

فهرست

۶ هندسه تحلیلی و جبر

۲۹ هندسه

۴۹ تابع

۷۹ مثلثات

آزمون نیمسال اول ۱۰۷

۱۰۹ توابع نمایی و لگاریتمی

۱۳۱ حد و پیوستگی

۱۵۳ آمار و احتمال

آزمون پایان سال ۱۷۲



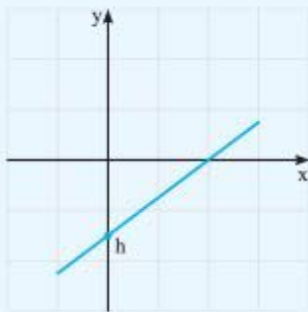
فصل یکم

هندسه تحلیلی و جبر



درس اول: هندسه تحلیلی

معادله خط



فرم کلی معادله یک خط در دستگاه مختصات دکارتی به صورت‌های زیر است:

$$y = mx + h \text{ (فرم استاندارد)}$$

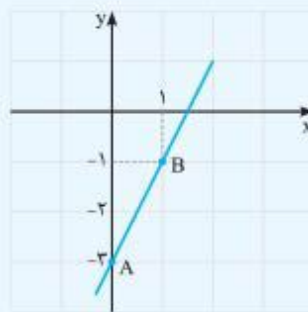
$$ax + by + c = 0 \text{ (فرم کلاسیک)}$$

در حالت استاندارد، ضریب x را شیب خط (m) و عدد ثابت را عرض از مبدأ خط (h) می‌گوییم.

رسم معادله خط: با داشتن دو نقطه دلخواه از معادله یک خط، می‌توان آن را رسم کرد.

مثال: شیب و عرض از مبدأ خط $2y = 4x - 6$ را تعیین کنید سپس آن را رسم کنید.

پاسخ:



$$2y = 4x - 6 \Rightarrow y = 2x - 3 \Rightarrow \text{شیب} = 2 \text{ و عرض از مبدأ} = -3$$

به x دو مقدار دلخواه داده و مقادیر y را به دست می‌آوریم.

$$x = 0 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow A(0, -3)$$

$$x = 1 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow B(1, -1)$$

نوشتن معادله خط: برای نوشتن معادله یک خط باید دو نقطه از آن یا یک نقطه و شیب آن خط معلوم باشد.

فرض می‌کنیم نقاط $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ از خط معلوم باشند. ابتدا شیب خط را از رابطه $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

محاسبه کرده و در رابطه مقابل قرار می‌دهیم تا معادله خط به دست آید:

مثال: معادله خط گذرنده از دو نقطه $A(1, 2)$ و $B(-1, 0)$ را به دست آورید.

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - 2}{-1 - 1} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$y - 2 = 1(x - 1) \Rightarrow y = x + 1$$

وضعیت دو خط نسبت به هم: دو خط $y = mx + h$ و $y = m'x + h'$ ممکن است وضعیت‌های زیر را داشته باشند:

۱ موازی: دارای شیب‌های مساوی و عرض از مبدأهای نامساوی باشند. ($m = m', h \neq h'$)

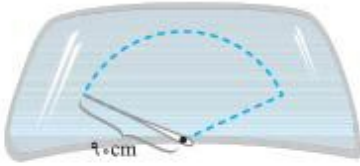
۲ منطبق: دارای شیب‌ها و عرض از مبدأهای مساوی باشند. ($m = m', h = h'$)

۳ متقاطع: دارای شیب‌های نامساوی باشند. ($m \neq m'$)

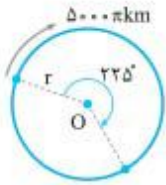
حالت عمود بودن: یکی از حالت‌های خاص تقاطع دو خط، عمود بودن آن‌ها است و شرط عمود بودن، معکوس و

قرینه بودن شیب‌های دو خط است. ($m \cdot m' = -1$)

۱۹) نوک برف پاک‌کنی به طول 90cm در یک حرکت، مسافتی که به طور تقریبی طی می‌کند برابر $2.2/5\text{cm}$ است. زاویه‌ای که در طی این حرکت ایجاد می‌شود چند درجه است؟ ($\pi \simeq 3$)



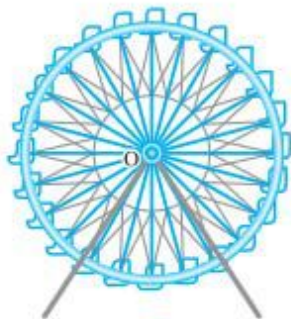
۲۰) ستاره‌ای روی مسیری دایره‌ای شکل به میزان $\theta = 225^\circ$ دوران کرده و در این مسیر مسافت $5000\pi\text{km}$ کیلومتر را طی می‌کند. شعاع مسیر دایره‌ای شکل چند کیلومتر است؟



۲۱) اندازه زاویه‌ای که عقربه ساعت‌شمار از ساعت ۲ تا ۴ بعد از ظهر طی می‌کند را بر حسب درجه و رادیان بیان کنید.

