فصل ۲

مثلثات

واحد ۳
مثلثات

- مثلثات در مثلث قائم الزاویه
- مثلثات در مثلث دایره مثلثاتی
- نسبت‌های مثلثاتی زوایای مکمل، متمم و قرینه
- مساحت مثلث
- رابطهٔ سینوس‌ها
- رابطه کسینوس‌ها

از این مبحث در کنکور ریاضی و تجربی ۲ یا ۳ تست مستقیم وجود دارد و البته تست‌های زیادی هم هستند که به صورت ترکیبی با مثلثات داده شده‌اند و در صورت تسلط نداشتن بر این مبحث، آن‌ها را نیز از دست خواهیم داد. به طور تقریبی می‌توان گفت، تست‌های مثلثات (خالص و ترکیبی) حداقل ۲۰ درصد ریاضی کنکور را تشکیل می‌دهند.

تقریباً در علوم بشری، شاخه‌ای نیست که از مثلثات بهره نگرفته باشد. به عنوان مثال در شیمی اتم‌های اکسیژن و نیتروژن فقط با زاویه معیّنی مولکول آب را تشکیل می‌دهند.

در علوم فضایی، فقط انحراف زاویهٔ پرتاب موشک به اندازهٔ کسری از درجه، مأموریت‌های چندین میلیارد دلاری را با شکست روبه‌رو می‌کند.

در صنعت، اگر زاویهٔ قرار گرفتن استاندارد محورهای متحرک به طور دقیق رعایت نشود، قطعات خودرو خیلی زودتر فرسوده می‌شوند و هزاران مورد دیگر که در اطراف ما فراوان دیده می‌شود.

پیش‌آزمون

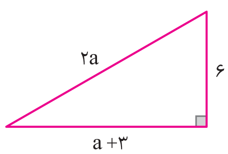
۱. با فرض $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$، حاصل عبارت $\sin^4\theta - \cos^4\theta + \frac{1}{1+\tan^2\theta}$ کدام است؟ (سراسری انسانی – ۸۶)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{4}{9}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۲. نردبانی با طول ۱۰ متر به دیواری تکیه کرده و زاویهٔ نردبان با سطح زمین 60° است. فاصلهٔ نوک نردبان تا زمین برحسب متر کدام است؟ (آزمایشی سنجش انسانی – ۹۱)

۱) $4\sqrt{3}$ ۲) $5\sqrt{3}$ ۳) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ ۴) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

۳. در شکل روبه‌رو، کسینوس کوچک‌ترین زاویهٔ حاده چقدر است؟



۱) ۰/۴ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۶ ۴) ۰/۸

۴. در متوازی‌الاضلاعی اندازهٔ دو قطر ۱۲ و ۸ واحد و زاویهٔ بین دو قطر 135° است. مساحت متوازی‌الاضلاع چند برابر $\sqrt{2}$ است؟ (سراسری تجربی – ۹۲)

۱) ۱۸ ۲) ۲۴ ۳) ۳۲ ۴) ۳۶

۵. خط d به معادلهٔ $5 - 3y + \sqrt{3}x = 0$ با جهت مثبت محور xها چه زاویه‌ای می‌سازد؟

۱) 75° ۲) 60° ۳) 45° ۴) 30°

۶. اگر $\sin\alpha.\cos\alpha > 0$ و $\cos\alpha.\tan\alpha < 0$ باشد، انتهای کمان α در کدام ناحیهٔ مثلثاتی است؟

۱) اوّل ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۷. اگر $-60^\circ < \hat{\alpha} < 60^\circ$ و $\cos\alpha = \frac{m-1}{2}$ باشد، حدود m کدام است؟

۱) $2 < m \le 3$ ۲) $2 < m < 3$ ۳) $2 \le m < 3$ ۴) $2 \le m \le 3$

۸. اگر $\hat{\alpha}$ زاویه‌ای در موقعیت استاندارد باشد و نقطهٔ $P(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ نقطهٔ انتهایی کمان روبه‌روی α باشد، اندازهٔ $\hat{\alpha}$ برحسب رادیان چقدر است؟

۱) $\frac{2\pi}{3}$ ۲) $\frac{3\pi}{4}$ ۳) $\frac{5\pi}{4}$ ۴) $\frac{4\pi}{5}$

۹. اگر $\tan 20^\circ = 0/36$ باشد، حاصل عبارت $A = \frac{\sin 160^\circ - \cos 200^\circ}{\cos 110^\circ + \sin 70^\circ}$ کدام است؟ (سراسری تجربی – ۸۴)

۱) $\frac{9}{4}$ ۲) $\frac{15}{8}$ ۳) $\frac{17}{8}$ ۴) $\frac{31}{16}$

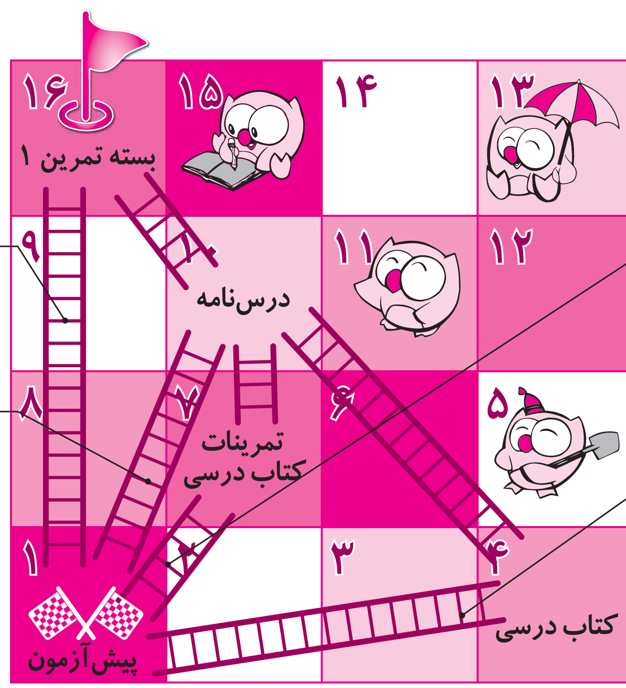
۱۰. حاصل عبارت $A = 2\cos(\frac{-125\pi}{4}) + 3\tan(\frac{125\pi}{4}) + 4\cot(\frac{-125\pi}{4})$ کدام است؟

۱) $-\sqrt{2}-1$ ۲) $-\sqrt{2}+1$ ۳) $\sqrt{2}-1$ ۴) $\sqrt{2}+1$

۱. ۱ ۲ ۳ ۴	۳. ۱ ۲ ۳ ۴	۵. ۱ ۲ ۳ ۴	۷. ۱ ۲ ۳ ۴	۹. ۱ ۲ ۳ ۴
۲. ۱ ۲ ۳ ۴	۴. ۱ ۲ ۳ ۴	۶. ۱ ۲ ۳ ۴	۸. ۱ ۲ ۳ ۴	۱۰. ۱ ۲ ۳ ۴

توجه: حالا با توجه به تعداد سؤالاتی که پاسخ صحیح داده‌اید، از یکی از نردبان‌های نشان داده شده در نقشه بالا بروید تا به خانه بعدی برسید و به مطالعه عنوان آمده در آن خانه بپردازید.

نقشه راه دانش‌آموز



■ در صورتی که به **همهٔ سؤالات** به طور صحیح پاسخ داده‌اید، **نیازی به مطالعهٔ درس‌نامه ندارید** و می‌توانید وارد **بستهٔ تمرین ۱** شوید.

■ در صورتی که به **حداقل ۸ سؤال** پاسخ صحیح داده‌اید، **پس از مطالعهٔ درس‌نامه** اجازه دارید وارد **بستهٔ تمرین ۱** شوید.

■ در صورتی که به **۶ یا ۷ سؤال** پاسخ صحیح داده‌اید، ابتدا **تمرینات کتاب درسی خود را مجدداً حل کرده** و سپس **درس‌نامه را مطالعه کنید** و بعد از آن اجازه دارید وارد **بستهٔ تمرین ۱** شوید.

■ در صورتی که **به کم‌تر از ۶ سؤال** پاسخ صحیح داده‌اید، ابتدا **کتاب درسی خود را مجدداً مطالعه کرده** و سپس **درس‌نامه را مطالعه کنید** و پس از آن اجازه دارید وارد **بستهٔ تمرین ۱** شوید.

شناسنامه سؤالات پیش‌آزمون

شماره سؤال	عنوان زیرموضوع	سطح سؤال	پاسخ
۱	مثلثات در مثلث قائم‌الزاویه		۴
۲	مثلثات در مثلث قائم‌الزاویه		۲
۳	مثلثات در مثلث قائم‌الزاویه		۴
۴	مثلثات در مثلث قائم‌الزاویه		۲
۵	مثلثات در مثلث قائم‌الزاویه		۴
۶	مثلثات در دایرهٔ مثلثاتی		۳
۷	مثلثات در دایرهٔ مثلثاتی		۱
۸	مثلثات در دایرهٔ مثلثاتی		۲
۹	نسبت‌های مثلثاتی زوایای مکمل، متمم و قرینه		۳
۱۰	نسبت‌های مثلثاتی زوایای مکمل، متمم و قرینه		۱

درس‌نامه

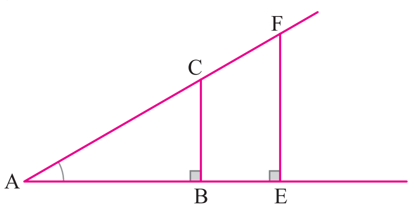
مثلثات در مثلث قائم‌الزاویه

کلمهٔ «مثلثات» در واقع ترجمهٔ کلمهٔ انگلیسی «trigonometry» است. این لغت ترکیبی از دو کلمه با ریشهٔ یونانی «trigonion» به معنی مثلث و «metric» به معنای اندازه‌گیری است. از این مقدمه به خوبی می‌فهمیم که موضوع مثلثات، بررسی روابط بین زوایا و اضلاع یک مثلث است. از سال قبل به خاطر داریم که اگر زوایای نظیر دو مثلث با هم برابر باشند و نسبت اضلاع متناظر آن‌ها نیز با هم برابر باشند، آن دو مثلث متشابه‌اند. از طرفی در هندسه ثابت می‌شود که «اگر دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، آن دو مثلث متشابه‌اند.» حال اگر دو مثلث قائم‌الزاویه باشند، برای متشابه بودنشان کافی است فقط یک زاویهٔ دیگرشان نیز مساوی باشد؛ یعنی، «در دو مثلث قائم‌الزاویه، اگر یک زاویهٔ حاده با زاویه حادهٔ نظیرش در مثلث دیگر برابر باشد، آن دو مثلث قائم‌الزاویه متشابه‌اند.»

با توجه به مطالب بالا، دیگر می‌توانیم وارد اصل موضوع شویم.

معرفی نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه

زاویهٔ A را در شکل زیر در نظر بگیرید. اگر از نقطه‌های B و E دو عمود رسم کنیم تا ضلع دیگر زاویهٔ A را به ترتیب در نقاط C و F قطع کنند، معلوم است که مثلث‌های قائم‌الزاویه ABC و AEF متشابه‌اند. (زیرا $\hat{A}$ در هر دو مشترک است.) پس می‌توانیم نسبت تشابه اضلاع آن‌ها را بنویسیم: $\frac{BC}{AC}=\frac{EF}{AF}$



نتیجه‌ای که از این رابطه می‌گیریم آن است که برای زاویهٔ معین A، نسبت طول ضلع مقابل به وتر مثلث، همواره مقداری ثابت است. این مقدار ثابت را سینوس زاویهٔ A می‌نامیم و با sin A نمایش می‌دهیم. پس داریم:

$$\sin A=\frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول وتر}}\to \sin A=\frac{BC}{AC}$$

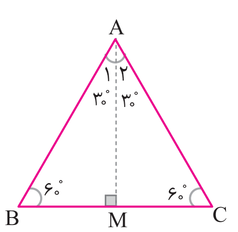
به طریق مشابه می‌توان مطالبی نظیر آن‌چه در مورد سینوس $\hat{A}$ بیان کردیم، برای سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $\hat{A}$ نیز بگوییم:

$$\cos A=\frac{\text{طول ضلع مجاور}}{\text{طول وتر}}\to \cos\hat{A}=\frac{AB}{AC}$$

$$\tan A=\frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول ضلع مجاور}}\to \tan A=\frac{BC}{AB}\to \tan A=\frac{\sin A}{\cos A}$$

$$\cot A=\frac{\text{طول ضلع مجاور}}{\text{طول ضلع مقابل}}\to \cot A=\frac{AB}{BC}\to \cot\ A=\frac{\cos A}{\sin A}\to \cot\ A=\frac{۱}{\tan A}$$

مثال: نسبت‌های مثلثاتی زوایای ۳۰° ، ۶۰° و ۴۵° را محاسبه کنید.



پاسخ: مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را به ضلع a واحد در نظر می‌گیریم: ($\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=۶۰^\circ$)

نیمساز زاویهٔ $\hat{A}$ را رسم می‌کنیم تا ضلع BC را در نقطهٔ M قطع کند. با دانستن این‌که در مثلث متساوی‌الاضلاع نیمساز $\hat{A}$ ، میانه و ارتفاع وارد بر ضلع BC نیز هست، می‌توانیم بنویسیم:

حال در مثلث قائم‌الزاویه ABM داریم:

$$\begin{cases} BM=CM=\frac{a}{۲}\ ,\ \hat{A}_۱=\hat{A}_۲=۳۰^\circ \\ AM=\frac{a\sqrt{۳}}{۲}\ (\text{با استفاده از رابطه فیثاغورس در } \overset{\triangle}{ABM}) \end{cases}$$

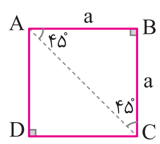
$$\sin B=\frac{AM}{AB}=\frac{\frac{a\sqrt{۳}}{۲}}{a}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\to \sin ۶۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\qquad \cos B=\frac{BM}{AB}=\frac{\frac{a}{۲}}{a}=\frac{۱}{۲}\to \cos ۶۰^\circ=\frac{۱}{۲}$$

$$\cot B = \frac{BM}{AM} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \to \cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan B = \frac{AM}{BM} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3} \to \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ 30° نیز مانند آنچه در مورد زاویهٔ 60° دیدیم، محاسبه می‌شود.

برای محاسبهٔ نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ 45° مربعی به ضلع a را در نظر گرفته، قطر آن را رسم می‌کنیم. معلوم است که مثلث ABC، مثلثی قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است. طول قطر را به کمک رابطهٔ فیثاغورس می‌یابیم.



