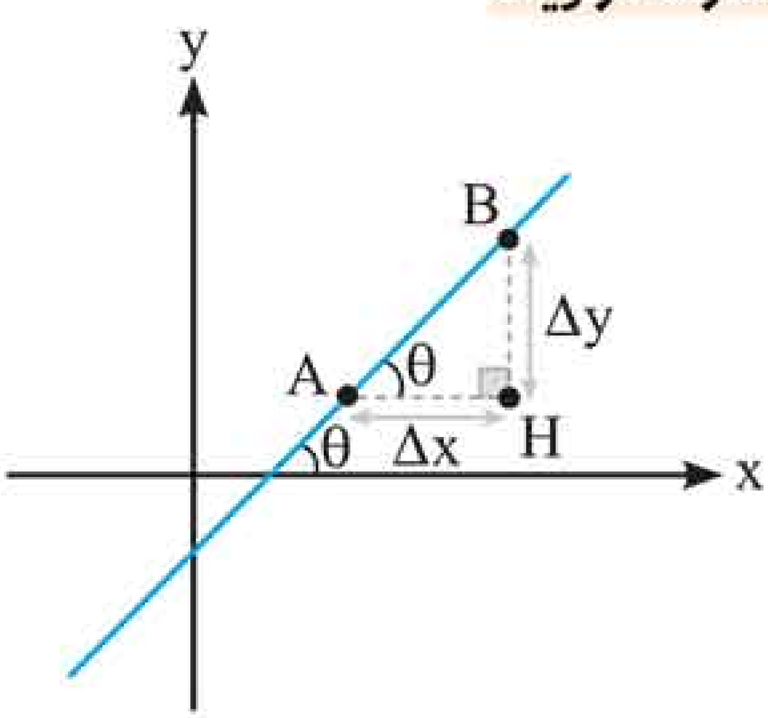
محاسبهٔ زوایای متمم و مکمل:

$\sin(۲k\pi-\alpha)=-\sin\alpha$ $\cos(۲k\pi-\alpha)=\cos\alpha$ $\tan(۲k\pi-\alpha)=-\tan\alpha$ $\cot(۲k\pi-\alpha)=-\cot\alpha$	$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ $\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$ $\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$
$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$ $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$ $\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$ $\cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha$	$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$ $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$ $\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$ $\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$

$\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=\cos\alpha$	$\sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cos\alpha$
$\cos(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\sin\alpha$	$\cos(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\sin\alpha$
$\tan(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\cot\alpha$	$\tan(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cot\alpha$
$\cot(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\tan\alpha$	$\cot(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\tan\alpha$

پایهٔ یازدهم ریاضی و تجربی

رابطهٔ شیب خط با تانژانت زاویه:



$$A\overset{\Delta}{B}H: \tan\theta = \frac{\text{تفاضل عرض‌ها}}{\text{تفاضل طول‌ها}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = m$$

۱ اگر خطی موازی محور x ها باشد شیب آن صفر است.

۲ اگر خطی عمود بر محور x ها باشد شیب آن تعریف نشده است.

معادلهٔ خط: معادله خطی که شیب آن برابر m و از نقطهٔ $A(x_۰, y_۰)$ می‌گذرد عبارت است از:

$$y - y_۰ = m(x - x_۰)$$

پایهٔ دهم ریاضی و تجربی

مثلثات

فرمول‌های مهم توابع مثلثاتی:

۱ $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

۲ $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

۳ $\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

۴ $\tan\alpha=\dfrac{1}{\cot\alpha}$ یا $\cot\alpha=\dfrac{1}{\tan\alpha}$

۵ $\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$

۶ $1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

۷ $1+\cot^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

۸ $\tan\alpha+\cot\alpha=\dfrac{1}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$

۹ $(\sin\alpha\pm\cos\alpha)^2=1\pm2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

۱۰ $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$

۱۱ $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-3\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$

۱۲ $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

■ نسبت‌های مثلثاتی زاویه 2α :

۱۳ $\sin2\alpha=\begin{cases}2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\\ \dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}\end{cases}$

پایهٔ یازدهم ریاضی و تجربی

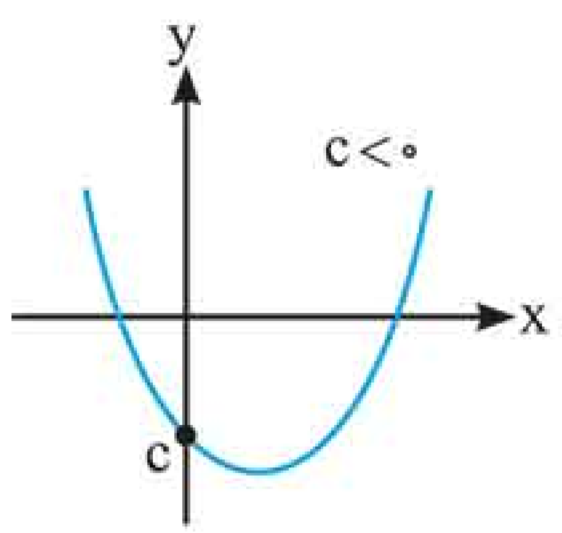
تابع درجهٔ دو:

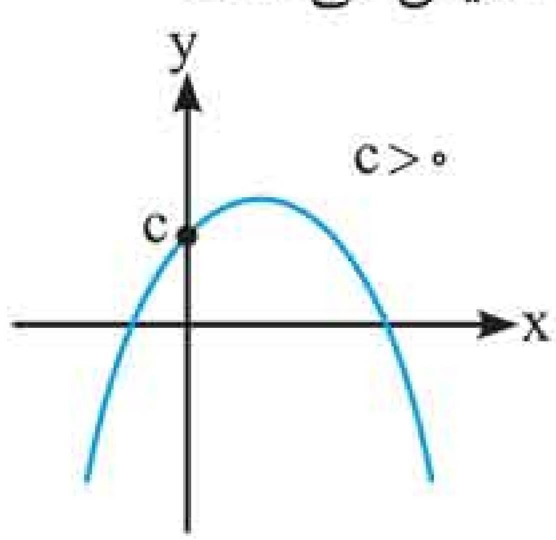
تابع بــه فرم $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ را کــه $a\neq ۰$ و c,b عضو اعداد حقیقی باشند تابع درجهٔ دو گویند.

نمودار تابع $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ به شکل یک سهمی قائم است که دو حالت دارد:

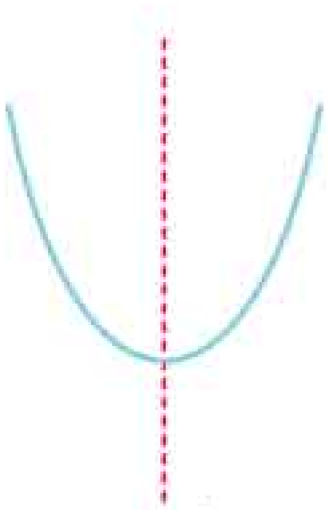
انواع سهمی درجهٔ دوم	ویژگی‌ها		نمودار
$a>۰$	دهانهٔ سهمی رو به بالا	مینیمم دارد	
$a<۰$	دهانهٔ سهمی رو به پایین	ماکزیمم دارد	

محل برخورد منحنی با محور عرض‌ها را عرض از مبدأ تابع می‌نامند و آن را با c نمایش می‌دهند.



