درخت دانش

# آشنایی با نظریهٔ اعداد

## فصل اول (۱۸ پیمانه) پیمانه‌های ۱ تا ۱۸

کتاب درسی

ریاضیات گسسته: فصل ۱، صفحه‌های ۱ تا ۳۰

**گام اول:** میزان تسلط خود را با رنگ مشخص کنید.

آبی: مسلطم/ سبز: نسبتاً مسلطم/ زرد: مسلط نیستم

**گام‌های بعدی:** اگر در گام اول دانش خود را در حد رنگ زرد ارزیابی کردید اما در نوبت‌های بعدی پیشرفت کردید، می‌توانید خانه‌های سبز یا آبی را رنگ کنید. هرگاه به رنگ‌ها نگاه کنید متوجه می‌شوید در کدام قسمت‌ها نیاز به تمرین بیش‌تر دارید.

**۱۸ پیمانه**
- ۱۵ پیمانه ۲۰ سؤالی
- ۳ پیمانه ۱۰ سؤالی
- ۱ پیمانهٔ ۲۰ سوال ویژهٔ برترها
- ۱ پیمانهٔ ۲۰ سؤال جمع‌بندی

**۳۳۰ سؤال شناسنامه‌دار**
- **۱۰۰ سؤال طراحی شده از کتاب درسی**: این سؤال‌ها برای پوشش مطالب کتاب درسی طراحی شده‌اند.
- **۱۵۵ سؤال از آزمون‌های کانون**
- **۷۵ سؤال از کنکورهای سراسری**

**آشنایی با نظریه اعداد** (۳۳۰ سؤال شناسنامه‌دار)

### استدلال ریاضی
(۲ پیمانه) (۴۰ سؤال شناسنامه‌دار)

آبی | سبز | زرد

۲۰ | ۲۰

### بخش‌پذیری در اعداد صحیح
(۵ پیمانه) (۹۰ سؤال شناسنامه‌دار)

آبی | سبز | زرد

- بخش‌پذیری: ۲۰ | ۱۰
- ب.م.م و ک.م.م: ۲۰
- قضیه تقسیم: ۲۰ | ۲۰

### هم نهشتی در اعداد صحیح و کاربردها
(۹ پیمانه) (۱۶۰ سؤال شناسنامه‌دار)

آبی | سبز | زرد

- هم‌نهشتی و ویژگی‌ها: ۲۰ | ۲۰ | ۱۰
- رقم یکان: ۱۰
- دسته هم‌نهشتی: ۲۰
- بخش‌پذیری بر اعداد خاص و تقویم نگاری: ۲۰
- معادله هم‌نهشتی: ۲۰
- معادله سیاله: ۲۰ | ۲۰

### ویژهٔ برترها
(۱ پیمانه) (۲۰ سؤال شناسنامه‌دار)

۲۰

### آزمون جمع‌بندی آشنایی با نظریهٔ اعداد
(۱ پیمانه) (۲۰ سؤال شناسنامه‌دار)

۲۰

## استدلال ریاضی

ریاضیات گسسته: صفحه‌های ۲ تا ۸ کتاب درسی

### روش‌های اثبات ریاضی

همان‌طور که خواندیم گزاره، جمله‌ای است خبری که ارزش آن درست یا نادرست است. مثلاً «خورشید آبی است» یک گزاره است ولی «عجب هوای خوبی!» گزاره نیست. معمولاً در زبان ریاضی گزاره‌ها را با حروف $p$، $q$ و ... نشان می‌دهند. « $\sim p$ » را نقیض گزارهٔ $p$ می‌نامیم که ارزش آن خلاف ارزش گزارهٔ $p$ است.

برای اثبات درستی یک گزاره روش‌های مختلفی وجود دارد. روش‌هایی مانند اثبات مستقیم، اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها (روش اشباع)، اثبات غیرمستقیم (برهان خلف) و اثبات بازگشتی که در ادامه به آنها خواهیم پرداخت. روش‌های اثباتی ممکن است چندان ساده نباشند و هدف کتاب درسی هم اثبات‌های دشوار نیست. برای نشان‌دادن نادرستی یک گزاره، تنها کافی است یک مثال بیاوریم که به چنین مثال‌هایی، مثال نقض می‌گویند.

به‌طور مثال گزارهٔ «حاصل‌ضرب هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است» درست نیست؛ زیرا به راحتی با مثال نقض می‌توانیم آن را رد کنیم.

$$a=\sqrt{۲}\ ,\ b=۲\sqrt{۲}\Rightarrow ab=\sqrt{۲}(۲\sqrt{۲})=۴\ \text{عدد گویا}$$

**تذکر**

در مورد گزاره‌هایی که به‌صورت شرطی بیان می‌شوند $(p\Rightarrow q)$، یک مثال نقض همواره باید این دو شرط را داشته باشد:

۱) $p$ درست باشد. ۲) $q$ نادرست باشد.

مثلاً گزارهٔ «اگر $k$ گنگ باشد آنگاه $k^۲+۴k+۵$ نیز گنگ است.» را در نظر بگیرید.

برای آن‌که این گزاره را نقض کنیم ابتدا باید فرض درستی در نظر بگیریم. یعنی $k$ را عددی گنگ اختیار کنیم، حال اگر $k$ را $\sqrt{۲}-۲$ در نظر بگیریم داریم:

$$k=\sqrt{۲}-۲\Rightarrow k^۲+۴k+۵=(\sqrt{۲}-۲)^۲+۴(\sqrt{۲}-۲)+۵=۲-۴\sqrt{۲}+۴+۴\sqrt{۲}-۸+۵=۳$$

که ۳ عددی گویا است؛ در نتیجه این گزاره نادرست است.

همان‌طور که مشاهده کردید، برای نشان دادن نادرستی یک گزاره، یافتن یک مثال نقض کافی است، اما برای اثبات درستی یک گزاره نمی‌توانیم به مثال اکتفا کنیم و به روش‌هایی برای استدلال کردن نیاز داریم که کتاب درسی چهار روش را برای اثبات درستی گزاره‌ها ارائه کرده است.

۱ـ اثبات مستقیم: در این روش به‌صورت مستقیم از فرض به حکم می‌رسیم.

■ مثال: می‌خواهیم ثابت کنیم مجموع سه عدد طبیعی متوالی بر ۳ بخش‌پذیر است.

پاسخ: برای اثبات کافی است سه عدد طبیعی متوالی را با $n$ و $n+۱$ و $n+۲$ نمایش دهیم در این‌صورت داریم:

$$n+(n+۱)+(n+۲)=۳n+۳=۳(n+۱)=۳q\quad (q\in\mathbb{N})$$

که ثابت می‌کند این گزاره همواره درست است.

۲ـ اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها:

در این روش برای اثبات یک گزاره لازم است همه موارد ممکن در مورد مسئله را در نظر بگیریم.

■ مثال: ثابت کنید برای هر عدد طبیعی $n$، $n^۲-۵n+۷$ عددی فرد است.

پاسخ: دو حالت در اینجا ممکن است رخ دهد.

الف) $n$ زوج باشد $(n=۲k)$ و $k\in\mathbb{N}$ در این حالت داریم:

$$n^۲-۵n+۷=(۲k)^۲-۵(۲k)+۷=۴k^۲-۱۰k+۷=۲\underbrace{(۲k^۲-۵k+۳)}_{q}+۱=۲q+۱\quad (q\in\mathbb{N})$$

که حاصل، یک عدد فرد است.

ب) $n$ فرد باشد $(n=۲k-۱)$ و $(k\in\mathbb{N})$ در این حالت نیز داریم:

$$n^۲-۵n+۷=(۲k-۱)^۲-۵(۲k-۱)+۷=۴k^۲-۴k+۱-۱۰k+۵+۷=۴k^۲-۱۴k+۱۳=۲\underbrace{(۲k^۲-۷k+۶)}_{q}+۱=۲q+۱$$

که باز هم حاصل یک عدد فرد است.

به عبارت دیگر طبیعی بودن $n$، فرد بودن $n^۲-۵n+۷$ را نتیجه می‌دهد.

هم‌چنین اگر زوج بودن $n$ را با $p$، فرد بودن $n$ را با $q$ و فرد بودن $n^۲-۵n+۷$ را با $r$ نمایش دهیم، حکم را می‌توانیم به‌صورت گزارهٔ $p \vee q \Rightarrow r$ نمایش دهیم. یعنی ($n$ زوج یا فرد باشد آنگاه $n^۲-۵n+۷$ همواره فرد است.) که با توجه به هم‌ارزی $p \vee q \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$، شیوهٔ اثبات در مسألهٔ فوق توجیه می‌شود.

$$p \vee q \Rightarrow r \equiv r \vee \sim (p \vee q) \equiv r \vee (\sim p \wedge \sim q) \equiv (r \vee \sim p) \wedge (r \vee \sim q) \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$$

به طریق مشابه، برای هر تعداد متناهی گزارهٔ دلخواه داریم:

$$(p_۱ \vee p_۲ \vee \dots \vee p_n \Rightarrow r) \equiv (p_۱ \Rightarrow r) \wedge (p_۲ \Rightarrow r) \wedge \dots \wedge (p_n \Rightarrow r)$$

### ۳ـ اثبات غیرمستقیم (برهان خلف):

در روش برهان خلف یا اثبات غیرمستقیم سه گام زیر را انجام می‌دهیم:

الف) فرض می‌کنیم که حکم قضیه نادرست است.

