فصل اول

مقدماتی بر هندسه و استدلال

ترسیم‌های هندسی

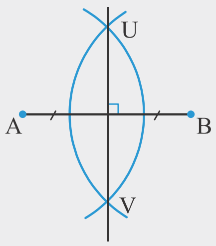
مثال **عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنید.**

پاسخ ـ دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ بیش از نصف AB باز می‌کنیم.

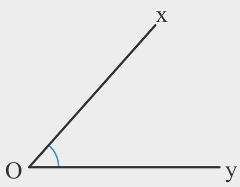
ـ یک بار از نقطهٔ A و یک بار از نقطهٔ B کمان می‌زنیم.

ـ این دو کمان یکدیگر را در نقطه‌های U و V قطع می‌کنند.

ـ خطی که از U و V عبور کند، عمودمنصف AB است.



مثال **نیمساز زاویهٔ xOy را رسم کنید.**

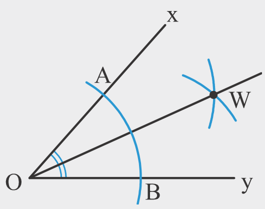


پاسخ ـ دهانهٔ پرگار را کمی باز می‌کنیم و به مرکز O کمانی می‌زنیم تا نیم‌خط‌های Ox و Oy را به ترتیب در A و B قطع کند.

ـ دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ بیش از نصف AB باز می‌کنیم.

ـ یک بار به مرکز A و بار دیگر به مرکز B کمان بزنید. دو کمان یکدیگر را در نقطه‌ای مانند W قطع می‌کنند.

ـ نیم‌خط OW نیمساز xOy است.



مثال **از نقطهٔ M یک عمود بر خط d رسم کنید.**

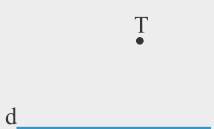
پاسخ ـ به مرکز M کمان دلخواهی رسم می‌کنیم تا خط d را در نقاط A و B قطع کند.

ـ نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB است.

ـ عمودمنصف AB را رسم می‌کنیم.

ـ عمودمنصف AB از M می‌گذرد و بر d عمود است.

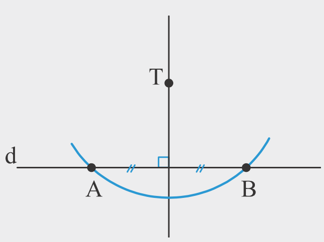
مثال **از نقطهٔ T یک عمود بر خط d رسم کنید.**



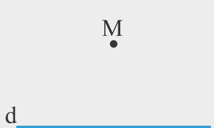
پاسخ ـ به مرکز T کمان دلخواهی رسم می‌کنیم تا خط d را در نقاط A و B قطع کند.

ـ عمودمنصف AB را رسم می‌کنیم.

ـ عمودمنصف AB از T می‌گذرد و بر خط d عمود است.



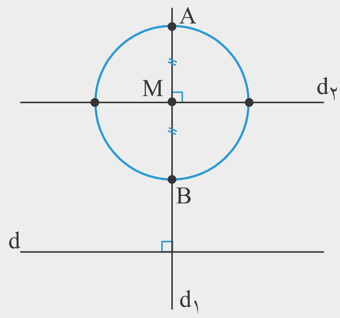
مثال **خطی موازی با d رسم کنید که از نقطهٔ M عبور کند.**



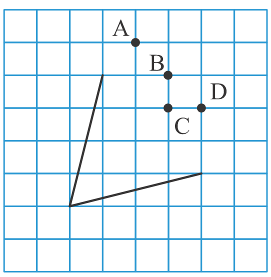
پاسخ ـ از M خطی عمود بر d رسم می‌کنیم. این خط را d_1 می‌نامیم.

ـ از M خطی عمود بر d_1 رسم می‌کنیم. این خط را d_2 می‌نامیم.

ـ d_2 با d موازی است و از نقطهٔ M عبور می‌کند.



۱. اگر نیمساز زاویهٔ روبه‌رو را رسم کنیم، نیمساز از کدام نقطه می‌گذرد؟



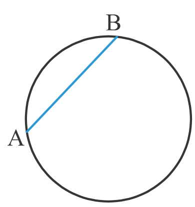
۱) A

۲) B

۳) C

۴) D

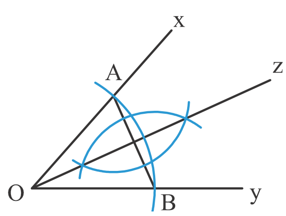
۲. AB وتری از یک دایره است. عمودمنصف AB:



۱) کمان $\overset{\frown}{AB}$ را نصف می‌کند.　　۲) از مرکز دایره عبور می‌کند.

۳) هر دو مورد درست است.　　۴) هیچ‌کدام درست نیستند.

VIT ۳. مرکز کمان‌ها در شکل روبه‌رو نقاط O، A و B هستند. در این صورت کدام عبارت درست است؟



الف) Oz نیمساز $\widehat{xOy}$ است.

ب) Oz عمودمنصف AB است.

۱) الف درست و ب نادرست است.　　۲) الف نادرست و ب درست است.

۳) هر دو درست هستند.　　۴) هر دو نادرست هستند.

۴. برای رسم عمودمنصف پاره‌خط AB، نیاز به زدن چند کمان دایره‌ای هست؟ *(کنکور)*

۱) ۲　　۲) ۳

۳) ۴　　۴) ۶

۵. می‌خواهیم به کمک رسم عمودمنصف، پاره‌خط روبه‌رو را به ۴ قسمت برابر تقسیم کنیم. حداقل چند کمان باید ترسیم کنیم؟

۱) ۵　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

★۶. باید یک زاویهٔ ۸۰ درجه را تنها به کمک خط‌کش و پرگار به زاویه‌های ۱۰ درجه تقسیم کنیم. حداقل باید چند بار از پرگار استفاده کرد؟ *(کنکور)*

۱) ۶　　۲) ۸　　۳) ۱۰　　۴) ۱۲

۷. **نقطهٔ P بیرون از خط ℓ است. این کارها را انجام می‌دهیم:**

ـ دایرهٔ C_1 را به مرکز P رسم می‌کنیم تا خط ℓ را در نقاط Q و R قطع کند.

ـ دایره‌های C_2 و C_3 که شعاع‌های برابر دارند و مرکزشان Q و R است، را رسم می‌کنیم تا در نقطهٔ S یکدیگر را قطع کنند.

ـ P را به S وصل می‌کنیم تا خط ℓ' به وجود آید.

ـ دایرهٔ C_4 به مرکز P خط ℓ' را در نقاط M و N قطع می‌کند.

ـ دایره‌های C_5 و C_6 که شعاع‌های برابر دارند و مرکزشان M و N است، را رسم می‌کنیم تا در نقطهٔ O یکدیگر را قطع کنند.

ـ O و P را به یکدیگر وصل می‌کنیم تا خط ℓ'' به‌دست آید.

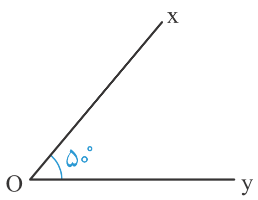
با انجام این مراحل، چه کاری انجام داده‌ایم؟

۱) از P خطی عمود بر ℓ رسم کرده‌ایم.
۲) عمودمنصف PM را رسم کرده‌ایم.
۳) از P خطی موازی ℓ رسم کرده‌ایم.
۴) مثلث متساوی‌الاضلاع PMN را رسم کرده‌ایم.

۸. **به کمک خط‌کش و پرگار، چند تا از زاویه‌های 30°، 60° و 90° را می‌توان رسم کرد؟**

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) هیچ

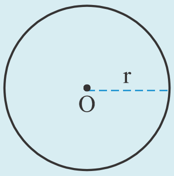
۹. **در شکل روبه‌رو، $\widehat{xOy} = 50^\circ$ است. به کمک این زاویه و خط‌کش و پرگار، چند تا از زاویه‌های 25°، 60°، 10° و 5° را می‌توان رسم کرد؟**



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

رسم مثلث

مجموعهٔ نقاطی از صفحه که از یک نقطه فاصلهٔ ثابتی دارند، یک دایره به مرکز آن نقطه است.



مثال مثلثی رسم کنید که اضلاع آن به ترتیب $AB = 3$، $BC = 5$ و $AC = 4$ هستند.

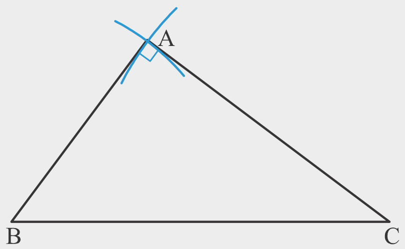
پاسخ ـ ضلع AB را رسم می‌کنیم.

ـ یک دایره به شعاع ۳ به مرکز B رسم می‌کنیم.

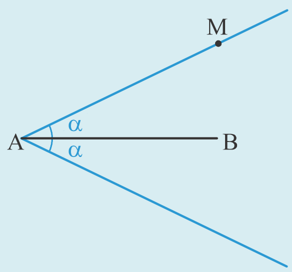
ـ یک دایره به شعاع ۴ به مرکز C رسم می‌کنیم.

ـ محل برخورد دو دایره رأس A است.

ـ محل برخورد دو دایره، دو نقطه است که نسبت به BC متقارن هستند. به این ترتیب دو مثلث هم‌نهشت رسم می‌شود.



مجموعهٔ نقاطی مانند M که اگر به نقطه‌ای مانند A وصل شود زاویهٔ بین MA و AB عدد مشخصی باشد، دو نیم‌خط در دو طرف پاره‌خط هستند.



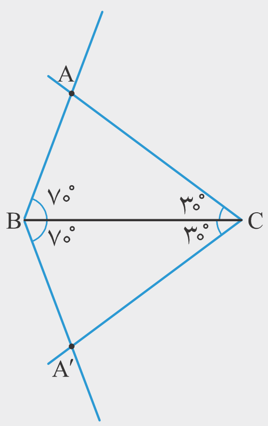
مثال مثلثی رسم کنید که در آن $BC = ۴$، $\widehat{B} = ۷۰^\circ$ و $\widehat{C} = ۳۰^\circ$ باشد.

پاسخ ـ ضلع BC را رسم می‌کنیم.

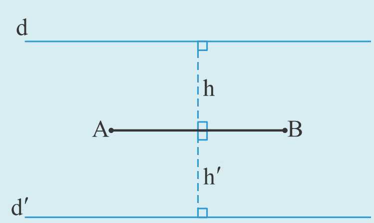
ـ با توجه به زاویه‌های داده شده نیم‌خط‌های BA، BA'، CA و CA' را رسم می‌کنیم.

ـ محل برخورد نیم‌خط‌های رسم شده، محل رأس دیگر مثلث (A) است.

ـ محل برخورد نیم‌خط‌ها دو نقطه است که نسبت به BC متقارن هستند. به این ترتیب دو مثلث هم‌نهشت رسم می‌شود.



مجموعه نقاطی از صفحه که از یک خط یا پاره‌خط فاصلهٔ ثابتی دارند، دو خط موازی در دو طرف خط یا پاره‌خط است.



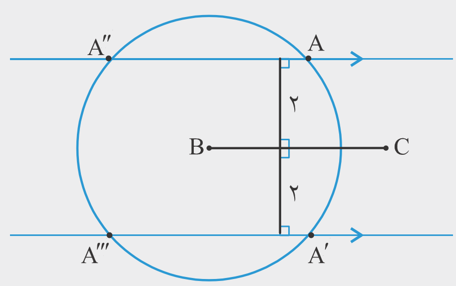
مثال با معلومات $BC = ۴$، $AB = ۳$ و $h_a = ۲$ (ارتفاع وارد بر BC) مثلث ABC را رسم کنید.

پاسخ ـ ضلع BC را رسم می‌کنیم.

ـ با توجه به $h_a = ۲$ متوجه می‌شویم رأس A روی دو خطِ موازی با BC و به فاصلهٔ ۲ از BC است.

ـ با توجه به $AB = ۳$، از رأس B دایره‌ای به شعاع ۳ رسم می‌کنیم. هر جا که این دایره دو خط موازی را قطع کند، مکان رأس A است.

ـ چهار نقطهٔ A، A'، A'' و A''' به‌دست می‌آید که A و A' و همچنین A'' و A''' نسبت به BC متقارن هستند.



در مثلث ABC:

ضلع $c = AB$	ضلع $b = AC$	ضلع $a = BC$
میانهٔ وارد از رأس $m_c = C$	میانهٔ وارد از رأس $m_b = B$	میانهٔ وارد از رأس $m_a = A$
ارتفاع وارد از رأس $h_c = C$	ارتفاع وارد از رأس $h_b = B$	ارتفاع وارد از رأس $h_a = A$
نیمساز وارد از رأس $d_c = C$	نیمساز وارد از رأس $d_b = B$	نیمساز وارد از رأس $d_a = A$

۱۰. می‌خواهیم مثلث ABC را با معلومات $\hat{B} = ۴۵^\circ$، $h_c = ۶$ و $h_b = ۴$ رسم کنیم. تعداد جواب‌های متمایز (غیرهم‌نهشت) کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۰ ۴) بی‌شمار

۱۱. با معلومات $a = ۴$، $\hat{C} = ۳۰^\circ$ و $m_a = ۳$ چند مثلث می‌توان رسم کرد؟ (کنکور)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) بیش از دو ۴) نمی‌توان رسم کرد.