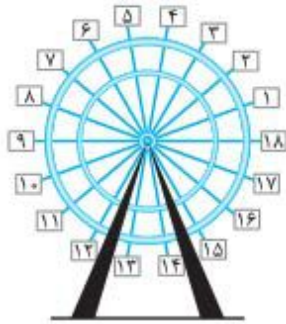


۲۲) فرض کنید سوار چرخ و فلکی شده‌اید که ۲۴ کابین دارد و کابین‌های آن شماره‌گذاری شده‌اند. اگر در آغاز حرکت در جهت خلاف عقربه‌های ساعت، شما روی کابین شماره ۴ قرار داشته باشید، بعد از $\frac{38\pi}{12}$ رادیان دوران، شما در موقعیت کدام کابین قرار دارید؟





۲۳ چرخ و فلکی دارای ۱۸ کابین با فاصله‌های مساوی است که به ترتیب از شماره‌های ۱ تا ۱۸ در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت شماره‌گذاری شده است. اگر این چرخ و فلک به میزان $\frac{22\pi}{9}$ رادیان در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت بچرخد، کابین شماره ۸ به مکان اولیه کدام کابین منتقل می‌گردد؟



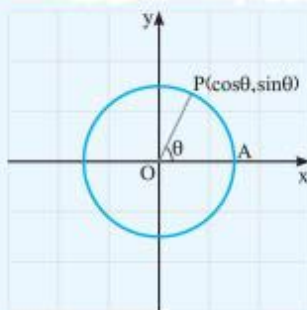
۲۴ در یک تراکتور شعاع چرخ کوچک ۳۰cm و شعاع چرخ بزرگ ۶۰cm است. اگر چرخ عقب $\frac{\pi}{3}$ رادیان بچرخد، میزان چرخش چرخ جلو را بر حسب رادیان بدست آورید.



۲۵ پره‌های یک آسیاب بادی با سرعت ثابت در هر ثانیه ۸ دور می‌چرخند. اگر طول پره‌ها ۵ متر باشد، سرعت نوک پره‌ها چند متر بر ثانیه است؟



درس دوم: روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی



در سال گذشته آموختید که اگر هر نقطه‌ای روی دایره مثلثاتی را به مبدأ وصل کنیم، زاویه‌ای مانند θ ایجاد می‌شود. در این حالت مختصات نقطه P به صورت $(\cos\theta, \sin\theta)$ می‌باشد.





آزمون نیمسال اول



درس: ریاضی (۲) رشته: تجربی مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه تاریخ امتحان: دی ماه

ردیف	سؤالات	نمره
۱	اگر $A(2,0)$ و $B(4,2)$ و $C(5,-1)$ رئوس مثلث ABC باشند، آن گاه معادله میانه CM را به دست آورید.	۱/۵
۲	در معادله $2x^2 + 4x + m + 1 = 0$ مقدار m را به گونه‌ای بیابید که یکی از ریشه‌های آن 2 واحد بزرگ‌تر از ریشه دیگر باشد.	۱
۳	هر یک از جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید. (الف) معادله $\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} = 0$ دارای ریشه حقیقی است. (ب) فاصله نقطه $A(2,-3)$ از خط $x = -3$ برابر است. (پ) هر نقطه که از دو ضلع یک مثلث به یک فاصله باشد روی قرار دارد. (ت) دامنه تابع $y = \frac{2x-1}{\sqrt{4-x^2}}$ برابر با بازه است. (ث) نمودار هر تابع یک‌به‌یک با نمودار تابع وارون آن نسبت به خط قرینه یکدیگرند. (ج) برای رسم نمودار تابع $y = -f(x)$ کافی است نمودار $f(x)$ را نسبت به قرینه کنیم. (چ) زاویه $\frac{7\pi}{5}$ رادیان برابر درجه است. (ح) نمودار تابع $y = \sin x$ نسبت به متقارن است.	۲
۴	معادله زیر را حل کنید. $\sqrt{x+7} = \sqrt{x} + 1$	۱
۵	اگر دو نفر با هم تایپ کنند، می‌توانند در ۴ ساعت یک کار تایپی را انجام دهند. با فرض این که سرعت یکی از آن‌ها سه برابر دیگری باشد، حساب کنید هر یک از آن‌ها به تنهایی در چند ساعت می‌توانند کار تایپ را انجام دهند؟	۱
۶	نقیض هر یک از گزاره‌های زیر را بنویسید. (الف) هیچ مثلثی با سه ضلع برابر وجود ندارد. (ب) همه اعداد اول فردند.	۲
۷	در دوزنقه زیر نسبت $\frac{MN}{PQ}$ چه قدر است؟	۱/۵
۸	در شکل زیر اگر $\hat{A} + \hat{D} = 118^\circ$ باشد، مقادیر x و y را به دست آورید.	۱/۵