$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \quad AC^2 = a^2 + a^2 \quad AC^2 = 2a^2 \to AC = a\sqrt{2}$$

در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم:

$$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2} \to \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \to \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cot A = \frac{AB}{BC} = 1 \to \cot 45^\circ = 1$$

$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a} = 1 \to \tan 45^\circ = 1$$

جواب‌های به‌دست‌آمده را در جدول زیر به صورت خلاصه نمایش می‌دهیم:

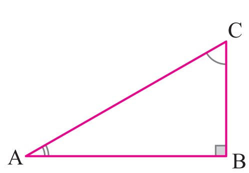
زاویه / نسبت مثلثاتی	30°	45°	60°
sinA	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos A	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan A	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
cot A	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

نکته: اگر با دقت به جدول به‌دست‌آمده توجه کنیم، پی به مطلب مهمی می‌بریم. مثلاً دیده می‌شود که $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ یا $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و ...؛ یعنی به طور کلی اگر مجموع دو زاویهٔ x و y، برابر با 90° باشد، یا به عبارت دیگر اگر x و y متمم باشند، سینوس یکی با کسینوس دیگری و همچنین تانژانت یکی با کتانژانت دیگری برابر است، پس می‌نویسیم:

اگر $x + y = 90^\circ \Rightarrow \sin x = \cos y \;,\; \cos x = \sin y \,,\, \tan x = \cot y \;,\; \cot x = \tan y$

اتحادهای مثلثاتی (روابط بین نسبت‌های مثلثاتی)

اگر بار دیگر به مثلث قائم‌الزاویه ABC که در آن نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ A را تعریف کردیم نگاه کنیم، داریم:



$$\sin^2 A + \cos^2 A = \frac{BC^2}{AC^2} + \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BC^2 + AB^2}{AC^2}$$

$$\xrightarrow{\text{طبق رابطهٔ فیثاغورس}} \sin^2 A + \cos^2 A = \frac{AC^2}{AC^2} = 1 \to \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad (1)$$

رابطهٔ (۱) که به ازای تمام زاویه‌هایی که می‌توانند به جای x قرار بگیرند برقرار است، یک اتحاد مثلثاتی بسیار مهم و اصلی است که به «اتحاد مادر» معروف است. از اتحاد مادر می‌توان اتحادهای بعدی را نتیجه گرفت:

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1 \rightarrow \sin^2 x=1-\cos^2 x \ , \ \cos^2 x=1-\sin^2 x$$

اگر طرفین اتحاد مادر را بر $\cos^2 x$ تقسیم کنیم ($\cos x \neq 0$) داریم:

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x} \rightarrow (\frac{\sin x}{\cos x})^2+1=\frac{1}{\cos^2 x} \rightarrow 1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$$

به طور مشابه اگر طرفین اتحاد مادر را بر $\sin^2 x$ تقسیم کنیم ($\sin x \neq 0$) داریم:

$$\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x}+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}=\frac{1}{\sin^2 x} \rightarrow 1+(\frac{\cos x}{\sin x})^2=\frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow 1+\cot^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}$$

نکته: چون $\tan x$ و $\cot x$ ، برعکس یک‌دیگرند، رابطه $\tan x . \cot x=1$ نیز یک اتحاد مثلثاتی محسوب می‌شود. در اتحادهای مثلثاتی همواره با ساده کردن یک طرف تساوی می‌توان به طرف دیگر تساوی رسید.

۱. با فرض $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$، حاصل عبارت $\sin^4\theta-\cos^4\theta+\frac{1}{1+\tan^2\theta}$ کدام است؟ (سراسری انسانی - ۸۶)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{4}{9}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

پاسخ: گزینهٔ «۴»، ابتدا عبارت داده‌شده را ساده می‌کنیم:

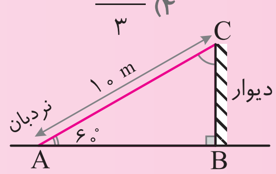
$$\sin^4\theta-\cos^4\theta+\frac{1}{1+\tan^2\theta}=(\sin^2\theta-\cos^2\theta)\underbrace{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}_{1}+\frac{1}{\frac{1}{\cos^2\theta}}=\sin^2\theta-\cancel{\cos^2\theta}+\cancel{\cos^2\theta}=\sin^2\theta$$

از طرفی:

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta \rightarrow \sin^2\theta=1-(\frac{\sqrt{3}}{3})^2=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

۲. نردبانی به طول ۱۰ متر به دیواری تکیه کرده و زاویهٔ نردبان با سطح زمین 60° است. فاصلهٔ نوک نردبان تا زمین برحسب متر کدام است؟ (آزمایشی سنجش انسانی - ۹۱)

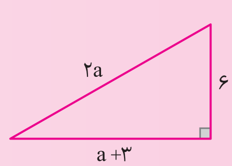
۱) $4\sqrt{3}$ ۲) $5\sqrt{3}$ ۳) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ ۴) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$



پاسخ: گزینهٔ «۲»

$$\sin A=\frac{BC}{AC} \rightarrow \sin 60^\circ=\frac{BC}{10} \rightarrow 10\times\frac{\sqrt{3}}{2}=BC \rightarrow BC=5\sqrt{3}$$

۳. در شکل روبه‌رو، کسینوس کوچک‌ترین زاویهٔ حاده چقدر است؟



۱) ۰/۴ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۶ ۴) ۰/۸

پاسخ: گزینهٔ «۴»، ابتدا با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس مقدار a را پیدا می‌کنیم.

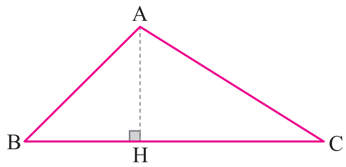
$$(a+3)^2+6^2=(2a)^2 \rightarrow a^2+6a+9+36=4a^2 \rightarrow 3a^2-6a-45=0 \xrightarrow{\div 3} a^2-2a-15=0$$

$$\rightarrow (a-5)(a+3)=0 \rightarrow \begin{cases} a=5 & (\text{غ ق ق}) \\ a=-3 \end{cases}$$

(زیرا طول ضلع مثلث نمی‌تواند منفی باشد.)

$$\text{کسینوس کوچک‌ترین زاویه}=\frac{a+3}{2a}=\frac{8}{10}=0/8$$

نکته: محاسبهٔ مساحت مثلث با روش مثلثاتی: می‌دانیم مساحت مثلث دلخواه ABC برابر است با:



$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{1}{2} AH \times BC \qquad (*)$$

از طرفی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH می‌توانیم بنویسیم:

$$\sin B = \frac{AH}{AB} \to AH = AB \times \sin B$$

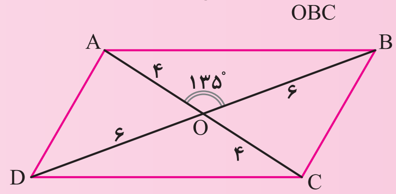
$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{1}{2} \times AB \times \sin B \times BC \to S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{1}{2} \times AB \times BC \times \sin B$$

پس به طور کلی در هر مثلث، داریم: (سینوس زاویهٔ بین آن دو ضلع)×(حاصل‌ضرب اندازه‌های دو ضلع) $\frac{1}{2}$ = مساحت مثلث

۴. در متوازی‌الاضلاعی اندازه دو قطر ۱۲ و ۸ واحد و زاویه بین دو قطر 135° است. مساحت متوازی‌الاضلاع چند برابر $\sqrt{2}$ است؟ (سراسری تجربی – ۹۲)

۱) ۱۸ ۲) ۲۴ ۳) ۳۲ ۴) ۳۶

پاسخ: گزینهٔ «۲»، می‌دانیم در متوازی‌الاضلاع قطرها همدیگر را نصف می‌کنند. همچنین می‌دانیم قطرهای هر متوازی‌الاضلاع آن را به ۴ مثلث معادل (هم‌مساحت) تقسیم می‌کنند. یعنی: $S_{ABCD} = 4S_{\overset{\Delta}{OBC}}$



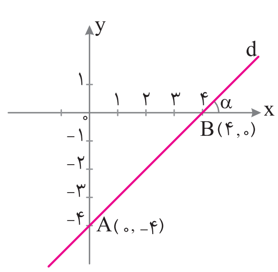
از طرفی دو زاویهٔ AOB و BOC مکمل یک‌دیگرند، پس $BOC = 45^\circ$

لذا داریم: $S_{ABCD} = 4(\frac{1}{2} \times 6 \times 4 \times \sin 45^\circ) = 48 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 24\sqrt{2}$

رابطهٔ شیب خط با تانژانت زاویه

ابتدا مثال زیر را با هم بررسی می‌کنیم:

مثال: خط d محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول ۴ و محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۴- قطع می‌کند. نمودار خط d را رسم کنید و معادلهٔ آن را بیابید.



پاسخ: برای نوشتن معادلهٔ خط d، از سال گذشته می‌دانیم که فرم کلی معادله خط به صورت $y = ax + b$ است که در آن a، شیب خط می‌باشد. مختصات نقاط A و B را جداگانه در معادلهٔ کلی خط جایگزین می‌کنیم:

$$-4 = a(0) + b \Rightarrow b = -4$$

$$0 = a \times 4 + b \Rightarrow 4a - 4 = 0 \Rightarrow a = 1 \quad \text{شیب خط}$$

پس معادلهٔ خط d عبارت است از: $y = x - 4$

حال به کمک نقاله زاویهٔ α را به دقت اندازه می‌گیریم داریم $\hat{\alpha} = 45^\circ$؛ و می‌دانیم: $\tan\alpha = \tan 45^\circ$

سؤال: آیا برابری شیب خط d با تانژانت زاویهٔ α، تصادفی بود؟

در واقع تعریف شیب خط چنین است:

شیب یا ضریب زاویه: اگر $\hat{\alpha}$ زاویه‌ای باشد که خط با جهت مثبت محور طول‌ها می‌سازد، آن‌گاه: $\tan\hat{\alpha}$ = شیب خط

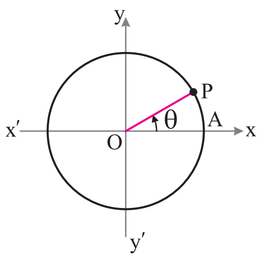
۵. خط d به معادلهٔ $5 - 3y + \sqrt{3}x = 0$ با جهت مثبت محور xها چه زاویه‌ای می‌سازد؟

۱) 75° ۲) 60° ۳) 45° ۴) 30°

پاسخ: گزینهٔ «۴»، ابتدا معادلهٔ خط را به فرم استاندارد $y = ax + b$ تبدیل می‌کنیم:

$$5 - 3y + \sqrt{3}x = 0 \to 3y = \sqrt{3}x + 5 \to y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{5}{3} \Rightarrow \text{شیب خط} = \tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \to \hat{\alpha} = 30^\circ$$

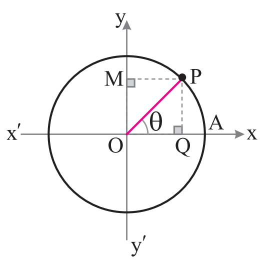
مثلثات در دایرهٔ مثلثاتی



دایرهٔ روبه‌رو به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۱ واحد را در نظر بگیرید. نقطهٔ A مبدأ حرکت برای رسم زاویه است. اگر نقطهٔ P روی این دایره در خلاف جهت عقربه‌های ساعت حرکت کند زاویه AOP مثبت است، اما اگر P هم‌جهت با عقربه‌های ساعت حرکت کند، زاویهٔ AOP منفی می‌شود. چنین دایره‌ای را یک دایرهٔ مثلثاتی می‌نامیم.

پس به طور خلاصه دایرهٔ مثلثاتی، دایره‌ای است به شعاع ۱ واحد که در آن، جهت حرکت برای ساختن زاویهٔ مثبت، پادساعتگرد (خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت) است.

معرفی نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه در دایرهٔ مثلثاتی

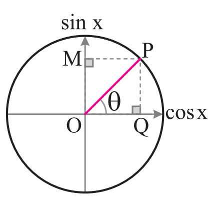


فرض کنید نقطهٔ $P(x\ ,\ y)$ نقطه‌ای دلخواه روی دایرهٔ مثلثاتی باشد (شکل زیر) و $\hat{\theta}$ زاویه‌ای است که‌نیم‌خط OP با محور Ox می‌سازد. از نقطهٔ P خطی بر محور Ox عمود می‌کنیم و محل برخورد را Q می‌نامیم.

در مثلث قائم‌الزاویهٔ OPQ، داریم:

$$\sin\theta = \frac{PQ}{OP} = \frac{PQ}{1} \xrightarrow{PQ=OM} \sin\theta = OM$$

$$\cos\theta = \frac{OQ}{OP} = \frac{OQ}{1} \to \cos\theta = OQ$$



از محاسبات بالا، دلیل این‌که چرا شعاع دایرهٔ مثلثاتی را یک واحد در نظر گرفته‌ایم، معلوم می‌شود. زیرا بدین‌گونه با تعریف نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه، به تناقض نمی‌رسیم و هم این‌که محور سینوس‌ها و کسینوس‌ها و ... مفهوم پیدا می‌کنند. حال به طور رسمی سینوس و کسینوس زاویهٔ θ را در دایرهٔ مثلثاتی تعریف می‌کنیم:

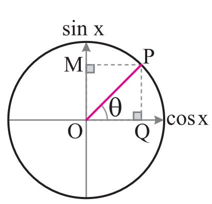
سینوس $\hat{\theta}$: از نقطهٔ انتهایی کمان روبه‌رو به زاویهٔ θ (یعنی نقطهٔ P) بر محور سینوس‌ها، عمودی فرود می‌آوریم. فاصلهٔ پای عمود (M) تا مبدأ محور سینوس‌ها (O) یعنی OM برابر $\sin\theta$ است.

کسینوس $\hat{\theta}$: به‌طور مشابه اگر از P بر محور کسینوس‌ها عمود PQ را فرود آوریم، فاصلهٔ پای عمود تا مبدأ محور کسینوس‌ها (O) یعنی پاره‌خط OQ، برابر $\cos\hat{\theta}$ است.

نکته: از این‌که شعاع دایرهٔ مثلثاتی یک واحد است و محورهای سینوس و کسینوس به محیط دایره محدود شده‌اند نتیجه می‌گیریم که بیشترین مقدار سینوس یا کسینوس یک زاویه، می‌تواند عدد یک باشد و کم‌ترین مقدار آن‌ها نیز عدد (۱-) است، یعنی:

$$-1 \le \sin\theta \le 1 \qquad -1 \le \cos\theta \le 1$$

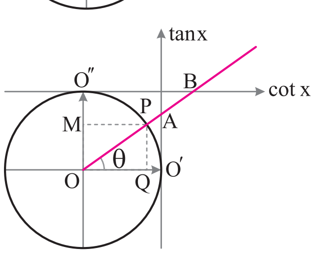
حال برگردیم به دایرهٔ مثلثاتی و این بار مقدار تانژانت و کتانژانت زاویهٔ θ را به‌دست آوریم.



همان‌طور که می‌دانیم، در مثلث قائم‌الزاویه OPQ مقادیر تانژانت و کتانژانت زاویهٔ θ به صورت زیر است:

$$\tan\theta = \frac{PQ}{OQ} \quad , \quad \cot\theta = \frac{OQ}{PQ}$$

حال همان‌طوری که برای سینوس و کسینوس، محور تعریف کردیم، محور تانژانت‌ها را موازی با محور سینوس‌ها و مماس بر دایره مثلثاتی و محور کتانژانت‌ها را موازی محور کسینوس‌ها و مماس بر دایره مثلثاتی در نظر می‌گیریم:



حال، ضلع انتهایی زاویهٔ θ یعنی OP را در راستای خودش امتداد می‌دهیم تا محور تانژانت‌ها و کتانژانت‌ها را در نقاط A و B قطع کند. فاصلهٔ نقطهٔ تقاطع A تا مبدأ محور تانژانت‌ها (O′) یعنی پاره‌خط O′A، تانژانت زاویهٔ θ را به‌دست می‌دهد.

همچنین فاصلهٔ نقطهٔ تقاطع B تا مبدأ محور کتانژانت‌ها (O″) یعنی پاره‌خط O″B، کتانژانت زاویهٔ $\hat{\theta}$ می‌باشد:

$$\tan\theta = O'A$$

$$\cot\theta = O''B$$

توجه کنید دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OPQ و OAO' با هم متشابه‌اند، پس داریم:

$$\frac{PQ}{OQ} = \frac{O'A}{OO'} \to \tan\theta = \frac{O'A}{1}$$

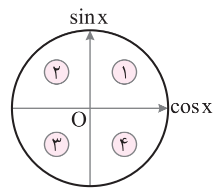
و این باز هم به ما نشان می‌دهد چرا شعاع دایره مثلثاتی باید یک باشد!

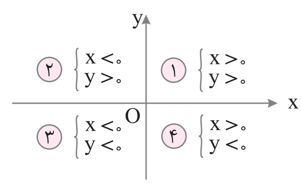
نکته: همان‌طور که دیدیم برای تانژانت و کتانژانت زاویه محدودیت عددی وجود ندارد و مقدار آن‌ها می‌تواند از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر کند. (زیرا محورهای تانژانت و کتانژانت نامحدودند.)