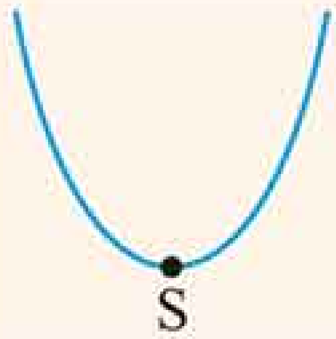
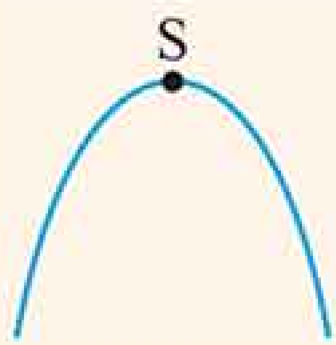


منحنی $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ دارای محور تقارنی به معادلهٔ $x=-\frac{b}{۲a}$ است.



$x=-\frac{b}{۲a}$

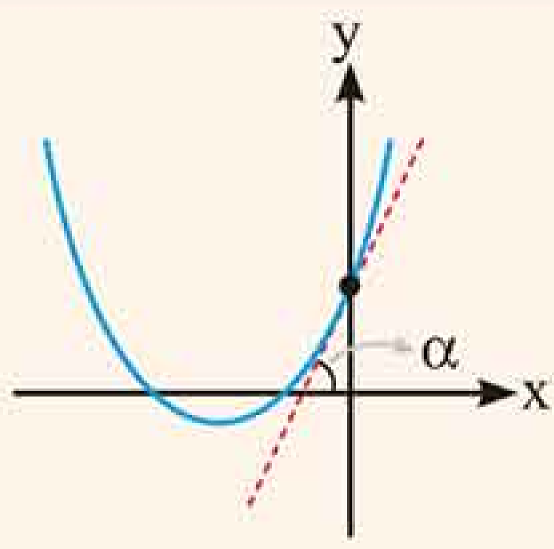
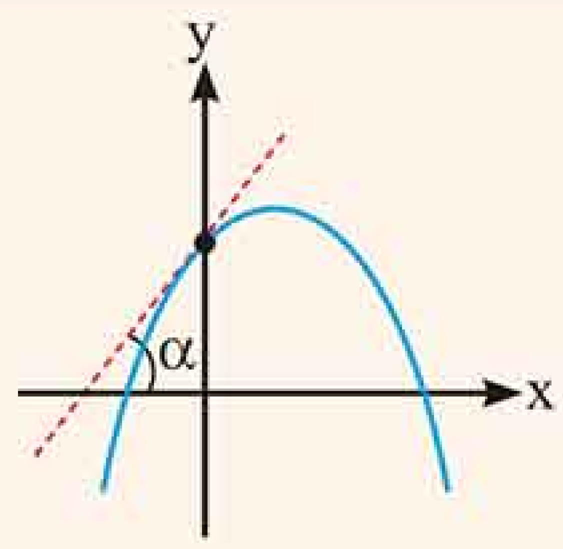
محل برخورد محور تقارن سهمی $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ با نمودار آن، رأس سهمی است.

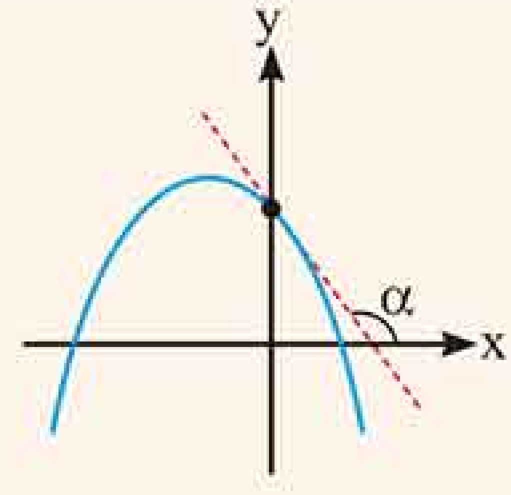
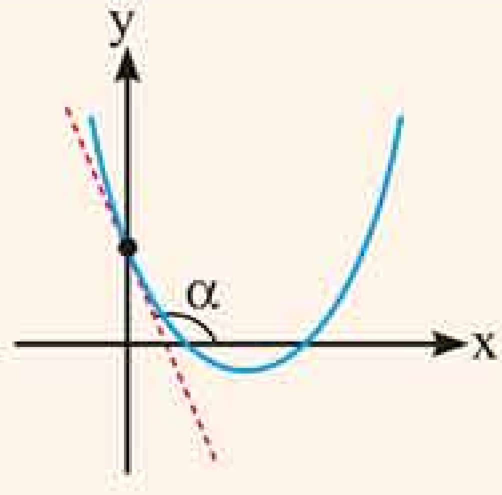
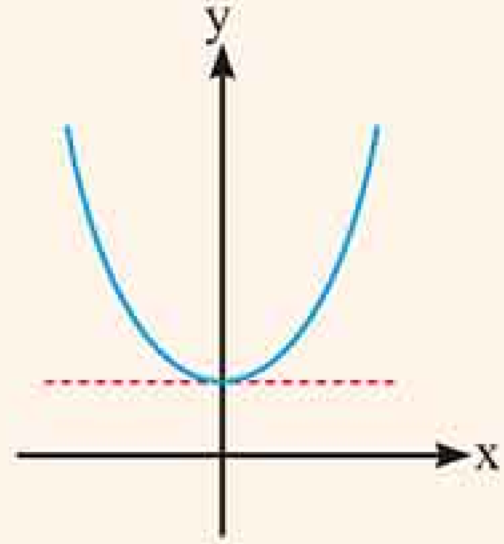
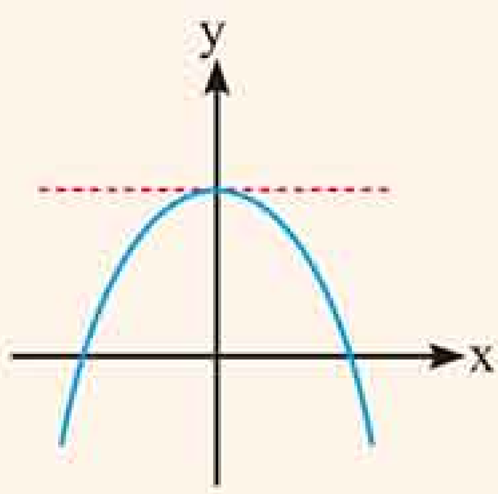
اگر	نوع رأس	مختصات رأس	نمودار
$a>۰$	مینیمم (کمترین عرض)	$s(\frac{-b}{۲a},\frac{-\Delta}{۴a})$	
$a<۰$	ماکزیمم (بیشترین عرض)	$s(\frac{-b}{۲a},\frac{-\Delta}{۴a})$	

در تابـع درجهٔ دوم به فـرم $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ از روی نمودار می‌توان علامت b را به‌صورت زیر تعیین نمود.

خط مماس بر نمودار در نقطهٔ برخورد با محور عرض‌ها رسم می‌کنیم. شیب این خط سه حالت دارد:

$$\begin{cases} b>۰ \Rightarrow \text{شیب خط مثبت} \\ b=۰ \Rightarrow \text{شیب خط صفر} \\ b<۰ \Rightarrow \text{شیب خط منفی} \end{cases}$$

 $m=\tan\alpha>۰$	 $m=\tan\alpha>۰$	$b>۰$

$b<۰$	 $m=\tan\alpha<۰$	 $m=\tan\alpha<۰$
$b=۰$	 $m=۰$	 $m=۰$

برای به‌دست آوردن طول و عرض رأسی سهمی می‌توان:

طول رأس سهمی $x=\frac{-b}{۲a}$

عرض رأس سهمی:
- روش(۱): جای‌گذاری $x=\frac{-b}{۲a}$ در تابع $f(x)$ مقدار عرض را می‌یابیم
- روش(۲): $y=\frac{-\Delta}{۴a}$

سـهمی درجهٔ دوم را می‌توان به فرم $f(x)=a(x-k)^{۲}+c$ نیز نشان داد در این حالت داریم:

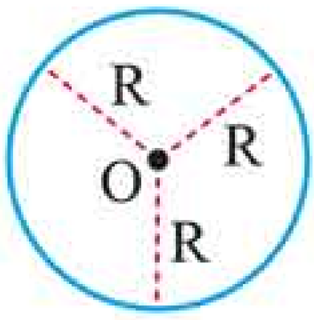
$$\begin{cases} a>۰ \rightarrow \text{مینیمم داریم} \rightarrow \text{رأس مینیمم } s(k\,,c) \\ a<۰ \rightarrow \text{ماکزیمم داریم} \rightarrow \text{رأس ماکزیمم } s(k\,,c) \end{cases}$$

و در این حالت معادلهٔ خط تقارن برابر $x=k$ است.