٢٠

٢١/٢٥

الف ١٢

١٣٥

الف ٢/٥

الف ١٥

ب ٤٢/٨

٨/٧٥

الف $\sigma_y^2 = 2$

$\sigma_y^2 = 2$

الف $\sigma_y^2 = 2$

$\sigma_y^2 = 2$

الف ٢٩/٥

الف ١/٥

الف $v_1 = \frac{\sqrt{2}}{3}, v_2 = \frac{\sqrt{2}}{12}$

$v_2 = \frac{\sqrt{2}}{3}$

الف ٢٢

ب -٥

ب ٢/٥

ب ٦/٧

ب ٢٢٢/١

ب $\frac{9/5}{8}$

ب ١/٦

ب ١٥, ٢٢, ٢٢

ب -٢

ب .

ج ٢٧/٢١

ب $\sqrt{\frac{9/5}{8}}$

٢٨

٢٩

٣٠

٣١

٣٢

٣٣

٣٥

٣٧

٣٨

٣٩

٤٠

٤٢

٤٤

٤٥

٤٦

$\frac{8}{27}$

$\frac{2}{11}$

$\frac{4}{9}$

$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{11}$

$\frac{15}{17}$

الف $\frac{4}{5}$

$\frac{1}{4}$

الف $\frac{1}{16}$

٠.٠٦٤

٠.٧٢

٠.٢٤

$\frac{2}{4}$

الف $(\frac{1}{12})^6$

$\frac{241}{7^4}$

$\frac{265 \times \dots \times 241}{(265)^{25}}$

الف $(\frac{1}{12})^3$

الف ٢٦

$a = -427$

٨٦

٢٠

ب $\frac{1}{4}$

ب $\frac{1}{16}$

ب $\frac{285}{1728}$

ب $\frac{110}{114}$

٤

٥

٦

٧

٨

٩

١٠

ب $\frac{1}{5}$

١٢

١٣

ب $\frac{1}{8}$

١٥

١٧

١٨

١٩

٢٠

٢١

٢٢

٢٣

٢٤

٢٥

٢٦

٢٧





۳۲

$$\begin{aligned} \text{د} \quad y &= \sqrt{x^2 + 2} \Rightarrow y^2 = x^2 + 2 \Rightarrow x^2 = y^2 - 2 \\ &\Rightarrow x = \sqrt{y^2 - 2} = g^{-1}(x) = \sqrt{x^2 - 2} \\ \text{ج} \quad y &= \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow x+1 = xy - y \Rightarrow x(1-y) = -1-y \\ &\Rightarrow x = \frac{-1-y}{1-y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1+x}{x-1} \end{aligned}$$

ب

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 - \sqrt{x}, \quad g(x) = x^2 - 4x + 4 \quad (x \leq 2) \\ y &= 2 - \sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x} = 2 - y \Rightarrow x = (2 - y)^2 \\ &\Rightarrow f^{-1}(x) = x^2 - 4x + 4 = g(x) \end{aligned}$$

ج

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{aligned} f(x) &= 2x + \delta \Rightarrow D_f = \mathbb{R} \\ g(x) &= \frac{x}{x^2 - 4} \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{+2, -2\} \end{aligned} \right. \\ \left(\frac{f}{g} \right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x + \delta}{\frac{x}{x^2 - 4}} = \frac{(2x + \delta)(x^2 - 4)}{x} \\ D\left(\frac{f}{g}\right)(x) &= D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} = \mathbb{R} - \{+2, -2, 0\} \end{aligned}$$

فصل چهارم: مثلثات

۵

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{l_1}{r_1} \\ \alpha_2 &= \frac{l_2}{r_2} \\ \alpha_1 &= \alpha_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 \Rightarrow \frac{l_1}{r_1} = \frac{l_2}{r_2} \Rightarrow \frac{l_2}{l_1} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{2}{3}$$

۱۶

ابتدا زاویه داده شده را به رادیان تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \alpha = 175^\circ &= \frac{175 \times \pi}{180} = \frac{5 \times 25 \times \pi}{180} \quad \pi = 3 \rightarrow \alpha = \frac{5 \times 25 \times 3}{180} \\ &\Rightarrow \alpha = \frac{25}{12} \end{aligned}$$

پس خواهیم داشت:

$$\alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow r = \frac{l}{\alpha} = \frac{7 \cdot \text{cm}}{\frac{25}{12}} = \frac{7 \cdot 12}{25} = 24 \text{ cm}$$

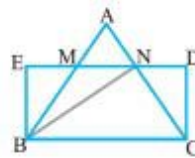
۲۲

۲۴ کابین در مجموع یک دور کامل دایره چرخ و فلک را پوشش می‌دهند

$$\frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12} \text{ rad} \quad \text{بنابراین زاویه بین هر دو کابین برابر است با:}$$

۶۰

با توجه به فرض‌های مسئله، نتیجه می‌گیریم که مساحت مثلث ABC ، برابر مساحت مثلث AMN است و از طرفی این دو مثلث با هم متشابه‌اند:



$$\frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{MN}{BC}\right)^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{BC}{MN} = 3$$

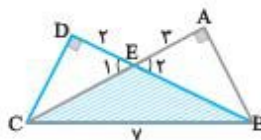
با توجه به شکل داریم:

$$\frac{S_{BCDE}}{S_{\triangle MNB}} = \frac{BE \times BC}{\frac{1}{2} BE \times MN} = \frac{2BC}{MN} = 2 \times 3 = 6$$

۶۲

چون $\hat{D} = \hat{A} = 90^\circ$ و $\hat{E}_1 = \hat{E}_2$ پس دو مثلث ABE و DCE با هم متشابه‌اند در نتیجه:

$$\frac{DE}{AE} = \frac{DC}{AB} = \frac{EC}{EB} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{EC}{EB} \Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{EC}{EC + EB}$$



چون محیط مثلث BCE برابر ۱۶ و $BC = 7$ است، پس $EC + BE = 9$ آن‌گاه:

$$\begin{aligned} \frac{2}{5} = \frac{EC}{9} &\Rightarrow EC = \frac{18}{5} = 3.6, \quad EB = 9 - 3.6 = 5.4 \\ |EB - EC| &= |5.4 - 3.6| = 1.8 \end{aligned}$$

فصل سوم: تابع

۹

مخرج کسر داده شده تنها به ازای $x = 2$ صفر شده است، پس $x = 2$ ریشه مضاعف تابع است، یعنی:

$$1) \Delta = 0 \Rightarrow a^2 - 4b = 0 \Rightarrow a^2 = 4b$$

$$2) x = 2 \text{ ریشه مضاعف} \rightarrow 4 + 2a + b = 0 \Rightarrow b = -2a - 4$$

$$\begin{cases} b = \frac{a^2}{4} \\ b = -2a - 4 \end{cases} \Rightarrow \frac{a^2}{4} = -2a - 4 \Rightarrow a^2 = -8a - 16$$

$$\Rightarrow a^2 + 8a + 16 = 0 \Rightarrow (a + 4)^2 = 0 \Rightarrow a = -4$$

$$\Rightarrow b = 4 \Rightarrow a + b = 0$$

۴۷

با توجه به صورت سؤال داریم:

$$\Delta x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + (-x + \frac{\pi}{12})$$

$$\Rightarrow 6x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{3} = \frac{6\pi + \pi - 4\pi}{12} = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{24} \text{ rad}$$

۵۴

$$\text{ع} \quad \cot(90^\circ + 25^\circ) \cot(180^\circ - 25^\circ) \times (-\cot(54^\circ - 30^\circ))$$

$$= \frac{(-\tan 25^\circ) \cdot (-\cot 25^\circ) \times (\cot(30^\circ))}{1} = \sqrt{3}$$

۵۵

$$\frac{\sin(180^\circ - 25^\circ) - \cos(180^\circ + 25^\circ)}{\sin(90^\circ + 25^\circ) + \sin(90^\circ - 25^\circ)}$$

$$= \frac{(\sin 25^\circ) - (-\cos 25^\circ)}{\cos 25^\circ + \cos 25^\circ} \xrightarrow{\text{صورت و مخرج را بر } \cos 25^\circ \text{ تقسیم می‌کنیم}}$$

$$\frac{\frac{\sin 25^\circ}{\cos 25^\circ} + \frac{\cos 25^\circ}{\cos 25^\circ}}{\frac{\cos 25^\circ}{\cos 25^\circ}} = \frac{\tan 25^\circ + 1}{2} = \frac{1/\sqrt{3} + 1}{2} = 0.68$$

$$\sin(\frac{7\pi}{4} - \alpha) = -\cos(\alpha)$$

$$\sin(\Delta\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\sin(63^\circ - \alpha) = \sin(7 \times 9^\circ - \alpha) = \sin(\frac{7\pi}{4} - \alpha) = -\cos \alpha$$

دخ سو

$$\tan(\frac{7\pi}{4} + \alpha) = -\cot \alpha$$

۴ رابطه بالا را در سمت چپ تساوی جایگذاری می‌کنیم.

$$\frac{1}{-\cos \alpha} + \frac{\sin \alpha}{-\cos \alpha} \times (-\cot \alpha)$$

$$= \frac{-1}{\cos \alpha} + \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} \times \frac{-\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$= 1 - \frac{1}{\cos \alpha} = \text{سمت راست}$$

فصل پنجم: توابع نمایی و لگاریتمی

۲۹

$$\text{ت} \quad \log_{(\sqrt{r}+1)}(\sqrt{r}+1)^2 - \log_{(\sqrt{r}+1)}(\sqrt{r}+1)^2$$

$$= 2 \log_{(\sqrt{r}+1)}(\sqrt{r}+1) - \frac{2}{3} \log_{(\sqrt{r}+1)}(\sqrt{r}+1)$$

$$= 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

رادیان دوران برابر است با:

$$\frac{28\pi}{12} = \frac{26\pi}{12} + \frac{2\pi}{12} = 2\pi + \frac{2\pi}{12}$$

$$= 2\pi + 2(\frac{\pi}{12}) = 2\pi + \pi + 2(\frac{\pi}{12})$$

$$= 2\pi + \frac{12\pi}{12} + \frac{2\pi}{12} = 2\pi + \frac{14\pi}{12}$$

۲۲ رادیان دوران یعنی یک دور کامل که دوباره روی موقعیت کابین

۴ قرار دارد سپس $\frac{14\pi}{12}$ دوران داریم که چون بین هر دو کابین $\frac{\pi}{12}$

رادیان فاصله است بنابراین باید از موقعیت ۴، ۱۴ کابین جلو برود که به کابین ۱۸ می‌رسد.

۲۵

هر دور گردش برابر $2\pi \text{ rad}$ است. بنابراین ۸ دور گردش برابر $8 \times 2\pi = 16\pi$ رادیان می‌باشد یعنی:

$$\left. \begin{aligned} \alpha = 16\pi \\ r = \Delta m \end{aligned} \right\} \Rightarrow \ell = \alpha \cdot r = 16\pi \times 5 = 80\pi \text{ m}$$

چون این مسافت در ۱ ثانیه طی می‌شود بنابراین سرعت برابر $\frac{80\pi}{s}$ خواهد بود.

۴۲

$$\text{الف} \quad A = \tan 2^\circ \times \tan 4^\circ \times \tan 8^\circ \times \tan 16^\circ \times \tan 32^\circ$$

$$\left. \begin{aligned} \tan 2^\circ = \cot 98^\circ \Rightarrow \tan 2^\circ \times \tan 98^\circ = 1 \\ \tan 4^\circ = \cot 96^\circ \Rightarrow \tan 4^\circ \times \tan 96^\circ = 1 \\ \tan 8^\circ = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = 1$$

$$\text{ب} \quad \left. \begin{aligned} \sin 15^\circ = \cos 75^\circ \\ \sin 45^\circ = \cos 45^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\sin 15^\circ \times \tan 30^\circ \times \cos 45^\circ}{\sin 45^\circ \times \cot 30^\circ \times \cos 75^\circ}$$

$$\frac{\tan 30^\circ}{\cot 30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{3}$$

۴۴

الف با توجه به صورت سؤال دو زاویه $25^\circ - x$ و $4x - 10^\circ$ متمم‌اند یعنی:

$$25^\circ - x + 4x - 10^\circ = 90^\circ$$

$$\Rightarrow 3x + 15^\circ = 90^\circ \Rightarrow x = 25^\circ$$

ب مانند قسمت الف داریم:

$$x + \frac{\pi}{15} + \frac{4\pi}{15} + 2x = \frac{\pi}{2}$$

$$3x + \frac{5\pi}{15} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 3x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{18} \text{ rad}$$