ب) نشان می‌دهیم که این فرض غلط نتیجه‌ای دارد که با اصول یا فرض قضیه، متناقض است.

ج) با توجه به تناقض ایجاد شده، فرض نادرست بودن حکم باطل و درستی حکم ثابت می‌گردد.

به بیان دیگر، اگر در اثبات مستقیم از درستی فرض به درستی حکم می‌رسیدیم $(p \Rightarrow q)$ در برهان خلف از نادرستی حکم به نادرستی فرض می‌رسیم $(\sim q \Rightarrow \sim p)$ که در بخش منطق گزاره‌ها دیدیم که $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$.

■ مثال: ثابت کنید حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

پاسخ: فرض می‌کنیم $x$ عددی گویا و $y$ عددی گنگ باشد. در این‌صورت می‌خواهیم نشان دهیم $x+y$ نیز یک عدد گنگ است. حال طبق برهان خلف فرض می‌کنیم $x+y$ گویا است، از طرفی می‌دانیم $x$ نیز عددی گویاست و تفاضل ۲ عدد گویا همواره گویا است، پس $(x+y)-x=y$ نیز همواره گویا خواهد بود که با فرض اولیه مسئله در تناقض است، پس $x+y$ نمی‌تواند گویا باشد و در نتیجه همواره گنگ است.

### ۴ـ اثبات بازگشتی / گزاره های هم‌ارز

در بخش منطق گزاره‌ها به گزاره‌هایی مثل «اگر چهارضلعی‌ای مربع باشد. آنگاه دو قطر آن عمود منصف یکدیگرند» یک گزارهٔ شرطی می‌گفتیم و آن را با $p \Rightarrow q$ نمایش می‌دادیم. زمانی گزارهٔ شرطی نادرست بود که $p$ درست و $q$ نادرست باشد.

اما اگر زمانی ارزش هر دو گزاره یکسان باشد که آنها را گزاره‌های هم‌ارز می‌نامیم (یعنی هر دو درست یا هر دو نادرست باشند)، گزاره‌های $p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow p$ و $p \Leftrightarrow q$ درست هستند.

بالعکس اگر ترکیب دو شرطی $p \Leftrightarrow q$ درست باشد، آنگاه $p$ و $q$ دو گزارهٔ هم‌ارز خواهند بود و اگر ارزش یکی را بدانیم، ارزش دیگری نیز همان خواهد بود، بنابراین در برخی از اثبات‌ها می‌توانیم از این ویژگی استفاده کنیم، یعنی از میان $p$ و $q$ درستی گزاره‌ای را ثابت کنیم که اثباتش ساده‌تر و راحت‌تر است و چون $p$ و $q$ هم‌ارزند، درستی دیگری نیز ثابت می‌شود که به این روش اثبات، روش اثبات بازگشتی می‌گوییم.

■ مثال: ثابت کنید اگر $a>۰$ باشد، آنگاه $a+\frac{۱}{a} \geq ۲$ است.

پاسخ: می‌دانیم اگر $a>۰$ باشد داریم:

$$a+\frac{۱}{a} \geq ۲ \Leftrightarrow a^۲+۱ \geq ۲a$$

این ترکیب دو شرطی بیان نمی‌کند که کدام گزاره درست است، بلکه تنها بیانگر آن است که دو گزاره هم‌ارز هستند و اثبات هر کدام، دیگری را نتیجه می‌دهد. به راحتی می‌توان فهمید که از میان این دو گزاره، اثبات گزارهٔ سمت راست ساده‌تر است. بنابراین داریم:

$$a^۲+۱ \geq ۲a \Leftrightarrow a^۲+۱-۲a \geq ۰ \Leftrightarrow (a-۱)^۲ \geq ۰$$

با توجه به این‌که $(a-۱)^۲$ مربع کامل و همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر است، پس این گزارهٔ دو شرطی همواره برقرار است و به‌طور خلاصه داریم:

$a+\frac{۱}{a} \geq ۲ \Leftrightarrow a^۲+۱ \geq ۲a \Leftrightarrow a^۲+۱-۲a \geq ۰ \Leftrightarrow (a-۱)^۲ \geq ۰$ همواره برقرار است.

■ مثال: ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی، از میانگین هندسی آنها کمتر نیست؟

پاسخ: اگر $a$ و $b$ دو عدد نامنفی باشند، حکم ما چنین خواهد بود: $\frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab}$

$\frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq ۲\sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b-۲\sqrt{ab} \geq ۰ \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^۲ \geq ۰$ همواره برقرار است.

## استدلال ریاضی

پیمانه‌های ۱ و ۲ — ۲۰ سؤال — ۲۰ سؤال

۱- کدام عدد کلیت حکم « $n$ هر عدد طبیعی زوج باشد، $۲^n+۱$ عددی اول است» را نقض می‌کند؟ (مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۳ کتاب درسی)

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۲- کدام گزینه، مثال نقض دارد؟ (مکمل کار در کلاس صفحهٔ ۳ کتاب درسی) (سراسری ریاضی ۸۰)

۱) هر مربع یک لوزی است.
۲) هر عدد اول و بزرگ‌تر از ۲، فرد است.
۳) هر مثلث متساوی‌الاضلاع، متساوی‌الساقین است.
۴) توان سوم هر عدد طبیعی، بزرگ‌تر از توان دوم آن است.

۳- برای کدام گزینه مثال نقض وجود ندارد؟ (مکمل کار در کلاس صفحهٔ ۳ کتاب درسی) (آزمون کانون ۸۸)

۱) مجموع دو عدد گنگ، عددی گنگ است.
۲) دو زاویه که اضلاع متناظرشان موازی است، با هم برابرند.
۳) مربع هر عدد مثبت، بزرگ‌تر از خود عدد است.
۴) در متوازی‌الاضلاع دو زاویهٔ مجاور مکمل‌اند.

۴- کدام عبارت مثال نقض دارد؟ (مکمل کار در کلاس صفحهٔ ۳ کتاب درسی) (آزمون کانون ۹۱)

۱) حاصل‌ضرب هر دو عدد فرد متوالی، عددی فرد است.
۲) حاصل تفاضل هر دو عدد فرد، عددی زوج است.
۳) حاصل‌جمع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.
۴) حاصل‌جمع هر عدد اول با یک عدد فرد، عددی فرد است.

۵- اعداد کدام گزینه کلیت حکم «حاصل ضرب هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است» را نقض می‌کند؟ (مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۳ کتاب درسی) (آزمون کانون ۹۱)

۱) $\sqrt{۶}$ و $\sqrt{۲۱۶}$ ۲) $\sqrt{۶}$ و $\sqrt{۱۲}$ ۳) $\sqrt{۲۱۶}$ و $\sqrt{۱۸}$ ۴) $\sqrt{۱۲}$ و $\sqrt{۱۸}$

۶- کلیت حکم «حاصل ضرب هر عدد گویا در یک عدد گنگ، عددی گنگ است» با چه عدد گویایی، نقض می‌شود؟ (مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۳ کتاب درسی)

۱) صفر ۲) اعشاری ۳) منفی ۴) بین صفر و یک

۷- کدام عدد حکمیت «هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع اعداد طبیعی متوالی نوشت» را نقض می‌کند؟ (مکمل کار در کلاس صفحهٔ ۳ کتاب درسی) (سراسری ریاضی خارج از کشور ۸۸)

۱) ۴۰ ۲) ۴۶ ۳) ۵۶ ۴) ۶۴

۸- کدام گزینه یک مثال نقض برای گزارهٔ زیر است؟

«اگر $a$ و $b$ دو عدد حقیقی بوده و $a+b$ عددی گویا باشد، آنگاه $a$ و $b$ هر دو گویا هستند.» (مکمل کار در کلاس صفحهٔ ۳) (آزمون کانون ۲۶ آبان ۹۱)

۱) $a=\frac{۱}{۲}$ و $b=\frac{-۱}{۲}$
۲) $a=۰$ و $b=\sqrt{۲}$
۳) $a=\sqrt{۳}$ و $b=\sqrt{۲}$
۴) $a=۱-\sqrt{۲}$ و $b=\frac{۱}{\sqrt{۲}-۱}$

۹- کدام یک از احکام زیر نادرست است؟ (مکمل کار در کلاس صفحهٔ ۳ کتاب درسی)

۱) اگر $n$ عددی صحیح و $n^۳$ فرد باشد، $n$ نیز عددی فرد است.
۲) اگر $n^۲$ عددی صحیح باشد، $n$ نیز عددی صحیح است.
۳) اگر $n$ عددی طبیعی باشد، همواره $n^۲\geq n$.
۴) اگر $n$ عددی صحیح و $n^۲$ زوج باشد، $n$ نیز عددی زوج است.