فصل ۱۵
هندسه

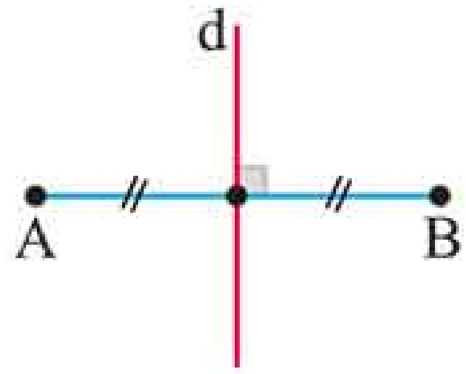
بخش اول

ترسیم‌های هندسی و استدلال



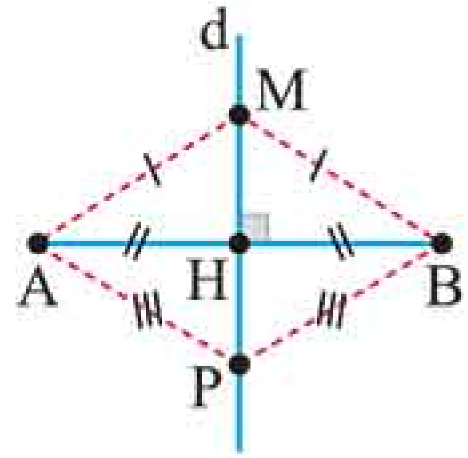
دایره: مجموعه نقاطی از صفحه است که از یک نقطهٔ ثابت (مرکز) به فاصله‌ای ثابت (شعاع) قرار دارند.

عمودمنصف یک پاره‌خط: خطی است که بر یک پاره‌خط عمود باشد و آن را نصف کند.



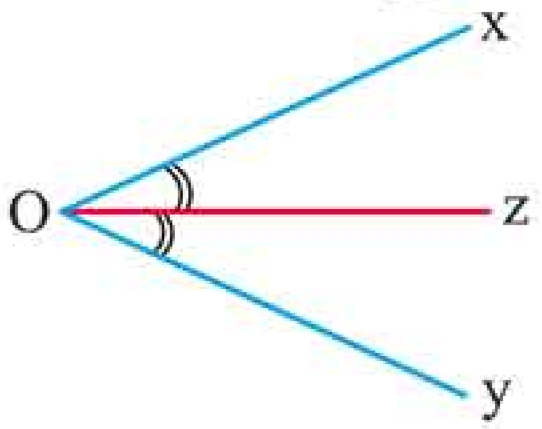
d عمودمنصف AB

هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است و برعکس هر نقطه که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد.



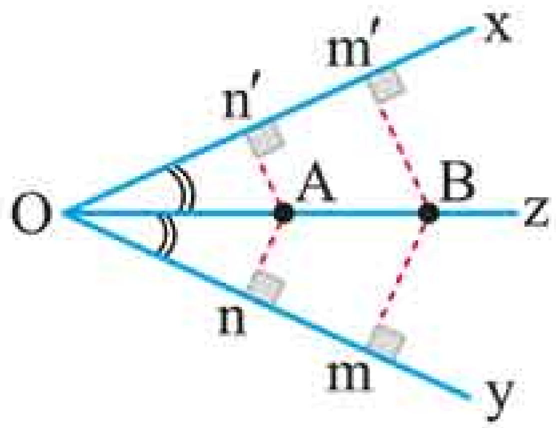
$$MA = MB \ , \ PA = PB \ , \ \dots$$

نیمساز یک زاویه: نیم‌خطی است که زاویه را نصف می‌کند.



oz نیمساز $x\hat{o}y$ است. $\Leftrightarrow x\hat{o}z = y\hat{o}z$

هر نقطه که روی نیمساز قرار داشته باشد، از دو ضلع آن به یک فاصله است و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.



$An = An' , Bm = Bm' , \ldots$

شرط وجود مثلث: سه پاره‌خط a ، b و c می‌توانند اضلاع یک مثلث باشند هرگاه:

$$\begin{cases} |b-c| < a < b+c \\ |a-c| < b < a+c \\ |a-b| < c < a+b \end{cases}$$

در مثلث ABC ، با میانه‌های m_a ، m_b و m_c و ارتفاع‌های h_a ، h_b و h_c که به ترتیب وارد بر ضلع‌های a ، b و c هستند داریم:

$$\frac{|b-c|}{۲} < m_a < \frac{b+c}{۲}$$

$$\frac{|a-c|}{۲} < m_b < \frac{a+c}{۲}$$

پایهٔ دهم ریاضی

$$\frac{|a-b|}{۲} < m_c < \frac{a+b}{۲}$$

$$h_a < \frac{b+c}{۲} \;,\; h_b < \frac{a+c}{۲} \;,\; h_c < \frac{a+b}{۲}$$

در هر مثلث دلخواه، همواره نامساوی زیر برقرار است: (P محیط مثلث)

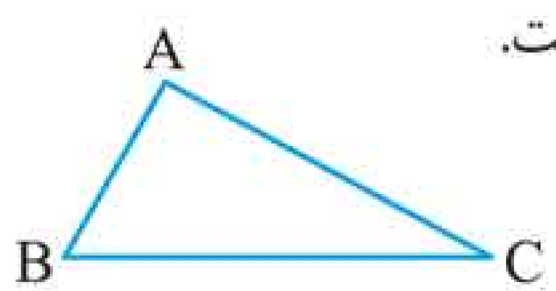
$$\frac{۱}{۲}P > \text{بزرگ‌ترین ضلع مثلث} > \frac{۱}{۳}P > \text{کوچک‌ترین ضلع مثلث} > ۰$$

اگر از نقطه‌ای دلخواه مانند M درون مثلث به سه رأس آن وصل کنیم، همواره: (P محیط مثلث)

$$\frac{P}{۲} < MA + MB + MC < P$$

پایهٔ هفتم

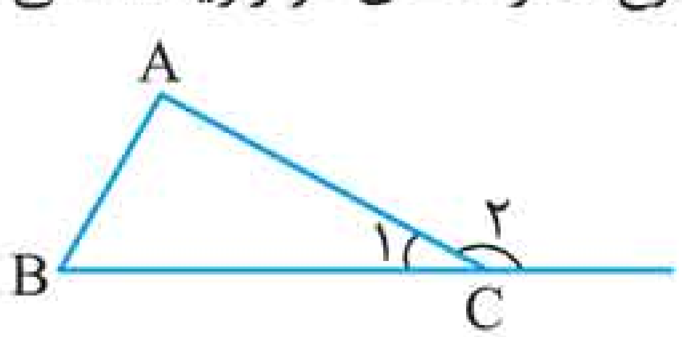
مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث ۱۸۰° است.