$-\infty < \cot x < +\infty$ $\qquad$ $-\infty < \tan x < +\infty$

علامت نسبت‌های مثلثاتی در نواحی ۴ گانهٔ دایره مثلثاتی

دو محور عمود بر هم سینوس‌ها و کسینوس‌ها، دایرهٔ مثلثاتی را به ۴ ناحیه (ربع) تقسیم می‌کنند. برای تعیین علامت نسبت‌های مثلثاتی در این نواحی می‌توانیم از این ایده کمک بگیریم که محور سینوس‌ها در واقع جایگزین محور yها شده و محور کسینوس‌ها نیز به جای محور xها نشسته است و علامت x و y در نواحی چهارگانهٔ مختصاتی همان‌طور که می‌دانید به صورت زیر است:





از طرفی علامت تانژانت و کتانژانت یک زاویه نیز از ضرب کردن علامت سینوس و کسینوس آن زاویه پیدا می‌شود. پس می‌توان جدول زیر را تنظیم کرد:

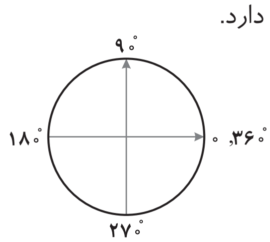
نسبت مثلثاتی \ ناحیه	ربع اوّل	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
sin x	+	+	−	−
cos x	+	−	−	+
tan x	+	−	+	−
cot x	+	−	+	−

نکته: یک روش ساده برای به خاطر سپردن علامت نسبت‌های مثلثاتی در ربع‌های ۴ گانه، استفاده از کلمه کلیدی و بی معنی «هستک» است. (که در واقع فارسی‌شدهٔ کلمهٔ بی معنی ASTC می‌باشد.) توجه کنید:

هـ: در ربع اوّل همهٔ نسبت‌های مثلثاتی مثبت است. — س: در ربع دوم فقط علامت سینوس مثبت است.

ت: در ربع سوم تانژانت و کتانژانت علامت مثبت دارند. — ک: در ربع چهارم فقط کسینوس علامت مثبت دارد.

تذکر: در دایرهٔ مثلثاتی زوایای صفر، 90°، 180°، 270° و 360° «زوایای مرزی» نامیده می‌شوند که جز هیچ‌کدام از نواحی محسوب نمی‌شوند.



۶. اگر $\sin\alpha.\cos\alpha > 0$ و $\cos\alpha.\tan\alpha < 0$ باشد، انتهای کمان α در کدام ناحیه مثلثاتی است؟

۱) اوّل $\qquad$ ۲) دوم $\qquad$ ۳) سوم $\qquad$ ۴) چهارم

پاسخ: گزینهٔ «۳»، در این گونه مسائل هر کدام از شروط مسئله انتهای کمان α را در دو ناحیه از ۴ ناحیه معین می‌کنند. بعد باید بین جواب‌ها اشتراک بگیریم تا ربع موردنظر معلوم شود.

$\sin\alpha.\cos\alpha > 0$

حاصل‌ضرب دو کمیت، مثبت است پس باید هر دو مثبت یا هر دو منفی باشند؛ یعنی انتهای کمان α یا در ربع اوّل است یا در ربع سوم (※).

$$\cos\alpha.\tan\alpha < 0 \rightarrow \cancel{\cos\alpha}.\frac{\sin\alpha}{\cancel{\cos\alpha}} < 0 \rightarrow \sin\alpha < 0$$

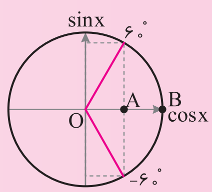
انتهای کمان α در ربع سوم یا چهارم است (※※).

(※※) $\cap$ (※)انتهای کمان α در ربع سوم است.

۷. اگر $-۶۰^\circ < \hat{\alpha} < ۶۰^\circ$ و $\cos\hat{\alpha} = \frac{m-۱}{۲}$ باشد، حدود m کدام است؟

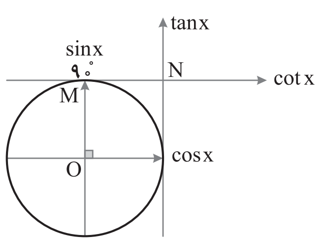
۱) $۲ < m \leq ۳$　　۲) $۲ < m < ۳$　　۳) $۲ \leq m < ۳$　　۴) $۲ \leq m \leq ۳$

پاسخ: گزینهٔ «۱»، در این گونه مسائل باید از دایرهٔ مثلثاتی استفاده کنیم. بدین ترتیب که مشخص کنیم وقتی زاویهٔ α بین -۶۰° و ۶۰° تغییر می‌کند، مقدار حداقل و حداکثر کسینوس آن چقدر می‌شود. همان‌طور که در شکل دیده می‌شود اگر از انتهای کمان α (در محدودهٔ فوق) بر محور کسینوس‌ها عمود کنیم، پای عمودهایی که رسم می‌کنیم بازهٔ نیم‌باز مقادیر واقع بر پاره‌خط AB را می‌پوشانند. معلوم است که در این بازه حداقل کسینوس زاویهٔ α در نقطهٔ A اتفاق می‌افتد و می‌دانیم که: $OA = \cos ۶۰^\circ = \frac{۱}{۲}$



و حداکثر $\cos\alpha$ در نقطهٔ B رخ می‌دهد که در آن نقطه: «$OB = $ شعاع دایرهٔ مثلثاتی $= ۱$» پس $\frac{۱}{۲} < \cos\alpha \leq ۱$ لذا داریم: $\frac{۱}{۲} < \frac{m-۱}{۲} \leq ۱ \xrightarrow{\times ۲} ۱ < m-۱ \leq ۲ \rightarrow ۲ < m \leq ۳$

یافتن نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های مرزی در دایرهٔ مثلثاتی



به عنوان نمونه می‌خواهیم، نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ ۹۰° را حساب کنیم.

باید از انتهای کمان روبه‌روی زاویهٔ ۹۰° (یعنی نقطهٔ M) عمودی بر محور سینوس‌ها فرود آوریم. معلوم است که خط عمود بر محور سینوس‌ها در نقطهٔ M، خط گذرا از دو نقطهٔ M و N است. (همان محور کتانژانت‌ها) پس پای عمود همان M است و فاصلهٔ M از مبدأ محور سینوس‌ها یک می‌شود: $\sin ۹۰^\circ = OM = ۱$

به‌طور مشابه برای پیدا کردن کسینوس زاویهٔ ۹۰° باید از M بر محور کسینوس‌ها عمود کنیم. خط عمود، همان خط گذرا از دو نقطه M و O (یعنی همان محور سینوس‌ها) است پس پای عمود همان نقطهٔ O است که مبدأ محور کسینوس‌ها هم هست پس: $\cos ۹۰^\circ = ۰$

اگر بخواهیم از روی دایره مثلثاتی $\tan ۹۰^\circ$ را محاسبه کنیم باید پاره‌خط OM را در راستای خودش امتداد دهیم تا محور تانژانت‌ها را قطع کند. سپس فاصلهٔ نقطهٔ تقاطع تا مبدأ محور تانژانت‌ها را بیابیم اما OM با محور تانژانت‌ها موازی است. یعنی امتداد OM هرگز محور تانژانت‌ها را قطع نخواهد کرد برای همین می‌گوییم، $\tan ۹۰^\circ$ تعریف نشده است. در آخر چون امتداد OM در همان نقطه M که مبدأ محور کتانژانت‌هاست آن محور را قطع می‌کند، $\cot ۹۰^\circ = ۰$ می‌باشد. نسبت‌های مثلثاتی سایر زاویه‌های مرزی را نیز به همین ترتیب می‌توان به‌دست آورد. بهتر است جدول مقادیر نسبت‌های مثلثاتی را که قبلاً تشکیل دادیم، اکنون تکمیل کنیم.

زاویه / نسبت مثلثاتی	۰°	۳۰°	۴۵°	۶۰°	۹۰°	۱۸۰°	۲۷۰°	۳۶۰°
sin x	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱	۰	-۱	۰
cos x	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	-۱	۰	۱

زاویه / نسبت مثلثاتی	۰°	۳۰°	۴۵°	۶۰°	۹۰°	۱۸۰°	۲۷۰°	۳۶۰°
$\tan x$	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	تعریف‌نشده	۰	تعریف‌نشده	۰
$\cot x$	تعریف‌نشده	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰	تعریف‌نشده	۰	تعریف‌نشده

واحدهای اندازه‌گیری زاویه

برای اندازه‌گیری یک زاویه، واحدهای متفاوتی وجود دارد که عبارت‌اند از: درجه، گراد و رادیان

درجه: اگر محیط دایره را به ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم، زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به هر کدام از این قسمت‌ها (کمان‌ها) یک درجه خواهد بود.

گراد: اگر محیط دایره را به ۴۰۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم، زاویهٔ مرکزی روبه‌روی هر کدام از این کمان‌ها یک گراد است. (این واحد بیشتر در محاسبات نظامی به‌کار می‌رود.)

رادیان: اگر کمانی از دایره را طوری جدا کنیم که طولش برابر با شعاع آن دایره باشد، زاویهٔ مرکزی روبه‌روی آن کمان، یک رادیان خواهد بود.

مقدار زاویه	یک دور
D «درجه»	۳۶۰°
R «رادیان»	۲π

تذکر: ۱ رادیان عددی است گنگ و مقدار آن برحسب درجه، تقریباً ۵۷° است.

نکته: از آن‌جا که محیط دایره یا در واقع یک دور کامل، ۳۶۰° یا ۲π رادیان است، رابطهٔ میان درجه و رادیان به آسانی ازتناسب روبه‌رو پیدا می‌شود:

$$\frac{D}{۳۶۰}=\frac{R}{۲\pi}\Rightarrow\frac{D}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}$$

مثال: ۲۲/۵ درجه چند رادیان است؟

پاسخ:

$$\frac{D}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}\to\frac{۲۲/۵}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow R=\frac{۲۲/۵\pi}{۱۸۰}\to R=\frac{\pi}{۸}\text{rad}$$

مثال: $\frac{\pi}{۱۲}$ رادیان، چند درجه است؟

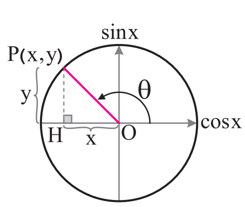
پاسخ: چون هر π رادیان، معادل با ۱۸۰° است، پس:

$$D=\frac{۱۸۰^\circ}{۱۲}=۱۵^\circ$$

استفاده از دایرهٔ مثلثاتی برای یافتن نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه

می‌خواهیم روش دیگری غیر از استفاده از اتحادهای مثلثاتی برای یافتن نسبت‌های مثلثاتی مجهول یک زاویه معین را مطرح کنیم. به مثال زیر توجه کنید:

مثال: اگر θ زاویه‌ای در ربع دوم دایرهٔ مثلثاتی و $\sin\theta=\frac{۲}{۷}$ باشد، سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ θ را محاسبه کنید.



پاسخ: به یاد داریم که محور سینوس‌ها و محور کسینوس‌ها در واقع همان محور عرض‌ها و محور طول‌ها می‌باشند که در دایره مثلثاتی محدود شده‌اند. پس اگر نقطهٔ انتهایی کمان θ را P بنامیم مختصات نقطه P را می‌توان این‌گونه پیدا کرد:

$$\sin\theta=\frac{۲}{۷}\to y=\frac{۲}{۷}$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHP:

$$x^۲+y^۲=OP^۲\to x^۲+y^۲=۱\ x^۲=۱-y^۲\to x^۲=۱-\frac{۴}{۴۹}=\frac{۴۵}{۴۹}\to x=\pm\sqrt{\frac{۴۵}{۴۹}}\to x=\pm\frac{۳\sqrt{۵}}{۷}$$

اما نقطهٔ P در ربع دوم قرار دارد پس x باید منفی باشد. پس:

$$x=\frac{-۳\sqrt{۵}}{۷}\Rightarrow\cos\theta=\frac{-۳\sqrt{۵}}{۷}$$

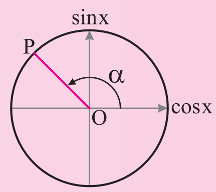
همچنین می‌دانیم:
$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{\frac{۲}{۷}}{\frac{-۳\sqrt{۵}}{۷}}=\frac{-۲}{۳\sqrt{۵}}\times\frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۵}}=\frac{-۲\sqrt{۵}}{۱۵}\quad,\quad \cot\hat{\theta}=\frac{x}{y}=-\frac{۳\sqrt{۵}}{۲}$$

۸. اگر α زاویه‌ای در موقعیت استاندارد باشد و نقطهٔ $P(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\,,\,\frac{\sqrt{۲}}{۲})$ نقطهٔ انتهایی کمان روبه‌روی α باشد، اندازه $\hat{\alpha}$ برحسب رادیان چقدر است؟

۱) $\frac{۲\pi}{۳}$ ۲) $\frac{۳\pi}{۴}$ ۳) $\frac{۵\pi}{۴}$ ۴) $\frac{۴\pi}{۵}$

پاسخ: گزینهٔ «۲»، زاویهٔ استاندارد، زاویه‌ای است که رأس آن در مرکز دایره مثلثاتی باشد و ضلع اوّلیه‌اش روی قسمت مثبت محور x ها باشد. چون $\hat{\alpha}$ استاندارد است، مختصات نقطه انتهایی کمان روبه‌رو به $\hat{\alpha}$ (نقطهٔ P) همان سینوس و کسینوس زاویه است. یعنی: $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\ ,\ \sin\alpha=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

معلوم است که ضلع انتهای زاویه α در ربع دوم است و چون $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ سینوس زاویه ۴۵° است، باید زاویه α برابر با $۹۰^\circ+۴۵^\circ$ یعنی ۱۳۵° باشد که معادل است با $\frac{۳\pi}{۴}$ رادیان.



نسبت‌های مثلثاتی زوایای مکمل، متمم و قرینه

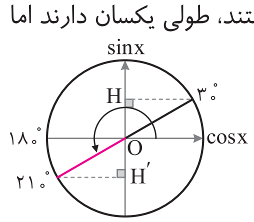
زاویه‌هایی که مجموع یا تفاضلشان ۱۸۰° می‌شود.

مانند زوایای α و $۱۸۰-\alpha$ که مجموعشان ۱۸۰° است یا زوایای α و $۱۸۰+\alpha$ که تفاضلشان ۱۸۰° می‌شود. برای بیان چگونگی یافتن نسبت‌های مثلثاتی این‌گونه زاویه‌ها، ابتدا بهتر است مثال زیر را بررسی کنیم:

مثال: مقادیر سینوس زاویه ۲۱۰° و کسینوس زاویه $\frac{۲\pi}{۳}$ را بیابید.

پاسخ: ابتدا باید معین کنیم که آیا می‌شود زاویه‌های داده‌شده را به شکل مجموع یا تفاضل یک زاویهٔ معروف (زاویه‌ای که نسبت‌هایش را حفظ هستیم) نوشت یا نه. داریم:
$$۲۱۰^\circ=۱۸۰^\circ+۳۰^\circ \Rightarrow \frac{۲\pi}{۳}=\pi-\frac{\pi}{۳}$$

اگر این زاویه‌ها را در دایرهٔ مثلثاتی نمایش دهیم، می‌فهمیم که مقدار $\sin ۲۱۰^\circ$ رابطهٔ مشخصی با مقدار $\sin ۳۰^\circ$ دارد. همین‌طور برای زاویهٔ $\frac{۲\pi}{۳}$ که با $\frac{\pi}{۳}$ مرتبط است. در واقع پاره‌خط‌های OH و OH' که نشان‌دهندهٔ سینوس زاویه‌های ۳۰° و ۲۱۰° هستند، طولی یکسان دارند اما یکی در جهت مثبت محور سینوس‌ها و دیگری در جهت منفی آن محور است؛ یعنی می‌توانیم بنویسیم:
$$\sin ۲۱۰^\circ=\sin(۱۸۰^\circ+۳۰^\circ)=-\sin ۳۰^\circ \rightarrow \sin ۲۱۰^\circ=-\frac{۱}{۲}$$



از همین مثال شهودی، می‌توانیم روش محاسبهٔ نسبت‌های مثلثاتی را که مجموع یا تفاضل آن‌ها π یا ۱۸۰° می‌شود، به‌طور خلاصه این‌طور بیان کنیم: «هرگاه π یا ۱۸۰° را به فرم مجموع یا تفاضل با زاویهٔ معروفی در کمان مشاهده کردید، برای یافتن جواب زاویهٔ مرکب مفروض، نسبت مثلثاتی را تغییر ندهید فقط با توجه به ناحیه‌ای که انتهای کمان روبه‌رو به زاویه در آن قرار دارد، علامت آن نسبت مثلثاتی را تعیین کنید.»