۱۰- کدام یک از احکام زیر درست است؟ (مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۳ کتاب درسی)

۱) عدد گنگ به توان گنگ همواره گنگ است.
۲) عدد گویا به توان گویا همواره گویا است.
۳) عدد گویا به توان گنگ همواره گنگ است.
۴) عدد گنگ به توان گویا می‌تواند گویا باشد.

۱۱- کدام یک از احکام زیر همواره درست است؟ (مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۳ کتاب درسی)

۱) حاصل ضرب دو عدد گنگ، عددی گنگ است.
۲) مجموع دو عدد گنگ، عددی گنگ است.
۳) حاصل ضرب یک عدد گنگ در یک عدد گویا، عددی گنگ است.
۴) مجموع یک عدد گنگ با یک گویا، عددی گنگ است.

۱۲- کدام یک از گزاره‌های شرطی زیر نادرست می‌باشند؟ (مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۷ کتاب درسی)

۱) اگر $x^۲-۳x+۲=۰$، آنگاه $x=۱$ , $x=۲$.
۲) اگر $x$ و $y$ دو عدد طبیعی باشند، آنگاه $\sqrt{xy}>\frac{x+y}{۲}$.
۳) اگر $x>۰$، آنگاه $x+\frac{۱}{x}\geq ۲$.
۴) اگر $x\in R$ باشد، آنگاه عبارت $x^۲-x+۳$ همواره مثبت است.

۱۳– حکم «$n^2+n+41$ برای $n\in\mathbb{N}$ عددی اول است.» را در نظر می‌گیریم. برای ........... درستی این حکم، از روش ........... استفاده می‌کنیم.

۱۳ (مرتبط با صفحه‌های ۲ و ۳ کتاب درسی) (آزمون کانون مهر ۹۲)

۱) اثبات ـ روش مستقیم ۲) اثبات ـ برهان خلف ۳) رد ـ برهان خلف ۴) رد ـ مثال نقض

۱۴– عکس کدام‌یک از گزاره‌های شرطی زیر، درست است؟ (مرتبط با صفحه‌های ۶ تا ۸ کتاب درسی) (آزمون کانون ۱۰ آذر ۹۱)

۱۴ ۱) اگر $\frac{a}{b}>0$، آنگاه $ab>0$. ۲) اگر $\frac{a}{b}\geq 0$، آنگاه $ab\geq 0$.

۳) اگر $x^2$ گنگ باشد، آنگاه $x$ نیز گنگ است. ۴) اگر $x$ گویا باشد، آنگاه $x^2$ نیز گویا است.

۱۵– برای ........... درستی گزارهٔ «برای هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱، عدد $2^n-1$ اول است.» از ........... استفاده می‌کنیم.

۱۵ (مرتبط با صفحه‌های ۲ و ۳ کتاب درسی)

۱) اثبات ـ روش مستقیم ۲) اثبات ـ برهان خلف ۳) رد ـ برهان خلف ۴) رد ـ مثال نقض

۱۶– درستی کدام‌یک از گزاره‌های زیر را <u>نمی‌توان</u> با مثال نقض رد کرد؟ (مکمل کار در کلاس صفحهٔ ۳ کتاب درسی) (آزمون کانون بهمن ۹۰)

۱۶ ۱) عکس هر قضیهٔ شرطی، خود یک قضیهٔ شرطی است.

۲) هر عدد اول فرد به یکی از دو شکل $2^n+1$ یا $2^n-1$ نمایش داده می‌شود. $(n\in\mathbb{N})$

۳) مربع هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ در تقسیم بر عدد ۳، باقی‌مانده‌ای برابر یک دارد.

۴) اگر برای سه مجموعهٔ $A$، $B$ و $C$ داشته باشیم $A\cup B=A\cup C$، آنگاه $B=C$ است.

۱۷– کدام یک از اعداد زیر، مثال نقضی برای حکم «اگر $n$ یک عدد طبیعی فرد باشد، آنگاه $2^n-2$ بر $n$ بخش‌پذیر است» می‌باشد؟

۱۷ (مکمل کار در کلاس صفحهٔ ۳ کتاب درسی) (آزمون کانون بهمن۹۲)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۹

۱۸– گزاره « $\forall n\in\mathbb{N};2^n>n^2$ » چند مثال نقض دارد؟ (مکمل کار در کلاس صفحهٔ ۳ کتاب درسی)

۱۸ ۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۹– درستی کدام‌یک از گزاره‌های زیر را می‌توان با مثال نقض رد کرد؟ (مرتبط با صفحه‌های ۲ و ۳ کتاب درسی)

۱۹ ۱) مجموع دو عدد متوالی فرد است. ۲) مجموع سه عدد متوالی مضرب ۳ است.

۳) مجموع چهار عدد متوالی مضرب ۴ است. ۴) مجموع ۵ عدد متوالی مضرب ۵ است.

۲۰– اگر $k$ حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آنگاه $4k+1$ همواره عددی ............................... . (کار در کلاس صفحهٔ ۳ کتاب درسی)

۲۰ ۱) اول است. ۲) مضرب ۵ است. ۳) مربع کامل است. ۴) مکعب کامل است.

۲۱– اگر $a$ و $b$ دو عدد صحیح و $ab$ عددی فرد باشد، آنگاه $a^2+b^2$ همواره ........................ . (مکمل کار در کلاس صفحهٔ ۵ کتاب درسی)

۱ ۱) اول است. ۲) فرد است. ۳) زوج است. ۴) مربع کامل است.

۲۲– به ازای چند عدد طبیعی $n$ کوچک‌تر از ۱۰۰، $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ عددی زوج است؟ (مکمل کار در کلاس صفحهٔ ۵ کتاب درسی)

۲ ۱) ۴۸ ۲) ۴۹ ۳) ۵۰ ۴) ۵۱

۲۳– اگر $a$ و $b$ دو عدد گویا باشند و $2a(\sqrt{2}+1)-b(\sqrt{2}-1)=2$، آنگاه $a.b$ کدام است؟

۳ (مکمل تمرین ۳ صفحهٔ ۸ کتاب درسی) (آزمون کانون بهمن ۹۰)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) صفر

۲۴– اگر $p$ و $q$ دو عدد طبیعی باشند و $p^3=2q^3$، آنگاه چند مقدار برای زوج مرتب $(q,p)$ وجود دارد؟

۴ (مکمل تمرین ۳ صفحهٔ ۸ کتاب درسی) (آزمون کانون بهمن ۹۲)

۱) هیچ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

۲۵– اگر دو عدد طبیعی $A$ و $B$، هر کدام برابر مجموع دو عدد مربع کامل باشند، آنگاه $AB$ همواره چگونه عددی است؟

۵ (مرتبط با صفحهٔ ۴ کتاب درسی)

۱) مربع کامل ۲) مجموع دو مربع کامل ۳) اول ۴) زوج

۲۶– اگر $\alpha$ و $\beta$ دو عدد گنگ ولی $\alpha+\beta$ گویا باشد، $\alpha-\beta$ و $\alpha+2\beta$ به ترتیب: (مرتبط با تمرین ۳ صفحهٔ ۸ کتاب درسی)

۶ ۱) گنگ است ـ گویا است. ۲) گویا است ـ گنگ است.

۳) گنگ است ـ گنگ است. ۴) گنگ است ـ ممکن است گنگ یا گویا باشد.

۲۷– کدام مورد زیر را نمی‌توان از طریق تفاضل مربعات اعداد صحیح به‌دست آورد؟
۷ (مرتبط با صفحه‌های ۴ و ۵ کتاب درسی) (آزمون کانون ۲۶ آبان ۹۱)

۱) هر عدد فرد ۲) هر عدد زوج ۳) هر عدد مضرب ۴ ۴) هر عدد مضرب ۸

۲۸– در روش اثبات غیرمستقیم، اگر بخواهیم با استفاده از فرض $p$، حکم $q$ را ثابت کنیم، از کدام گزارهٔ شرطی استفاده می‌کنیم؟
۸ (مرتبط با صفحه‌های ۴ و ۵ کتاب درسی)

۱) $q \Rightarrow p$ ۲) $\sim p \Rightarrow \sim q$ ۳) $\sim q \Rightarrow \sim p$ ۴) $\sim q \Rightarrow p$

۲۹– می‌خواهیم ثابت کنیم «اگر مربع یک عدد صحیح مضرب ۵ باشد، خود آن عدد نیز حتماً مضرب ۵ است». کدام روش را برای اثبات باید به کار ببریم؟
۹ (مرتبط با صفحهٔ ۶ کتاب درسی) (آزمون کانون ۸۷)

۱) مستقیم ۲) بازگشتی ۳) برهان خلف ۴) مثال نقض

۳۰– اثبات کدام قضیهٔ زیر احتیاج به استدلال به روش برهان خلف ندارد؟ (مرتبط با صفحهٔ ۵ کتاب درسی) (سراسری ریاضی ۸۶ با کمی تغییر)
۱۰
۱) عدد $\sqrt{5}$ گنگ است.
۲) خطی که یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را نیز قطع می‌کند.
۳) در یک صفحه از نقطهٔ مفروض فقط یک خط می‌توان بر خط مفروض عمود کرد.
۴) مربع هر عدد طبیعی فرد، از مضرب ۸ یک واحد بیش‌تر است.