$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = ۱۸۰^\circ$$

پایهٔ هشتم

اندازهٔ هر زاویهٔ خارجی مثلث با مجموع اندازه‌های دو زاویهٔ داخلی غیرمجاورش برابر است.



$$\widehat{C}_۲ = \widehat{A} + \widehat{B}$$

پایهٔ دهم ریاضی

هر زاویهٔ خارجی مثلث از هر زاویهٔ داخلی غیرمجاورش بزرگ‌تر است.

در شکل بالا : $\widehat{C}_۲ > \widehat{A} \;,\; \widehat{C}_۲ > \widehat{B} \;,\; \dots$

نیمسازهای هرمثلث همرسند و نقطهٔ همرسی سه نیمساز زاویه‌های داخلی هر مثلث: از سه ضلع مثلث به یک فاصله است و همواره درون مثلث قرار دارد.

عمودمنصف‌های اضلاع هر مثلث همرس‌اند و نقطهٔ همرسی آن:

۱ اگر مثلث قائم‌الزاویه باشد، وسط وتر مثلث

۲ اگر مثلث زاویه‌ای منفرجه داشته باشد، بیرون مثلث

۳ اگر مثلث زاویه‌ای منفرجه نداشته باشد، داخل مثلث

سه ارتفاع مثلث همرس‌اند و نقطهٔ همرسی آن‌ها:

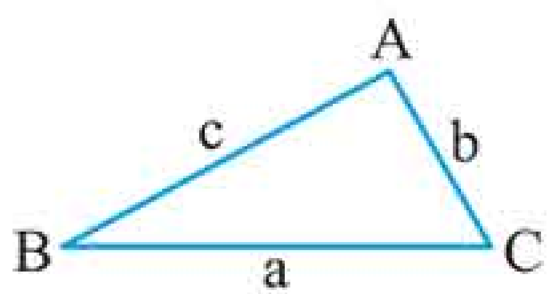
۱ اگر مثلث قائم‌الزاویه باشد، روی رأس قائم

۲ اگر مثلث زاویه‌ای منفرجه داشته باشد، بیرون مثلث

۳ اگر مثلث زاویه‌ای منفرجه نداشته باشد، داخل مثلث

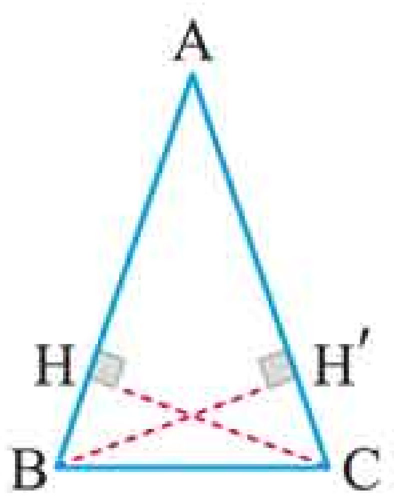
تنها در مثلث متساوی‌الاضلاع نقطهٔ همرسی نیمسازهای داخلی، عمودمنصف‌ها و ارتفاع‌ها بر هم منطبق است.

اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، زاویهٔ مقابل به ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از زاویهٔ مقابل به‌ضلع کوچک‌تر و برعکس.



$$\widehat{A} > \widehat{B} \Leftrightarrow a > b$$

در یک مثلث دو ضلع با هم برابرند اگر و تنها اگر ارتفاع‌های نظیر آن دو ضلع با هم برابر باشند.



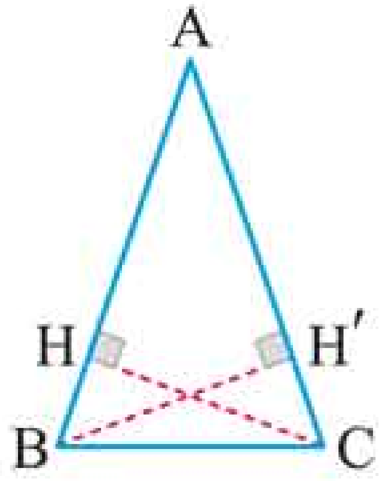
$$AB = AC \Leftrightarrow BH' = CH$$

یک مثلث متساوی‌الساقین است، اگر و تنها اگر دو میانه برابر داشته باشد.

یک مثلث متساوی‌الساقین است، اگر و تنها اگر اندازهٔ نیمسازهای دو زاویهٔ داخلی آن برابر باشند.

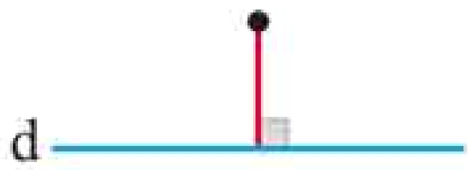
یک مثلث متساوی‌الساقین است، اگر و تنها اگر میانه، ارتفاع و نیمساز

داخلی نظیر یک رأس بر هم منطبق باشند.

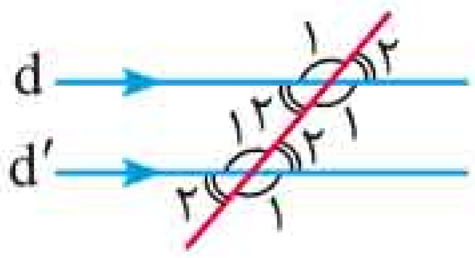


میانه، ارتفاع و نیمساز AH

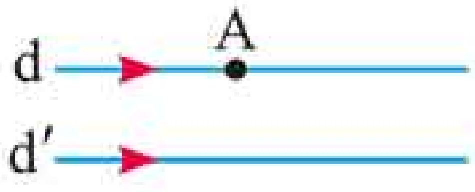
از یـــک نقطـــه غیرواقع بر یک خط نمی‌توان بیـــش از یک عمود بر آن رسم کرد.



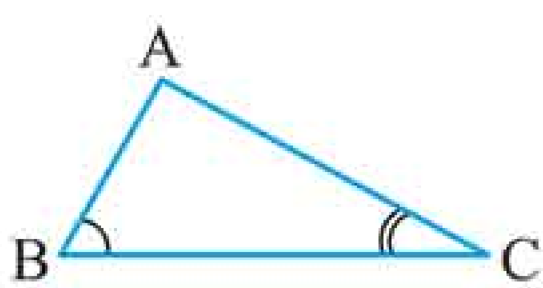
خطی که یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را نیز قطع می‌کند.
در این حالت زوایای حاده با هم و زوایای منفرجه با هم برابرند.
در شکل تمام زوایای «۱» با هم و زوایای «۲» با هم برابند



از یک نقطـــه غیرواقع بر یک خط، فقط یک خط موازی با آن می‌توان رسم کرد.

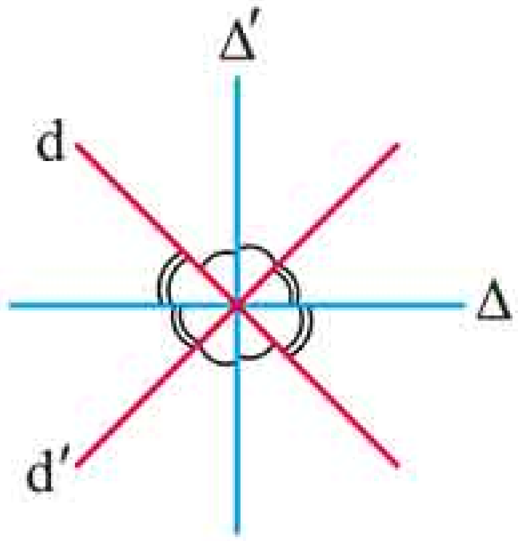


در هـــر مثلث، اگر دو ضلع نابرابر باشـــند، زاویه‌های روبه‌رو به آن‌ها نیز نابرابرند و برعکس.