۱۲. با داشتن معلومات $\hat{B} = ۳۰$، $AC = ۴$ و $AB = ۳$، چند مثلث غیرهم‌نهشت ABC می‌توان رسم کرد؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) هیچ

۱۳. در کدام حالت مثلث ABC قابل ترسیم است؟

۱) $a = ۸$، $m_a = ۷$ و $b = ۳$
۲) $a = ۶$، $m_a = ۳$ و $b = ۷$
۳) $a = ۸$، $m_a = ۴$ و $b = ۵$
۴) $a = ۱۰$، $m_a = ۲$ و $b = ۲$

۱۴. VIT در رسم مثلث ABC با معلوم بودن دو ضلع $b = ۷$ و $c = ۵$ و میانهٔ $m_a = ۴$ با خط‌کش و پرگار، کدام نتیجه حاصل می‌شود؟ (کنکور)

۱) غیرقابل رسم ۲) جواب منحصربه‌فرد ۳) دو جواب متمایز ۴) فاقد جواب

۱۵. مثلثی با طول سه ضلع b، c و $۲m_a$ (m_a طول میانهٔ مثلث ABC است) رسم کرده‌ایم. طول میانهٔ وارد بر ضلع $۲m_a$ کدام است؟ (کنکور)

۱) a ۲) $۲a$ ۳) $\frac{a}{۲}$ ۴) $\frac{b+c}{۲}$

۱۶. VIT در مثلث قائم‌الزاویه‌ای وتر آن مشخص است. با معلوم بودن اندازهٔ کدام جزء دیگر، این مثلث قابل رسم <u>نیست</u>؟ (کنکور)

۱) ارتفاع وارد بر وتر ۲) ارتفاع وارد بر ضلع قائم ۳) میانهٔ وارد بر وتر ۴) میانهٔ وارد بر ضلع قائم

۱۷. با معلومات $h_a = ۱$، $b = ۲$ و $c = ۳$ (دو ضلع و ارتفاع وارد بر ضلع سوم) چند مثلث متمایز می‌توان رسم کرد؟ (کنکور)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) بی‌شمار ۴) ۰

۱۸. در مثلث ABC می‌دانیم، $AB = ۸$ و $\hat{A} = ۳۰^\circ$. در کدام حالت، نمی‌توان مثلث را رسم کرد؟

۱) $BC < ۴$ ۲) $BC \leq ۴$ ۳) $BC > ۴$ ۴) $BC \geq ۴$

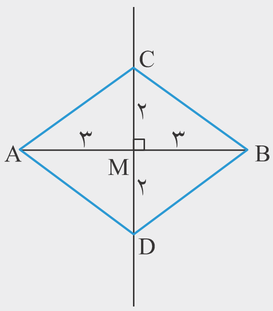
۱۹. در مثلث ABC می‌دانیم، $AB = ۱۰$ و $\hat{A} = ۳۰^\circ$. در کدام حالت، اگر مثلث را رسم کنیم، یک جواب خواهیم داشت؟

۱) $BC > ۵$ ۲) $BC = ۵$ ۳) $BC = ۵$ یا $BC > ۱۰$ ۴) $BC < ۵$

رسم چندضلعی

مثال **لوزی را طوری رسم کنید که قطرهای آن ۶ و ۴ باشد.**

پاسخ ـ لوزی یک چهارضلعی است که قطرهایش عمودمنصف یکدیگر هستند.



ـ پاره‌خط AB به طول ۶ را رسم می‌کنیم.

ـ عمودمنصف AB را رسم می‌کنیم.

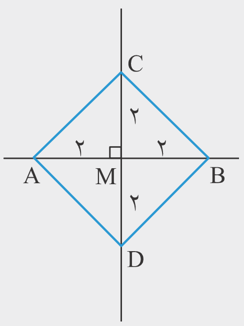
ـ یک دایره به شعاع نصف ۴ یعنی ۲ و به مرکز M رسم می‌کنیم.

ـ محل برخورد دایره و عمودمنصف AB را C و D می‌نامیم.

ـ ACBD لوزی به قطرهای ۶ و ۴ است.

مثال **مربعی رسم کنید که قطر آن ۴ باشد.**

پاسخ ـ مربع یک لوزی است که قطرهایش برابر باشند.



ـ پاره‌خط AB به طول ۴ را رسم می‌کنیم.

ـ عمودمنصف AB را رسم می‌کنیم.

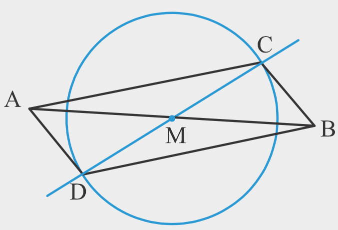
ـ یک دایره به شعاع نصف AB و به مرکز M رسم می‌کنیم.

ـ محل برخورد دایره و عمودمنصف AB را C و D می‌نامیم.

ـ ACBD مربعی به قطر ۴ است.

مثال **چند متوازی‌الاضلاع می‌توان رسم کرد که قطرهای آن ۶ و ۴ باشند؟**

پاسخ ـ متوازی‌الاضلاع چهارضلعی است که قطرهای آن همدیگر را نصف کنند.



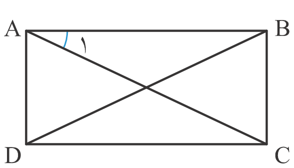
ـ پاره‌خط AB به طول ۶ را رسم می‌کنیم.

ـ یک دایره به شعاع نصف ۴ یعنی ۲ و به مرکز M رسم می‌کنیم.

ـ محل برخورد هر خط که از M می‌گذرد با دایره دو رأس دیگر متوازی‌الاضلاع است.

ـ به این ترتیب بی‌شمار متوازی‌الاضلاع با این اطلاعات وجود دارد.

۲۰. برای رسم مستطیل ABCD داشتن موارد کدام گزینه کافی نیست؟



۱) AB و BC

۲) AB و AC

۳) AB و $\widehat{A}_1$

۴) AC و BD

VIT ۲۱. برای رسم یک متوازی‌الاضلاع داشتن موارد کدام گزینه کافی نیست؟ *(کتاب درسی)*

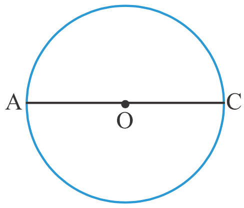
۱) طول چهار ضلع

۲) طول دو قطر و اندازهٔ زاویهٔ بین آن‌ها

۳) طول دو ضلع مجاور و یکی از زاویه‌ها

۴) طول دو ضلع مجاور و یکی از قطرها

۲۲. **دایره‌ای با قطر AC و مرکز O مفروض است. نقطهٔ دلخواه B را روی محیط دایره انتخاب می‌کنیم، آن را بـه O وصـل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا محیط دایره را در D قطع کند. چهارضلعی $ABCD$:**



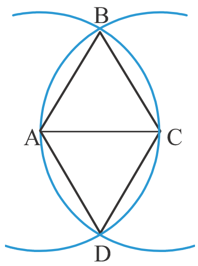
۱) ذوزنقه است.

۲) مستطیل است.

۳) ذوزنقه است.

۴) مربع است.

۲۳. **پاره‌خط AC را رسم می‌کنیم. دو دایره به شعاع AC و به مرکزهای A و C رسم می‌کنـیم تـا یکـدیگر را در B و D قطع کنند. چهارضلعی $ABCD$:**



۱) لوزی است و زاویه‌های ۴۵° و ۱۳۵° هستند.

۲) لوزی است و زاویه‌هایش ۶۰° و ۱۲۰° هستند.

۳) مستطیل است و زاویهٔ بین دو قطرش ۶۰° است.

۴) مستطیل است و زاویهٔ بین دو قطرش ۴۵° است.

استدلال

استدلال استقرایی: اگر بر مبنای چند مثال یا مشاهده، یک نتیجهٔ کلی بگیریم از «استدلال استقرایی» استفاده کرده‌ایم.

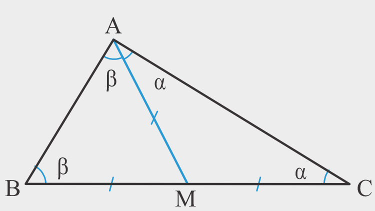
برای مثال اگر با بررسی و مشاهدهٔ مربع، مستطیل و متوازی‌الاضلاع به این نتیجهٔ کلی برسیم که مجموع زاویـه‌هـای هـر چهارضـلعی ۳۶۰° است، از استدلال استقرایی استفاده کرده‌ایم.

استدلال استنتاجی: اگر نتیجه‌گیری منطقی بر پایهٔ حقایقی کـه درسـتی آن‌هـا را پذیرفتـه‌ایـم باشـد، بـه آن «اسـتدلال استنتاجی» می‌گوییم.

اگر قطر یک چهارضلعی را رسم کنیم دو مثلث به وجود می‌آید. مجموع زاویه‌های یک مثلث ۱۸۰° است پس مجموع زاویه‌هـای هـر چهارضلعی دو برابر مجموع زاویه‌های یک مثلث یعنی ۳۶۰° است. این مثال نمونه‌ای از استدلال استنتاجی است.

مثال **با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید اگر در یک مثلث میانهٔ وارد بـر یـک ضـلع نصـف آن ضـع باشـد، مثلـث قائم‌الزاویه است.**

پاسخ



$$AM = MC \Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{MCA} = \alpha$$
$$AM = MB \Rightarrow \widehat{MAB} = \widehat{MBA} = \beta$$
$$\hat{B} + \hat{A} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \beta + (\beta + \alpha) + \alpha = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲\beta + ۲\alpha = ۱۸۰^\circ \Rightarrow$$
$$\beta + \alpha = ۹۰^\circ \Rightarrow \hat{A} = ۹۰^\circ$$

استدلال تمثیلی: اگر با آوردن یک مثال از درست بودن یک حکم، درستی آن حکـم بـرای مـوردی دیگـر را نتیجه بگیریم، از «استدلال تمثیلی» استفاده کرده‌ایم.

برای مثال، مجموع زاویه‌های داخلی مستطیل که یک چهارضلعی است، 360° است. پس مجموع زاویه‌های داخلی یک لوزی هم 360° است.

قضیه: نتایج مهم و پرکاربردی که با استدلال استنتاجی حاصل می‌شوند، «قضیه» نامیده می‌شوند.

مثلاً دو مورد زیر قضیه هستند:

ـ در هر مثلث ضلع روبه‌رو به زاویهٔ بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است.

ـ در هر مثلث سه ارتفاع همرس هستند.

عکس قضیه: اگر در یک قضیه جای فرض و حکم را عوض کنیم به آنچه حاصل می‌شود، «عکس قضیه» گفته می‌شود. البته عکس قضیه ممکن است درست یا نادرست باشد.

برای مثال، اگر دو ضلع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه زاویه‌های مجاور به آن‌ها نیز برابراند. (قضیه)

اگر در یک مثلث دو زاویهٔ مجاور به دو ضلع برابر باشند، آنگاه آن دو ضلع نیز برابراند. (عکس قضیه)

۲۴. روش نتیجه‌گیری کلی بر مبنای مجموعهٔ محدودی از مشاهدات کدام نوع استدلال است؟ *(سراسری ریاضی ۸۸)*

۱) قیاسی ۲) شهودی ۳) استقرایی ۴) استنتاجی

۲۵. هرگاه گزارهٔ «بعضی از xها y نیستند» درست باشد، و گزارهٔ «همهٔ zها y هستند» نیز درست باشد، آنگاه می‌توان نتیجه گرفت که:

۱) بعضی از xها z نیستند. ۲) بعضی از xها z هستند.

۳) بعضی از zها x نیستند. ۴) هیچ z نیست که x باشد.

۲۶. در مورد مدرسه‌ای دو فرض زیر صادق است: *(مسابقات ریاضی آمریکا)*

الف) بعضی از دانش‌آموزان درستکار نیستند. **ب) همهٔ عضوهای انجمن برادری درستکار هستند.**

کدام نتیجه‌گیری درست است؟

۱) بعضی از دانش‌آموزان عضو انجمن برادری هستند.

۲) بعضی از عضوهای انجمن برادری دانش‌آموز نیستند.

۳) بعضی از دانش‌آموزان عضو انجمن برادری نیستند.

۴) هیچ عضو انجمن برادری دانش‌آموز نیست.

۲۷. چند مثلث متساوی‌الساقین می‌توان رسم کرد که رأس‌های آن‌ها بر رأس‌هایی از یک شش‌ضلعی منتظم واقع باشند؟ *(مسابقات ریاضی بلژیک)*

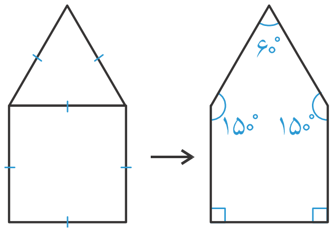
۱) ۱ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۲۴

۲۸. اندازه‌های زاویه‌های مثلث برحسب درجه α، β و γ است. هرگاه $\beta-\alpha=\gamma-\beta$ و $\alpha\le\beta\le\gamma$، آنگاه لازم می‌آید که این مثلث:

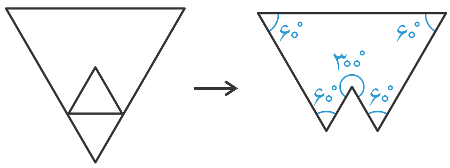
۱) در یک زاویه قائمه باشد. ۲) متساوی‌الاضلاع باشد.

۳) متساوی‌الساقین غیرمتساوی‌الاضلاع باشد. ۴) دارای یک زاویهٔ 60° باشد.

۲۹. رضا می‌خواهد مجموع زوایای یک پنج‌ضلعی را پیدا کند. او از شکل‌هایی نظیر مربع و مثلث متساوی‌الاضلاع زیر استفاده کرد:



$\longrightarrow 90^\circ + 90^\circ + 150^\circ + 60^\circ + 150^\circ = 540^\circ$

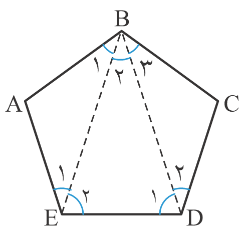


$\longrightarrow 60^\circ + 60^\circ + 60^\circ + 60^\circ + 300^\circ = 540^\circ$

او نتیجه گرفت که مجموع زوایای یک پنج‌ضلعی برابر است با 540°. او از چه استدلالی استفاده کرده است؟ *(کتاب درسی)*

۱) استقرایی ۲) مثال نقض ۳) استنتاج ۴) برهان خلف

۳۰. حسین می‌خواهد مجموع زوایای یک پنج‌ضلعی را پیدا کند. او می‌داند که مجموع زوایای یک مثلث 180° است. او این‌گونه عمل کرد:



$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{ABE}: \hat{A} + \hat{B}_1 + \hat{E}_1 = 180^\circ \\ \overset{\Delta}{BDE}: \hat{B}_2 + \hat{D}_1 + \hat{E}_2 = 180^\circ \\ \overset{\Delta}{BCD}: \hat{B}_3 + \hat{C} + \hat{D}_2 = 180^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A} + \overbrace{\hat{B}_1 + \hat{B}_2 + \hat{B}_3}^{\hat{B}} + \hat{C} + \overbrace{\hat{D}_2 + \hat{D}_1}^{\hat{D}} + \overbrace{\hat{E}_2 + \hat{E}_1}^{\hat{E}}$$
$$= 180^\circ + 180^\circ + 180^\circ \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{E} = 540^\circ$$

او نتیجه گرفت که مجموع زوایای یک پنج‌ضلعی برابر است با 540°. او از چه استدلالی استفاده کرده است؟ *(کتاب درسی)*

۱) استقرایی ۲) مثال نقض ۳) استنتاج ۴) برهان خلف

۳۱. اگر در مثلث ABC، $\hat{B} = 40^\circ$ و $\hat{C} = 80^\circ$، آنگاه زاویهٔ بین ارتفاع و نیمساز نظیر رأس A چقدر است؟ *(کنکور)*

۱) 10° ۲) 20° ۳) 40° ۴) 30°

۳۲. اگر در مثلث ABC، $\hat{A} = 50^\circ$ و $\hat{B} = 60^\circ$، آنگاه زاویهٔ بین نیمساز زاویهٔ B و عمودمنصف ضلع BC چقدر است؟

۱) 10° ۲) 75° ۳) 5° ۴) 45°

۳۳. VIT در کدام مورد، هم خود قضیه و هم عکس قضیه درست است؟ *(کتاب درسی)*

الف) در مثلث ABC، اگر $\hat{B} = \hat{C}$ باشد، آنگاه $AB = AC$.

ب) اگر در مثلث ABC، رابطهٔ $AB^2 + AC^2 = BC^2$ برقرار باشد، آنگاه $\hat{A} = 90^\circ$.

۱) الف ۲) ب ۳) هر دو ۴) هیچ‌کدام

۳۴. در کدام مورد، هم خود قضیه و هم عکس قضیه درست است؟ *(کتاب درسی)*

الف) اگر دو مثلث هم‌نهشت باشند، مساحتشان با هم برابر است.

ب) اگر سه ضلع مثلثی برابر باشند، آنگاه هر سه زاویه‌اش 60° هستند.

۱) الف ۲) ب ۳) الف و ب ۴) هیچ‌کدام

برهان خلف

گزاره: به یک جملهٔ خبری که دقیقاً درست یا نادرست باشد، «گزاره» گفته می‌شود.

برای مثال « $\sqrt{۲}$ گنگ است» و «مجموع زاویه‌های خارجی هر مثلث ۳۶۰° است» گزاره هستند.

گزاره می‌تواند تنها یک خبر را اعلام کند که به آن «**گزارهٔ ساده**» می‌گویند و یا می‌تواند بیش از یک خبر را اعلام کند و ترکیبی از چند گزارهٔ ساده باشد که به آن «**گزارهٔ مرکب**» گفته می‌شود.

مثلاً گزاره‌های «مجموع زاویه‌های داخلی لوزی ۳۶۰° است» و «مجموع زاویه‌های خارجی هر لوزی ۳۶۰° است»، هرکدام گزارهٔ ساده هستند. ولی «مجموع زاویه‌های داخلی و خارجی یک لوزی ۳۶۰° است» یک گزارهٔ مرکب است.

نقیض یک گزاره: گزاره‌ای است که برعکس آن گزاره را درست فرض می‌کند.

مثال: گزاره: «قطرهای هر لوزی عمودمنصف یکدیگراند».

نقیض گزاره: «لوزی وجود دارد که قطرهایش عمودمنصف یکدیگر نیستند».

برهان خلف:

ـ فرض می‌کنیم حکم غلط است (نقیض حکم درست است).

ـ به تناقض می‌رسیم.

ـ پس حکم درست بوده است.

مثال **با استفاده از روش برهان خلف نشان دهید $\sqrt{۲}+۱$ گنگ است. (می‌دانیم $\sqrt{۲}$ گنگ است).**

پاسخ فرض می‌کنیم $\sqrt{۲}+۱$ گنگ نیست پس عضو $\mathbb{Q}$ است.

$$\sqrt{۲}+۱\in\mathbb{Q}\Rightarrow\sqrt{۲}+۱-۱\in\mathbb{Q}\Rightarrow\sqrt{۲}\in\mathbb{Q}$$

به این نتیجه رسیدیم که $\sqrt{۲}$ گویا است که این تناقض است. پس فرض اولیه غلط بوده است. یعنی $\sqrt{۲}+۱$ گنگ است.

۳۵.نقیض گزارهٔ «دو خط موازی یکدیگر را قطع نمی‌کنند» کدام گزاره است؟

۱) دو خط که همدیگر را قطع می‌کنند موازی نیستند.
۲) دو خط موازی همدیگر را قطع می‌کنند.
۳) دو خط که همدیگر را قطع نمی‌کنند موازی هستند.
۴) همهٔ خط‌ها موازی هستند.

۳۶.نقیض گزارهٔ «عدد حقیقی a گنگ است» کدام گزاره است؟

۱) عدد حقیقی a گویا است.
۲) عدد a حقیقی نیست.
۳) عدد حقیقی a زوج است.
۴) عدد حقیقی a طبیعی است.

۳۷.نقیض گزارهٔ «این هفته، من هر روز ورزش کردم» کدام گزاره است؟

۱) این هفته، من کلاً ورزش نکردم.
۲) این هفته، من یک روز در میان ورزش کردم.
۳) حداقل یک روز در این هفته ورزش نکردم.
۴) این هفته، من هیچ روزی ورزش نکردم.

۳۸. نقیض گزارهٔ «همهٔ مغازه‌ها هر روز باز هستند» کدام‌یک از گزاره‌های زیر است؟

۱) روزی هست که همهٔ مغازه‌ها بسته هستند.

۲) حداقل یک روز هست که در آن حداقل یک مغازه بسته است.

۳) همهٔ مغازه‌ها هر روز بسته هستند.

۴) هر مغازه حداقل یک روز بسته است.

VIT **۳۹. دراثبات یک قضیه به کمک برهان خلف ....**

۱) فرض می‌کنیم حکم درست باشد و برای درستی آن چند مثال ارائه می‌دهیم.

۲) نقیض حکم قضیه را به عنوان فرض می‌پذیریم و با استدلال منطقی به تناقض می‌رسیم.

۳) نقیض فرض را به عنوان حکم می‌پذیریم و با استدلال منطقی به تناقض می‌رسیم.

۴) فرض می‌کنیم حکم درست نباشد و برای نادرستی آن دلیل ارائه می‌کنیم.

۴۰. بهار می‌خواهد گزارهٔ زیر را به کمک برهان خلف ثابت کند:

«اگر حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی a و b زوج باشد، آنگاه حداقل یکی از آن دو عدد، زوج است».

فرض او باید کدام باشد؟

۱) a و b زوج هستند.

۲) a و b طبیعی نیستند.

۳) a و b فرد هستند.

۴) $a \times b$ فرد است.

VIT **۴۱. پویا می‌خواهد گزارهٔ زیر را به کمک برهان خلف ثابت کند:** *(کتاب درسی)*

«اگر خط‌های d_1 و d_2 بر خط ℓ عمود باشند، آنگاه d_1 و d_2 موازی هستند».

در مورد استدلال او کدام درست است؟

۱) فرض او باید این باشد که d_1 و d_2 همدیگر را قطع می‌کنند.

۲) در پایان به مثلثی می‌رسد که دو زاویهٔ 90° دارد، که تناقض است.

۳) هر دو.

۴) هیچ‌کدام.

۴۲. اثبات کدام قضیه احتیاج به استدلال به روش برهان خلف ندارد؟ *(سراسری ریاضی ۸۶)*

۱) عدد $\sqrt{5}$ گنگ است.

۲) از یک نقطه فقط یک خط موازی خط مفروض می‌توان فرض کرد.

۳) در یک صفحه از نقطهٔ مفروض فقط یک خط می‌توان بر خط مفروض عمود کرد.

۴) مربع هر عدد طبیعی فرد از مضرب ۸ یک واحد بیش‌تر است.

مثال نقض

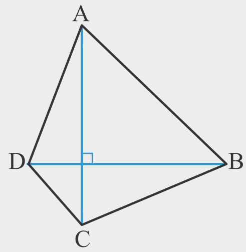
مثال نقض: به مثالی که نشان می‌دهد یک حکم کلی نادرست است، «مثال نقض» گفته می‌شود.

حکم کلی: حاصل‌ضرب هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.

مثال نقض: $\sqrt{۲}$ و $-\sqrt{۲}$ $\leftarrow$ $-\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}=-۲$

حکم کلی: هر چهارضلعی که قطرهای عمود بر هم و برابری داشته باشند، مربع است.

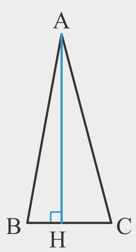
مثال نقض:



مثال گزارهٔ زیر را اثبات یا رد کنید:

«در هر مثلث، هر ارتفاع از هرکدام از سه ضلع مثلث کوچک‌تر است».

پاسخ مثال نقض:



$\rightarrow AH > BC$

۴۳.کدام گزینهٔ زیر، مثال نقض دارد؟ *(کنکور)*

۱) هر مربع یک لوزی است.
۲) هر عدد اول و بزرگ‌تر از ۲ فرد است.
۳) هر مثلث متساوی‌الاضلاع، متساوی‌الساقین است.
۴) توان دوم هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از توان سوم آن است.

۴۴.اعداد کدام گزینه کلیت حکم «حاصل‌ضرب هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است» را نقض می‌کند؟ *(کنکور)*

۱) $\sqrt{۶}$ و $\sqrt{۲۱۶}$
۲) $\sqrt{۶}$ و $\sqrt{۱۲}$
۳) $\sqrt{۲۱۶}$ و $\sqrt{۱۸}$
۴) $\sqrt{۱۲}$ و $\sqrt{۱۸}$

۴۵.کدام عدد کلیت حکم «توان دوم هر عدد بزرگ‌تر از خود آن است» را نقض می‌کند؟ *(کنکور)*

۱) $-\frac{۱}{۲}$
۲) $۱-\sqrt{۲}$
۳) $\sqrt{۲}-۱$
۴) $\sqrt{۲}+۱$

۴۶.کدام عدد کلیت حکم «برای هر عدد طبیعی زوج n، $۲^n+۱$ عددی اول است» را نقض می‌کند؟ *(کنکور)*

۱) ۲
۲) ۴
۳) ۶
۴) ۸

۴۷.کدام عدد کلیت حکم «رقم سمت راست هر عددی که بر ۵ و ۳ قابل قسمت باشد، برابر صفر است» را نقض می‌کند؟ *(کنکور)*

۱) ۱۱۵
۲) ۱۲۰
۳) ۲۱۰
۴) ۲۲۵

۴۸. کدام قضیه درست است؟

۱) هر چهارضلعی که قطرهایش بر هم عمود باشند، لوزی است.

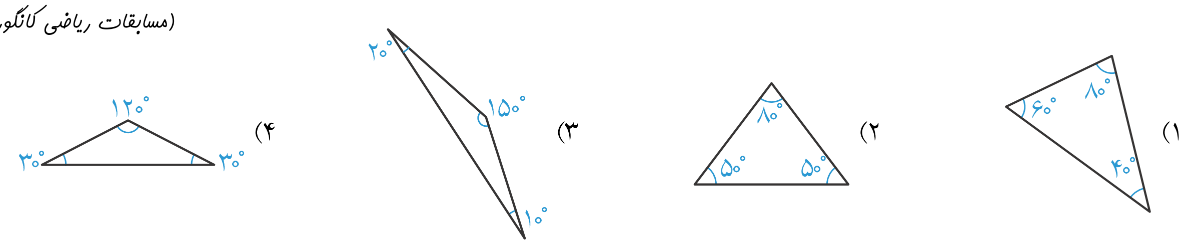
۲) هر لوزی یک مربع است.

۳) هیچ ذوزنقه‌ای محور تقارن ندارد.

۴) هر مثلث متساوی‌الاضلاع، متساوی‌الساقین است.

۴۹. بابک فکر می‌کند که زاویه‌های هر مثلث متساوی‌الساقین تند است. کدام مثال زیر نشان می‌دهد که او اشتباه می‌کند؟

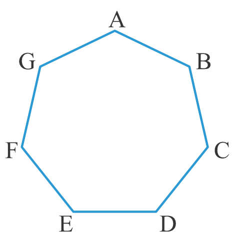
(مسابقات ریاضی کانگورو ۲۰۰۸)



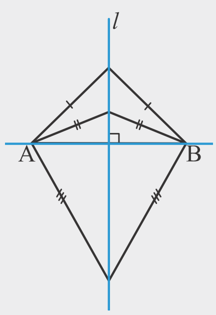
۵۰. شکل زیر یک هفت‌ضلعی منتظم است. با وصل کردن کدام سه رأس مثال نقضی برای حکم زیر پیدا می‌شود؟ *(کتاب درسی)*

«با وصل کردن هر سه رأس از یک هفت‌ضلعی منتظم یک مثلث متساوی‌الساقین تشکیل می‌شود.»

۱) BDF
۲) ADE
۳) CDE
۴) ABD



عمودمنصف و همرسی عمودمنصف‌ها



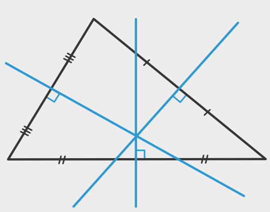
ـ هر خطی که بر یک پاره‌خط عمود باشد و آن را نصف کند، عمودمنصف آن پاره‌خط نامیده می‌شود.

ـ خاصیت عمودمنصف: فاصلهٔ هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است.

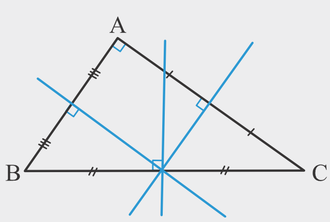
ـ عکس خاصیت عمودمنصف: اگر فاصلهٔ یک نقطه تا دو سر یک پاره‌خط به یک اندازه باشد، آن نقطه روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد.

ـ عمودمنصف‌های هر مثلث همرسند.

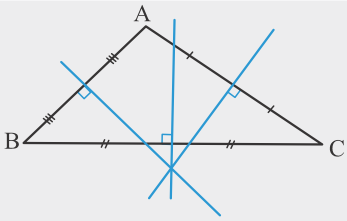
ـ اگر زاویه‌های مثلث تند باشند، محل همرسی عمودمنصف‌ها داخل مثلث است.



ـ اگر مثلث قائم‌الزاویه باشد، محل همرسی عمودمنصف‌ها روی محیط و **وسط وتر** است.

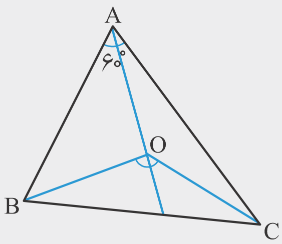


ـ اگر مثلث زاویهٔ باز داشته باشد، محل همرسی عمودمنصف‌ها بیرون مثلث است.



فاصلهٔ نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها تا سه رأس مثلث به یک اندازه است.

مثال در شکل روبه‌رو اگر $\hat{A}=۶۰^\circ$ باشد زاویهٔ $\widehat{BOC}$ را به‌دست آورید. (O محل همرسی عمودمنصف‌های مثلث است.)

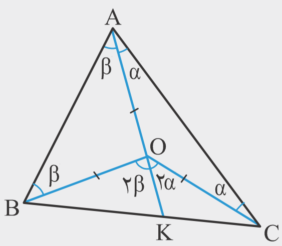


پاسخ O محل همرسی عمودمنصف‌ها است. پس $AO=BO=CO$.

$$AO=CO\Rightarrow \widehat{OAC}=\widehat{OCA}=\alpha\Rightarrow \widehat{KOC}=۲\alpha$$

$$AO=BO\Rightarrow \widehat{OAB}=\widehat{OBA}=\beta\Rightarrow \widehat{KOB}=۲B$$

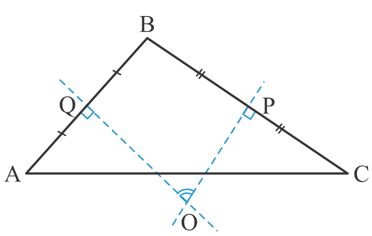
$$\left.\begin{array}{l}\widehat{BOC}=۲\alpha+۲\beta=۲(\alpha+\beta)\\ \hat{A}=\alpha+\beta=۶۰^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \widehat{BOC}=۲\times۶۰^\circ=۱۲۰^\circ$$



۵۱. در مثلث ABC داریم $AB=AC$ و $A=۸۰^\circ$. عمودمنصف‌های دو ساق مثلث قاعدهٔ BC را در M و N قطع می‌کند. کوچک‌ترین زاویهٔ مثلث AMN چند درجه است؟ *(سراسری تجربی ۹۲)*

۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۲۵ ۴) ۳۰

۵۲. در مثلث شکل روبه‌رو خطوط OP و OQ عمودمنصف اضلاع AB و BC هستند. زاویهٔ $\hat{O}$ کدام است؟



۱) $\frac{\hat{A}}{۲}+\frac{\hat{C}}{۲}$ ۲) $۹۰^\circ-\frac{\hat{B}}{۲}$

۳) $۱۸۰^\circ-\frac{\hat{B}}{۲}$ ۴) $\hat{A}+\hat{C}$

★۵۳. مثلث ABC نه متساوی‌الساقین است و نه قائمه‌الزاویه. چند نقطه مانند D وجود دارد که بـه ازای آن‌هـا شـکل $ABCD$ محور تقارن دارد؟ *(مسابقات ریاضی بلغارستان)*

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۱۲

۵۴. در کدام حالت، عمودمنصف ضلع BC از رأس A می‌گذرد؟

۱) $\hat{A}=۳۰^\circ$ و $\hat{B}=۶۰^\circ$ ۲) $\hat{A}=۷۰^\circ$ و $\hat{B}=۴۰^\circ$ ۳) $\hat{A}=۵۰^\circ$ و $\hat{B}=۶۵^\circ$ ۴) $\hat{A}=۱۰۰^\circ$ و $\hat{B}=۲۰^\circ$

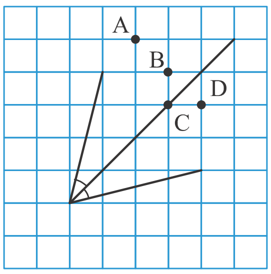
۵۵. در کدام حالت، نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها درون مثلث ABC قرار دارد؟

۱) $\hat{A}=۲۰^\circ$ و $\hat{B}=۱۰^\circ$ ۲) $\hat{A}=۷۰^\circ$ و $\hat{B}=۲۰^\circ$ ۳) $\hat{A}=۱۰۰^\circ$ و $\hat{B}=۴۰^\circ$ ۴) $\hat{A}=۸۰^\circ$ و $\hat{B}=۳۰^\circ$

۵۶. در کدام حالت، نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها روی ضلع BC از مثلث ABC قرار دارد؟

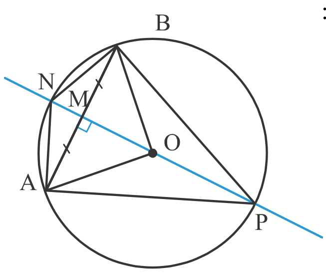
۱) $\hat{B}=۹۰^\circ$ و $\hat{C}=۴۰^\circ$ ۲) $\hat{B}=۶۰^\circ$ و $\hat{C}=۳۰^\circ$ ۳) $\hat{B}=۷۰^\circ$ و $\hat{C}=۷۰^\circ$ ۴) $\hat{B}=۱۰۰^\circ$ و $\hat{C}=۱۵^\circ$

۱. گزینهٔ «۳»



۲. گزینهٔ «۳»

عمودمنصف پاره‌خط AB مجموعهٔ نقاطی است که فاصلهٔ آن‌ها از A و B برابر باشد. مرکز دایره نقطه‌ای است که فاصله‌اش از A و B برابر است. همچنین فاصلهٔ P از A و B برابر است و فاصلهٔ N نیز از A و B برابر است:

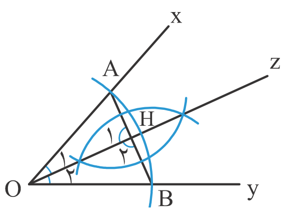


$$PA = PB \Rightarrow \overset{\frown}{PA} = \overset{\frown}{PB}$$

$$NA = NB \Rightarrow \overset{\frown}{NA} = \overset{\frown}{NB}$$

۳. گزینهٔ «۳»

مطابق متن درس می‌دانیم Oz نیمساز xOy است. پس:



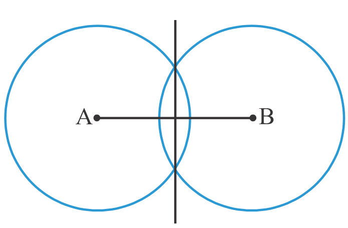
$$\left.\begin{array}{r} \text{نیمساز}\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ OH = OH \\ \text{شعاع دایره}\ = OA = OB \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض‌زض}} \overset{\Delta}{AOH} \cong \overset{\Delta}{BOH} \Rightarrow AH = BH \ \text{و}\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2$$

پس:

$$\left.\begin{array}{r} \hat{H}_1 + \hat{H}_2 = 180^\circ \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ$$

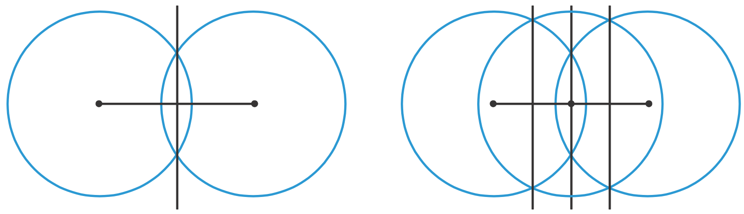
بنابراین Oz عمود بر AB است و آن را نصف می‌کند، در نتیجه Oz عمودمنصف AB است.

۴. گزینهٔ «۱»



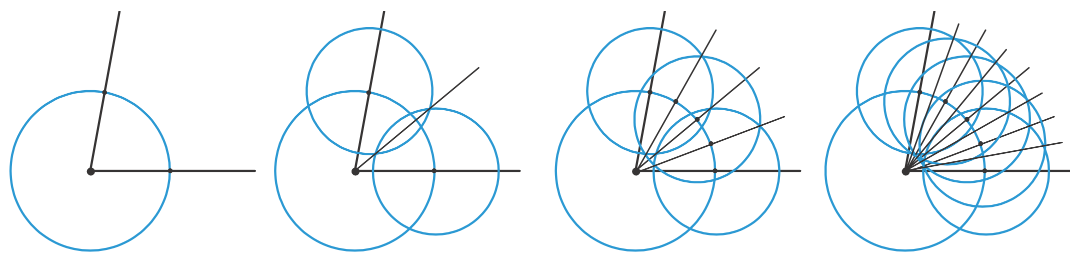
۵. گزینهٔ «۳»

نقاط پررنگ مرکز دایره‌ها هستند.



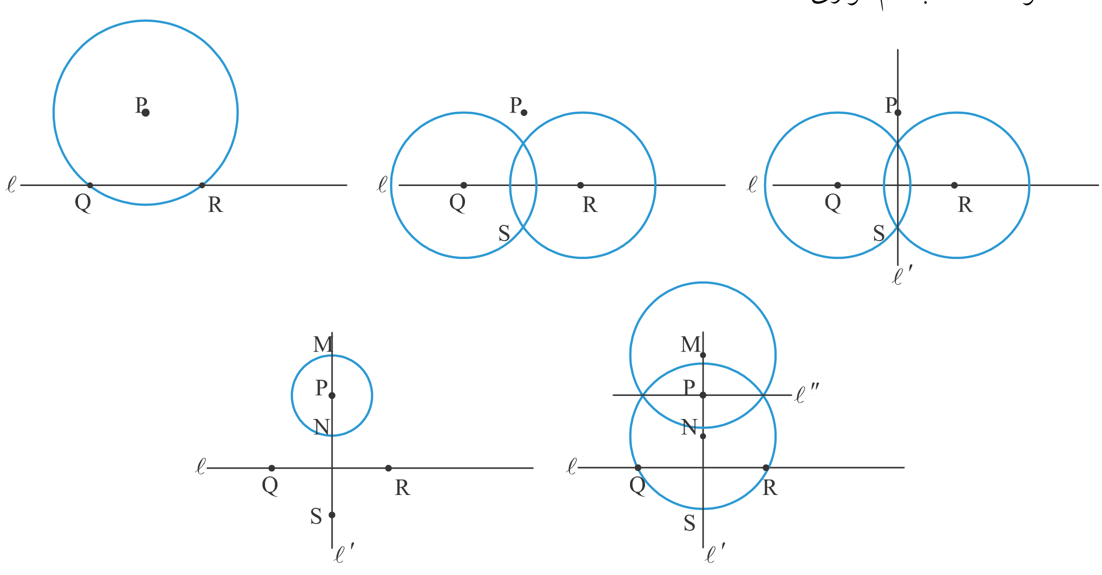
۶. گزینهٔ «۱»

در شکل با زدن کمان‌ها در ۶ نقطهٔ پررنگ، زاویهٔ ۸۰° به ۸ زاویهٔ برابر تقسیم می‌شود.



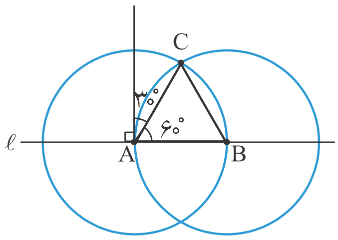
۷. گزینهٔ «۳»

ℓ' عمودمنصف QR است، پس ℓ' بر ℓ عمود است. ℓ'' عمودمنصف MN است، پس ℓ'' بر ℓ' عمود است. چون دو خط ℓ و ℓ'' بر ℓ' عمود هستند، با هم موازی هستند.



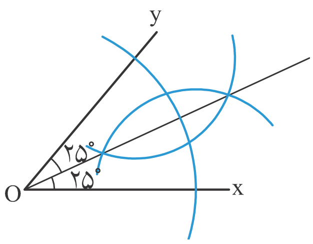
۸. گزینهٔ «۳»

از نقطهٔ دلخواه A روی خط ℓ، عمودی بر خط ℓ رسم می‌کنیم. همچنین مثلث متساوی‌الاضلاع AB را رسم می‌کنیم. زاویه‌های ۹۰°، ۶۰° و ۳۰° داریم.

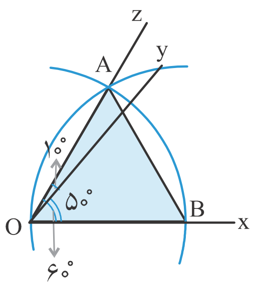


۹. گزینهٔ «۴»

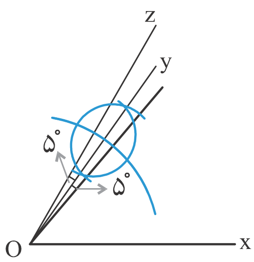
به کمک نیمساز $\widehat{xOy}$، زاویهٔ °۲۵ را داریم.



برای زاویهٔ °۶۰، یک مثلث متساوی‌الاضلاع (AOB) روی نیم‌خط Ox رسم می‌کنیم. مطابق شکل، زاویهٔ $\widehat{zOy}$ برابر °۱۰ می‌شود.



اگر نیمساز زاویهٔ $\widehat{zOy}$ رسم کنیم، زاویهٔ °۵ را داریم.



۱۰. گزینهٔ «۱»

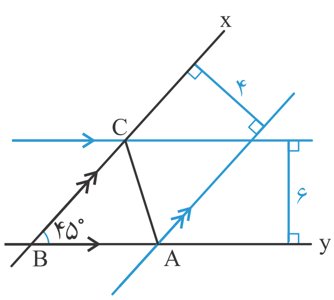
ـ ابتدا زاویهٔ $\hat{B} = ۴۵°$ را رسم می‌کنیم. (نیم‌خط‌های Bx و By به‌دست می‌آیند.)

ـ خطی موازی By با فاصلهٔ ۶ از آن رسم می‌کنیم، این خط، Bx را در نقطهٔ C قطع می‌کند.

ـ خطی موازی Bx با فاصلهٔ ۴ از آن رسم می‌کنیم، این خط، By را در نقطهٔ A قطع می‌کند.

ـ A را به C وصل می‌کنیم.

پس مسئله یک جواب دارد.



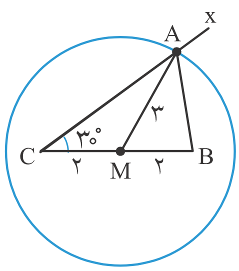
۱۱. گزینهٔ «۱»

a همان BC است.

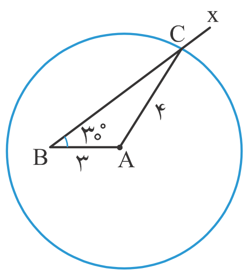
ـ ابتدا ضلع BC = ۴ را رسم می‌کنیم و نقطهٔ وسط آن را M می‌نامیم.

ـ زاویهٔ $\hat{C} = ۳۰°$ را رسم می‌کنیم. (نیم‌خط Cx به وجود می‌آید.)

ـ دایره‌ای به شعاع ۳ و به مرکز M رسم می‌کنیم تا Cx را در نقطهٔ A قطع کند. این دایره Cx را در یک نقطه قطع می‌کند، چون $\frac{BC}{۲} < m_a$ است.



۱۲. گزینهٔ «۱»



ـ ابتدا پاره‌خط $AB=۳$ را رسم می‌کنیم.

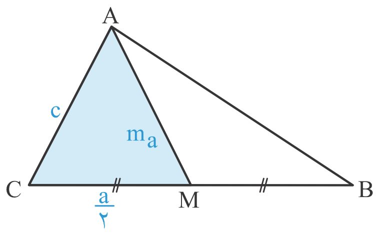
ـ زاویهٔ $\hat{B}=۳۰^\circ$ را رسم می‌کنیم (نیم‌خط Bx به وجود می آید).

ـ دایره‌ای به شعاع ۴ و به مرکز A رسم می‌کنیم، تا نیم‌خط Bx را در نقطهٔ C قطع کند.

چون $AB<AC$ است، دایره، نیم‌خط Bx را در یک نقطه قطع می‌کند.

پس برای C یک نقطه به‌دست می‌آید و مسئله یک جواب دارد.

۱۳. گزینهٔ «۳»



به مثلث ACM توجه کنید، باید طول هر ضلع از مجموع طول دو ضلع دیگر کم‌تر باشد.

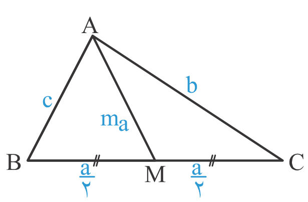
$$\text{گزینهٔ ۱}:\left.\begin{array}{l}a=۸\\ m_a=۷\\ b=۳\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{a}{۲}+b=m_a\Rightarrow \text{قابل رسم نیست}$$

$$\text{گزینهٔ ۲}:\left.\begin{array}{l}a=۶\\ m_a=۳\\ b=۷\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{a}{۲}+m_a<b\Rightarrow \text{قابل رسم نیست}$$

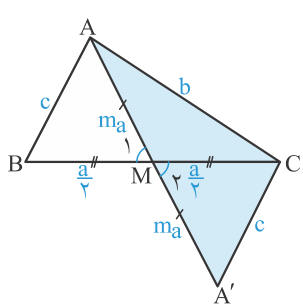
$$\text{گزینهٔ ۳}:\left.\begin{array}{l}a=۸\\ m_a=۴\\ b=۵\end{array}\right\}\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\frac{a}{۲}+m_a>b\\ \frac{a}{۲}+b>m_a\\ m_a+b>\frac{a}{۲}\end{array}\right.\Rightarrow \text{قابل رسم است}$$

$$\text{گزینهٔ ۴}:\left.\begin{array}{l}a=۱۰\\ m_a=۲\\ b=۲\end{array}\right\}\Rightarrow m_a+b<\frac{a}{۲}\Rightarrow \text{قابل رسم نیست}$$

۱۴. گزینهٔ «۲»



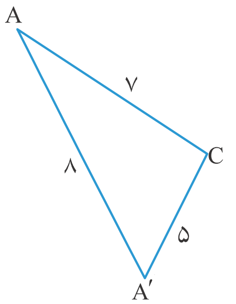
مثلث ABC را با معلومات a، b، c و m_a فرض کنید. اگر میانهٔ m_a را به اندازهٔ خودش امتداد دهیم:



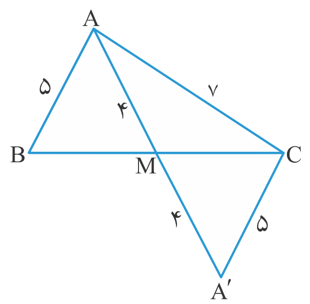
$$\left.\begin{array}{r}AM=A'M=m_a\\ BM=CM=\frac{a}{۲}\\ \widehat{M}_۱=\widehat{M}_۲\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{ض‌ز‌ض}}\overset{\Delta}{AMB}\cong\overset{\Delta}{A'MC}\Rightarrow A'C=c$$

پس طول اضلاع $A'AC$ می‌شود $۲m_a$، b و c و اندازهٔ میانهٔ CM می‌شود $\frac{a}{۲}$.

مثلث $A'AC$ را با طول اضلاع ۷، ۵ و ۸ رسم می‌کنیم $(۲m_a = ۸)$.

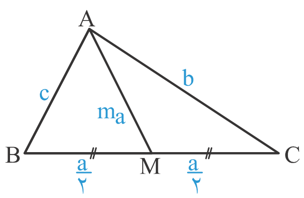


سپس میانهٔ CM را رسم می‌کنیم و به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم. در مثلث ABC، داده‌های $c=۵$، $b=۷$ و $m_a=۴$ برقرار است و مسئله یک جواب دارد.

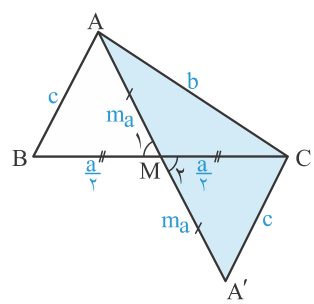


۱۵. گزینهٔ «۳»

فرض می‌کنیم مثلث ABC رسم شده باشد. چنانچه میانهٔ m_a را بـه انـدازهٔ خـودش امتداد بدهیم:



$$\left.\begin{aligned} MA = MA' = m_a \\ MB = MC = \frac{a}{۲} \\ \widehat{M}_۱ = \widehat{M}_۲ \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{ضزض}} \overset{\Delta}{AMB} \cong \overset{\Delta}{A'MC} \Rightarrow A'C = c$$

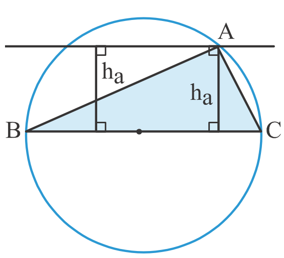


اضلاع مثلث ACA' می‌شود b، c و $۲m_a$، میانه‌اش CM است که طولش همـان $\frac{a}{۲}$ است.

۱۶. گزینهٔ «۳»

طول میانهٔ وارد بر وتر (m_a) نصف طول وتر (a) است. در مثلث ABC، فرض می‌کنیم BC وتر باشد. گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ ۱: قابل ترسیم است. ابتدا ضلع a را رسم می‌کنیم. از نقطهٔ وسط a دایره‌ای بـه شعاع m_a (یا به قطر a) رسم می‌کنیم. خطی موازی a و به فاصلـهٔ h_a از آن رسـم می‌کنیم. این خط دایره را در دو یا یک نقطه قطع می‌کند.

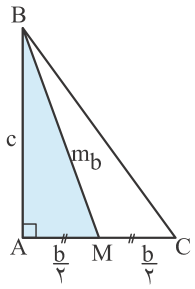


گزینهٔ ۲: قابل ترسیم است. ارتفاع وارد بر ضلع قائم همان طول یکی از اضلاع قائم است. فرض می‌کنیم آن ضلع b باشد:

$$b^۲ + c^۲ = a^۲ \Rightarrow c^۲ = a^۲ - b^۲ \Rightarrow c = \sqrt{a^۲ - b^۲}$$

پس طول هر سه ضلع را داریم و مثلث قابل ترسیم است.

گزینهٔ ۳: قابل ترسیم نیست. طول میانهٔ وارد بر وتر نصف وتر است، پس در این گزینه دادهٔ جدیدی وجود ندارد.

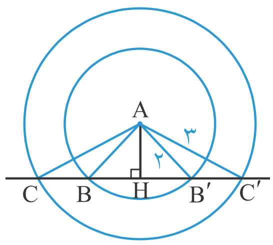


گزینهٔ ۴: قابل ترسیم است، در این گزینه طول m_a و a و همچنین زاویـهٔ $\hat{A}=۹۰^\circ$ را داریم. مثلث‌های ABC و ABM قائم‌الزاویه هستند:

$$\left.\begin{array}{l} ABC: b^۲+c^۲=a^۲ \\ ABM: (\frac{b}{۲})^۲+c^۲=m_b{}^۲ \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b^۲+c^۲=\text{معلوم} \\ \frac{b^۲}{۴}+c^۲=\text{معلوم} \end{array}\right\} \Rightarrow b=\text{معلوم} \text{ و } c=\text{معلوم}$$

پس مثلث را با داشتن طول سه ضلع رسم می‌کنیم.

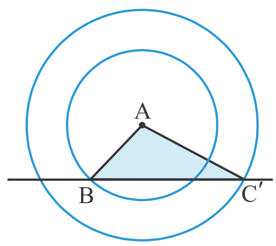
۱۷. گزینهٔ «۲»

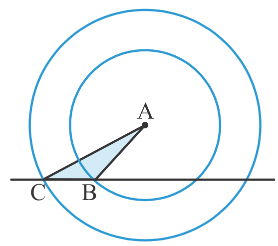


ـ ابتدا ارتفاع AH (یا همان h_a) را رسم می‌کنیم.

ـ از نقطهٔ H خطی عمود بر AH رسم می‌کنیم.

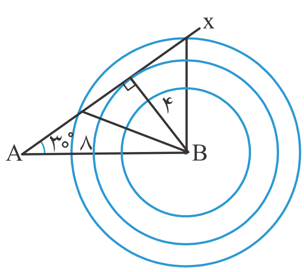
ـ دو دایره به مرکز A و شعاع‌های $b=۲$ و $c=۳$ رسم می‌کنیم. این دو دایـره خـط را در ۴ نقطه قطع می‌کند. با توجه به $\overset{\Delta}{ABC'}\cong\overset{\Delta}{AB'C}$ و $\overset{\Delta}{ABC}\cong\overset{\Delta}{AB'C'}$، دو مثلث متمایز به وجود می‌آید.





۱۸. گزینهٔ «۱»

در مثلث قائم‌الزاویه ضلع روبه‌روی زاویهٔ ۳۰ درجه نصف وتر است.

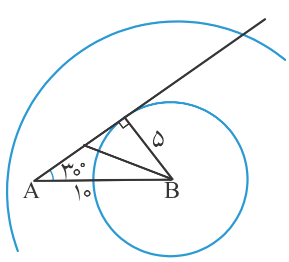


ـ ابتدا ضلع $AB=۸$ را رسم می‌کنیم.

ـ زاویهٔ $\hat{A}=۳۰^\circ$ را رسم می‌کنیم. (نیم‌خط Ax)

ـ دایره‌ای به مرکز B و به شعاع BC فرض می‌کنیم. اگر $BC=۴$ باشد (طبـق نکتـهٔ بالا) دایره بر Bx مماس می‌شود. اگر $BC<۴$ باشد، دایره با Bx تلاقـی نمـی‌کنـد. اگر $BC>۴$ باشد، دایره با Bx دو (یا یـک) نقطهٔ تلاقـی خواهـد داشـت. پـس در حالت $BC<۴$ نمی‌توان مثلث را رسم کرد.

۱۹. گزینهٔ «۳»

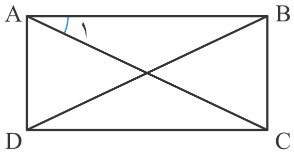


ـ ابتدا ضلع $AB=۱۰$ را رسم می‌کنیم.

ـ زاویهٔ $\hat{A}=۳۰^\circ$ را رسم می‌کنیم. (نیم‌خط Ax)

ـ دایره‌ای به مرکز B و به شعاع BC فرض می‌کنیم. اگر $BC=۵$ باشد (با توجه بـه این نکته که ضلع روبه‌روی ۳۰ درجه نصف وتر است) دایره بر Bx مماس مـی‌شـود. اگر $۵<BC<۱۰$ باشد، دایره با Bx دو نقطهٔ تلاقی خواهـد داشـت. اگـر $BC>۱۰$ باشد، دایره با Bx یک نقطهٔ تلاقی خواهد داشت (نقطهٔ دیگر تلاقی در امتـداد طـرف دیگر Bx می‌شود).

۲۰. گزینهٔ «۴»

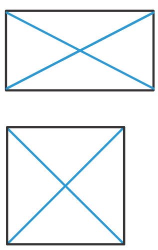


بررسی گزینهٔ ۱: ضلع AB را رسم می‌کنیم. از A و B خطی عمود بـر AB رسـم می‌کنیم و با رسم دایره‌هایی به مرکز A و B به شعاع‌های AD و BC، نقاط C و D به‌دست می‌آیند.

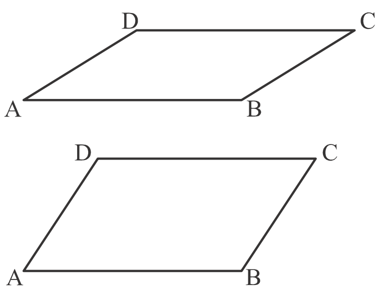
بررسی گزینهٔ ۲: پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم، از B خطی عمود بر AB رسم می‌کنیم، دایره‌ای به مرکز A و به شعاع AC رسـم می‌کنیم تا خط عمود بر BC را در نقطهٔ C قطع کند. از C خطی موازی AB و از A خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا یکـدیگر را در D قطع کنند.

بررسی گزینهٔ ۳: پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم، از A به اندازهٔ زاویهٔ A_1 و از B به اندازهٔ $90°$ زاویه‌ها را رسم می‌کنیم تا دو نـیم‌خط یکدیگر را در C قطع کنند. از C خطی موازی AB و از A خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در D قطع کنند.

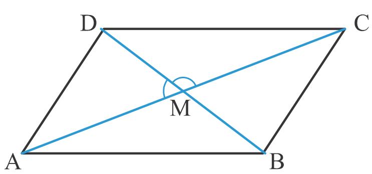
بررسی گزینهٔ ۴: داشتن طول دو قطر مستطیل (که همواره برابر هسـتند) کـافی نیسـت. مثلاً دو مستطیل روبه‌رو قطرهای برابر دارند اما هم‌نهشت نیست.



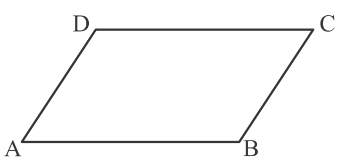
۲۱. گزینهٔ «۱»



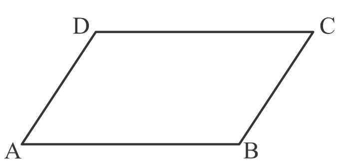
بررسی گزینهٔ ۱: دو متـوازی‌اضـلاع روبـه‌رو اضـلاع برابـری دارنـد ولـی بـا یکـدیگر هم‌نهشت نیست.



بررسی گزینهٔ ۲: می‌دانیم در یک متوازی‌الاضلاع، قطرها همـدیگر را نصـف مـی‌کننـد. بنابراین مثلث‌های AMD، DMC، CMB و BMA را با داشتن طول دو ضـلع و زاویهٔ بین رسم می‌کنیم.



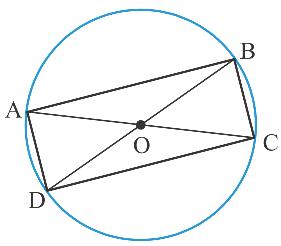
بررسی گزینهٔ ۳: وقتی طول دو ضلع مجاور را داریم، یعنی طول هر چهار ضلع را داریـم. یکی از زاویه‌ها را هم داریم، می‌توانیم فرض کـنیم زاویـهٔ A را داشـته باشـیم، بـه ایـن ترتیب مثلث DAB را با داشتن دو ضلع و زاویهٔ بین رسم می‌کنیم، پـس طـول BD را داریم. از مثلث BCD، طول هر سه ضلع را داریم و آن را رسم می‌کنیم.



بررسی گزینهٔ ۴: وقتی طول دو ضلع مجاور را داریم، یعنـی طـول هـر چهـار ضـلع را داریم. یکی از قطرها را هم داریم، می‌توانیم فرض کنیم BD را داشته باشیم، پـس در دو مثلث ABD و BCD طول سه ضلع را داریم و آن‌ها را با داشتن طول سه ضـلع رسم می‌کنیم.

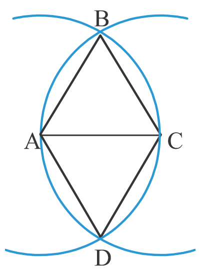
۲۲. گزینهٔ «۲»

AC و BD قطر دایره هستند، پس کمان‌های $\widehat{ABC}$، $\widehat{ADC}$، $\widehat{BAD}$ و $\widehat{BCD}$ نیم‌دایره هستند:



$$\left.\begin{array}{l}\widehat{ABC}=\dfrac{\widehat{ADC}}{۲}=\dfrac{۱۸۰^\circ}{۲}=۹۰^\circ\\ \widehat{BCD}=\dfrac{\widehat{BAD}}{۲}=\dfrac{۱۸۰^\circ}{۲}=۹۰^\circ\\ \widehat{ADC}=\dfrac{\widehat{ABC}}{۲}=\dfrac{۱۸۰^\circ}{۲}=۹۰^\circ\\ \widehat{BAD}=\dfrac{\widehat{BCD}}{۲}=\dfrac{۱۸۰^\circ}{۲}=۹۰^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \text{ABCD مستطیل است}$$

۲۳. گزینهٔ «۲»



مثلث‌های ABC و ACD متساوی‌الاضلاع هستند، پس $AB=BC=CD=DA$، یعنی ABCD لوزی است. از طرفی:

$$\widehat{ABC}=\widehat{ADC}=۶۰^\circ$$

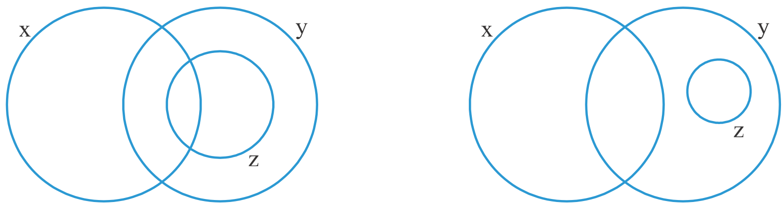
$$\widehat{BAD}=\widehat{BCD}=۶۰^\circ+۶۰^\circ=۱۲۰^\circ$$

۲۴. گزینهٔ «۳»

استدلال استقرای بر مبنای مجموعهٔ محدودی از مشاهدات است.

۲۵. گزینهٔ «۱»

نمودار ون آن‌ها یکی از دو حالت زیر است:



در شکل راست، نادرستی گزینهٔ ۲ دیده می‌شود، در شکل چپ نادرستی گزینه‌های ۳ و ۴ دیده می‌شود. در هر دو شکل درستی گزینهٔ ۱ دیده می‌شود.

۲۶. گزینهٔ «۳»

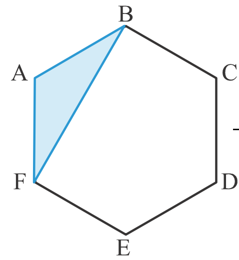
ممکن است همهٔ عضوهای انجمن برادری غیردانش‌آموز باشند. (رد گزینهٔ ۱)

ممکن است همهٔ عضوهای انجمن برادری از دانش‌آموزان درستکار انتخاب شوند. (رد گزینه‌های ۲ و ۴)

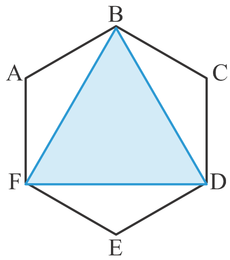
طبق جملهٔ «الف»، دانش‌آموزان غیردرستکار وجود دارند و طبق جملهٔ «ب»، هیچ دانش‌آموز غیردرستکاری عضو انجمن برادری نیست، پس بعضی دانش‌آموزان عضو این انجمن نیستند.

۲۷. گزینهٔ «۲»

در دو حالت، مثلث متساوی‌الساقین می‌شود:

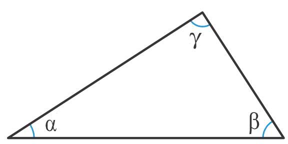


$\rightarrow$ FAB , ABC , BCD , CDE , DEF , EFA



$\rightarrow$ BFD , ACE

۲۸. گزینهٔ «۴»



$$\left.\begin{array}{l}\beta-\alpha=\gamma \Rightarrow ۲\beta=\alpha+\gamma \\ \alpha+\beta+\gamma=۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha+\gamma=۱۸۰^\circ-\beta\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$۲\beta=۱۸۰^\circ-\beta \Rightarrow ۳\beta=۱۸۰^\circ \Rightarrow \beta=۶۰^\circ$$

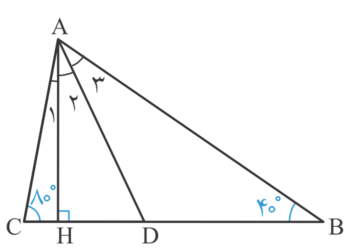
۲۹. گزینهٔ «۱»

استدالی که براساس چند مثال باشد، استقرایی است.

۳۰. گزینهٔ «۳»

استدلالی که براساس نتیجه‌گیری منطقی بر پایهٔ حقایقی که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم، استنتاجی است.

۳۱. گزینهٔ «۲»



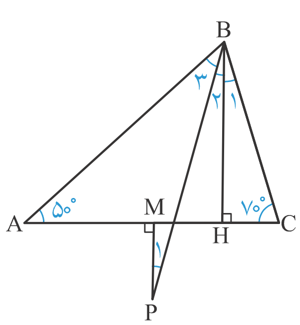
$$\overset{\Delta}{ABC}: \left.\begin{array}{r}\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ \\ \hat{B}=۴۰^\circ \\ \hat{C}=۸۰^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{A}=۶۰^\circ$$

$$\overset{\Delta}{AHC}: \left.\begin{array}{r}\hat{A}_۱+\hat{C}+\hat{H}=۱۸۰^\circ \\ \hat{C}=۸۰^\circ \\ \hat{H}=۹۰^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{A}_۱=۱۰^\circ$$

نیمساز است $\left.\begin{array}{r}AD: \hat{A}_۱+\hat{A}_۲=\frac{\hat{A}}{۲}\Rightarrow \hat{A}_۱+\hat{A}_۲=۳۰^\circ \\ \hat{A}_۱=۱۰^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{A}_۲=۲۰^\circ$

۳۲. گزینهٔ «۱»

فرض می‌کنیم نیمساز و عمودمنصف در نقطهٔ P یکدیگر را قطع کنند.



$$\overset{\Delta}{ABD}: \left.\begin{array}{r}\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ \\ \hat{A}=۵۰^\circ \\ \hat{B}=۶۰^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{C}=۷۰^\circ$$

$$\overset{\Delta}{HBC}: \left.\begin{array}{r}\hat{B}_۱+\hat{H}+\hat{C}=۱۸۰^\circ \\ \hat{C}=۷۰^\circ \\ \hat{H}=۹۰^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{B}_۱=۲۰^\circ$$

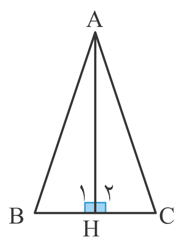
$$\left.\begin{array}{r}\text{نیمساز است } BP: \hat{B}_۱+\hat{B}_۲=\frac{\hat{B}}{۲}=\frac{۶۰^\circ}{۲}\Rightarrow \hat{B}_۱+\hat{B}_۲=۳۰^\circ \\ \hat{B}_۱=۱۰^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{B}_۲=۱۰^\circ$$

MP و BH بر AC عمود هستند، پس با هم موازی‌اند:

$$MP \parallel BH \Rightarrow \hat{P}_۱=\hat{B}_۲\Rightarrow \hat{P}_۱=۱۰^\circ$$

۳۳. گزینهٔ «۳»

مورد «الف» درست است، ارتفاع AH را رسم می‌کنیم:



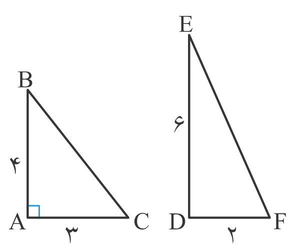
$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{l}\hat{B}=\hat{C}\\ \hat{H}_۱=\hat{H}_۲=۹۰^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \widehat{BAH}=\widehat{CAH}\\ AH=AH\\ \hat{H}_۱=\hat{H}_۲=۹۰^\circ\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{زضز}} \overset{\Delta}{ABH}\cong\overset{\Delta}{ACH}\Rightarrow AB=AC$$

$$\text{اگر } AB=AC: \left.\begin{array}{l}AB=AC\\ \hat{H}_۱=\hat{H}_۲=۹۰^\circ\\ AH=AH\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{وض}} \overset{\Delta}{ABH}\cong\overset{\Delta}{ACH}\Rightarrow \hat{B}=\hat{C}$$

مورد «ب» نیز درست است، یکی از آن‌ها «قضیهٔ فیثاغورس» نام دارد و دیگری «عکس قضیهٔ فیثاغورس» نام دارد.

۳۴. گزینهٔ «۲»

مورد «الف» درست نیست، دو مثلث هم‌نهشت مساحت برابری دارند. اما دو مثلث که مساحتشان برابر است لزوماً هم‌نهشت نیستند. مثلاً در شکل روبه‌رو دو مثلث ABC و DEF مساحت برابری دارند، اما هم‌نهشت نیستند.



مورد «ب» درست است. اگر هر سه ضلع مثلثی برابر باشند، متساوی‌الاضلاع می‌شود و زاویه‌هایش ۶۰° می‌شوند. اگر هرسه زاویهٔ مثلثی ۶۰° باشند متساوی‌الاضلاع می‌شود و هر سه ضلعش برابر می‌شوند.

۳۵. گزینهٔ «۲»

نقیض گزارهٔ «دو خط موازی یکدیگر را قطع نمی‌کنند» می‌شود گزارهٔ «دو خط موازی همدیگر را قطع می‌کنند».

۳۶. گزینهٔ «۱»

یک عدد حقیقی اگر گنگ نباشد گویا است.

۳۷. گزینهٔ «۳»

نقیض گزارهٔ «این هفته، من هر روز ورزش کردم» می‌شود گزارهٔ «حداقل یک روز در این هفته ورزش نکردم».

۳۸. گزینهٔ «۲»

اگر گزارهٔ «همهٔ مغازه‌ها هر روز باز هستند» نادرست باشد، آنگاه نقیض آن درست است، یعنی گزارهٔ «حداقل یک روز هست که در آن حداقل یک مغازه بسته است».

۳۹. گزینهٔ «۲»

اگر بخواهیم قضیهٔ A را با فرض B و حکم C اثبات کنیم، فرض می‌کنیم نقیض C درست باشد، سپس با استدلال منطقی به جایی می‌رسیم که با B در تناقض باشد، پس نقیض C درست نیست، در نتیجه C درست است.

۴۰. گزینهٔ «۳»

گزاره به این شکل است:

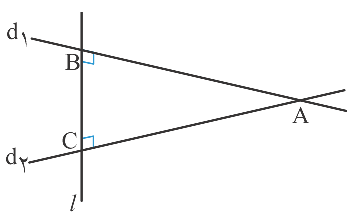
فرض	$a , b \in \mathbb{N}$ $\quad$ $a \times b =$ زوج
حکم	حداقل یکی از دو a و b زوج است.

در برهان خلف، نقیض حکم را به عنوان فرض می‌گیریم، نقیض حکم بالا می‌شود: «هیچ‌کدام از دو عدد a و b زوج نیستند» یا «هر دو عدد a و b فرد هستند». حاصل‌ضرب دو عدد فرد، می‌شود فرد. پس $a \times b$ فرد می‌شود و این با فرض ما که $a \times b$ زوج بود در تناقض است.

۴۱. گزینهٔ «۳»

ابتدا فرض و حکم قضیه را می‌نویسیم: ($a \perp b$ یعنی a و b بر هم عمود هستند.)

فرض	$d_1 \perp l$ $\quad$ $d_2 \perp l$
حکم	$d_1 \parallel d_2$



برای برهان خلف، نقیض حکم را فرض می‌کنیم، یعنی فرض می‌کنیم $d_1 \nparallel d_2$، یعنی d_1 و d_2 همدیگر را در نقطهٔ A قطع کنند. به مثلث ABC توجه کنید، این مثلث دو زاویهٔ قائمه دارد که تناقض در همین جا است. در نتیجه فرض اولیه‌مان (یعنی $d_1 \nparallel d_2$) غلط است و $d_1 \parallel d_2$ درست است.

۴۲. گزینهٔ «۴»

گزینهٔ ۱: اثبات به روش برهان خلف است. ابتدا فرض می‌کنیم $\sqrt{5}$ گویا باشد، پس از آن با عملیات جبری به تناقض می‌رسیم.

گزینهٔ ۲: اثبات به روش برهان خلف است. ابتدا فرض می‌کنیم بیش از یک خط موازی خط d می‌توان از نقطهٔ A رسم کرد، پس دو خط d' و d'' از نقطهٔ A می‌گذرند و موازی d هستند، پس d' و d'' موازی هستند ولی چون در یک نقطه تلاقی می‌کنند (نقطهٔ A) به تناقض می‌رسیم.

گزینهٔ ۳: اثبات به روش برهان خلف است. ابتدا فرض می‌کنیم بیش از یک خط از نقطهٔ A می‌توان بر خط d عمود کرد، پس دو عمود AH و AH' را بر d رسم می‌کنیم. در مثلث AHH' دو زاویهٔ 90° خواهیم داشت که تناقض است.

گزینهٔ ۴: اثبات به روش استنتاجی است. عدد A فرد است، پس می‌توان آن را به‌صورت $2k-1$ نوشت $(k \in \mathbb{N})$:

$$A = 2k-1 \Rightarrow A^2 = (2k-1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 4\underbrace{k(k-1)}_{\text{زوج}} + 1 = 4 \times 2k' + 1 = 8k' + 1$$

۴۳. گزینهٔ «۴»

$2^3 > 2^2$ یک مثال نقض است.

۴۴. گزینهٔ «۱»

باید ببینیم حاصل‌ضرب کدام دو عدد گویا می‌شود:

گزینهٔ ۱ : $\sqrt{216}\times\sqrt{6}=\sqrt{6^3}\times\sqrt{6}=\sqrt{6^3\times 6}=\sqrt{6^4}=6^2 \to$ گویا

گزینهٔ ۲ : $\sqrt{12}\times\sqrt{6}=\sqrt{12\times 6}=\sqrt{72}=6\sqrt{2} \to$ گنگ

گزینهٔ ۳ : $\sqrt{18}\times\sqrt{216}=\sqrt{3\times 6}\times\sqrt{6^3}=\sqrt{3\times 6\times 6^3}=\sqrt{3\times 6^4}=6^2\sqrt{3} \to$ گنگ

گزینهٔ ۴ : $\sqrt{18}\times\sqrt{12}=\sqrt{18\times 12}=\sqrt{216}=\sqrt{6^3}=6\sqrt{6} \to$ گنگ

۴۵. گزینهٔ «۳»

اگر $a\le 0 \Rightarrow a\le a^2$

اگر $0<a<1 \Rightarrow a^2<a$

اگر $a>1 \Rightarrow a<a^2$

پس عددی که انتخاب می‌کنیم باید بین ۰ و ۱ باشد. $-\frac{1}{2}$ و $1-\sqrt{2}$ منفی هستند و توان دوم آن‌ها از خودشان بزرگ‌تر است. $1+\sqrt{2}$ از ۱ بزرگ‌تر است و توان دومش از خودش بزرگ‌تر است. برای $\sqrt{2}-1$ داریم:

$$\sqrt{2}\simeq 1/4 \Rightarrow \sqrt{2}-1\simeq 0/4 \Rightarrow 0<\sqrt{2}-1<1 \Rightarrow (\sqrt{2}-1)^2<\sqrt{2}-1$$

۴۶. گزینهٔ «۳»

$$n=6 \Rightarrow 2^6+1=64+1=65=5\times 13$$

پس 2^6+1 اول نیست.

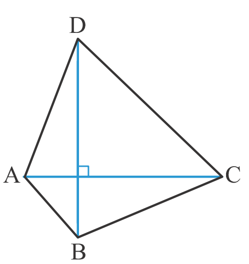
۴۷. گزینهٔ «۴»

$$\frac{225}{3}=75 \quad \text{و} \quad \frac{225}{5}=45$$

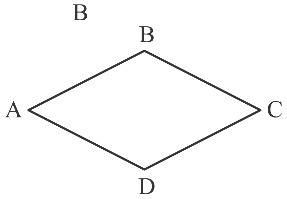
عدد ۲۲۵ بر ۵ و ۳ قابل تقسیم است ولی رقم سمت راستش ۰ نیست.

۴۸. گزینهٔ «۴»

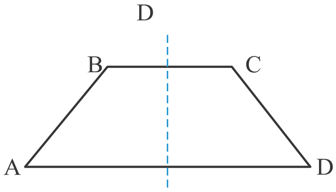
مثال نقض گزینهٔ ۱: قطرهای چهارضلعی روبه‌رو بر هم عمود هستند، اما لوزی نیست.



مثال نقض گزینهٔ ۲: چهارضلعی روبه‌رو لوزی است، اما مربع نیست.



مثال نقض گزینهٔ ۳: یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین دارای محور تقارن است.



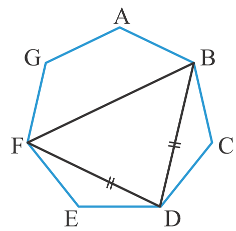
گزینهٔ ۴ همواره درست است.

۴۹. گزینهٔ «۴»

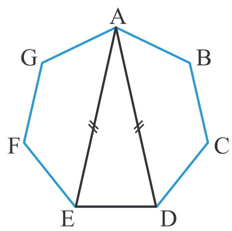
گزینه‌های «۱» و «۳» متساوی‌الساقین نیستند، پس نمی‌توانند مثال نقض باشند. گزینهٔ «۲» متساوی‌الساقین است اما زاویه‌ها تند هستند. گزینهٔ «۴» مثلث متساوی‌الساقینی است که یک زاویهٔ باز دارد.

۵۰. گزینهٔ «۴»

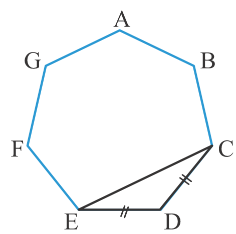
گزینهٔ ۱: متساوی‌الساقین است.



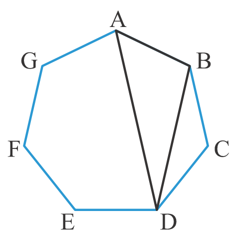
گزینهٔ ۲: متساوی‌الساقین است.



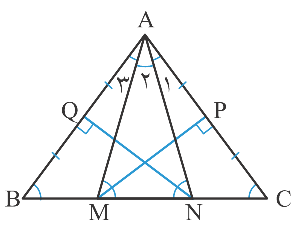
گزینهٔ ۳: متساوی‌الساقین است.



گزینهٔ ۴: متساوی‌الساقین نیست.



۵۱. گزینهٔ «۲»



$$\left.\begin{array}{r}\hat{A}=۸۰^\circ \Rightarrow \hat{B}+\hat{C}=۱۰۰^\circ\\ \hat{B}=\hat{C}\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{B}=\hat{C}=۵۰^\circ$$

PM عمودمنصف AC است، پس $AM=CM$ است و مثلث AMC متساوی‌الساقین است:

$$AM=CM\Rightarrow \hat{A}_۱+\hat{A}_۲=C\Rightarrow \hat{A}_۱+\hat{A}_۲+\hat{C}=۵۰^\circ+۵۰^\circ=۱۰۰^\circ\Rightarrow$$
$$\widehat{AMN}=۱۸۰^\circ-۱۰۰^\circ=۸۰^\circ$$

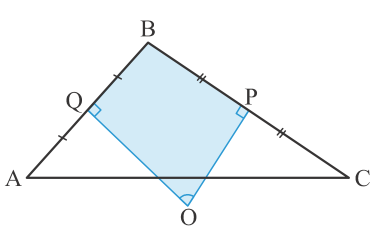
QN عمودمنصف AB است، پس $AN=BN$ است و مثلث ANB متساوی‌الساقین است:

$$AN=BN\Rightarrow \hat{A}_۲+\hat{A}_۳=B\Rightarrow \hat{A}_۲+\hat{A}_۳+\hat{B}=۵۰^\circ+۵۰^\circ=۱۰۰^\circ\Rightarrow \widehat{ANM}=۱۸۰^\circ-۱۰۰^\circ=۸۰^\circ$$

در مثلث AMN داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{AMN}=۸۰^\circ\\ \widehat{ANM}=۸۰^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \widehat{MAN}=۱۸۰^\circ-۸۰^\circ-۸۰^\circ=۲۰^\circ$$

۵۲. گزینهٔ «۴»



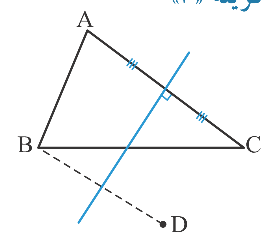
در مثلث ABC داریم:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ\Rightarrow \hat{A}+\hat{C}=۱۸۰^\circ-\hat{B}$$

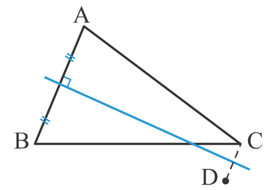
در چهارضلعی BPOQ داریم:

$$\hat{B}+\hat{P}+\hat{O}+\hat{Q}=۳۶۰^\circ\Rightarrow \hat{B}+۹۰^\circ+\hat{O}+۹۰^\circ=۳۶۰^\circ\Rightarrow$$
$$\hat{O}=۱۸۰^\circ-\hat{B}=\hat{A}+\hat{C}$$

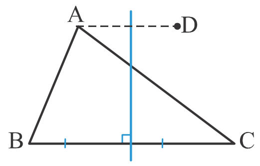
۵۳. گزینهٔ «۳»



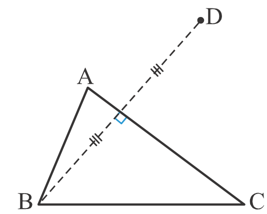
قرینهٔ D نسبت به عمودمنصف AC



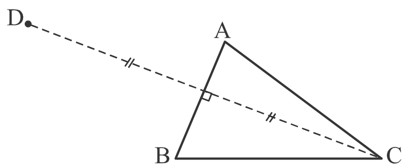
قرینهٔ C نسبت به عمودمنصف AB



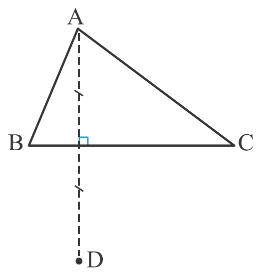
قرینهٔ A نسبت به عمودمنصف BC



قرینهٔ B نسبت به ضلع AC



قرینهٔ C نسبت به ضلع AB



قرینهٔ A نسبت به ضلع BC

۵۴. گزینهٔ «۳»

در مثلث متساوی‌الساقین با شرط $AB = AC$، عمودمنصف ضلع BC از رأس A می‌گذرد. پس باید $\hat{B} = \hat{C}$ باشد:

گزینهٔ ۱ : $\left.\begin{matrix}\hat{A} = ۳۰^\circ \\ \hat{B} = ۶۰^\circ\end{matrix}\right\} \Rightarrow \hat{C} = ۹۰^\circ \Rightarrow \hat{B} \neq \hat{C}$

گزینهٔ ۲ : $\left.\begin{matrix}\hat{A} = ۷۰^\circ \\ \hat{B} = ۴۰^\circ\end{matrix}\right\} \Rightarrow \hat{C} = ۷۰^\circ \Rightarrow \hat{B} \neq \hat{C}$

گزینهٔ ۳ : $\left.\begin{matrix}\hat{A} = ۵۰^\circ \\ \hat{B} = ۶۵^\circ\end{matrix}\right\} \Rightarrow \hat{C} = ۶۵^\circ \Rightarrow \hat{B} = \hat{C}$

گزینهٔ ۴ : $\left.\begin{matrix}\hat{A} = ۱۰۰^\circ \\ \hat{B} = ۲۰^\circ\end{matrix}\right\} \Rightarrow \hat{C} = ۶۰^\circ \Rightarrow \hat{B} \neq \hat{C}$

۵۵. گزینهٔ «۴»

اگر زاویه‌های مثلث تند باشند، نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها داخل مثلث می‌افتد.

گزینهٔ ۱ : $\left.\begin{matrix}\hat{A} = ۲۰^\circ \\ \hat{B} = ۱۰^\circ\end{matrix}\right\} \Rightarrow \hat{C} = ۱۵۰^\circ \rightarrow$ باز است

گزینهٔ ۲ : $\left.\begin{matrix}\hat{A} = ۷۰^\circ \\ \hat{B} = ۲۰^\circ\end{matrix}\right\} \Rightarrow \hat{C} = ۹۰^\circ \rightarrow$ قائمه است

گزینهٔ ۳ : $\begin{matrix}\hat{A} = ۱۰۰^\circ \rightarrow \text{باز است} \\ \hat{B} = ۴۰^\circ\end{matrix}$

گزینهٔ ۴ : $\left.\begin{matrix}\hat{A} = ۸۰^\circ \\ \hat{B} = ۳۰^\circ\end{matrix}\right\} \Rightarrow \hat{C} = ۷۰^\circ \rightarrow$ هر سه زاویه بسته هستند

۵۶. گزینهٔ «۲»

اگر مثلثی قائم‌الزاویه باشد، نقطهٔ همرسی ارتفاع‌ها روی وتر می‌افتد.

گزینهٔ ۱ : $\left.\begin{array}{l}\hat{B}=90^\circ\\ \hat{C}=40^\circ\end{array}\right.$ $\to$ AC وتر است

گزینهٔ ۲ : $\left.\begin{array}{l}\hat{B}=60^\circ\\ \hat{C}=30^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{A}=90^\circ \to$ BC وتر است

گزینهٔ ۳ : $\left.\begin{array}{l}\hat{B}=70^\circ\\ \hat{C}=70^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{A}=40^\circ \to$ قائم‌الزاویه نیست

گزینهٔ ۴ : $\left.\begin{array}{l}\hat{B}=100^\circ\\ \hat{C}=15^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{A}=65^\circ \to$ قائم‌الزاویه نیست

۵۷. گزینهٔ «۱»

اگر مثلثی زاویهٔ باز داشته باشد، نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها بیرون مثلث می‌افتد.

گزینهٔ ۱ : $\left.\begin{array}{l}\hat{A}=40^\circ\\ \hat{B}=20^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{C}=120^\circ \to$ باز است

گزینهٔ ۲ : $\left.\begin{array}{l}\hat{A}=30^\circ\\ \hat{B}=80^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{C}=70^\circ \to$ هرسه زاویه بسته هستند

گزینهٔ ۳ : $\left.\begin{array}{l}\hat{A}=80^\circ\\ \hat{B}=60^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{C}=40^\circ \to$ هرسه زاویه بسته هستند

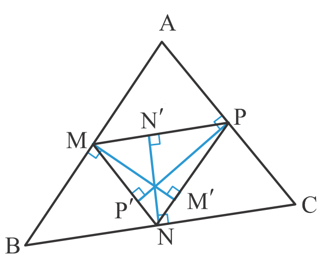
گزینهٔ ۴ : $\left.\begin{array}{l}\hat{A}=50^\circ\\ \hat{B}=70^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{C}=60^\circ \to$ هرسه زاویه بسته هستند

۵۸. گزینهٔ «۳»

MM' عمودمنصف AB و ارتفاع وارد بر ضلع NP است.

NN' عمودمنصف BC و ارتفاع وارد بر ضلع MP است.

PP' عمودمنصف AC و ارتفاع وارد بر ضلع MN است.



۵۹. گزینهٔ «۳»

در مثلثی که یک زاویهٔ باز دارد، محل تلاقی ارتفاع‌ها بیرون مثلث می‌افتد. همچنین محل تلاقی میانه‌ها و نیمسازهای هر مثلثی همواره داخل مثلث قرار دارد.

۶۰. گزینهٔ «۴»

گزینهٔ ۱: اندازهٔ زاویهٔ سوم 90° است، پس مثلث قائم‌الزاویه است و نقطهٔ تلاقی ارتفاع‌ها روی رأس قائم مثلث است.

گزینهٔ ۲: اندازهٔ زاویهٔ سوم 80° است، هر سه زاویهٔ مثلث (40°، 60° و 80°) تند هستند و نقطهٔ تلاقی ارتفاع‌ها درون مثلث است.

گزینهٔ ۳: اندازهٔ زاویهٔ سوم 100° است، پس مثلث یک زاویهٔ باز دارد و نقطهٔ تلاقی ارتفاع‌ها بیرون مثلث است.

گزینهٔ ۴: اندازهٔ زاویهٔ سوم 60° است، هر سه زاویهٔ مثلث (50°، 60° و 70°) تند هستند و نقطهٔ تلاقی ارتفاع‌ها باید درون مثلث باشد.