۳۱– چند زوج مرتب $(a,b)$ از اعداد صحیح و ناصفر وجود دارد به‌گونه‌ای که رابطهٔ $\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ برقرار باشد؟
۱۱ (مرتبط با صفحه‌های ۵ تا ۸ کتاب درسی) (آزمون کانون ۲۱ دی ۹۷)

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۳۲– گزارهٔ «اگر $x > 2$ باشد، آنگاه $x^2 > 4$ است» معادل کدام گزاره است؟ (مرتبط با صفحه‌های ۶ تا ۸ کتاب درسی) (آزمون کانون ۹۱)
۱۲
۱) اگر $x^2 < 4$، آنگاه $x < 2$. ۲) اگر $x^2 \geq 4$، آنگاه $x \geq 2$.
۳) اگر $x^2 \leq 4$، آنگاه $x \leq 2$. ۴) اگر $x^2 > 4$، آنگاه $x > 2$.

۳۳– کدام‌یک از ترکیب‌های دو شرطی زیر درست است؟ (مرتبط با صفحه‌های ۶ تا ۸ کتاب درسی)
۱۳
۱) $a=b \Leftrightarrow a^2=b^2$ ۲) $a<b \Leftrightarrow a^2<b^2$
۳) $a=b \Leftrightarrow a^2-ab=0$ ۴) $a=b \Leftrightarrow a^3=b^3$

۳۴– کدام قضیه به صورت قضیهٔ دو شرطی بیان نمی‌شود؟ (مرتبط با صفحه‌های ۶ تا ۸ کتاب درسی)
۱۴
۱) در مثلث متساوی‌الساقین، ارتفاع و میانه یک ضلع بر هم منطبق هستند. ۲) در مثلث قائم الزاویه، عمود منصف اضلاع، بر روی وتر متقاطع هستند.
۳) در مثلث قائم الزاویه، یکی از میانه‌ها نصف وتر است. ۴) در هر مثلث قائم الزاویه ضلع مقابل به زاویهٔ $90^\circ$، بزرگ‌ترین ضلع است.

۳۵– کدام‌یک از گزاره‌های شرطی زیر را می‌توان به‌صورت قضیهٔ دو شرطی نوشت؟ $(x,y \in R)$ (مرتبط با صفحه‌های ۶ تا ۸ کتاب درسی)
۱۵
۱) $\frac{x}{y} \geq 0 \Rightarrow xy \geq 0$ ۲) $\frac{x}{y} > 0 \Rightarrow xy > 0$
۳) $x^2 < y^2 \Rightarrow x < y$ ۴) $x > y \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{y}$

۳۶– در اثبات گزارهٔ «اگر $a$ و $b$ دو عدد نامنفی باشند، آنگاه $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.» در نهایت به کدام نامساوی بدیهی می‌رسیم که هم‌ارز با این گزاره است؟
۱۶ (مرتبط با صفحه‌های ۶ تا ۸ کتاب درسی)

۱) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \geq 0$ ۲) $(\sqrt{a}+\sqrt{b}) > 0$
۳) $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$ ۴) $(\sqrt{a}-\sqrt{b}) > 0$

۳۷– درستی کدام‌یک از گزاره‌های زیر را می‌توان ثابت کرد؟ $(x,y \in R)$ (مکمل با تمرین ۱ صفحهٔ ۸ کتاب درسی)
۱۷
۱) $\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \leq 2$ ۲) $x^2+y^2+z^2 > xy+yz+zx$
۳) $x^2+y^2+1 \geq xy+x+y$ ۴) $x^2+y^2 \geq xy+x+y+1$

۳۸– کدام دو گزارهٔ زیر هم‌ارز نیستند؟ (مرتبط با صفحه‌های ۷ و ۸ کتاب درسی)

۱۸

۱) $(a+\frac{1}{a}\geq 2)$ و $(a-1)^2\geq 0$، اگر $a>0$ باشد.

۲) $(\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab})$ و $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq 0$، اگر $a$ و $b$ دو عدد نامنفی باشند.

۳) $(x^2+y^2+1\geq xy+x+y)$ و $((x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2\geq 0)$

۴) $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$ و $(x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2>0$

۳۹– در اثبات نامساوی $\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\geq\frac{4}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ از طریق اثبات بازگشتی، به کدام رابطهٔ بدیهی می‌رسیم؟ ( $a$ و $b$ دو عدد حقیقی مثبت هستند.) (مرتبط با صفحه‌های ۷ و ۸ کتاب درسی) (آزمون کانون ۲۰ مهر ۹۷)

۱۹

۱) $(a+b)^2>0$ ۲) $a^2+b^2>0$ ۳) $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq 0$ ۴) $\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$

۴۰– در اثبات نامساوی $(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geq(ac+bd)^2$ به روش اثبات بازگشتی، به کدام رابطهٔ بدیهی می‌رسیم؟ (مرتبط با صفحه‌های ۷ و ۸ کتاب درسی) (آزمون کانون ۲۵ بهمن ۹۲)

۲۰

۱) $(ad+bc)^2\geq 0$ ۲) $(ad-bc)^2\geq 0$ ۳) $(ab+cd)^2\geq 0$ ۴) $(ab-cd)^2\geq 0$

## بخش‌پذیری در اعداد صحیح: بخش‌پذیری

آمار و احتمال و گسسته

ریاضیات گسسته: صفحه‌های ۹ تا ۱۷ کتاب درسی

### بخش‌پذیری در اعداد صحیح

بخش‌پذیری: عدد صحیح $a$ را بر عدد صحیح $b\neq 0$ بخش‌پذیر (تقسیم‌پذیر) گوییم، هرگاه عدد صحیحی مانند $q$ یافت شود به گونه‌ای که $a=bq$، این موضوع با اصطلاحات دیگر نیز بیان می‌شود:

الف) $b$ عدد $a$ را می‌شمارد یا عاد می‌کند که چنین می‌نویسیم: $b\,|\,a$

ب) $a$ مضرب $b$ است.

ج) $b$ یک مقسوم‌علیه (شمارنده) عدد $a$ است.

### نتایج حاصل از تعریف

۱) صفر بر هر عدد صحیح بخش‌پذیر است. (بنا به قرارداد می‌پذیریم که صفر بر صفر نیز بخش‌پذیر است. زیرا برای تمام اعداد صحیح همانند $q$ داریم: $0=0\times q$)

۲) اعداد ۱ و ۱–، هر عدد صحیح را می‌شمارند. $(\pm 1\,|\,a\ ,\ a\in\mathbb{Z})$

۳) رابطهٔ عاد کردن دارای خاصیت تعدّی در $Z$ است: $a\,|\,b\wedge b\,|\,c\Rightarrow a\,|\,c$

۴) برای هر دو عدد صحیح $a$ و $b$ داریم: $a\,|\,b\Rightarrow\begin{cases}a\,|\,-b\\-a\,|\,b\\-a\,|\,-b\end{cases}$

۵) برای هر دو عدد صحیح $a$ و $b\neq 0$ داریم: $a\,|\,b\Rightarrow|a|\leq|b|$

۶) از خاصیت ۵ نتیجه می‌شود برای اعداد صحیح $a,b\neq 0$ داریم: $a\,|\,b\wedge b\,|\,a\Rightarrow a=\pm b$

**تذکر**

برای هر دو عدد صحیح $a$ و $b$، اگر $a\,|\,b$ و $|a|>|b|$، آنگاه $b=0$ خواهد بود.

۷) اگر $a\,|\,1$، آنگاه $a=\pm 1$.

۸) اگر $a$ عددی صحیح و $p$ عددی اول باشد و $a\,|\,p$، آنگاه $a=\pm 1$ یا $a=\pm p$.

۹) اگر عدد $a$ عدد $b$ را بشمارد، آنگاه هر مضرب صحیح عدد $b$ را نیز می‌شمارد، یعنی: $a\,|\,b\Rightarrow a\,|\,mb\quad(m\in\mathbb{Z})$

۱۰) اگر $a$ و $b$ اعداد صحیح بوده و $c$ عدد صحیح مخالف صفر باشد، آنگاه داریم: $a\,|\,b\Leftrightarrow ac\,|\,bc$

۱۱) اگر $a$، $b$ و $c$ اعداد صحیح باشند، آنگاه داریم: $ab\,|\,c\Rightarrow a\,|\,c$ و $b\,|\,c$

تذکر

اگر $a$، $b$ و $c$ اعداد صحیح باشند و $a|bc$، آنگاه نمی‌توان نتیجه گرفت که $a$ حداقل یکی از دو عدد $b$ و $c$ را عاد می‌کند.