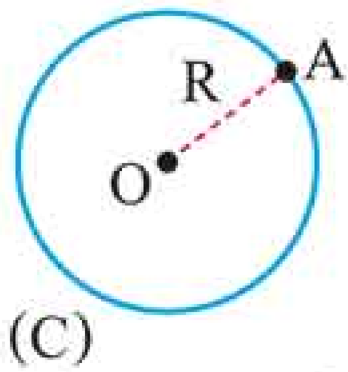


$$AB \neq AC \Leftrightarrow \widehat{B} \neq \widehat{C}$$

اســتدلال اســتقرایی: نتیجه‌گیری کلی بر مبنـــای مجموعهٔ محدودی از مشاهدات استدلال استقرایی نام دارد.



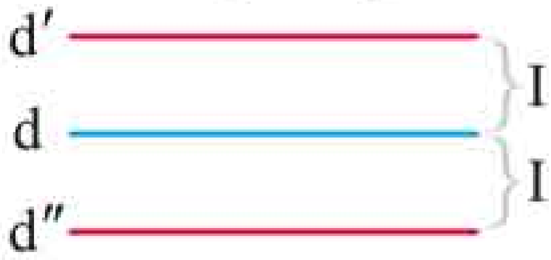
مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع به یک فاصله‌اند، نیمسازهای زاویه‌های بین دو خط متقاطع است.



۳ دایره، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از یک نقطهٔ ثابت در همان صفحه، به یک فاصله‌اند. (نقطهٔ ثابت، مرکز دایره و فاصلهٔ مورد نظر، شعاع دایره است).

$$\forall A; A \in (C) \Leftrightarrow OA = R$$

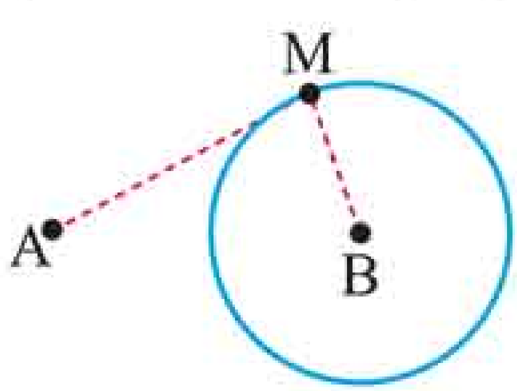
۴ مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط معین d در صفحه به فاصلهٔ معلوم l هستند، دو خط راست موازی با d و در دو طرف آن به فاصلهٔ l از آن هستند.



۵ مکان هندسی نقاطی از صفحه، که از دو خط موازی به یک فاصله‌اند، یک خط راست موازی با آن دو خط است که از فاصلهٔ بین آن دو خط می‌گذرد.

۶ مکان هندسی مرکز دایره‌های به شعاع ثابت R، که بر خط ثابت d در صفحه، مماس‌اند، دو خط راست موازی با خط d و در دو طرف آن و به فاصلهٔ R از آن هستند.

۷ مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصلهٔ آن‌ها از نقطهٔ ثابت A در صفحه، k برابر فاصلهٔ آن‌ها از نقطهٔ ثابت B در همان صفحه است، یک دایره است.

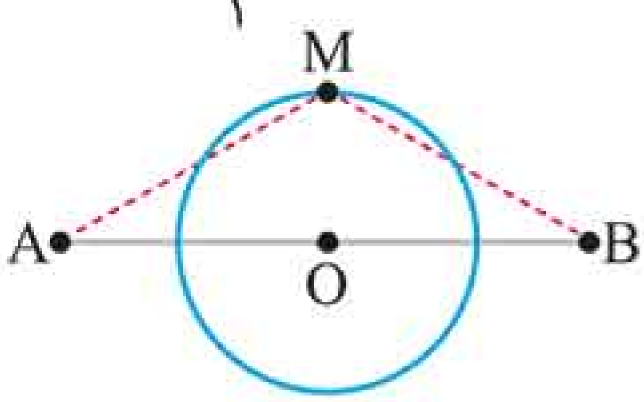


$(k \in \mathbb{R}^+ , k \neq ۱)$

$$MB = k \cdot MA \quad \text{یا} \quad \frac{MB}{MA} = k$$

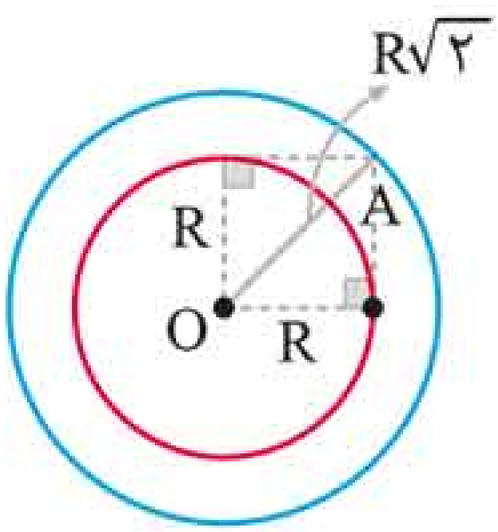
اگر $k = ۱$ باشد، این مکان هندسی یک خط است که همان عمودمنصف پاره‌خط AB است.

۸ مکان هندسی نقاطی از صفحه، که مجموع مربع‌های فاصله‌های آن‌ها از دو نقطهٔ ثابت A و B در همان صفحه، برابر با مقدار ثابت k $(k > \frac{AB^۲}{۲}, k \in \mathbb{R}^+)$ است، یک دایره است.



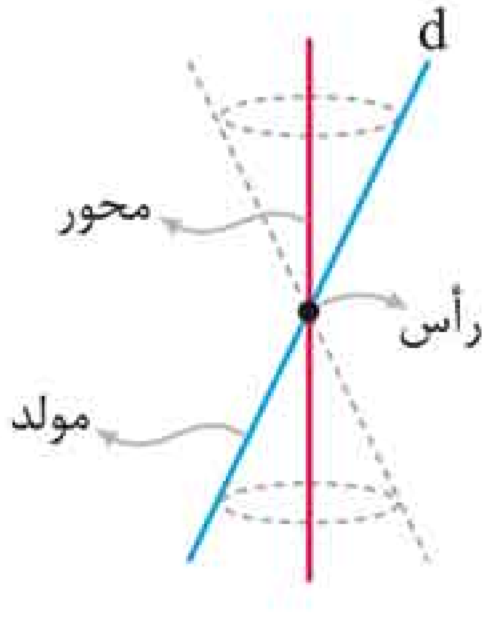
$$MA^۲ + MB^۲ = k$$

۹ مکان هندسی نقاطی از صفحه، که از آن نقاط می‌توان دو مماس عمود بر هم بر دایره رسم کرد، دایره‌ای است هم‌مرکز با دایره اولیه، که شعاع آن $\sqrt{۲}$ برابر شعاع دایرهٔ اولیه است.



مسائل ترکیبی: اگر $S_۱$ مکان هندسی نقاطی با ویژگی $P_۱$ و $S_۲$ مکان هندسی نقاطی با ویژگی $P_۲$ باشد، مجموعه نقاطی که هر دو ویژگی $P_۱$ و $P_۲$ را دارند، عبارت است از: $S_۱ \cap S_۲$

رویهٔ مخروطی (سطح مخروطی): برای دو خط متقاطع (و غیرعمود) در فضا، سطح حاصل از دوران یکی از خط‌ها حول خط دیگر را رویهٔ مخروطی گویند، خط دوران کننده را مولد، خط ثابت را محور و نقطهٔ تقاطع آن‌ها را رأس سطح مخروطی گویند.