مقدار $\cos\frac{۲\pi}{۳}$ را با همین روش می‌یابیم:
$$\cos\frac{۲\pi}{۳}=\cos\underbrace{(\pi-\frac{\pi}{۳})}_{\text{انتهای کمان درربع دوم است}}$$

$$\xrightarrow{\text{در ربع دوم کسینوس هر زاویه‌ای منفی است.}}\ \cos\frac{۲\pi}{۳}=-\cos\frac{\pi}{۳}=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

زاویه‌هایی که مجموع یا تفاضلشان 90° $(\frac{\pi}{2})$ یا 270° $(\frac{3\pi}{2})$ می‌شود.

مانند زوایای α و $(\frac{\pi}{2}-\alpha)$ که مجموعشان $\frac{\pi}{2}$ می‌شود و یا زوایای α و $(\frac{3\pi}{2}+\alpha)$ که تفاضلشان $\frac{3\pi}{2}$ می‌شود. محاسبهٔ نسبت‌های مثلثاتی این زوایا به کمک دایرهٔ مثلثاتی تقریباً مشابه با مثال قبلی است. در این‌جا فقط روش محاسبه را به‌طور خلاصه بیان می‌کنیم: «اگر مجموع یا تفاضل دو زاویه، برابر با 90° یا 270° شود برای محاسبه نسبت‌های مثلثاتی آن زاویه باید دو کار انجام دهیم: ۱. نسبت مثلثاتی را به مکمل آن تبدیل کنیم. (مثلاً سینوس را به کسینوس یا تانژانت را به کتانژانت تبدیل کنیم.) ۲. با توجه به ناحیه‌ای که انتهای کمان روبه‌روی زاویه در آن قرار دارد، تعیین علامت کنیم.»

مثال: (در ربع دوم سینوس دارای علامت مثبت است.)

انتهای کمان α در ربع دوم — در ربع دوم سینوس مثبت است.

$$\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha) = +\cos\alpha$$

نسبت مثلثاتی به مکملش تبدیل می‌شود

۹. اگر $\tan 20^\circ = 0/36$، حاصل عبارت $A=\dfrac{\sin160^\circ-\cos200^\circ}{\cos110^\circ+\sin70^\circ}$ کدام است؟ (سراسری تجربی - ۸۴)

۱) $\frac{9}{4}$ ۲) $\frac{15}{8}$ ۳) $\frac{17}{8}$ ۴) $\frac{31}{16}$

پاسخ: گزینهٔ «۳»، ابتدا باید سعی کنیم تمام زاویه‌های موجود در مسئله را به شکل مجموع یا تفاضل 180° یا 90° با 20° بنویسیم. (زیرا در مسئله تانژانت 20° معلوم است.)

$$A=\frac{\underbrace{\sin(180^\circ-20^\circ)}_{\text{ربع دوم}}-\underbrace{\cos(180^\circ+20^\circ)}_{\text{ربع سوم}}}{\underbrace{\cos(90^\circ+20^\circ)}_{\text{ربع دوم}}+\underbrace{\sin(90^\circ-20^\circ)}_{\text{ربع اول}}}$$

سپس با توجّه به مطالبی که گفتیم، نسبت‌ها را محاسبه می‌کنیم:

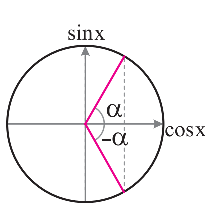
$$A=\frac{\sin20^\circ-(-\cos20^\circ)}{\sin20^\circ+\cos20^\circ}\rightarrow A=\frac{\sin20^\circ+\cos20^\circ}{\cos20^\circ-\sin20^\circ}$$

حال، صورت و مخرج را بر $\cos20^\circ$ تقسیم می‌کنیم. (زیرا: $\tan20^\circ=\frac{\sin20^\circ}{\cos20^\circ}$)

$$A=\frac{\frac{\sin20^\circ}{\cos20^\circ}+\frac{\cos20^\circ}{\cos20^\circ}}{\frac{\cos20^\circ}{\cos20^\circ}-\frac{\sin20^\circ}{\cos20^\circ}}\rightarrow A=\frac{\tan20^\circ+1}{1-\tan20^\circ}=\frac{0/36+1}{1-0/36}\Rightarrow A=\frac{1/36}{0/64}=\frac{136}{64}=\frac{17}{8}$$

نسبت‌های مثلثاتی زوایای قرینه

اگر α را زاویه‌ای حاده فرض کنیم، آن‌گاه $\hat{-\alpha}$ قرینهٔ زاویه است و انتهای کمان $(-\alpha)$ در ربع چهارم قرار خواهد گرفت. (به دایرهٔ مثلثاتی توجه کنید.) سپس با توجه به علامت نسبت‌های مثلثاتی در ربع چهارم، داریم:



$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha \quad \cos(-\alpha)=\cos\alpha \quad \tan(-\alpha)=-\tan\alpha \quad \cot(-\alpha)=-\cot\alpha$$

نکته: در مورد زوایایی که مجموعشان از 360° یا 2π بیشتر است، چون گردش 360°ای تأثیری در محلی که انتهای کمان در آن قرار می‌گیرد ندارد، (یعنی مثلاً انتهای کمان 390° درست همان جایی است که انتهای کمان 30° در آن‌جا قرار دارد.) پس مضرب‌های زوج π را از کمان حذف می‌کنیم.

مثال:

$$\sin(\cancel{۲۸}\pi+\frac{\pi}{۶})=\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

$$\cos(۱۷\pi+\frac{\pi}{۳})=\cos(\cancel{۱۶}\pi+\pi+\frac{\pi}{۳})=\cos(\underbrace{\pi+\frac{\pi}{۳}}_{\text{ربع سوم}})=-\cos\frac{\pi}{۳}=-\frac{۱}{۲}$$

پس به‌طور خلاصه: «مضرب‌های زوج π را حذف می‌کنیم ، به جای مضرب‌های فرد π، π قرار می‌دهیم.»

۱۰. حاصل عبارت $A=۲\cos(\frac{-۱۲۵\pi}{۴})+۳\tan(\frac{۱۲۵\pi}{۴})+۴\cot(\frac{-۱۲۵\pi}{۴})$ کدام است؟

۱) $-\sqrt{۲}-۱$ ۲) $-\sqrt{۲}+۱$ ۳) $\sqrt{۲}-۱$ ۴) $\sqrt{۲}+۱$

پاسخ: گزینهٔ «۱»

$$A=۲\cos(\cancelto{۳۰\pi}{\frac{۱۲۰\pi}{۴}}+\frac{۵\pi}{۴})+۳\tan(\cancel{\frac{۱۲۰\pi}{۴}}+\frac{۵\pi}{۴})-۴\cot(\cancel{\frac{۱۲۰\pi}{۴}}+\frac{۵\pi}{۴})$$

$$A=۲\cos\frac{۵\pi}{۴}+۳\tan\frac{۵\pi}{۴}-۴\cot\frac{۵\pi}{۴}=۲\cos(\underbrace{\pi+\frac{\pi}{۴}}_{\text{ربع سوم}})+۳\tan(\pi+\frac{\pi}{۴})-۴\cot(\pi+\frac{\pi}{۴})$$

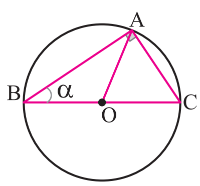
$$A=-۲\cos\frac{\pi}{۴}+۳\tan\frac{\pi}{۴}-۴\cot\frac{\pi}{۴}\to A=-۲\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}+۳-۴\Rightarrow A=-\sqrt{۲}-۱$$

بسته تمرین ۱

۱. اگر $\sin x+\cos x=\frac{1}{3}$ باشد، حاصل $\sin^3 x+\cos^3 x$ چقدر است؟ (آزاد ریاضی - ۸۶)

۱) $\frac{13}{27}$ ۲) $\frac{13}{81}$ ۳) $\frac{17}{27}$ ۴) $\frac{17}{81}$

۲. اگر در دایره واحد $\sin 2\alpha=\frac{1}{5}$ باشد، مساحت مثلث ABC چقدر است؟



۱) $\frac{3}{5}$ ۲) $0/1$ ۳) $\frac{2}{5}$ ۴) $0/2$

۳. در مثلث ABC، طول اضلاع AB و AC به ترتیب ۶ و $3\sqrt{2}$ سانتی‌متر است، اگر زاویهٔ $\hat{B}=30^\circ$ باشد، طول ضلع BC چقدر است؟

۱) ۳ ۲) $3\sqrt{3}-3$ ۳) ۶ ۴) $3\sqrt{3}+3$

۴. در مثلث ABC رابطه $\sin(A+B)+\cos(A-B)=2$ بین زوایا برقرار است. این مثلث چگونه است؟

۱) دارای زاویهٔ منفرجه ۲) متساوی‌الاضلاع ۳) متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه ۴) مختلف‌الاضلاع

۵. اگر خط d به معادلهٔ $2y+bx+1=0$ با جهت مثبت محور طول‌ها زاویه 45° بسازد، عرض از مبدأ آن چقدر است؟

۱) $\frac{+1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{-1}{2}$ ۴) -1

۶. اگر $\sin x+\tan x>0$ و $\frac{1}{\cos x}-\sin x.\tan x<0$ باشد، انتهای کمان x در کدام ناحیه است؟ (سراسری تجربی - ۷۰)

۱) اوّل ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۷. با فرض $\frac{-\pi}{2}<\alpha<\frac{5\pi}{6}$ و $\sin\alpha=\frac{m+1}{2}$، حدود تغییرات m کدام است؟

۱) $-3<m\le 1$ ۲) $-3<m<1$ ۳) $3<m\le 0$ ۴) $-3<m<0$

۸. چرخ‌وفلکی ۴۰ کابین دارد و کابین‌های آن شماره‌گذاری شده‌اند. اگر در آغاز حرکت پادساعتگرد، سارا در کابین شمارهٔ ۳ باشد، بعد از $\frac{47\pi}{10}$ رادیان دوران، سارا در موقعیت کدام کابین قرار خواهد گرفت؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۶ ۳) ۱۵ ۴) ۱۴

۹. اگر $\tan\theta=0/2$ باشد، مقدار $\frac{\cos(\frac{3\pi}{2}+\theta)-\cos(\pi+\theta)}{\sin(\pi-\theta)-\sin(3\pi+\theta)}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی - ۹۱)

۱) -2 ۲) $1/2$ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۰. با فرض $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ ساده‌شدهٔ کسر $\frac{(1+\tan^2\theta)(1+\cot^2\theta)}{1-\sin^2\theta-\cos^4\theta}$ کدام است؟ (سراسری خارج از کشور ریاضی - ۹۱)

۱) $8\cos^{-2}2\theta$ ۲) $8\sin^{-2}2\theta$ ۳) $16\cos^{-4}2\theta$ ۴) $16\sin^{-4}2\theta$

۱.	۱ ۲ ۳ ۴	۳.	۱ ۲ ۳ ۴	۵.	۱ ۲ ۳ ۴	۷.	۱ ۲ ۳ ۴	۹.	۱ ۲ ۳ ۴
۲.	۱ ۲ ۳ ۴	۴.	۱ ۲ ۳ ۴	۶.	۱ ۲ ۳ ۴	۸.	۱ ۲ ۳ ۴	۱۰.	۱ ۲ ۳ ۴

توجه: حالا با توجه به پاسخ‌نامه و از طریق فرمول می‌توانید درصد پاسخگویی خود به سؤالات را مشخص نموده و ادامه مسیر خود را مطابق دستورالعمل آمده، مشخص کنید.

$$\text{درصد پاسخگویی} = \frac{\text{تعداد سؤالات با پاسخ درست}}{\text{تعداد کل سؤالات}}\times 100$$

شناسنامه سؤالات بسته تمرین ۱

شماره سؤال	عنوان زیرموضوع	سطح سؤال	پاسخ	سؤال متناظر در پیش آزمون	سؤال متناظر در بسته تمرین ۲	سؤال متناظر در بسته تمرین ۳
۱	مثلثات در مثلث قائم‌الزاویه		۱	۱	۱	۱
۲	مثلثات در مثلث قائم‌الزاویه		۴	۲، ۳، ۴	۲	۲
۳	مثلثات در مثلث قائم‌الزاویه		۴	۳، ۴	۲، ۳	۳
۴	مثلثات در مثلث قائم‌الزاویه		۳	۳	۴	۴
۵	مثلثات در مثلث قائم‌الزاویه		۳	۵	۵	۵
۶	مثلثات در دایره مثلثاتی		۳	۶	۶	۶
۷	مثلثات در دایره مثلثاتی		۱	۷، ۸	۷	۷
۸	مثلثات در دایره مثلثاتی		۱	۸	۸	۶
۹	نسبت‌های مثلثاتی زوایای مکمل، متمم و قرینه		۴	۹، ۱۰	۹، ۱۰، ۵	۹، ۱۰، ۷
۱۰	نسبت‌های مثلثاتی زوایای مکمل، متمم و قرینه		۴	۱	۹، ۱۰، ۱	۹، ۱۰

پاسخ‌نامه

۱ گزینهٔ «۱»

فرض: $\sin x+\cos x=\frac{۱}{۳}$ $\qquad (*)$

$$A=\sin^۳ x+\cos^۳ x=(\sin x+\cos x)(\sin^۲ x-\sin x\cos x+\cos^۲ x)=(\frac{۱}{۳})(۱-\sin x\cos x)$$

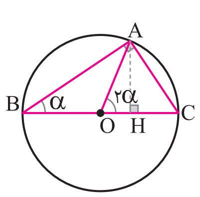
طرفین رابطه (*) را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(\sin x+\cos x)^۲=\frac{۱}{۹}\Rightarrow \underbrace{\sin^۲ x+\cos^۲ x}_{۱}+۲\sin\cos x=\frac{۱}{۹}\to \sin x\cos x=\frac{-۴}{۹}$$

این مقدار را در عبارت A جایگزین می‌کنیم:

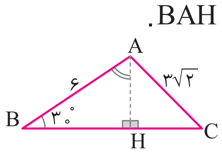
$$A=\frac{۱}{۳}(۱+\frac{۴}{۹})=\frac{۱}{۳}\times\frac{۱۳}{۹}=\frac{۱۳}{۲۷}$$

۲ گزینهٔ «۴» $\hat{A}$ زاویهٔ محاطی روبه‌روی قطر است، پس مقدارش ۹۰° است و مثلث ABC قائم‌الزاویه است. از طرفی چون زاویهٔ محاطی ABC روبه‌رو به کمان AC، برابر α است، پس زاویهٔ مرکزی AOC روبه‌رو به همان کمان، ۲α خواهد شد. حال ارتفاع مثلث AOC یعنی AH را رسم می‌کنیم، در مثلث قائم‌الزاویه AOH داریم:



$$\sin ۲\alpha=\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}=\frac{AH}{OA}\xrightarrow{OA=۱}\sin ۲\alpha=AH\Rightarrow S_{\underset{ABC}{\Delta}}=\frac{BC\times AH}{۲}=\frac{۲\times\sin ۲\alpha}{۲}=\sin ۲\alpha=\frac{۱}{۵}=۰/۲$$

۳ گزینهٔ «۴» ارتفاع AH را رسم می‌کنیم در مثلث قائم‌الزاویه ABH، مجموع زوایا باید ۱۸۰° باشد، پس $B\hat{A}H=۶۰^\circ$.



$$\sin BAH=\frac{BH}{AB}\to \sin ۶۰^\circ=\frac{BH}{۶}\to BH=۶\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۳\sqrt{۳}$$

از طرفی:

همچنین در مثلث قائم‌الزاویه ABH داریم:

$$\sin B=\frac{AH}{AB}=\frac{AH}{۶}\to AH=۶\sin ۳۰^\circ\to AH=۶\times\frac{۱}{۲}=۳$$

در آخر از رابطهٔ فیثاغورس در مثلث AHC استفاده می‌کنیم:

$$AC^2 = AH^2 + CH^2 \to 18 = 9 + CH^2 \to CH^2 = 9 \to CH = 3 \to BC = BH + HC = 3\sqrt{3} + 3$$

۴ گزینهٔ «۳»

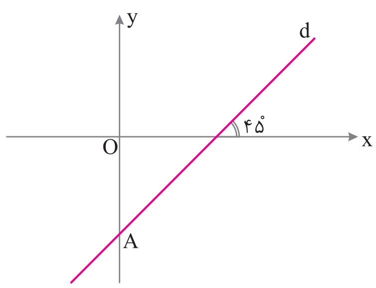
$$\sin(A+B) + \cos(A-B) = 2$$

چون عدد سمت راست رابطهٔ فوق برابر با ۲ می‌باشد، سینوس و کسینوس در سمت چپ رابطه باید بیشترین مقدار خود یعنی یک را داشته باشند، پس:

$$\left.\begin{matrix}\sin(A+B)=1\\ \cos(A-B)=1\end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases}\hat{A}+\hat{B}=90^\circ\\ \hat{A}-\hat{B}=0\end{cases} \to A=45^\circ \ , \ B=45^\circ \to \hat{C}=90^\circ$$

پس مثلث ABC قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است.