$a|bc \not\Rightarrow a|b$ یا $a|c$

مثال: $۶|۳\times۴$ و $۶\nmid ۳$ و $۶\nmid ۴$

۱۲) اگر $a|b$ و $a|c$، آنگاه $a$ هر ترکیب خطی با ضرایب صحیح از $b$ و $c$ را نیز عاد می‌کند.

$$a|b \wedge a|c \Rightarrow a|mb\pm nc \xrightarrow{\text{حالت خاص و بسیار کاربردی}} a|b \wedge a|c \Rightarrow a|b\pm c$$

تذکر

از $a|b+c$ همواره نمی‌توان نتیجه گرفت که $a|c$ یا $a|b$.

۱۳) برای اعداد صحیح $a$ و $b$ همواره داریم: $a|b \Leftrightarrow a|a\pm b$

۱۴) برای اعداد صحیح $a$، $b$، $c$ و $d$ داریم: $a|b \wedge c|d \Rightarrow ac|bd$

۱۵) برای دو عدد صحیح $a$ و $b$ و عدد طبیعی $n$، قضیهٔ دو شرطی روبه‌رو همواره برقرار است. $a|b \Leftrightarrow a^n|b^n$

و به‌طور کلی به کمک خاصیت ۹ می‌توان نتیجه گرفت: $a|b \Rightarrow a^n|b^m \quad n\le m\ (m,n\in\mathbb{N})$

۱۶) برای هر دو عدد طبیعی $m$ و $n$، قضیهٔ دوشرطی روبه‌رو همواره برقرار است: $m\le n \Leftrightarrow m!|n!$

۱۷) حاصل‌ضرب هر $n$ عدد حسابی متوالی همواره مضرب $n!$ است.

■ مثال ۱: کدام عدد همواره یک شمارندهٔ $(n^۲-۱)(n^۲+۲n)$ برای هر مقدار طبیعی $n$ است؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۴ ۳) ۳۶ ۴) ۴۸

پاسخ: گزینهٔ «۲» صحیح است.

$$(n^۲-۱)(n^۲+۲n)=(n-۱)(n+۱)n(n+۲)=(n-۱)n(n+۱)(n+۲)$$

عبارت فوق حاصل‌ضرب ۴ عدد حسابی متوالی است، پس همواره مضرب $۴!$ یا ۲۴ خواهد بود.

۱۹) برای هر دو عدد طبیعی $k$ و $n$ $(k\le n)$ همواره داریم: $k|n!$.

نتیجه: عدد $n!+k$ $(k,n\in\mathbb{N}\ ,\ k\le n)$ همواره بر $k$ بخش‌پذیر است.

■ مثال ۲: ۱۵ عدد طبیعی متوالی بیابید که هیچ کدام اول نباشند؟

پاسخ: با توجه به نکتهٔ شمارهٔ ۱۹ می‌توانیم بگوییم اعداد $۱۶!+۲$، $۱۶!+۳$، $۱۶!+۴$ و ... بالاخره عدد $۱۶!+۱۶$، ۱۵ عدد طبیعی و متوالی‌اند که هیچ‌کدام اول نیستند و به‌ترتیب مضرب ۲، ۳، ۴ و ... و در نهایت ۱۶ هستند.

۲۰) شرط لازم و کافی برای آن‌که همواره $a^m-b^n$ بر $a^p-b^q$ بخش‌پذیر باشد، آن است که: $\frac{m}{p}=\frac{n}{q}=$ عدد طبیعی

به‌عنوان مثال: $a^۳-b^۲|a^{۱۸}-b^{۱۲} \Rightarrow \frac{۱۸}{۳}=\frac{۱۲}{۲}=۶$

و در حالت خاص می‌توانیم بگوییم: $a-b|a^n-b^n\ ;\ n\in\mathbb{N}$

۲۱) شرط لازم و کافی برای آن‌که همواره $a^m-b^n$ بر $a^p+b^q$ بخش‌پذیر باشد، آن است که:

$\frac{m}{p}=\frac{n}{q}=$ عدد طبیعی زوج $=۲k$

به عنوان مثال: $a^۲+b^۵|a^۸-b^{۲۰}\ ;\ \frac{۸}{۲}=\frac{۲۰}{۵}=۴$

و در حالت خاص می‌توانیم بگوییم: $a+b|a^n-b^n \Rightarrow n=۲k\ ;\ k\in\mathbb{N}$

۲۲) شرط لازم و کافی برای آن‌که همواره $a^m+b^n$ بر $a^p+b^q$ بخش‌پذیر باشد، آن است که:

$$\frac{m}{p}=\frac{n}{q}= \text{عدد طبیعی فرد} = ۲k-۱$$

به عنوان مثال:

$$a^۳+b^۲ \mid a^۹+b^۶ \Rightarrow \frac{۹}{۳}=\frac{۶}{۲}=۳$$

و در حالت خاص می‌توانیم بگوییم:

$$a+b \mid a^n+b^n \Rightarrow n=۲k+۱ \quad ; \quad k\in\mathbb{N}$$

■ مثال ۳: تعداد عضوهای مجموعهٔ $\{n;۹\mid ۲^n-۱\}$ از مجموعهٔ اعداد طبیعی کمتر از ۱۰۰ کدام است؟

۱) ۳۳ ۲) ۳۲ ۳) ۱۷ ۴) ۱۶

پاسخ: گزینهٔ «۴» صحیح است.

$$۹\mid ۲^n-۱ \Rightarrow ۲^۳+۱\mid ۲^n-۱ \xrightarrow{\text{با توجه به ویژگی ۲۱}} \frac{n}{۳}=۲k \Rightarrow n=۶k\le ۱۰۰ \Rightarrow n(k)=\left[\frac{۱۰۰}{۶}\right]=۱۶$$

## بخش‌پذیری

پیمانه‌های ۳ و ۴ — ۲۰ سؤال — ۱۰ سؤال

۴۱ـ اگر $a\mid c$ و $b\mid c$، $ab\mid c$، آنگاه کدام گزینه درست است؟ (مرتبط با صفحه‌های ۹ تا ۱۲ کتاب درسی)

۱) $b\mid c$ ۲) $a+b\mid c$ ۳) $a-b\mid c$ ۴) $a^۲\mid c$

۴۲ـ اگر $a-b\mid a$، کدام مورد درست است؟ (مرتبط با صفحه‌های ۹ تا ۱۲ کتاب درسی)

۱) $a\mid a-b$ ۲) $b\mid a-b$ ۳) $a\mid b$ ۴) $a-b\mid b$

۴۳ـ اگر $a,b\in\mathbb{Z}$، کدام گزاره همواره درست است؟ (مرتبط با صفحه‌های ۹ تا ۱۲ کتاب درسی) (آزمون کانون ۸۹)

۱) $a\mid b^۲ \Rightarrow a\mid b$ ۲) $a^۲\mid b \Rightarrow a\mid b$

۳) $a\mid b^۲ \Rightarrow |a|\le|b|$ ۴) $a^۲\mid b^۳ \Rightarrow |a|\le|b|$

۴۴ـ اگر $a\mid ۱۸$ و $۱۸\mid b$ آنگاه کدام گزینه درست نیست؟ (مرتبط با صفحه‌های ۹ تا ۱۲ کتاب درسی)

۱) $۶\mid b$ ۲) $a\mid ۳b$ ۳) $a\mid ۵۴$ ۴) $۳a\mid b$

۴۵ـ اگر $a\mid ۵n+۷$ و $a\mid ۳n+۴$، آنگاه مقدار $a$ کدام است؟ (مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۱۱ کتاب درسی)

۱) $a=\pm۱$ ۲) فقط $a=-۱$ ۳) فقط $a=-۲$ ۴) $a=\pm۲$

۴۶ـ اگر هر دو کسر $\frac{۴b+۳}{a+۲}$ و $\frac{۶b+۲}{a+۲}$ مقدار صحیحی باشند، چند مقدار طبیعی $a$ می‌تواند باشد؟ (مرتبط با صفحه‌های ۹ تا ۱۲ کتاب درسی)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۲

۴۷ـ اگر $۳n+۱$ بر ۵ تقسیم‌پذیر باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $۹n^۲+۲۱n+۶$ بر ۲۵ کدام است؟ (مشابه تمرین ۴ صفحهٔ ۱۶ کتاب درسی) (آزمون کانون ۸۶)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۵ ۴) ۶

۴۸ـ اگر $a$، $b$ و $c$ اعداد صحیح باشند به‌طوری که $a\mid b$ و $a\mid c$، آنگاه چه تعداد از گزاره‌های زیر همواره درست است؟ (مرتبط با صفحه‌های ۹ تا ۱۲ کتاب درسی) (آزمون کانون ۹۳)