پایهٔ دوازدهم ریاضی

هندسه

پایهٔ دوازدهم ریاضی و تجربی

آن‌گاه: $a^{p-1} \overset{p}{\equiv} 1$

کلاس‌های هم‌نهشتی: مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن‌ها بر عدد طبیعی m برابر با r است، کلاس هم‌نهشتی r به پیمانهٔ m نامیده می‌شود.

$$[r]_m = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \overset{m}{\equiv} r \text{ یا } x = mk + r\}$$

نمایش اعداد طبیعی در جدول ارزش مکانی(مبنای ۱۰):

اگر $a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$ یک عدد $(n+1)$ رقمی باشد آن‌گاه:

$$a = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \dots + a_1 \times 10^1 + a_0 \times 10^0$$

در مبنای ۱۰، هر رقم مقدار از صفر تا ۹ را می‌تواند اختیار کند.

۱ $a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow{n|m} a \overset{n}{\equiv} b \quad (n \in \mathbb{N})$

۲ $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow (a, m) = (b, m)$

۳ $$\begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \\ a \overset{n}{\equiv} b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \overset{(m, n)}{\equiv} b \\ a \overset{[m, n]}{\equiv} b \end{cases}$$

۴ $$\begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \\ a \overset{n}{\equiv} b \end{cases} \xrightarrow{(m, n)=1} a \overset{mn}{\equiv} b$$

۵ $$ac \overset{m}{\equiv} bc \xrightarrow[(m, c)=d]{\div c} a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$$

قاعده‌های بخش‌پذیری مهم

۱ بخش‌پذیری بر ۳ و ۹:

$$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0} \overset{3 \text{ یا } 9}{\equiv} \underbrace{a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0}_{\text{مجموع ارقام}}$$

۲ بخش‌پذیری بر ۱۱

$$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0} \overset{11}{\equiv} a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots$$

۳ بخش‌پذیری بر ۸

$$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0} \overset{8}{\equiv} \overline{a_2 a_1 a_0}$$

۴ بخش‌پذیری بر ۴

$$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0} \overset{4}{\equiv} \overline{a_1 a_0}$$

۵ بخش‌پذیری بر ۲، ۵ و ۱۰

$$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0} \overset{2 \text{ یا } 5 \text{ یا } 10}{\equiv} a_0$$

قضیهٔ نیوتن: اضافه یا کم کردن مضرب‌های عدد ۴ در توان هر عدد طبیعی، رقم یکان آن عدد را تغییر نمی‌دهد.

$$a^1 \overset{10}{\equiv} a^5 \overset{10}{\equiv} a^9 \overset{10}{\equiv} \ldots$$

معادلهٔ هم‌نهشتی

یک هم‌نهشتی به‌صورت $ax \overset{m}{\equiv} b$ $(a\,,\, b \in \mathbb{Z}\,,\, m \in \mathbb{N})$ با وجود مجهول x، معادلهٔ هم‌نهشتی نامیده می‌شود. منظور از حل این معادله، پیدا کردن همهٔ اعداد صحیحی است که به جای x در معادله صدق می‌کنند.

معادلهٔ هم‌نهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ جواب دارد اگر و تنها اگر $(a\,,\, m) \mid b$

پایهٔ دوازدهم ریاضی

آشنایی با نظریه اعداد

فصل ۲۰
ترکیبیات (شمارش)

اصول اساسی شمارش

اصل ضرب: اگر عملی طی دو مرحله، اولی به m طریق و دومی به n طریق صورت پذیرد، کل آن عمل به $m \times n$ طریق انجام می‌شود.

اصل جمع: اگر برای انجام عملی دو روش وجود داشته باشد و روش اول به m طریق و روش دوم به n طریق انجام شود آن‌گاه برای انجام آن عمل به روش اول یا دوم $m + n$ حالت وجود دارد.

■ فاکتوریل: حاصل‌ضرب اعداد طبیعی متوالی با شروع از یک و خاتمه با n را با نماد $n!$ نمایش می‌دهیم و آن را n فاکتوریل می‌خوانیم.

$$n! = n(n-۱)(n-۲)...(۲)(۱)$$

$$n! = n(n-۱)!$$

$$۰! = ۱ \qquad ۱! = ۱$$

جایگشت: بـه هر آرایش از قرارگیری چند شـی در یـک ردیف، یک جایگشـت خطی از آن اشیاء گفته می‌شود. تعداد جایگشت‌های خطی n شیءِ دو به دو متمایز برابر است با $n!$.

تبدیل و ترکیب:

■ تبدیل: یک تبدیل r تایی از یک مجموعهٔ n عضوی یک دنبالهٔ r تایی از میان اعضای آن مجموعه است.

تعداد تبدیلات r تایی n شـی دو به دو متمایز را با نماد $p(n,r)$ یا $(n)_r$ نمایش می‌دهیم و داریم:

$$p(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

ترکیب: یک ترکیب r تایی از میان n شی متمایز یک زیرمجموعهٔ r تایی از میان آن‌ها است تعداد ترکیبات r تایی n شیء را با نماد $c\,(n,r)$ یا $\binom{n}{r}$ نمایش می‌دهیم و داریم:

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

جایگشت‌های دایره‌ای: تعداد حالت‌های قرارگرفتن n شیء متمایز بر روی یک مسیر دایره‌ای (یا یک مسیر بسته) برابر است با: $(n-۱)!$

تعداد حالت‌های انتخاب r شیء از میان n شیء به‌طوری که:

الف شامل k شیء مشخص باشد برابر است با: $\binom{n-k}{r-k}$

ب فاقد k شیء متمایز باشد برابر است با: $\binom{n-k}{r}$

دو قاعدهٔ مهم:

۱ $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$

۲ $\binom{n-۱}{r-۱}+\binom{n-۱}{r}=\binom{n}{r}$

جایگشت با تکرار: تعداد جایگشت‌های n شیء که r تای آن‌ها یکسان باشند برابر است با $\frac{n!}{r!}$.

تعداد جایگشت‌های n شیء دو به دو متمایز که ترتیب k تای آن‌ها معلوم باشد برابر است با: $\frac{n!}{k!}$.

تعداد افرازهای ۲ عضوی یک مجموعهٔ n عضوی برابر است با $۲^{n-۱}-۱$.

تعداد افرازهای $n-۱$ عضوی یک مجموعهٔ n عضوی برابر است با $\binom{n}{۲}$.

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_۱+x_۲+\cdots+x_k=n$ برابر است با $\binom{n+k-۱}{k-۱}$.

تعداد جواب‌های طبیعی معادلهٔ $x_۱+x_۲+\cdots+x_k=n$ برابر است با $\binom{n-۱}{k-۱}$.

مربع‌های لاتین

هر مربع لاتین از مرتبهٔ n در یک ماتریس $n\times n$ است، که درایه‌های آن با اعداد $۱,۲,۳,\ldots,n$ پر شده‌اند، به‌گونه‌ای که هر کدام دقیقاً یکبار در هر سطر و ستون ظاهر شوند.

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

مربع لاتین مرتبهٔ (۳)

۱	۲
۲	۱

مربع لاتین مرتبه (۲)

۱ در مربع لاتین $n\times n$ که با اعداد $۱,۲,\ldots,n$ را پر شده است، در هیچ سطر و ستونی عدد تکراری وجود ندارد.

۲ با تعویض جای دو سطر یا دو ستون از یک مربع لاتین، مربع لاتین جدیدی حاصل خواهد شد مثلاً یک جایگشت روی $۱,۲,۳$ به‌صورت $۳,۱,۲$ است.