۵ گزینهٔ «۳» خط d با جهت مثبت محور xها، زاویهٔ 45° می‌سازد، پس شیب خط d برابر با $\tan 45^\circ = 1$ است. از طرفی شیب خط d برابر است با: $-\frac{b}{2}$



پس داریم:

$$d: 2y + bx + 1 = 0 \to \frac{-b}{2} = 1 \to b = -2$$

$$d: 2y - 2x + 1 = 0 \xrightarrow{x=0} y = \frac{-1}{2} \ \text{عرض از مبدأ}$$

۶ گزینهٔ «۳»

$$\frac{1}{\cos x} - \sin x \times \tan x < 0 \to \frac{1}{\cos x} - \sin x \times \frac{\sin x}{\cos x} < 0$$

$$\frac{1-\sin^2 x}{\cos x} < 0 \to \frac{\cos^2 x}{\cos x} < 0 \to \cos x < 0$$ انتهای کمان در ربع دوم یا سوم است.

$$\sin x + \frac{\sin x}{\cos x} > 0 \Rightarrow \frac{\sin x \cos x + \sin x}{\cos x} > 0 \to \frac{\sin x(1+\cos x)}{\cos x} > 0 \to \tan x(1+\cos x) > 0$$

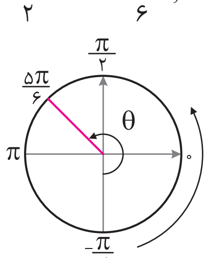
عبارت $1+\cos x$ همواره مثبت است، پس $\tan x > 0$ و بنابراین، انتهای کمان x در ربع سوم است.

۷ گزینهٔ «۱»

$$\frac{-\pi}{2} < \alpha < \frac{5\pi}{6} \ , \ \sin\hat{\alpha} = \frac{m+1}{2}$$

باید از روی دایره مثلثاتی، مشخص کنیم که در این محدوده، حداقل و حداکثر مقدار سینوس چقدر می‌شود: واضح است که در این محدوده، کم‌ترین مقدار سینوس عدد ۱- است که در $\frac{-\pi}{2}$ حاصل می‌شود و بیشترین مقدارش عدد ۱ است که در $\frac{\pi}{2}$ به‌دست می‌آید؛ پس داریم:

$$-1 \le \sin x \le 1 \Rightarrow -1 < \frac{m+1}{2} \le 1 \xrightarrow{\times 2} -2 < m+1 \le 2 \xrightarrow{-1} -3 < m \le 1$$



۸ گزینهٔ «۱» چرخ‌وفلک ۴۰ کابین دارد، یعنی محیط دایره را به ۴۰ قسمت مساوی تقسیم کرده‌ایم، پس طول کمانی که در فاصلهٔ دو کابین متوالی قرار دارد $\frac{2\pi}{40} = \frac{\pi}{20}\,\text{rad}$ می‌شود. از طرفی مضرب‌های زوج π را باید از درون کمان، بیرون بیاوریم: $\frac{47\pi}{10} = 4\pi + \frac{7\pi}{10}$

پس به اندازهٔ دو دور $(2\times 2\pi)$ چرخ‌وفلک به مبدأ حرکت چرخنده، یعنی کابین ۳ برمی‌گردد، سپس از آن‌جا به اندازه $\frac{7\pi}{10}$ جلو می‌رود، داریم:

دوران	واحد جابه جایی کابین
$\frac{\pi}{20}$	1
$\frac{7\pi}{10}$	x

$$\to x = \frac{7\pi}{\cancel{10}} \times \frac{\cancel{20}^{\,2}}{\pi} = 14 \to 14 + 3 = 17$$

سارا در موقعیت کابین ۱۷ است.

۹ گزینهٔ «۴»

$$A=\frac{\cos(\overbrace{\frac{۳\pi}{۲}+\theta}^{۴})-\cos(\overbrace{\pi+\theta}^{۳})}{\sin(\underbrace{\pi-\theta}_{۲})-\sin(\underbrace{۳\pi+\theta}_{\pi+\theta})}\Rightarrow A=\frac{\sin\theta-(-\cos\theta)}{\sin\theta-(-\sin\theta)}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{۲\sin\theta}$$

$$A=\frac{\sin\theta}{۲\sin\theta}+\frac{۱}{۲}\times\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\cot\theta\Rightarrow A=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱۰}{۲}\to A=۳$$

۱۰ گزینهٔ «۴»

$$A=\frac{(۱+\tan^۲\theta)(۱+\cot^۲\theta)}{۱-\sin^۲\theta-\cos^۴\theta}\quad A=\frac{(\frac{۱}{\cos^۲\theta})(\frac{۱}{\sin^۲\theta})}{\cos^۲\theta-\cos^۴\theta}=\frac{\frac{۱}{\sin^۲\theta\cos^۲\theta}}{\cos^۲\theta(۱-\cos^۲\theta)}=\frac{\frac{۱}{\cos^۲\theta\sin^۲\theta}}{\frac{\cos^۲\theta\sin^۲\theta}{۱}}$$

$$A=\frac{۱}{\sin^۴\theta\cos^۴\theta}=\frac{۱}{(\sin\theta\cos\theta)^۴}=\frac{۱}{(\frac{۱}{۲}\sin۲\theta)^۴}\quad A=\frac{۱}{\frac{۱}{۱۶}\sin^۴ ۲\theta}=\frac{۱۶}{\sin^۴ ۲\theta}\Rightarrow A=۱۶\sin^{-۴}(۲\theta)$$

توجه: حالا با توجه به درصد پاسخگویی خود در بسته تمرین ۱، از روی یکی از نردبان‌های «نقشه راه دانش‌آموز» انتهای کتاب حرکت کرده تا خود را به خانه جدید برسانید و بعد از آن مطابق دستورالعمل آورده‌شده در آن خانه عمل کنید. توجه کنید که در صورت ورود به بسته تمرین ۲ باز هم باید مطابق دستورالعمل‌های این نقشه عمل کنید. توجه شود که سؤالات متناظر با هر سؤال در هر بسته تمرین در جدولی که در ابتدای پاسخنامه هر بسته تمرین آمده‌است، مشخص شده‌است.

بسته تمرین ۲

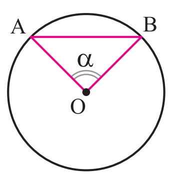
۱. اگر $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{3}{5}$ باشد، حاصل $\sin^6 x+\cos^6 x$ کدام است؟ (آزاد ریاضی - ۸۷)

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{2}{5}$ ۴) $\frac{3}{7}$

۲. دو قبضه پدافند هوایی (ضدهوایی) روی یک زمین صاف با فاصلهٔ $60\,\text{km}$ از یک‌دیگر قرار دارند. یک فروند هواپیمای دشمن در آسمان دیده می‌شود. زاویهٔ خط آتش هر یک از این دو قبضه پدافند به سمت هواپیما نسبت به سطح زمین 30° و 60° است. این جنگنده در چه ارتفاعی در حال پرواز است؟

۱) $30\sqrt{3}\,\text{km}$ ۲) $30\,\text{km}$ ۳) $20\sqrt{3}\,\text{km}$ ۴) $20\,\text{km}$

۳. در شکل زیر اگر زاویهٔ AOB، ۸۰ درجه و شعاع دایره $2\,\text{cm}$ باشد، طول وتر AB چقدر است؟



۱) $2\sin 50^\circ$ ۲) $4\cos 50^\circ$
۳) $2\tan 50^\circ$ ۴) $4\cot 50^\circ$

۴. در مثلث ABC رابطهٔ $\tan A\,.\tan B=1$ بین زوایا برقرار است. این مثلث همواره چگونه است؟

۱) متساوی‌الساقین ۲) متساوی‌الاضلاع ۳) منفرجه الزاویه ۴) قائم‌الزاویه

۵. خط d به معادلهٔ $by=\sqrt{3}-x$ دارای عرض از مبدأ (-1) است. سینوس زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور طول‌ها می‌سازد، چقدر است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

۶. اگر $\tan x=-3$ و $\cos x<0$ باشد، مقدار $\sin x$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{\sqrt{10}}$ ۲) $\frac{-1}{\sqrt{10}}$ ۳) $\frac{3}{\sqrt{10}}$ ۴) $\frac{-3}{\sqrt{10}}$

۷. با فرض $\frac{3\pi}{4}<\alpha<\pi$ و $\tan\alpha=\frac{2}{m-1}$ حدود تغییرات m کدام است؟

۱) $m<-1$ ۲) $m<1$ ۳) $-1<m<1$ ۴) $-2<m<-1$

۸. نقطهٔ $A(0,-1)$ را حول مبدأ به اندازه $\frac{2\pi}{3}$ در جهت مثبت دوران می‌دهیم. مختصات جدید نقطهٔ A کدام است؟

۱) $(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{-1}{2})$ ۲) $(\frac{-\sqrt{3}}{2},\frac{-1}{2})$ ۳) $(\frac{-\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$ ۴) $(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$

۹. با فرض $\sin 2a=2\sin a\cos a$ اگر $a+b=\frac{\pi}{4}$ باشد، حاصل عبارت $8\cos a\cos b\cos(\frac{\pi}{2}-a)\cos(\frac{\pi}{2}-b)$ کدام است؟

۱) $\sin 4a$ ۲) $\cos 4a$ ۳) $\sin^2 2a$ ۴) $\cos^2 2a$ (سراسری ریاضی - ۸۳)

۱۰. خلاصهٔ عبارت $\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)\sin(\pi+\alpha)-\sin(\pi-\alpha)\cos(-\alpha)$ کدام است؟ (سراسری تجربی - ۸۲)

۱) $-\sin 2\alpha$ ۲) $\sin 2\alpha$ ۳) $\cos 2\alpha$ ۴) صفر

۱.	۱ ۲ ۳ ۴	۳.	۱ ۲ ۳ ۴	۵.	۱ ۲ ۳ ۴	۷.	۱ ۲ ۳ ۴	۹.	۱ ۲ ۳ ۴
۲.	۱ ۲ ۳ ۴	۴.	۱ ۲ ۳ ۴	۶.	۱ ۲ ۳ ۴	۸.	۱ ۲ ۳ ۴	۱۰.	۱ ۲ ۳ ۴

شناسنامه سؤالات بسته تمرین ۲

شماره سؤال	عنوان زیرموضوع	سطح سؤال	پاسخ	سؤال متناظر در پیش‌آزمون	سؤال متناظر در بسته تمرین ۳
۱	مثلثات در مثلث قائم‌الزاویه		۳	۱	۱، ۱۰
۲	مثلثات در مثلث قائم‌الزاویه		۱	۲	۲، ۳
۳	مثلثات در مثلث قائم‌الزاویه		۲	۳	۳
۴	مثلثات در مثلث قائم‌الزاویه		۴	۴	۴
۵	مثلثات در مثلث قائم‌الزاویه		۲	۵	۵
۶	مثلثات در دایرهٔ مثلثاتی		۳	۶	۶
۷	مثلثات در دایرهٔ مثلثاتی		۱	۷	۷
۸	مثلثات در دایرهٔ مثلثاتی		۴	۸	۸
۹	نسبت‌های مثلثاتی زوایای مکمل، متمم و قرینه		۱	۹، ۱۰	۹، ۱۰
۱۰	نسبت‌های مثلثاتی زوایای مکمل، متمم و قرینه		۱	۹، ۱۰	۹، ۱۰

پاسخ‌نامه

۱ گزینهٔ «۳»

$$\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{3}{5}\Rightarrow(\underbrace{\sin^2x+\cos^2x}_{1})-2\sin^2 x\cos^2 x=\frac{3}{5}\to 1-2\sin^2 x\cos^2 x=\frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow 2\sin^2 x\cos^2 x=\frac{2}{5}\to\sin^2 x\cos^2 x=\frac{1}{5}\qquad(*)$$

از طرفی:

$$A=\sin^6 x+\cos^6 x=(\underbrace{\sin^2x+\cos^2x}_{1})^3-3\sin^4 x\cos^2 x-3\sin^2 x\cos^4 x$$

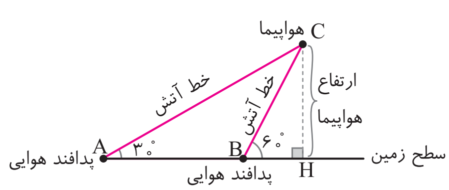
$$\Rightarrow A=1-3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2x+\cos^2x)\xrightarrow{(*)}A=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$$

تذکر: بهتر است اتحادهای پرکاربرد زیر را (که در بالا ثابت شد) حفظ کنیم:

$$\sin^4 x+\cos^4 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x\quad \sin^6 x+\cos^6 x=1-3\sin^2 x\cos^2 x$$

۲ گزینهٔ «۱» در مثلث قائم‌الزاویه AHC داریم: $\tan A=\frac{CH}{AH}$

در مثلث قائم‌الزاویه BHC داریم:



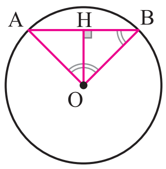
$$\tan 30^\circ=\frac{CH}{AH}\to CH=AH\times\frac{\sqrt{3}}{3}\qquad(1)$$

$$\tan B=\frac{CH}{BH}\to\tan 60^\circ=\frac{CH}{BH}\to CH=BH\times\sqrt{3}\qquad(2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)}AH\times\frac{\sqrt{3}}{3}=BH\times\sqrt{3}\to(\overset{60}{\cancel{AB}}+BH)\frac{\sqrt{3}}{3}=BH\times\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 20\cancel{\sqrt{3}}+\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{3}BH=\cancel{\sqrt{3}}BH\to\frac{2}{3}BH=20\to BH=30\to CH=BH\times\sqrt{3}\to CH=30\sqrt{3}\text{km}$$ ارتفاع هواپیما

۳ گزینهٔ «۲» از مرکز دایره بر وتر AB عمود OH را فرود می‌آوریم. در مثلث قائم‌الزاویه OBH داریم:

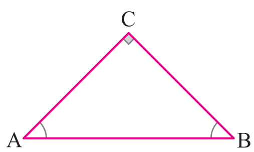


$$\cos OBA = \frac{BH}{OB} \to BH = R\cos 50^\circ$$

در هر دایره شعاع عمود بر وتر، وتر و کمان‌های آن را نصف می‌کنند.

$$AB = 2BH \to AB = 2R\cos 50^\circ \xrightarrow{R=2} AB = 4\cos 50^\circ$$

۴ گزینهٔ «۴»

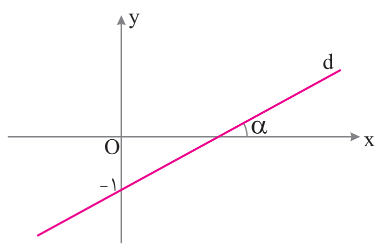


$$\tan A.\tan B = 1$$

$$\tan A = \frac{1}{\tan B} \to \tan A = \cot B \to A + B = 90^\circ$$

چون مجموع زوایای داخلی مثلث 180° است، زاویهٔ C باید قائمه باشد، پس مثلث قائم‌الزاویه است.