الف) $a\mid b^۲+c$ ب) $a^۲\mid b+c$ پ) $a\mid a^۲+b^۲+c^۲$ ت) $a^۲\mid a^۲+bc$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۹ـ اگر $۲۴\mid a$ و $a\mid ۸۱۶$، آنگاه برای $a$ چند جواب طبیعی پیدا می‌شود؟ (مرتبط با صفحه‌های ۹ تا ۱۲ کتاب درسی) (آزمون کانون ۹۰)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۵۰ـ اگر $a^۳\mid b^۲$، آنگاه کدام‌یک از روابط زیر درست نیست؟ (مرتبط با صفحه‌های ۹ تا ۱۲ کتاب درسی)

۱) $a\mid b$ ۲) $a^۴\mid b^۳$ ۳) $a^۵\mid b^۳$ ۴) $a^۷\mid b^۵$

۵۱- به ازای چند عدد صحیح n، هر دو رابطهٔ $n^{۲} | ۷n-۱۲$ و $n^{۲} | ۲۱n-۳۶$ برقرار است؟ (مرتبط با صفحه‌های ۹ تا ۱۲ کتاب درسی)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار ۱۱

۵۲- اگر $۱۳ | a+۳b+k$ و $۱۳ | ۵a+۲b+۱۷$، آنگاه کم‌ترین مقدار طبیعی k کدام است؟ ۱۲

(مرتبط با صفحه‌های ۹ تا ۱۲ کتاب درسی) (آزمون کانون ۹۱)

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۳

۵۳- برای سه عدد طبیعی a، b و c، اگر $abc | ab+ac$، آنگاه کدام رابطه همواره نمی‌تواند درست باشد؟ ۱۳

(مرتبط با صفحه‌های ۹ تا ۱۲ کتاب درسی)

۱) $b | ۳c$ ۲) $c | ۲b$ ۳) $a | b+c$ ۴) $bc | b+c$

۵۴- عدد $۹۷!$ برکدام‌یک از عددهای زیر بخش‌پذیر نیست؟ (مرتبط با صفحه‌های ۹ تا ۱۲ کتاب درسی)

۱) ۹۶ ۲) ۹۹ ۳) ۱۰۱ ۴) ۱۰۴ ۱۴

۵۵- عدد $۳۰!+۱۸$ بر چند عدد طبیعی یک رقمی بخش‌پذیر است؟ (مرتبط با صفحه‌های ۹ تا ۱۲ کتاب درسی)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶ ۱۵

۵۶- اگر a عدد زوج باشد، عدد $a(a^{۲}-۴)$ همواره بر کدام‌یک از اعداد زیر قابل قسمت است؟ (مرتبط با صفحه‌های ۹ تا ۱۲ کتاب درسی)

۱) ۱۵ ۲) ۳۶ ۳) ۳۲ ۴) ۴۸ ۱۶

۵۷- به ازای چند عدد صحیح و مثبت a، عدد $a^{۲}+۷$ بر عدد $a+۳$ بخش‌پذیر است؟ ۱۷

(مرتبط با صفحه‌های ۹ تا ۱۲ کتاب درسی) (آزمون کانون ۸۸)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۸- به ازای چند عدد صحیح a، حاصل $\dfrac{۲a^{۲}+۳a+۷}{a-۱}$ یک عدد صحیح است؟ (مرتبط با صفحه‌های ۹ تا ۱۲ کتاب درسی) (آزمون کانون ۸۸)

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶ ۱۸

۵۹- چند عدد طبیعی مانند n وجود دارد، به‌طوری‌که حاصل کسر $\dfrac{۵n+۱۷}{n-۵}$، یک عدد طبیعی باشد؟ ۱۹

(مرتبط با صفحه‌های ۹ تا ۱۲ کتاب درسی) (آزمون کانون ۸۶)

۱) ۱۱ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) بی شمار

۶۰- چند نقطه با مختصات طبیعی روی منحنی $xy+۵=۲(x+y)$ یافت می‌شود؟ (مرتبط با صفحه‌های ۹ تا ۱۲ کتاب درسی)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۳) ۴ ۲۰

۶۱- چند نقطه با مختصات صحیح روی نمودار تابع $y=\dfrac{۴x+۱}{x-۲}$ در ربع دوم دستگاه مختصات قرار دارد؟ ۱

(مرتبط با صفحه‌های ۹ تا ۱۲ کتاب درسی) (آزمون کانون ۱۸ آبان ۹۷)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۶

۶۲- روی منحنی $y=\dfrac{۴x-۱}{x+۳}$، چند نقطه با مختصات طبیعی وجود دارد؟ (مرتبط با صفحه‌های ۹ تا ۱۲ کتاب درسی) (آزمون کانون ۴ آبان ۹۷) ۲

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۶۳- اگر $a^{۲} | a+b$، آنگاه کدام رابطهٔ زیر لزوماً صحیح نیست؟ (مرتبط با صفحه‌های ۹ تا ۱۲ کتاب درسی) (آزمون کانون ۴ آبان ۹۷)

۱) $a^{۲} | b^{۲}$ ۲) $a | ۳b-۲a$ ۳) $a^{۲} | a-b$ ۴) $a^{۲} | a^{۲}+b^{۲}$ ۳

۶۴- اگر a و b دو عدد صحیح فرد باشند، آنگاه بزرگ‌ترین عددی که $a^{۴}-b^{۴}$ همواره بر آن بخش‌پذیر می‌باشد، کدام است؟

(مرتبط با صفحه‌های ۹ تا ۱۲ کتاب درسی) (آزمون کانون ۲ آذر ۹۷) ۴

۱) ۸۰ ۲) ۴۰ ۳) ۹۶ ۴) ۱۶

۶۵- کدام گزینه درست است؟ (مرتبط با صفحه‌های ۹ تا ۱۲ کتاب درسی)

۱) $a+b \,\big|\, (a+b)^{۲}-۲ab$ ۲) $a+b \,\big|\, (a+b)^{۳}-۳a^{۲}b-۳ab^{۲}$ ۵

۳) $a+b \,\big|\, (a-b)^{۳}+۳a^{۲}b-۳ab^{۲}$ ۴) $a+b \,\big|\, (a-b)^{۲}+۲ab$

۶۶– عبارت $a^{12}+1$ بر کدام‌یک از عبارت‌های زیر، همواره قابل قسمت است؟ (مرتبط با صفحه‌های ۹ تا ۱۲ کتاب درسی)

۶

۱) $a^{12}-1$ ۲) $a^{3}+1$ ۳) $a^{4}+1$ ۴) $a^{6}+1$

۶۷– تعداد عضوهای مجموعهٔ $\left\{n:65 \,\middle|\, 2^{n}+1\right\}$ از مجموعهٔ اعداد طبیعی کم‌تر از ۱۰۰، کدام است؟

۷

(مرتبط با صفحه‌های ۹ تا ۱۲ کتاب درسی) (سراسری ریاضی ۷۷)

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۶۸– تعداد عضوهای طبیعی مجموعهٔ $\{n:28\,|\,3^{n}-1\}$ که کوچک‌تر از ۱۰۰ می‌باشند، کدام است؟

۸

(مرتبط با صفحه‌های ۹ تا ۱۲ کتاب درسی) (آزمون کانون ۸۸)

۱) ۳۳ ۲) ۱۷ ۳) ۱۶ ۴) صفر

۶۹– اگر $x^{p}+y^{p}\,|\,x^{30}-y^{30}$ و $x^{3}+y^{3}\,|\,x^{p}+y^{p}$، چند مقدار طبیعی برای $p$ وجود دارد؟

۹

(مرتبط با صفحه‌های ۹ تا ۱۲ کتاب درسی) (آزمون کانون ۹۲)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۰– بزرگ‌ترین عضو مجموعهٔ $A=\{n\in \mathbb{N};25\,|\,3^{n}+4^{n},n\leq 100\}$ کدام است؟ (مرتبط با صفحه‌های ۹ تا ۱۲ کتاب درسی) (آزمون کانون ۹۱)

۱۰

۱) ۱۰۰ ۲) ۹۹ ۳) ۹۸ ۴) ۹۷

## بخش‌پذیری در اعداد صحیح: ب.م.م و ک.م.م

آمار و احتمال و گسسته

ریاضیات گسسته: صفحه‌های ۱۳ و ۱۴ کتاب درسی

### بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد (ب.م.م)

عدد طبیعی $d$ را ب.م.م دو عدد صحیح $a$ و $b$ می‌نامیم ( $a$ و $b$ هر دو با هم صفر نیستند) و می‌نویسیم $(a,b)=d$ هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

الف) $d\,|\,a$ و $d\,|\,b$

ب) $\forall m>0\,;\,m\,|\,a\ ,\ m\,|\,b\Rightarrow m\leq d$

در واقع شرط (الف) مقسوم‌علیه مشترک بودن را برای $d$ تأمین می‌کند و شرط (ب) نشان می‌دهد که $d$ از هر مقسوم‌علیه مشترک دلخواهی مانند $m$ بزرگ‌تر یا مساوی است.

**تذکر**

دو عدد $a$ و $b$ را نسبت به هم اول گوییم هرگاه $(a,b)=1$

به‌طور مثال داریم: $(1,8)=1$ و $(7,11)=1$ و $(8,9)=1$

### روش تعیین ب.م.م دو عدد صحیح

اگر دو عدد را به حاصل‌ضرب عوامل اول تجزیه کنیم، ب.م.م آنها برابر است با حاصل‌ضرب عوامل مشترک با توان کمتر

به عنوان مثال: $(1200,315)=(2^{4}\times 3\times 5^{2}\ ,\ 3^{2}\times 5\times 7)=3\times 5=15$

### کوچکترین مضرب مشترک دو عدد (ک.م.م)

عدد طبیعی $c$ را ک.م.م دو عدد صحیح و ناصفر $a$ و $b$ می‌نامیم و می‌نویسیم $[a,b]=c$ هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

الف) $a\,|\,c\ ,\ b\,|\,c$

ب) $\forall m>0\,;\,a\,|\,m\ \ ,\ \ b\,|\,m\Rightarrow c\leq m$

در واقع شرط (الف) مضرب مشترک بودن را برای $c$ تأمین می‌کند و شرط (ب) نشان می‌دهد که $c$ از هر مضرب مشترک دلخواهی مانند $m$ کوچکتر یا مساوی است.

### روش تعیین ک.م.م دو عدد صحیح

اگر دو عدد را به حاصل‌ضرب عوامل اول تجزیه کنیم، ک.م.م آنها برابر است با حاصل‌ضرب عوامل مشترک و غیرمشترک با بیشترین توان.

به عنوان مثال: $[24,42]=[2^{3}\times 3\ ,\ 2\times 3\times 7]=2^{3}\times 3\times 7=168$

### چند ویژگی در مورد ب.م.م و ک.م.م

۱) $(a,b)=(\pm a,\pm b)$ ۲) $[a,b]=[\pm a,\pm b]$

۳) $(a,(b,c))=((a,b),c)$ ۴) $[a,[b,c]]=[[a,b],c]$

۵) $a\mid b \Rightarrow (a,b)=|a|$ ۶) $a\mid b \Rightarrow [a,b]=|b|$

۷) $(ka,kb)=|k|(a,b)$ ۸) $[ka,kb]=|k|[a,b]$

۹) $(n,n+۱)=۱$

هر دو عدد صحیح متوالی همواره نسبت به هم اول‌اند

۱۰) $p=$ عدد اول $,\ p\nmid a \Rightarrow (a,p)=۱$

## ب.م.م و ک.م.م — پیمانهٔ ۵ — ۲۰ سؤال

۷۱- مجموع ارقام بزرگ‌ترین عضو مجموعه $\{x\in\mathbb{N}\ ;\ x\mid ۴۵\ ,\ x\mid -۱۵۰\}$ کدام است؟ (مرتبط با صفحه‌های ۱۳ و ۱۴ کتاب درسی)

۱ — ۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۲

۷۲- چند عدد طبیعی یک رقمی یافت می‌شود، به‌طوری که $(a,۱۸)=۱$ باشد؟ (مرتبط با صفحه‌های ۱۳ و ۱۴ کتاب درسی)

۲ — ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۳- اگر $b$ فرد باشد و $a\mid b$، بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک $۱۸ab$ و $۱۲a^۲$ کدام است؟

۳ — (مرتبط با صفحه‌های ۱۳ و ۱۴ کتاب درسی) (سراسری ریاضی ۷۱)

۱) $a^۲$ ۲) $۶ab$ ۳) $۶a^۲$ ۴) $۶b^۲$

۷۴- اگر برای هر عدد طبیعی $n$، عدد $a^n$ بر $b^n$ بخش‌پذیر باشد، کدام گزاره در مورد بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک یا کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد لزوماً درست <u>نیست</u>؟

۴ — (مرتبط با صفحه‌های ۹ و ۱۴ کتاب درسی) (سراسری ریاضی ۷۸)

۱) $(a,b^۲)=b^۲$ ۲) $[a^۲,b]=a^۲$ ۳) $(a,b)=|b|$ ۴) $[a,b]=|a|$

۷۵- اگر حاصل $[(۳a,۶a),[۲a,۶a^۲]]$ همواره مضرب ۳۰ باشد، چند عدد طبیعی برای $a$ در مجموعهٔ $\{۱,۲,۳,...,۱۰۰\}$ وجود دارد؟

۵ — (مرتبط با صفحه‌های ۱۳ و ۱۴ کتاب درسی)

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۲۰ ۴) ۲۵

۷۶- اگر $a$، $b$ و $c$ سه عدد طبیعی و $a$ عددی اول، $(a,b)=a$ و $[b,c]=۲a^۲$ باشند، در این‌صورت برای $b$ چند جواب یافت می‌شود؟

۶ — (مرتبط با صفحه‌های ۱۳ و ۱۴ کتاب درسی)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۷۷- اگر $c\mid a-b$ و $(a,b)=۱$، آنگاه حاصل $(a,c)$ کدام است؟ (مرتبط با صفحه‌های ۹ تا ۱۴ کتاب درسی)

۷ — ۱) ۱ ۲) $|a|$ ۳) $|b|$ ۴) $|a-b|$

۷۸- اگر $a=۳k+۱$ باشد، حاصل $[(a,a+۳),[a,a+۳]]$ کدام است؟ $(a\in N)$ (مرتبط با صفحه‌های ۱۳ و ۱۴ کتاب درسی)

۸ — ۱) $a(a+۳)$ ۲) $a+۳$ ۳) $a$ ۴) $\dfrac{a(a+۳)}{۲}$

۷۹- بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد $n^۲+n$ و $۳n-۱$، برای مقادیر مختلف طبیعی $n$، چند مقدار متفاوت می‌تواند داشته باشد؟

۹ — (مرتبط با صفحه‌های ۹ تا ۱۴ کتاب درسی) (آزمون کانون ۱۸ آبان ۹۷)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۰- اگر دو عدد $n^۲+۱$ و $n^۳+۴$ نسبت به هم اول <u>نباشند</u>، آنگاه بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک آن‌ها کدام است؟

۱۰ — (مرتبط با صفحه‌های ۹ تا ۱۴ کتاب درسی) (آزمون کانون ۱۶ فروردین ۹۲)

۱) ۱۳ ۲) ۱۷ ۳) ۱۹ ۴) ۲۳

۸۱- دو عدد $a^۲+a+۳$ و $a-۱$ نسبت به هم اول‌اند. کدام گزاره همواره درست است؟

۱۱ — (مرتبط با صفحه‌های ۹ تا ۱۴ کتاب درسی) (آزمون کانون ۹۲)

۱) $a=۵k+۱$ ۲) $a=۵k$ ۳) $a\neq ۵k$ ۴) $a\neq ۵k+۱$

۸۲– اگر بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک $n^۲ - n$ و $n^۳ - n$ برابر عدد ۳۰ باشد، مقدار $n$ کدام است؟
۱۲ (مرتبط با صفحه‌های ۹ تا ۱۴ کتاب درسی)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۸۳– به ازای چند عدد طبیعی دو رقمی $n$، دو عدد به صورت‌های $۴,۲۵n + ۹$ و $۱۱n +$ نسبت به هم اول‌اند؟
۱۳ (مرتبط با صفحه‌های ۹ تا ۱۴ کتاب درسی) (سراسری ریاضی ۸۹)

۱) ۸۶ ۲) ۸۷ ۳) ۸۹ ۴) ۹۰

۸۴– به ازای چند عدد طبیعی $n$، دو عدد $۷n + ۵$ و $۱۱n + ۲$، مقسوم علیه مشترکی برابر ۳ دارند؟
۱۴ (مرتبط با صفحه‌های ۹ تا ۱۴ کتاب درسی) (سراسری ریاضی خارج از کشور ۹۱)

۱) هیچ عدد ۲) یک عدد ۳) دو عدد ۴) بی‌شمار عدد

۸۵– اگر به ازای برخی از اعداد طبیعی $n$، دو عدد $۱۲n + ۷$ و $۵n - ۲$ نسبت به هم اول نباشند، آنگاه بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک این دو عـدد، کدام است؟
۱۵ (مرتبط با صفحه‌های ۹ تا ۱۴ کتاب درسی) (سراسری ریاضی خارج کشور ۸۸)

۱) ۵۹ ۲) ۶۷ ۳) ۸۳ ۴) ۸۹

۸۶– اگر بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد $۷n - ۲$ و $۳n + ۲$ برابر ۵ باشد، $n$ کدام است؟ $(k \in Z)$
۱۶ (مرتبط با صفحه‌های ۹ تا ۱۴ کتاب درسی) (آزمون کانون ۹۰)

۱) $۵k + ۱$ ۲) $۵k + ۲$ ۳) $۵k - ۲$ ۴) $۵k - ۱$

۸۷– به ازای اعداد طبیعی $۱ \le n \le ۵۰$، در چند حالت دو عدد $۴n + ۷$ و $۵n + ۹$ نسبت به هم اول‌اند؟
۱۷ (مرتبط با صفحه‌های ۹ تا ۱۴ کتاب درسی) (سراسری ریاضی خارج از کشور ۸۷)