مربع لاتین چرخشی: یک مربع $n\times n$ که سطر اول آن با اعداد

تعمیم قانون ضرب احتمال برای سه پیشامد

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \times P(A_2 \mid A_1) \times P(A_3 \mid (A_1 \cap A_2))$$

قانون احتمال کل: اگر B_1 ، B_2 ، ... و B_n پیشامدهایی با احتمال ناصفر باشند که فضای نمونه را افراز می‌کنند. در این صورت برای هر پیشامد دلخواه A ، داریم:

$$P(A) = P(B_1)P(A \mid B_1) + P(B_2)P(A \mid B_2) + \cdots + P(B_n)P(A \mid B_n) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \mid B_i)$$

فرض کنید B پیشامدی باشد که $0 < P(B) < 1$ باشد با توجه به این‌که B و B' فضای S را افراز می‌کنند برای هر پیشامد دلخواه A ، داریم:

$$P(A) = P(B)P(A \mid B) + P(B')P(A \mid B')$$

قانون بیز (احتمال‌های پس از مشـاهده): فرض کنید B_1، B_2، $\cdots$ و B_n ، پیشامدهایی با احتمال ناصفر باشند که فضای نمونه‌ای را افراز می‌کنند. در این صورت، برای هر پیشامد دلخواه A و هر $i \le n$ داریم:

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{P(A)}$$

قانون بیز را می‌توان به‌صورت زیر نیز نوشت:

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B_k)P(A \mid B_k)}$$

توجـه کنیـد آن‌چه در مخرج آمــده، طبق قانون احتمــال کل همان $P(A)$ است.

پایهٔ یازدهم ریاضی و تجربی

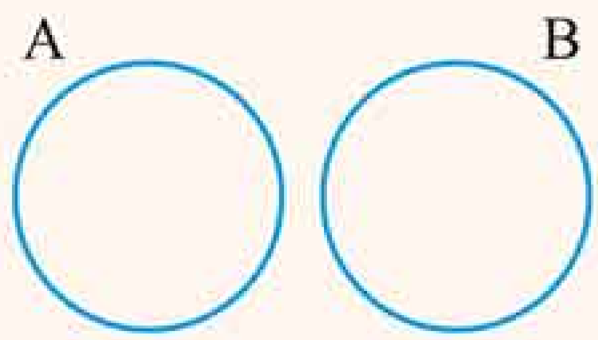
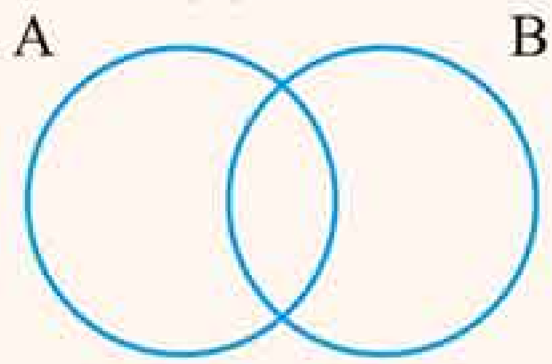
پایهٔ یازدهم ریاضی

پیشامدهای مستقل و وابسته: دو پیشامد دلخواه A و B را مستقل گوییم، هرگاه وقوع یکی از آن‌ها در احتمال وقوع دیگری تأثیری نداشته باشد.
به‌عبارت دیگر دو پیشامد A و B مستقل‌اند، اگر و تنها اگر:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

دو پیشامدی که مستقل نباشند، وابسته نامیده می‌شوند.
اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند:

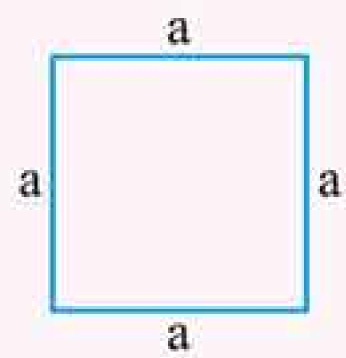
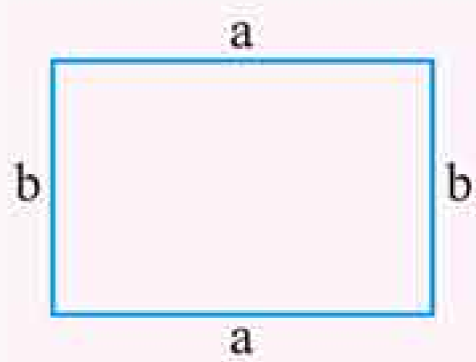
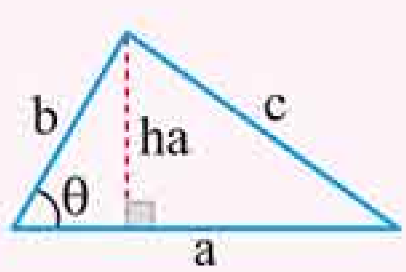
$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A).P(B)}{P(B)} = P(A)$$

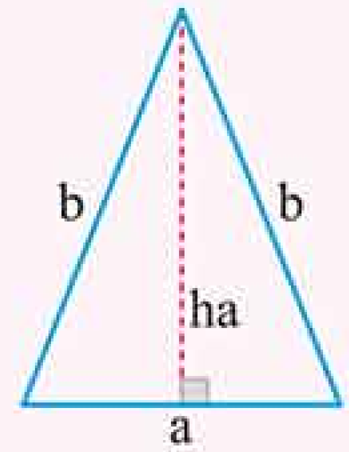
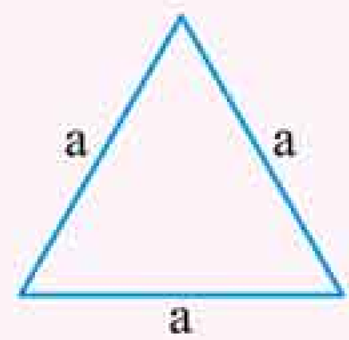
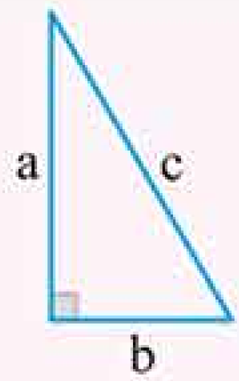
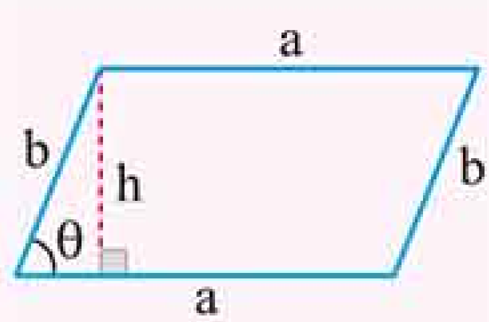
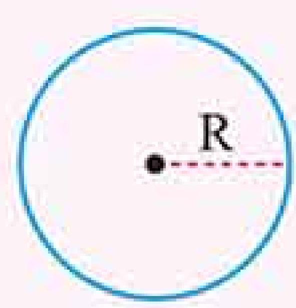
A و B دو پیشامد ناسازگارند	A و B دو پیشامد مستقل‌اند $(P(B) > 0$ و $P(A) > 0)$
$A \cap B = \varnothing$ 	$A \cap B \neq \varnothing$ 
$P(A \cap B) = 0$	$P(A \cap B) = P(A)P(B)$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$
نمی‌توانند با هم رخ بدهند (رخ‌دادن توأم آن‌ها غیرممکن است.)	می‌توانند با هم رخ بدهند (رخ‌دادن یکی تأثیری در رخ‌دادن دیگری ندارد.)

متمم‌گیری، استقلال پیشامدها را حفظ می‌کند:
اگر A و B دو پیشامد مستقل از یک فضای نمونه‌ای باشند، آن‌گاه:
الف A و B نیز دو پیشامد مستقل‌اند.