۵ گزینهٔ «۲»



$$by = \sqrt{3} - x \xrightarrow{x=0} by = \sqrt{3} \Rightarrow \quad y = \frac{\sqrt{3}}{b} = \text{عرض از مبدأ} \to \frac{\sqrt{3}}{b} = -1$$

$$\xrightarrow{\times(\frac{-\sqrt{3}}{3})} y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 1 \to \text{d شیب خط} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan\alpha \to \hat{\alpha} = 30^\circ$$

$$b = -\sqrt{3} \to \text{d معادلهٔ خط} : -\sqrt{3}y = \sqrt{3} - x$$

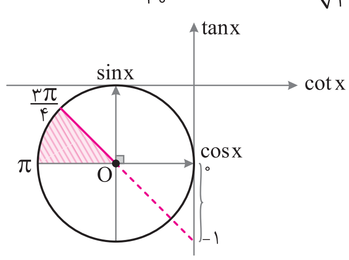
$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

۶ گزینهٔ «۳» انتهای کمان روبه‌رو به x باید در ربع دوم باشد. $(\tan x = -3 \;,\; \cos x < 0) \to$

از طرفی: $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \to 10 = \frac{1}{\cos^2 x} \to \cos^2 x = \frac{1}{10} \;,\; \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$$\to \sin^2 x = \frac{9}{10} \to \sin x = \pm\frac{3}{\sqrt{10}} \xrightarrow{\text{x در ربع دوم}} \sin x = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

۷ گزینهٔ «۱» برای حل مسئله از دایرهٔ مثلثاتی کمک می‌گیریم. با توجه به شکل روبه‌رو، وقتی

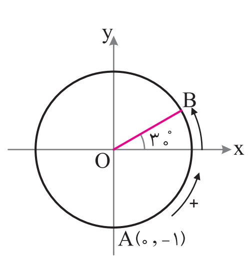


α بین $\frac{3\pi}{4}$ و π تغییر می‌کند tan α بین صفر و (۱-) خواهد بود.

پس داریم:

$$-1 < \frac{2}{m-1} < 0 \to \begin{cases} \frac{2}{m-1} < 0 \to m-1<0 \to m<1 \quad (1) \\ \frac{2}{m-1} > -1 \to \frac{2}{m-1} + 1 > 0 \to \frac{m+1}{\underbrace{m-1}_{\text{منفی است (با فرض m<1)}}} > 0 \to m+1<0 \to m<1 \quad (2) \end{cases} \Rightarrow 1 \cap 2 = m < -1$$

۸ گزینهٔ «۴» اگر مطابق شکل مرکز دایرهٔ مثلثاتی را منطبق بر مبدأ مختصات در نظر بگیریم، نقطهٔ A در موقعیت انتهای کمان $\frac{3\pi}{2}$ یا 270° قرار می‌گیرد. حال اگر A را در جهت مثبت به اندازهٔ $\frac{2\pi}{3}$ یا 120° دوران دهیم، به نقطهٔ B در موقعیت انتهای کمان 30° در ربع اوّل می‌رسیم. در این نقطه، مختصات نقطهٔ B همان سینوس و کسینوس زاویه 30° هستند، یعنی:



$$x_B = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad y_B = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \to B(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$$

۹ گزینهٔ «۱»

$$A = 8\cos a\cos b\underbrace{\cos(\frac{\pi}{2}-a)}_{\sin a}\underbrace{\cos(\frac{\pi}{2}-b)}_{\sin b}$$

$$A = 8\underline{\cos a}\,\underline{\underline{\cos b}}\,\underline{\sin a}\,\underline{\underline{\sin b}} \Rightarrow A = 2\times\underbrace{2\sin a\cos a}_{\sin 2a}\times\underbrace{2\sin b\cos b}_{\sin 2b} \Rightarrow A = 2\sin 2a\sin 2b$$

از طرفی: $a+b=\frac{\pi}{4} \to 2a+2b=\frac{\pi}{2}$

چون دو زاویهٔ $2a$ و $2b$ متمم‌اند، $\sin 2b = \cos 2a$ لذا داریم: $A = 2\sin 2a\cos 2a \Rightarrow A = \sin 4a$

۱۰ گزینهٔ «۱»

$$A = \sin(\overbrace{\frac{\pi}{2}+a}^{2})\sin(\overbrace{\pi+a}^{3}) - \sin(\overbrace{\pi-a}^{2})\cos(\overbrace{-\alpha}^{4}) \Rightarrow A = (\cos a)(-\sin a) - \sin a\cos a$$

$$\Rightarrow A = -2\sin a\cos a \to A = -\sin 2a$$

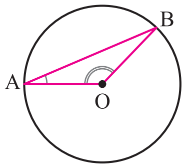
بسته تمرین ۳

۱. سادهٔ عبارت $(1-\sin^{۲}\theta)(۱+\frac{۱}{\cos^{۲}\theta})-(۱-\cos\theta)^{۲}$ کدام است؟ ($\cos\theta \neq ۰$) (سراسری انسانی – ۸۸)

۱) $\sin^{۲}\theta$ ۲) $\cos^{۲}\theta$ ۳) $-\cos^{۲}\theta$ ۴) $۲\cos\theta$

۲. ناظری با قد ۱۸۰cm در فاصلهٔ ۵۳۰ متری از برج میلاد روی زمین صاف قرار دارد. اگر زاویهٔ دید این شخص با نوک آنتن برج ۴۵ درجه باشد، ارتفاع برج چقدر است؟

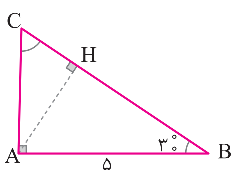
۱) ۵۳۰ ۲) ۵۳۰/۸ ۳) ۵۳۱/۸ ۴) ۵۴۱



۳. در دایرهٔ واحد شکل روبه‌رو، اگر اندازهٔ زاویه AOB، ۱۵۰ درجه باشد، $\tan OAB$ چقدر است؟

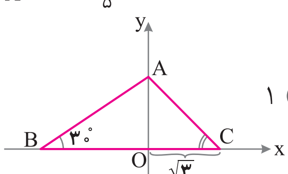
۱) $۲+\sqrt{۳}$ ۲) $۲-\sqrt{۳}$ ۳) $\sqrt{۶}-\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۶}+\sqrt{۲}$

۴. در شکل روبه‌رو، طول پاره‌خط BH چقدر است؟



۱) $\frac{۳\sqrt{۵}}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) $\frac{۵\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۵. در مثلث ABC، اگر معادلهٔ ضلع AB به فرم $۳ay = x+۱$ باشد، tanC چقدر است؟



۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) ۱

۶. اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در ربع دوم باشد، حاصل $\sqrt{\frac{\cot^{۲}\alpha}{۱+\cot^{۲}\alpha}}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی – ۶۲)

۱) $-\cot\alpha$ ۲) $-\cos\alpha$ ۳) $\cot\alpha$ ۴) $\cos\alpha$

۷. اگر $\frac{\pi}{۶}<\alpha<\frac{۵\pi}{۶}$ و $\sin\alpha=\frac{m+۱}{m-۱}$ باشد، حدود m کدام است؟

۱) $-۳<m<۱$ ۲) m ″ −۳ ۳) $m>۱$ ۴) $m<-۳$

۸. یک ماشین آبپاش ثابت برای آبیاری چمن‌ها، طوری ساخته شده است که بتواند سطح زمینی را که در فاصلهٔ ۳۲ تا ۶۴ متر از آن می‌باشد آبیاری کند. اگر معادلهٔ مسافتی که آب به‌طور افقی می‌پیماید $x=۶۴\sin ۲\alpha$ باشد، حدود تغییرات $\hat{\alpha}$ (به‌طور کامل) کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۶}\leq\alpha\leq\frac{\pi}{۲}$ ۲) $\frac{\pi}{۱۲}\leq\alpha\leq\frac{۵\pi}{۱۲}$ ۳) $\frac{\pi}{۲}\leq\alpha\leq\frac{۵\pi}{۶}$ ۴) $\frac{\pi}{۶}\leq\alpha\leq\frac{۵\pi}{۶}$

۹. با فرض $\sin ۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha$ اگر $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{۱}{۲}$ باشد، مقدار $\cos(\frac{۳\pi}{۲}-۲\alpha)$ کدام است؟ (سراسری تجربی – ۹۵)

۱) $\frac{-۳}{۴}$ ۲) $\frac{-۳}{۸}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۱۰. اگر $\cot ۳۴^{\circ}=۱/۵$ باشد، مقدار عبارت $\frac{۲\sin ۳۲۶^{\circ}+۳\sin ۵۶^{\circ}}{\cos ۳۰۴^{\circ}}$ چقدر است؟ (سراسری ریاضی – ۷۳)

۱) ۲/۵ ۲) ۲ ۳) ۱- ۴) ۱/۵-

۱. ۱ ۲ ۳ ۴ ۳. ۱ ۲ ۳ ۴ ۵. ۱ ۲ ۳ ۴ ۷. ۱ ۲ ۳ ۴ ۹. ۱ ۲ ۳ ۴

۲. ۱ ۲ ۳ ۴ ۴. ۱ ۲ ۳ ۴ ۶. ۱ ۲ ۳ ۴ ۸. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰. ۱ ۲ ۳ ۴

شناسنامه سؤالات پسته تمرین ۳

شماره سؤال	عنوان زیرموضوع	سطح سؤال	پاسخ	سؤال متناظر در پیش آزمون
۱	مثلثات در مثلث قائم‌الزاویه		۴	۱
۲	مثلثات در مثلث قائم‌الزاویه		۳	۲
۳	مثلثات در مثلث قائم‌الزاویه		۱	۳ ۴
۴	مثلثات در مثلث قائم‌الزاویه		۳	۳ ۴
۵	مثلثات در مثلث قائم‌الزاویه		۱	۵
۶	مثلثات در دایره مثلثاتی		۲	۶
۷	مثلثات در دایره مثلثاتی		۴	۷
۸	مثلثات در دایره مثلثاتی		۲	۸
۹	نسبت‌های مثلثاتی زوایای مکمل، متمم و قرینه		۱	۹ ۱۰
۱۰	نسبت‌های مثلثاتی زوایای مکمل، متمم و قرینه		۲	۹ ۱۰

پاسخ‌نامه

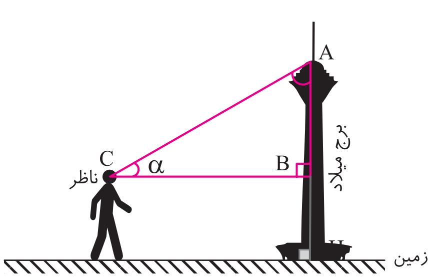
۱ گزینهٔ «۴»

$$A=(1-\sin^2\theta)(1+\frac{1}{\cos^2\theta})-(1-\cos\theta)^2 \quad , \quad \cos\theta\neq 0$$

$$A=\cos^2\theta(1+1+\tan^2\theta)-(1+\cos^2\theta-2\cos\theta)\Rightarrow A=2\cancel{\cos^2}\theta+\sin^2\theta-1-\cancel{\cos^2}\theta+2\cos\theta$$

$$A=\underbrace{\cos^2\theta+\sin^2\theta}_{1}-1+2\cos\theta\to A=2\cos\theta$$

۲ گزینهٔ «۳» با توجه به شکل زیر در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم:



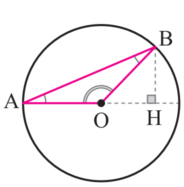
$$\tan\alpha=\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}$$

$$\tan\alpha=\frac{AB}{BC}\xrightarrow[BC=530\,m]{\alpha=45^\circ}\overset{1}{\cancel{\tan 45^\circ}}=\frac{AB}{530}\Rightarrow AB=530\,m$$

ولی برای به دست آوردن ارتفاع واقعی برج، باید قد شخص را نیز به عدد به دست آمده اضافه کنیم:

$$AH=BH+AB\to AH=1/8+530=531/8$$

۳ گزینهٔ «۱»



طبق فرض مسئله : $A\hat{O}B=150^\circ \Rightarrow$ مثلث OAB متساوی‌الساقین است. $\to \hat{A}=\hat{B}=15^\circ$

شعاع دایره واحد $OA=OB=1$

از رأس B بر قطر گذرا از OA، عمود BH را رسم می‌کنیم. زاویهٔ BOH زاویهٔ خارجی برای مثلث OAB

است، پس برابر با مجموع دو زاویه A و B است: $B\hat{O}H = ۳۰^\circ$.

در مثلث قائم‌الزاویه OBH داریم:

$$\sin BOH = \frac{BH}{OB} \to \sin ۳۰^\circ = \frac{BH}{۱} \Rightarrow BH = \frac{۱}{۲}$$

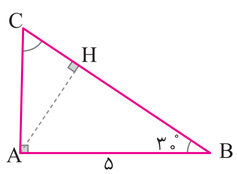
$$\cos BOH = \frac{OH}{OB} \to \frac{\sqrt{۳}}{۲} = OH$$

به‌طور مشابه در مثلث OBH داریم:

حال در مثلث قائم‌الزاویه ABH داریم:

$$\tan A = \frac{BH}{AH} \Rightarrow \tan ۱۵^\circ = \frac{\frac{۱}{۲}}{۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{۱}{۲+\sqrt{۳}} = ۲-\sqrt{۳}$$

۴ گزینهٔ «۳» در مثلث قائم‌الزاویهٔ BHA:

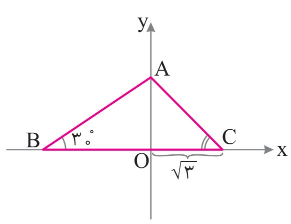


$$\sin B = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \sin ۳۰^\circ = \frac{AH}{۵} \Rightarrow AH = ۵\sin ۳۰^\circ$$

$$\Rightarrow AH = \frac{۵}{۲} \ ,\ AH^۲ + BH^۲ = AB^۲ \quad (\text{فیثاغورس})$$

$$\Rightarrow \frac{۲۵}{۴} + BH^۲ = ۲۵ \Rightarrow BH^۲ = \frac{۷۵}{۴} \Rightarrow BH = \frac{\sqrt{۷۵}}{۲} = \frac{۵\sqrt{۳}}{۲}$$

۵ گزینهٔ «۱»



$$\text{شیب خط AB} = \tan \hat{B} = \tan ۳۰ = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \quad \text{معادله ضلع AB}: ۳ay = x+۱ \Rightarrow y = \frac{۱}{۳a}x + \frac{۱}{۳a}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{\cancel{۳}a} = \frac{\sqrt{۳}}{\cancel{۳}} \to a = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \xrightarrow{AB} y = \frac{\sqrt{۳}}{۳}x + \frac{\sqrt{۳}}{۳} \xrightarrow{x=۰} y = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \to OA = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

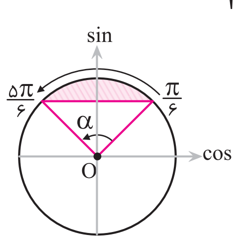
از طرفی:

$$\tan C = \frac{AO}{OC} = \frac{\frac{\cancel{\sqrt{۳}}}{۳}}{\frac{\cancel{\sqrt{۳}}}{۱}} = \frac{۱}{۳}$$

۶ گزینهٔ «۲»

$$A = \sqrt{\frac{\cot^۲\alpha}{۱+\cot^۲\alpha}} = \sqrt{\frac{\frac{\cos^۲\alpha}{\sin^۲\alpha}}{\frac{۱}{\sin^۲\alpha}}} = \sqrt{\cos^۲ x} = |\cos\alpha| \xrightarrow{\hat{\alpha} \in \text{ربع دوم}} A = -\cos\alpha$$

۷ گزینهٔ «۴»



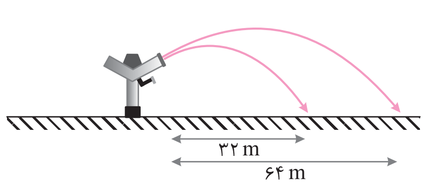
$$\frac{\pi}{۶} < \alpha < \frac{۵\pi}{۶} \quad , \quad \sin\alpha = \frac{m+۱}{m-۱}$$

از دایرهٔ مثلثاتی واضح است که در این فاصله مقدار سینوس بین $\frac{۱}{۲}$ و ۱ است. یعنی:

$$\frac{۱}{۲} < \frac{m+۱}{m-۱} \le ۱ \to \begin{cases} \frac{m+۱}{m-۱} \le ۱ \\ \frac{m+۱}{m-۱} > \frac{۱}{۲} \end{cases} \to \begin{cases} \frac{۲}{m-۱} \le ۰ \\ \frac{m+۳}{۲(m-۱)} > ۰ \end{cases} \to \begin{cases} m-۱ < ۰ \to m < ۱ & (۱) \\ m+۳ < ۰ \to m < -۳ & (۲) \end{cases} \quad ۱ \cap ۲ = m < -۳$$

۸ گزینهٔ «۲»

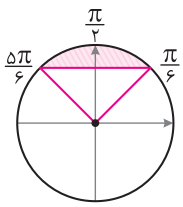
$$۳۲ \le x \le ۶۴ \to ۳۲ \le ۶۴\sin ۲\alpha \le ۶۴ \to \underset{\sin\frac{\pi}{۶}}{\frac{۱}{۲}} \le \sin ۲\alpha \le \underset{\sin\frac{\pi}{۲}}{۱}$$



معادلهٔ مسافت افقی که آب می‌پیماید : $x = ۶۴\sin ۲\alpha$.

با توجه به دایرهٔ مثلثاتی داریم:

$$\frac{\pi}{۱۲} \le \alpha \le \frac{۵\pi}{۱۲} \qquad \frac{\pi}{۶} \le ۲\alpha \le \frac{۵\pi}{۶}$$



۹ گزینهٔ «۱»

$$\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{۱}{۲} \xrightarrow{\text{دو طرف به توان}} \underbrace{\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha}_{۱} - \underbrace{۲\sin\alpha\cos\alpha}_{\sin ۲\alpha} = \frac{۱}{۴}$$

$$\sin ۲\alpha = \frac{۳}{۴} (*) \xrightarrow{\text{از طرفی}} \cos(\underbrace{\frac{۳\pi}{۲} - ۲\alpha}_{\text{ربع سوم}}) = -\sin ۲\alpha \overset{(*)}{=\!=} = \frac{-۳}{۴}$$

۱۰ گزینهٔ «۱»

$$A = \frac{۲\sin ۳۲۶^\circ + ۳\sin ۵۶^\circ}{\cos ۳۰۴^\circ} \quad , \quad \cot ۳۴^\circ = ۱/۵ \Rightarrow A = \frac{۲\sin(\overbrace{۳۶۰ - ۳۴}^{۴}) + ۳\sin(\overbrace{۹۰ - ۳۴}^{۱})}{\cos(\underbrace{۲۷۰ + ۳۴}_{۴})}$$

$$A = \frac{-۲\sin ۳۴ + ۳\cos ۳۴^\circ}{\sin ۳۴^\circ} \Rightarrow A = -۲ + ۳\cot ۳۴^\circ \Rightarrow A = -۲ + ۳(۱/۵) \Rightarrow A = ۲/۵$$

آزمون پایانی

۱. در صورتی که $\frac{\text{۳}}{\text{۲}} = \frac{\sin\theta}{\sin\theta - \cos\theta}$ باشد، مقدار $\tan\theta$ برابر است با: (آزاد انسانی - ۸۶)

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۲. حاصل عبارت $\cot^{\text{۴}}\theta - \frac{\text{۱}}{\sin^{\text{۲}}\theta} - \frac{\text{۱}}{\sin^{\text{۴}}\theta}$ کدام است؟ (سراسری انسانی - ۸۵)

۱) $\sin^{\text{۲}}\theta$ ۲) $\cos^{\text{۲}}\theta$ ۳) $\tan^{\text{۲}}\theta$ ۴) $\cot^{\text{۲}}\theta$

۳. حاصل $\tan^{\text{۲}}\theta - \tan^{\text{۲}}\theta\sin^{\text{۲}}\theta$ همواره برابر کدام است؟ (سراسری انسانی خارج از کشور - ۹۱)

۱) $\sin^{\text{۲}}\theta$ ۲) $\cos^{\text{۲}}\theta$ ۳) $-\sin^{\text{۲}}\theta$ ۴) $-\cos^{\text{۲}}\theta$

۴. با فرض $\frac{\text{۵}\pi}{\text{۶}} < x < \frac{\pi}{\text{۳}}$ و $\sin x = \frac{\text{۳} - m^{\text{۲}}}{\text{۳} + m^{\text{۲}}}$ مقادیر m در کدام فاصله است؟ (سراسری ریاضی - ۷۰)

۱) $-\sqrt{\text{۳}} < m < \sqrt{\text{۳}}$ ۲) $-\sqrt{\text{۲}} < m < \sqrt{\text{۲}}$ ۳) $-\text{۱} < m < \text{۱}$ ۴) $\frac{-\text{۱}}{\text{۲}} < m < \frac{\text{۱}}{\text{۲}}$

۵. اگر $\alpha + \beta = \text{۱۳۵}^\circ$ و $\tan(\alpha - \beta) = \text{۱}$ باشد، مقدار کسر $\frac{\cos^{\text{۲}}\alpha\cos^{\text{۲}}\beta - \sin^{\text{۲}}\alpha\sin^{\text{۲}}\beta}{\sin^{\text{۲}}\alpha\cos^{\text{۲}}\beta - \cos^{\text{۲}}\alpha\sin^{\text{۲}}\beta}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۴ با کمی تغییر)

۱) ۳ ۲) $\frac{-\text{۱}}{\text{۳}}$ ۳) ۳- ۴) $\frac{\text{۱}}{\text{۳}}$

۶. در مثلث ABC، رابطه $\text{۱} - \cos C = \text{۲}\sin^{\text{۲}} C$ برقرار است، آن‌گاه C کدام است؟ ($\cos C \neq \text{۱}$)

۱) ۳۰° ۲) ۴۵° ۳) ۶۰° ۴) ۱۲۰°

۷. اگر نقطهٔ $M(-\text{۱}, -\sqrt{\text{۳}})$ را به O مبدأ مختصات وصل کنیم، زاویهٔ پاره‌خط OM با جهت مثبت محور x ها چقدر است؟

۱) $\frac{\pi}{\text{۳}}$ ۲) $\frac{\text{۲}\pi}{\text{۳}}$ ۳) $\frac{\text{۴}\pi}{\text{۳}}$ ۴) $\frac{\text{۵}\pi}{\text{۶}}$

۸. مقدارهای حداقل (مینیمم) و حداکثر (ماکزیمم) عبارت $A = -\text{۲} + \text{۳}\sin\text{۵}x$ به ترتیب از چپ به راست کدام است؟

۱) $(-\text{۱}, \text{۵})$ ۲) $(\text{۱}, \text{۳})$ ۳) $(-\text{۵}, \text{۱})$ ۴) $(-\text{۱}, +\text{۳})$

۹. اگر α زاویه منفرجه و $\sin\alpha = \frac{\text{۳}}{\text{۵}}$ باشد، مقدار عبارت $A = \frac{\text{۱} + \tan\alpha}{\text{۱} - \tan\alpha}$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور - ۸۵ با کمی تغییر)

۱) ۷- ۲) $\frac{-\text{۱}}{\text{۷}}$ ۳) $\frac{\text{۱}}{\text{۷}}$ ۴) ۷

۱۰. طول عقربهٔ دقیقه‌شمار یک ساعت دیواری $\text{۶/۵}cm$ است و عقربه با جهت مثبت محور افقی زاویه θ می‌سازد. حداکثر ارتفاع نوک عقربه از محور افقی چقدر است؟

۱) ۶/۵ ۲) ۳/۲۵ ۳) ۳ ۴) ۶

۱.	۱ ۲ ۳ ۴	۳.	۱ ۲ ۳ ۴	۵.	۱ ۲ ۳ ۴	۷.	۱ ۲ ۳ ۴	۹.	۱ ۲ ۳ ۴
۲.	۱ ۲ ۳ ۴	۴.	۱ ۲ ۳ ۴	۶.	۱ ۲ ۳ ۴	۸.	۱ ۲ ۳ ۴	۱۰.	۱ ۲ ۳ ۴

شناسنامه سؤالات آزمون پایانی

شماره سؤال	عنوان زیرموضوع	پاسخ
۱	مثلثات در مثلث قائم‌الزاویه	۲
۲	مثلثات در مثلث قائم‌الزاویه	۴
۳	مثلثات در مثلث قائم‌الزاویه	۱
۴	مثلثات در دایرهٔ مثلثاتی	۳
۵	مثلثات در دایرهٔ مثلثاتی	۲
۶	مثلثات در دایرهٔ مثلثاتی	۴
۷	مثلثات در دایرهٔ مثلثاتی	۳
۸	مثلثات در دایرهٔ مثلثاتی	۳
۹	مثلثات در دایرهٔ مثلثاتی	۳
۱۰	مثلثات در دایرهٔ مثلثاتی	۱

پاسخ‌نامه

۱ گزینهٔ «۲»

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=\frac{۳}{۲}\xrightarrow{\text{دو طرف معادله را معکوس می‌کنیم.}}\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{۲}{۳}\xrightarrow{\text{کسر را تفکیک می‌کنیم.}}\frac{\sin\theta}{\sin\theta}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{۲}{۳}\to ۱-\cot\theta=\frac{۲}{۳}$$

$$\to \cot\hat{\theta}=\frac{۱}{۳}\to \tan\hat{\theta}=۳$$

۲ گزینهٔ «۴»

$$A=\frac{۱}{\sin^۴\theta}-\frac{۱}{\sin^۲\theta}-\cot^۴\theta \Rightarrow A=\frac{۱}{(\sin^۲\theta)^۲}-\frac{۱}{\sin^۲\theta}-\cot^۴\theta \to A=(۱+\cot^۲\theta)^۲-(۱+\cot^۲\theta)-\cot^۴\theta$$

$$A=\cancel{۱}+\cancel{\cot^۴\theta}+۲\cot^۲\theta-\cancel{۱}-\cot^۲\theta-\cancel{\cot^۴\theta}\Rightarrow A=\cot^۲\theta$$

۳ گزینهٔ «۱»

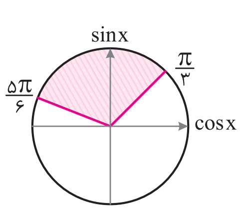
$$B=\tan^۲\theta-\tan^۲\theta\sin^۲\theta\to B=\tan^۲\theta(۱-\sin^۲\theta)$$

$$B=\tan^۲\theta\times\cos^۲\theta\to B=\frac{\sin^۲\theta}{\cancel{\cos^۲\theta}}\times\cancel{\cos^۲\theta}\to B=\sin^۲\theta$$

۴ گزینهٔ «۳»

$$\frac{\pi}{۳}<x<\frac{۵\pi}{۶}\qquad,\qquad \sin x=\frac{۳-m^۲}{۳+m^۲}$$

از دایرهٔ مثلثاتی برای تشخیص حداقل و حداکثر مقدار سینوس در این فاصله کمک می‌گیریم. با توجه به شکل کم‌ترین مقدار سینوس در این فاصله $\frac{۱}{۲}$ و بیشترین مقدارش ۱ است؛ پس داریم:



$$\frac{۱}{۲}<\frac{۳-m^۲}{۳+m^۲}\le ۱\xrightarrow{\text{طرفین را در }(۳+m^۲)۲\text{ ضرب می‌کنیم.}}۳+m^۲<۶-۲m^۲\le ۶+۲m^۲$$

$$\begin{cases}۳+m^۲<۶-۲m^۲\to ۳m^۲<۳\to m^۲<۱\to -۱<m<۱ & (*)\\ \cancel{۶}-۲m^۲\le\cancel{۶}+۲m^۲\to ۴m^۲\ge ۰\to m^۲\ge ۰\to m\in R & (**)\end{cases}\Rightarrow (*)\cap(**)=-۱<m<۱$$

۵ گزینهٔ «۲»

$$\alpha+\beta=135^\circ \quad , \quad \tan(\alpha-\beta)=1 \to \alpha-\beta=45^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{\alpha}=90^\circ \ , \quad \hat{\beta}=45^\circ \to A=\frac{\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta}{\sin^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha\sin^2\beta}$$

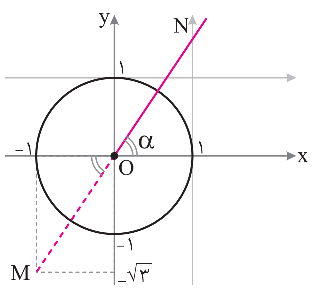
$$A=\frac{\cancel{\cos^2 90^\circ}\cos^2 45^\circ-\sin^2 90\sin^2 45}{\sin^2 90\cos^2 45^\circ-\cancel{\cos^2 90}\sin^2 45}\xrightarrow{\cos 90=0} A=\frac{-1\times(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}{1\times(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}=\frac{-1+\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{\frac{-1}{\cancel{2}}}{\frac{3}{\cancel{2}}}=\frac{-1}{3}$$

۶ گزینهٔ «۴»

$$1-\cos\hat{C}=2\sin^2\hat{C}\xrightarrow{\sin^2 C=1-\cos^2 C}1-\cos C=2(1-\cos^2 C)\to \cancel{1-\cos C}=2\,\cancel{(1-\cos C)}\,(1+\cos C)$$

$$(\cos C\neq 1\to 1-\cos C\neq 0)\to \frac{1}{2}=1+\cos C\Rightarrow \cos C=\frac{-1}{2}\to \hat{C}=+120^\circ$$

۷ گزینهٔ «۳» اگر مرکز دایره مثلثاتی را منطبق بر مبدأ مختصات (نقطه O) در نظر بگیریم، آن‌گاه نقطه $M(-1,-\sqrt{3})$ در موقعیت قرینه نقطه $N(1,\sqrt{3})$ نسبت به مبدأ می‌باشد و می‌دانیم $\tan 60^\circ=\sqrt{3}$؛ لذا زاویه‌ای که OM با محور طول‌ها در جهت مثبت می‌سازد هم 60° است.



۸ گزینهٔ «۳» می‌دانیم سینوس هر زاویه‌ای بین ۱ و ۱- است پس داریم:

$$-1\le\sin 5x\le 1\xrightarrow{\times(3)}-3\le 3\sin 5x\le 3\xrightarrow{\text{طرفین منهای ۲}}-3-2\le 3\sin 5x-2\le 3-2\to -5\le A\le 1$$

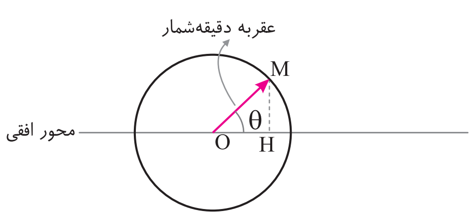
۹ گزینهٔ «۳» در ربع دوم کسینوس، علامت منفی دارد $\to \hat{\alpha}$ در ربع دوم $\to$ زاویه α منفرجه

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\xrightarrow{\sin\alpha=\frac{3}{5}}\cos^2\alpha=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$$

$$\cos\alpha=\pm\frac{4}{5}\xrightarrow{\text{ربع دوم}}\cos\alpha=\frac{-4}{5}\ \text{(ق ق)}$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{-4}{5}}=-\frac{3}{4}\Rightarrow A=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}\to A=\frac{1-\frac{3}{4}}{1+\frac{3}{4}}=\frac{\frac{1}{\cancel{4}}}{\frac{7}{\cancel{4}}}=\frac{1}{7}$$

۱۰ گزینهٔ «۱» با توجه به شکل در مثلث قائم‌الزاویه OMH داریم:



$$\sin\hat{\theta}=\frac{MH}{OM}\xrightarrow{OM=6/5}MH=6/5\sin\theta$$

طول پاره‌خط MH (یا همان ارتفاع نوک عقربه دقیقه شمار) از محور افقی وقتی ماکزیمم می‌شود که $\sin\theta=1$ باشد، یعنی $\hat{\theta}=90^\circ$ باشد، پس حداکثر ارتفاع وقتی حاصل می‌شود که عقربه عمودی بایستد (در موقعیت ساعت ۱۲) و در این حالت OM همان ارتفاع است. (یعنی $6/5\,cm$)

آیا به تمام سؤالات آزمون پایانی به درستی پاسخ داده‌اید؟

بله: به مرحله **آزمون غنی‌سازی** بروید.

خیر: متناسب با زیرموضوعات مربوط به سؤالاتی که به درستی پاسخ نداده‌اید، به **تمرینات معلم** خود مراجعه و آن‌ها را حل کنید.

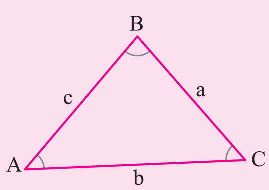
مجدداً سؤالاتی را که در **آزمون پایانی** مشکل داشتید حل کنید.

آزمون غنی‌سازی

حل مثلث

منظور از حل مثلث، یافتن اجزای مجهول مثلث، مانند طول اضلاع و یا اندازهٔ زوایای آن، با استفاده از معلومات مسئله است. برای این منظور دو رابطهٔ مهم «کسینوس‌ها» و «سینوس‌ها» را معرفی می‌کنیم.

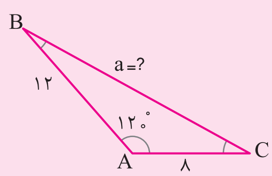
رابطهٔ کسینوس‌ها: در هر مثلث، مربع اندازهٔ هر ضلع، برابر است با مجموع مربعات دو ضلع دیگر، منهای حاصل‌ضرب آن دو ضلع در کسینوس زاویه بین آن دو ضلع. به زبان ریاضی، در مثلث ABC می‌توان نوشت:



$$\begin{cases} a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}-۲bc\cos A & (۱) \\ b^{۲}=a^{۲}+c^{۲}-۲ac\cos B & (۲) \\ c^{۲}=a^{۲}+b^{۲}-۲ab\cos C & (۳) \end{cases}$$

مثال: در مثلث ABC اگر اندازهٔ دو ضلع زاویهٔ منفرجه، ۸ و ۱۲ باشد و $\hat{A}=\frac{۲\pi}{۳}$ ، آن‌گاه طول ضلع BC را حساب کنید.

پاسخ: از رابطه کسینوس‌ها استفاده می‌کنیم:

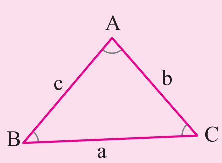


$$a^{۲}=۸^{۲}+۱۲^{۲}-۲\times۸\times۱۲\times\cos A$$

$$a^{۲}=۶۴+۱۴۴-۱۹۲\underbrace{\cancel{\cos A}}_{-\frac{۱}{۲}}$$

$$a^{۲}=۶۴+۱۴۴+۹۶\to a^{۲}=۳۰۴\to a=\sqrt{۳۰۴}$$

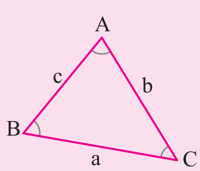
رابطهٔ سینوس‌ها: در هر مثلث نسبت اندازهٔ یک ضلع به سینوس زاویهٔ روبه‌رو به آن ضلع مقدار یکسانی است. یعنی در مثلث ABC داریم:



$$\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}$$

مثال: در مثلث ABC اگر $a=۳\sqrt{۲}$ ، $b=۲\sqrt{۳}$ و $\hat{B}=۴۵^\circ$ ، اندازه دو زاویه دیگر را به‌دست آورید.

پاسخ:



$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\Rightarrow\frac{۳\sqrt{۲}}{\sin A}=\frac{۲\sqrt{۳}}{\underbrace{\cancel{\sin B}}_{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}}=\frac{c}{\sin C}$$

$$\Rightarrow\sin A=\frac{۳\cancel{\sqrt{۲}}\times\frac{\cancel{\sqrt{۲}}}{۲}}{۲\sqrt{۳}}=\frac{۳}{۲\sqrt{۳}}\times\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}=\frac{۳\sqrt{۳}}{۶}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow\hat{A}=۶۰^\circ\to\hat{C}=۱۸۰-(\hat{A}+\hat{B})\Rightarrow C=۷۵^\circ$$

۱. در مثلثی اندازهٔ دو ضلع $۴\sqrt{۶}$ و $۳\sqrt{۲}$ و زاویهٔ بین این دو ضلع ۶۰° است. مساحت مثلث کدام است؟ (آزمایشی سنجش ریاضی - ۹۱)

۱) ۱۲ ۲) $۱۲\sqrt{۳}$ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴

۲. در مثلث ABC داریم: $b=a\sqrt{۲}$ و $\hat{A}=۳۰^\circ$ زاویهٔ C چند درجه است؟ (آزمایشی سنجش ریاضی - ۹۰)

۱) ۱۵° یا ۱۰۵° ۲) ۱۵° ۳) ۱۰۵° ۴) ۷۵° یا ۱۰۵°

۳. در مثلث ABC با معلوم بودن $BC = ۳ + \sqrt{۳}$ و زاویه‌های $\hat{B} = ۶۰^\circ$ و $\hat{C} = ۴۵^\circ$، اندازهٔ ضلع AC کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۳)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $۳\sqrt{۲}$

۴. مساحت مثلثی به اضلاع ۷، ۹ و ۱۲ کدام است؟ (سراسری ریاضی - ۹۳)

۱) $۱۵\sqrt{۲}$ ۲) $۱۴\sqrt{۳}$ ۳) $۱۲\sqrt{۵}$ ۴) $۱۴\sqrt{۵}$

۵. در مثلثی رابطهٔ $b^۳ + a^۲c = c^۳ + a^۲b$ بین اضلاع برقرار است. زاویهٔ A چند درجه است؟ (آزمایشی سنجش ریاضی - ۹۰)

۱) ۴۵ ۲) ۶۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۳۵

۶. مساحت مثلثی با دو ضلع ۱۶ و ۹ واحد، برابر $۲۴\sqrt{۵}$ واحد مربع است. بزرگ‌ترین ضلع این مثلث کدام است؟ (سراسری ریاضی - ۹۴)

۱) ۲۱ ۲) ۲۲ ۳) ۲۳ ۴) ۲۴

۷. اگر حاصل عبارت $\sec^۲ x + \csc^۲ x$ برای زاویه $\hat{\alpha}$ برابر با $۴\frac{۴}{۳}$ باشد، آن‌گاه حاصل عبارت $\frac{۴}{\sin^۲ ۲x}$ به ازای α چقدر است؟

$(\sec x = \frac{۱}{\cos x} \ , \ \csc x = \frac{۱}{\sin x})$

۱) $۵\frac{۱}{۳}$ ۲) ۵ ۳) $۴\frac{۲}{۳}$ ۴) ۴

۸. اگر در مثلث ABC داشته باشیم: $a^۲ = b^۲ + c^۲ + bc$ آن‌گاه اندازهٔ یکی از زوایای مثلث چند رادیان است؟

۱) $\frac{\pi}{۶}$ ۲) $\frac{\pi}{۳}$ ۳) $\frac{۲\pi}{۳}$ ۴) $\frac{۵\pi}{۶}$

۹. اگر طول دو ضلع مثلثی ۸ و ۹ واحد باشد، بیشترین مقدار ممکن برای مساحت مثلث چقدر است؟

۱) ۱۸ ۲) ۳۶ ۳) ۷۲ ۴) ۵۴

.۱ ۱ ۲ ۳ ۴ .۳ ۱ ۲ ۳ ۴ .۵ ۱ ۲ ۳ ۴ .۷ ۱ ۲ ۳ ۴ .۹ ۱ ۲ ۳ ۴
.۲ ۱ ۲ ۳ ۴ .۴ ۱ ۲ ۳ ۴ .۶ ۱ ۲ ۳ ۴ .۸ ۱ ۲ ۳ ۴

شناسنامه سؤالات آزمون غنی‌سازی

شماره سؤال	عنوان زیرموضوع	سطح سؤال	پاسخ
۱	مساحت مثلث		۳
۲	رابطه سینوس‌ها		۱
۳	رابطه سینوس‌ها		۴
۴	رابطه سینوس‌ها		۴
۵	رابطه سینوس‌ها		۳
۶	مساحت مثلث		۳
۷	نسبت‌های مثلثاتی		۱
۸	رابطه کسینوس‌ها		۳
۹	مساحت مثلث		۲

پاسخ‌نامه

۱ گزینهٔ «۳»

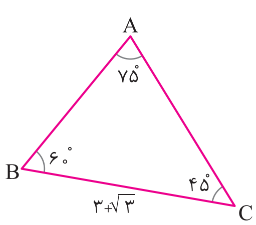
$$S=\cancel{\frac{1}{2}}\times ۳\sqrt{۲}\times \overset{۲}{\cancel{۴}}\sqrt{۶}\times \sin ۶۰^\circ \Rightarrow S=۶\sqrt{۱۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}\to S=\frac{۶\times ۶}{۲}=۱۸$$

۲ گزینهٔ «۱»

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\to\frac{\cancel{a}}{\sin ۳۰^\circ}=\frac{\cancel{a}\sqrt{۲}}{\sin B}\to \sin B=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\to B=۴۵^\circ \text{ یا } ۱۳۵^\circ \quad , \quad \hat{A}+\hat{B}=۷۵^\circ \text{ یا } ۱۶۵^\circ$$

پس با توجّه به این‌که مجموع زوایای داخلی $\overset{\Delta}{ABC}$ ، ۱۸۰° است، زاویهٔ C باید ۱۰۵° یا ۱۵° باشد.

۳ گزینهٔ «۴» مثلث ABC را رسم می‌کنیم. چون $\hat{B}=۶۰^\circ$ و $\hat{C}=۴۵^\circ$ پس $\hat{A}$ هم باید ۷۵° باشد. از رابطه سینوس‌ها استفاده می‌کنیم:



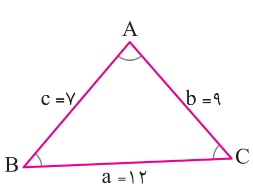
$$AC\times(\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴})=(۳+\sqrt{۳})(\frac{\sqrt{۳}}{۲})$$

$$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}\to\frac{۳+\sqrt{۳}}{\sin ۷۵^\circ}=\frac{AC}{\sin ۶۰^\circ}\to \sin ۷۵^\circ=\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}$$

$$\Rightarrow AC=\frac{۳\sqrt{۳}+۳}{\cancel{۲}}\times\frac{\overset{۲}{\cancel{۴}}}{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}=\frac{۶\sqrt{۳}+۶}{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}\Rightarrow AC=\frac{۶\sqrt{۱۸}-۶\sqrt{۶}+۶\sqrt{۶}-۶\sqrt{۲}}{۴}=\frac{۱۸\sqrt{۲}-۶\sqrt{۲}}{۴}$$

$$\Rightarrow AC=\frac{۱۲\sqrt{۲}}{۴}\to A=۳\sqrt{۲}$$

۴ گزینهٔ «۴» روش اوّل:



$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{۱}{۲}\times ۷\times ۹\times \sin A=\frac{۶۳}{۲}\sin A \qquad (*)$$

برای یافتن $\sin A$ باید از رابطهٔ کسینوس‌ها استفاده کنیم:

$$a^۲=b^۲+c^۲-۲bc\cos A\to ۱۴۴=۸۱+۴۹-۲\times ۷\times ۹\cos A\to \cancel{۱۴}=-\cancel{۱۴}\times ۹\cos A\to \cos A=-\frac{۱}{۹}$$

از طرفی:

$$\sin^۲ A+\cos^۲ A=۱\to \sin^۲ A=۱-(-\frac{۱}{۹})^۲=۱-\frac{۱}{۸۱}$$

$$\sin^2 A = \frac{80}{81} \to \sin A = \frac{\sqrt{80}}{9} = \frac{4\sqrt{5}}{9} \xrightarrow{(*)} S = \frac{\overset{7}{\cancel{63}}}{\cancel{2}} \times \frac{\overset{2}{\cancel{4}}\sqrt{5}}{\underset{1}{\cancel{9}}} = 14\sqrt{5}$$

روش دوم (غیر مثلثاتی): می‌توانیم از رابطهٔ «هرون» استفاده کنیم. اگر اندازهٔ اضلاع مثلث ABC را a، b و c فرض کنیم P برابر با نصف محیط مثلث ABC است یعنی: $P = \frac{a+b+c}{2}$

سپس مساحت از فرمول $S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$ به‌دست می‌آید: $(P = \frac{7+9+12}{2} = 14)$

$$S = \sqrt{14(14-7)(14-9)(14-12)} \Rightarrow S = \sqrt{14 \times 7 \times 5 \times 2} = 14\sqrt{5}$$

۵ گزینهٔ «۳»

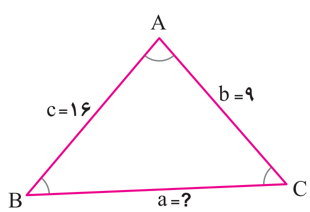
$$b^3 + a^2c = c^3 + a^2b \to b^3 - c^3 + a^2c - a^2b = 0$$

$$b^3 - c^3 + a^2(c-b) = 0 \to (b-c)(b^2+bc+c^2) - a^2(b-c) = 0 \to (b-c)(b^2+bc+c^2-a^2) = 0 \begin{cases} b-c=0 \to b=c \\ a^2 = b^2+c^2+bc \end{cases} \quad (*)$$

از طرفی طبق رابطهٔ کسینوس‌ها: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A} \qquad (**)$

$$\xrightarrow{(**),(*)} \cancel{b^2} + \cancel{c^2} + \cancel{bc} = \cancel{b^2} + \cancel{c^2} - 2\cancel{bc}\cos\widehat{A} \to \cos\widehat{A} = \frac{-1}{2} \to \widehat{A} = 120^\circ$$

۶ گزینهٔ «۳»



$$S_{\underset{ABC}{\Delta}} = 24\sqrt{5} \text{ طبق فرض مسئله } \Rightarrow \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A} = 24\sqrt{5}$$

$$\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}} \times 9 \times \cancel{16} \times \sin\widehat{A} = 24\sqrt{5} \Rightarrow \sin\widehat{A} = \frac{24\sqrt{5}}{72} = \frac{\sqrt{5}}{3} \to \cos^2\widehat{A} = 1 - \sin^2 A$$

$$\cos^2\widehat{A} = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9} \to \cos\widehat{A} = \pm\frac{2}{3}$$

برای آن‌که ضلع a بزرگ‌ترین باشد، باید زاویهٔ روبه‌رویش (یعنی A) بزرگ‌تر شود پس $\cos A = \frac{-2}{3}$ را قبول می‌کنیم چون در این صورت A، منفرجه بوده است. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Rightarrow a^2 = 81 + 256 - 2 \times 16 \times 9(\frac{-2}{3}) \Rightarrow a^2 = 529 \to a = 23$

۷ گزینهٔ «۱»

$$A = \sec^2 x + \csc^2 x \Rightarrow A = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \to A = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}$$

می‌دانیم: $\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$

$$A = \frac{1}{(\sin x\cos x)^2} \to A = \frac{1}{\frac{1}{4}\sin^2 2x} \to A = \frac{4}{\sin^2 2x}$$

یعنی حاصل عبارت $\frac{4}{\sin^2 2x}$ باید همان حاصل عبارت داده‌شده در مسئله باشد که عدد $\frac{16}{3}$ است.

۸ گزینهٔ «۳»

$$a^2 = b^2 + c^2 + bc \qquad (1)$$

از طرفی:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \qquad (2)$$

$$(2) \text{ و } (1) \text{ از } \to -2\cancel{bc}\cos A = \cancel{bc} \to \cos A = \frac{-1}{2} = \frac{2\pi}{3}$$

۹ گزینهٔ «۲» اندازهٔ دو ضلع مثلثی ۸ و ۹ واحد است و می‌دانیم:

$$\text{مساحت مثلث } S = \frac{1}{2} \times 8 \times 9 \times \sin\theta \; (\text{زاویهٔ بین دو ضلع داده‌شده } \hat{\theta})$$

برای آن‌که S بیشترین مقدار را داشته باشد باید سینوس ماکزیمم شود ($\sin\theta = 1$) یعنی $\hat{\theta} = 90^\circ$ باشد. (یعنی ABC قائم‌الزاویه باشد) که در این صورت: $\text{Max}(S) = \frac{1}{2} \times 8 \times 9 = 36$