۱) ۴۷ ۲) ۴۸ ۳) ۴۹ ۴) ۵۰

۸۸– به ازای هر عدد طبیعی $n \le n_۰$، دو عدد «$۲n + ۷ , ۱۱n - ۳$» نسبت به هم اول‌اند. بیش‌ترین مقدار $n_۰$ کدام است؟
۱۸ (مرتبط با صفحه‌های ۹ تا ۱۴ کتاب درسی) (سراسری ریاضی خارج از کشور ۸۵)

۱) ۳۵ ۲) ۳۷ ۳) ۳۹ ۴) ۴۰

۸۹– بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد $(۱۶a + ۱۸)$ و $(۱۶a + ۲)$ به ازای مقادیر مثبت $a$، چند عدد متفاوت می‌تواند باشد؟
۱۹ (مرتبط با صفحه‌های ۹ تا ۱۴ کتاب درسی) (آزمون کانون ۹۳)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۵

۹۰– به ازای مقادیر مختلف $a > ۳$، بیش‌ترین مقدار برای بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دوعدد $(۱۵a + ۳)$ و $(۱۵a - ۱۲)$ کدام است؟
۲۰ (مرتبط با صفحه‌های ۹ تا ۱۴ کتاب درسی) (آزمون کانون ۹۱)

۱) ۱۵ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۵

## بخش‌پذیری در اعداد صحیح: قضیهٔ تقسیم

ریاضیات گسسته: صفحهٔ ۱۴ کتاب درسی

### قضیه تقسیم و کاربردها

قضیهٔ تقسیم: اگر $a$ عددی صحیح و $b$ عددی طبیعی باشد، اعدادی صحیح و منحصربه‌فرد مانند $q$ و $r$ یافت می‌شوند به قسمی که $a = bq + r$ و $۰ \le r < b$.

که در آن $a$ را مقسوم، $b$ را مقسوم‌علیه، $q$ را خارج قسمت و $r$ را باقی‌مانده می‌نامیم.

به عنوان مثال:

$$\begin{array}{r|l} ۳۸ & ۵ \\ \underline{۳۵} & ۷ \\ ۳ & \end{array} \Rightarrow a = ۳۸ \, , \, b = ۵ \Rightarrow \begin{cases} q = ۷ \\ r = ۳ \end{cases}$$

$$\begin{array}{r|l} -۳۸ & ۵ \\ \underline{+۳۵} & -۷ \\ -۳ & \end{array}$$

با توجه به شرط باقی‌مانده $(۰ \le r < b)$، متوجه می‌شویم که $r = -۳$ نمی‌تواند باشد.

بنابراین داریم:

$$-۳۸ = ۵ \times (-۷) - ۳ \Rightarrow -۳۸ = \underbrace{۵ \times (-۷)} \boxed{-۳ + ۵} - ۵$$

$$-۳۸ = ۵(-۷ - ۱) + ۲ \Rightarrow -۳۸ = ۵ \times (-۸) + ۲ \Rightarrow a = -۳۸ \, , \; b = ۵ \Rightarrow \begin{cases} q = -۸ \\ r = ۲ \end{cases}$$

**نکته**

به زبان ساده می‌توانیم بگوییم هرگاه در یک تقسیم باقی‌مانده منفی شد، کافی است مقسوم‌علیه را به آن اضافه کنیم تا به اولین عدد طبیعی برسیم. عدد حاصل همان باقی‌مانده تقسیم $a$ بر $b$ خواهد بود.

**نکته**

اگر $a \in \mathbb{Z}$ و $b \in \mathbb{N}$ آنگاه خارج قسمت تقسیم $a$ بر $b$ برابر است با:

$$q = \left[\frac{a}{b}\right]$$

به عنوان مثال در تقسیم $-۳۸$ بر ۵ خارج قسمت برابر است با:

$$q = \left[\frac{-۳۸}{۵}\right] = [-۷/۶] = -۸$$

■ مثال: اگر باقی‌ماندهٔ دو عدد $a$ و $b$ بر ۱۷ به‌ترتیب ۳ و ۵ باشد، در این‌صورت باقی‌مانده $۲a - ۳b$ بر ۱۷ کدام است؟

پاسخ:

$$\left.\begin{array}{l} a = ۱۷q + ۳ \Rightarrow ۲a = ۱۷(۲q) + ۶ \\ b = ۱۷q' + ۵ \Rightarrow ۳b = ۱۷(۳q') + ۱۵ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} ۲a - ۳b = ۱۷\underbrace{(۲q - ۳q')}_{q''} - ۹ \Rightarrow ۲a - ۳b = ۱۷q'' - ۹$$

می‌دانیم باقی‌مانده منفی نمی‌تواند باشد پس کافی است به $-۹$، ۱۷ واحد اضافه کنیم تا باقی‌مانده به‌دست آید.

علت این موضوع را یک‌بار دیگر به‌صورت تشریحی توضیح می‌دهیم:

ابتدا کافی است مقسوم‌علیه را یک بار اضافه و کم کنیم و سپس با کمک فاکتورگیری به باقی‌ماندهٔ مورد نظر برسیم؛ یعنی:

$$۲a - ۳b = ۱۷q'' \boxed{-۹ + ۱۷} - ۱۷ \Rightarrow ۲a - ۳b = ۱۷(q'' - ۱) + ۸ \Rightarrow r = ۸$$

## نتایج قضیهٔ تقسیم

۱) کوچک‌ترین عضو مجموعهٔ $S = \{a - bq \geq ۰ \,;\, q \in \mathbb{Z}\}$ که در آن $a$ عددی صحیح و $b$ عددی طبیعی است برابر است با باقی‌ماندهٔ تقسیم $a$ بر $b$.

می‌دانیم اگر $a$ را بر $b$ تقسیم کنیم، داریم:

$$a = bq + r \Rightarrow r = a - bq \Rightarrow r \in S$$

از طرفی $r$ را وقتی باقی‌مانده می‌نامیم که $۰ \leq r < b$. بنابراین $r$ کوچک‌ترین عدد صحیح نامنفی عضو مجموعهٔ $S$ است.

۲) اگر در تقسیم $a$ بر $b$ $(a, b \in \mathbb{N})$، خارج قسمت $q$ و باقی‌مانده $r$ باشد، آنگاه حداکثر تعداد واحدهایی که می‌توان به مقسوم‌علیه افزود، بدون آن‌که مقسوم $(a)$ و خارج قسمت $(q)$ تغییر کند، برابر است با $\left[\frac{r}{q}\right]$ (جزء صحیح $\frac{r}{q}$)؛ زیرا داریم:

$$\begin{cases} a = bq + r \\ a = (b + x)q + r' \end{cases} \Rightarrow bq + r = bq + xq + r' \Rightarrow r' = r - xq \geq ۰ \Rightarrow x \leq \frac{r}{q} \Rightarrow x_{max} = \left[\frac{r}{q}\right]$$

به عنوان مثال: اگر در الگوریتم تقسیم، مقسوم و مقسوم‌علیه، دو عدد طبیعی و خارج قسمت و باقی‌مانده به ترتیب ۲۸ و ۹۴ باشند، آنگاه حداکثر تعداد واحدهایی که می‌توان به مقسوم‌علیه افزود، بدون آن‌که مقسوم و خارج قسمت تغییر کند برابر است با: $\left[\frac{۹۴}{۲۸}\right] = ۳$.

۳) تعداد مضارب صحیح عدد طبیعی $n$ (مانند $kn$)، به‌طوری‌که $b < kn \leq a$ برابر است با:

$$\left[\frac{a}{n}\right] - \left[\frac{b}{n}\right]$$

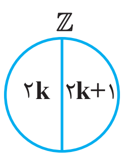
■ مثال: چند عدد طبیعی سه رقمی وجود دارد که بر ۲۷ قابل قسمت باشد؟

پاسخ:

$$۹۹ < ۲۷k \leq ۹۹۹ \Rightarrow \left[\frac{۹۹۹}{۲۷}\right] - \left[\frac{۹۹}{۲۷}\right] = ۳۷ - ۳ = ۳۴$$

## افراز مجموعهٔ $Z$ به کمک تقسیم

با توجه به قضیهٔ تقسیم، می‌دانیم که اگر $a$ عددی صحیح و دلخواه باشد، با تقسیم آن بر عدد طبیعی $b$، با توجه به اینکه باقی‌ماندهٔ تقسیم یعنی $r$ در رابطهٔ $۰ \leq r < b$ صدق می‌کند، برای $a$ برحسب $r$ دقیقاً $b$ حالت وجود دارد. به‌طور مثال در تقسیم بر ۲، باقی‌مانده ممکن است صفر یا ۱ شود، در واقع عددها یا فردند و یا زوج، از این‌جا مجموعهٔ اعداد صحیح را می‌توانیم به دو دسته افراز کنیم.




به همین ترتیب در تقسیم بر ۳، مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به سه دسته افراز می‌شود.