پیوست ۱
محیط، مساحت و حجم

الف شکل‌های دوبعدی: اگر مساحت آن‌ها را با S و محیط آن‌ها را با P نشان دهیم داریم:

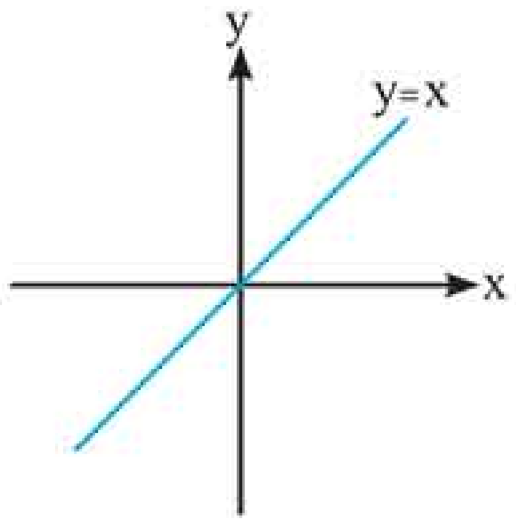
نام شکل	شکل	محیط = P و مساحت = S
مربع		$P = ۴a$ $S = a \times a = a^۲$
مستطیل		$P = ۲(a+b)$ $S = a.b$
مثلث		$P = a+b+c$ $S = \frac{a.h_a}{۲}$ $S = \frac{a.b.\sin\theta}{۲}$

مثلث متساوی الساقین		$P = a + ۲b$ $S = \frac{a.h_a}{۲}$
مثلث متساوی الاضلاع		$P = ۳a$ $S = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}$ ارتفاع $h = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a$
مثلث قائم الزاویه		$P = a + b + c$ $S = \frac{a.b}{۲}$
متوازی الاضلاع		$P = ۲(a + b)$ $S = a.h$ $S = a.b.\sin\theta$
دایره		$P = ۲\pi R \simeq ۲ \times ۳/۱۴ \times R$ $S = \pi R^{۲} \simeq ۳/۱۴ \times R \times R$

پیوست ۲
نمودارهای توابع مهم

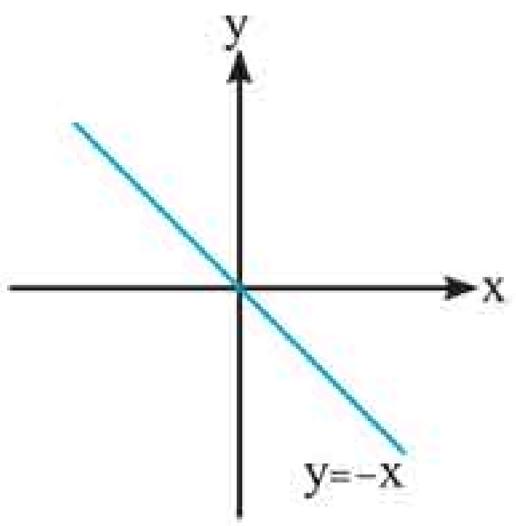
ضابطه، نمودار و دامنه و برد توابع معروف

۱ نیمساز ربع اول و سوم:



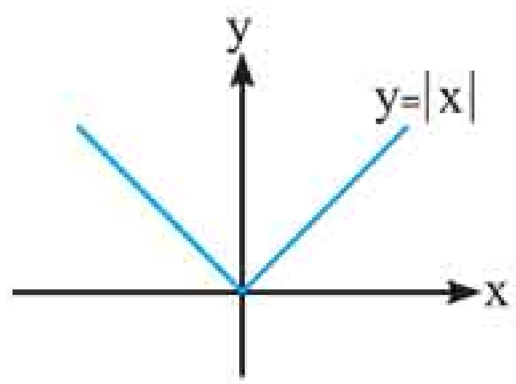
$$\begin{cases} D = \mathbb{R} \\ R = \mathbb{R} \end{cases}$$

۲ نیمساز ربع دوم و چهارم:

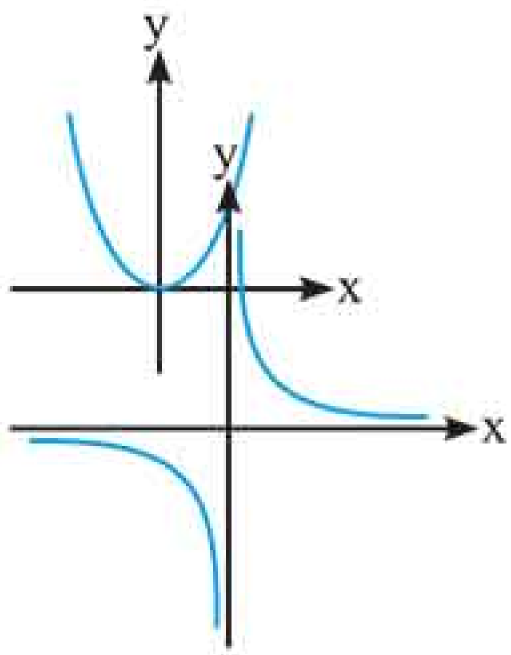


$$\begin{cases} D = \mathbb{R} \\ R = \mathbb{R} \end{cases}$$

۳ تابع $y = |x|$:



$$\begin{cases} D = \mathbb{R} \\ R = [0, +\infty] \end{cases}$$



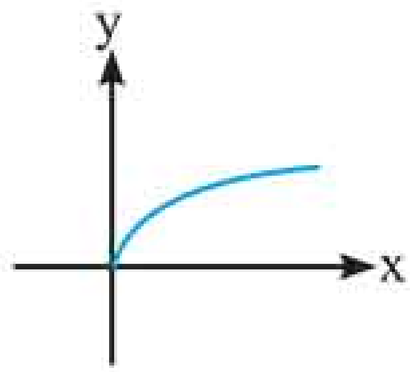
۴ تابع سهمی $y = x^{۲}$:

$$\begin{cases} D = \mathbb{R} \\ R = [\circ, +\infty] \end{cases}$$

۵ تابع هموگرافیک $y = \frac{۱}{x}$:

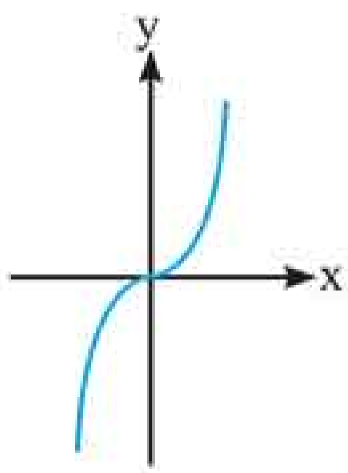
$$\begin{cases} D = \mathbb{R} - \{\circ\} \\ R = \mathbb{R} - \{\circ\} \end{cases}$$

۶ تابع $y = \sqrt{x}$ ریشهٔ دوم:



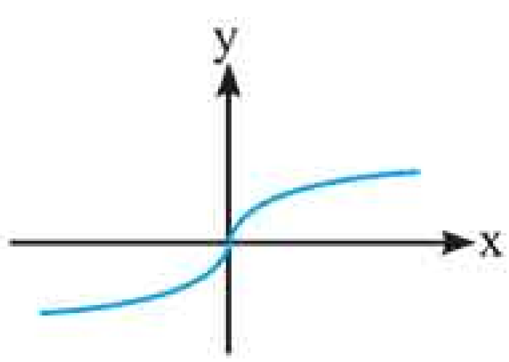
$$\begin{cases} D = [\circ, +\infty) \\ R = [\circ, +\infty) \end{cases}$$

۷ تابع $y = x^{۳}$:



$$\begin{cases} D = \mathbb{R} \\ R = \mathbb{R} \end{cases}$$

۸ تابع $y = \sqrt[۳]{x}$:



$$\begin{cases} D = \mathbb{R} \\ R = \mathbb{R} \end{cases}$$

۹ تابع نمایی $f(x) = a^{x}$: