مباحثی در ریاضیات گسسته

سال دوازدهم

مؤلف: سیدحسین سیدموسوی

ویراستاران:

- دکتر ناصر بروجـردیان
- دکتر شهاب‌الدین حقی
- دکتر عباس سیفی

فهرست

پیش گفتار

موضوع این کتاب چیست؟

در این کتاب، فصل‌هایی از کتاب ریاضیات گسسته سال دوازدهم را به طور دقیق و جامع بررسی می‌کنیم.

ریاضیات گسسته چه شاخه‌ای از ریاضیات است؟

اجازه دهید به چند دهۀ قبل برگردیم که بیشتر ریاضیاتی که تدریس می‌شد، ریاضیات پیوسته بود؛ یعنی مثلاً دامنۀ تابع‌های مورد بحث اجتماع بازه‌های اعداد حقیقی بودند. مشتق تابعی مانند $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ را حساب می‌کردند که دامنۀ آن $[-1,1]$ است. اما با گسترش کامپیوتر، به ریاضیاتی نیاز پیدا کردند که بتواند پاسخ‌گوی ماهیت گسستۀ کامپیوتر باشد.

هر شاخه‌ای از ریاضیات که موضوع یک بحث آن طبیعت گسسته داشته باشد، به ریاضیات گسسته مربوط می‌شود. مثلاً در قسمت‌های مهمی از نظریۀ اعداد، زمینۀ بحث مجموعۀ اعداد صحیح یا مجموعۀ اعداد طبیعی است؛ پس این بخش از نظریۀ اعداد قسمتی از ریاضیات گسسته است. در گراف، مجموعۀ رأس‌ها و مجموعۀ یال‌ها اکثراً دو مجموعۀ متناهی‌اند؛ به این دلیل، نظریۀ گراف را در زمرۀ ریاضیات گسسته می‌توان درنظر گرفت. پس، ریاضیات گسسته شاخۀ خاصی از ریاضیات نیست.

آیا لزومی دارد که درسی به نام ریاضیات گسسته در دبیرستان‌ها تدریس شود؟

پاسخ این سؤال را باید برنامه‌ریزان دفتر تألیف کتاب‌های درسی بدهند. نام کتاب مهم نیست؛ مهم آن است که محتوی کتاب طوری نوشته شود که برای دانش‌آموزان سال آخر دبیرستان قابل درک باشد. استدلال، نظریۀ اعداد، گراف، احاطه‌گری در گراف، مبانی آنالیز ترکیبی و مربع‌های لاتین محتوی کتاب ریاضیات گسستۀ سال ۱۲ را تشکیل می‌دهند.

اگر به سابقۀ درس‌های ارائه شده در دبیرستان در چهل سال گذشته نگاه کنیم، می‌توان دریافت که ریاضیات گسسته جایگزین درسی به نام «ریاضیات جدید» شده است. در درس ریاضیات جدید سال چهارم نظام قدیم، دانش‌آموزان مباحث منطق، جبر مجرد (گروه، حلقه و میدان)، نظریۀ اعداد، ماتریس‌ها و تبدیلات را می‌خواندند. با گذر ایام و گسترش کامپیوتر، مباحث «درس ریاضیات جدید» و نام آن تغییر یافت و مباحثی مانند گراف وارد کتاب‌های دبیرستان شد. به طور کلی، دانش‌آموزان به درس ریاضیات گسسته، در مقایسه با ریاضیات پیوسته؛ یعنی حسابان، کمتر اقبال نشان می‌دهند و از سخت بودن آن شکایت می‌کنند.

مؤلفین کتاب درسی تلاش بسیاری کرده‌اند که بخش‌های جدید کتاب گسسته را برای مخاطبین ساده‌سازی کنند و باید این تلاش آنها را ارج نهاد. اما چیزی که در کتاب گسسته سال دوازدهم حیرت‌آور است، آوردن مبحث احاطه‌گری در دبیرستان است. بحثی که حتی در برنامۀ درسی دوره‌های کارشناسی درس ریاضیات گسسته یا نظریۀ گراف دانشگاه‌ها تدریس نمی‌شود.

ساختار این کتاب چگونه است؟

در این کتاب، دو شخصیت، یکی معلم و دیگری یک دانش‌آموز در مورد یک موضوع مشخص با هم بحث می‌کنند. نتیجۀ این بحث‌ها به اثبات یک قضیه، یا حل یک مسأله ختم می‌شود.

هدف اصلی این کتاب آن است که با خواندن این کتاب، خواننده بتواند درک درست و عمیقی از مقدمات ریاضیات گسسته به دست آورد. سعی کرده‌ایم که در خلال این گفتگوها، خواننده متوجه شود که یک اثبات چگونه ساخته می‌شود؛ یا برای حل یک مسأله از چه زاویه‌هایی می‌توان مسأله را حل کرد.

کار ویراستاران چه بوده است؟

کتاب را که شروع کردم به نوشتن، به نظرم رسید که یک کتاب با یک ویراستار متخصص غنی‌تر می‌شود. از این رو، از دوست گرامی آقای دکتر ناصر بروجردیان درخواست کردم که ویرایش این کتاب را به عهده بگیرند. بعد که به بخش‌های گراف رسیدیم، تصمیم گرفتم که برای این بخش هم علاوه بر ویراستار اصلی، از یک متخصص گراف برای ویراستاری استفاده شود. زحمت ویرایش بخش‌های مربوط به گراف را آقای دکتر عباس سیفی کشیدند. ایشان پیشنهاد دادند که آقای دکتر شهاب حقی بخش‌های مربوط به احاطه‌گری را ویرایش کنند. بخش استدلال این کتاب را هم آقای دکتر پیام سراجی ویرایش کرده‌اند.

مهم‌ترین وظیفه‌ای که بر دوش ویراستاران محترم بود، این بود که کتاب غلط علمی نداشته باشد. دوم اینکه، در بحث‌ها و نتیجه‌گیری بحث‌های بین این دو شخصیت اشکالات منطقی وجود نداشته باشد.

آیا می‌خواهید بگویید که این کتاب بی‌غلط است؟

اجازه دهید در پاسخ شما، پاراگراف آخر از مقدمهٔ کتاب *Concrete Mathematics** را بیاوریم.

«سعی کرده‌ایم که کتابی کامل و بی‌نقص بنویسیم، ولی ما نویسندگان انسان‌های کاملی نیستیم. از این رو، از خوانندگان تقاضا می‌کنیم، که در تصحیح اشتباهات کتاب، ما را یاری کنند. به اولین کسی که یک غلط تایپی یا یک غلط علمی یا یک غلط تاریخی پیدا کند، ۲ دلار و ۵۶ سنت ($۲۵۶ = ۲^۸$) جایزه می‌دهیم.»

آیا واقعاً این مبلغ به یابندگان غلط در کتاب پرداخت شد؟

در مورد این کتاب خاص، اطلاعاتی نیافتم. اما یکی از نویسندگان این کتاب، دانلد کنوث**، گزارش داده است که برای یابندگان اشتباهات کتاب‌هایش، تا اکتبر سال ۲۰۰۱، بیش از ۲۰۰۰ چک، که مبلغ آنها به طور متوسط ۸ دلار بود، نوشته است. تا سال ۲۰۰۵، کنوث به اندازهٔ ۲۰,۰۰۰ دلار چک نوشته بود.

ملاحظه می‌کنید که غلط‌های تایپی و حتی علمی ممکن است در کتاب‌های خیلی معروف هم اتفاق بیفتد. آنچه برای ما مهم بود آماده کردن بستری برای خوانندگان است که نحوهٔ ساختن یک برهان و تفکر ریاضی را مشاهده کنند.

محتوی بخش‌های مختلف این کتاب چگونه است؟

● بخش استدلال

معمولاً برای دانش‌آموزان مشکل است که بفهمند چرا باید نتایجی را که سال‌هاست با آنها آشنایی دارند، ثابت کنند. از این رو، در بخش استدلال این کتاب، سعی شده است که به اثبات ویژگی‌های بدیهی اعداد حقیقی، مانند $۰ = a \times ۰$، اشاره شود. بحث برهان خلف و تفاوت آن با اثبات با عکس نقیض در کتاب درسی به طور روشن بیان نشده است. در کتاب حاضر، به طور مفصل و با مثال‌های زیاد، در این مورد بحث شده است. در این کتاب، دانش‌آموزان یاد می‌گیرند که یک اثبات را چگونه باید نوشت.

---

* Concrete Matematics: A Foundation fo Computer Science by Ronald L. Graham , Donald E. Knuth , Oren Patashnik
** Donald E.Knuth

● بخش نظریهٔ اعداد

در بخش‌های نظریهٔ اعداد کتاب درسی گسسته، مؤلفین کتاب درسی گسسته سعی کرده‌اند که از حجم مطالب بکاهند؛ ولی به نظر می‌رسد که خیلی در این راه موفق نبوده‌اند. به عنوان نمونه، معادلات سیالهٔ خطی (معادلات دیوفانتی) را با معادلات هم‌نهشتی حل کرده‌اند. در صورتی که، ابتدا باید قضیه‌های مربوط به وجود جواب یک معادلهٔ سیالهٔ خطی را (حتی بدون اثبات) مطرح می‌کردند. بعد فرمول جواب‌های معادله سیالهٔ خطی را (بدون اثبات) بیان می‌کردند. سپس، تبدیل معادلهٔ سیالهٔ خطی را به معادلهٔ هم‌نهشتی را به عنوان یک روش دیگر مطرح می‌کردند.

ما در این کتاب، سعی کردیم این کاستی‌های کتاب درسی را رفع کنیم و قضیه‌ها را به ترتیب منطقی آن آورده‌ایم. هر جا که احساس کرده‌ایم که جای خالی یک قضیه احساس می‌شود، آن قضیه را، ولو بدون اثبات، بیان کرده‌ایم.

در بخش هم‌نهشتی، خواننده به قدرت زبان هم‌نهشتی در حل مسائل نظریهٔ اعداد آشنا می‌شود. بحث قضیهٔ کوچک‌فرما را، با ارائهٔ ایده‌های اثبات؛ وارون یک عدد به پیمانهٔ m و هم‌چنین قضیهٔ ویلسون را به این کتاب افزوده‌ایم که دانش‌آموزان زیبایی‌های هم‌نهشتی را ببینند.

● بخش گراف

بخش گراف را با یک مقدمهٔ طولانی شروع کردیم. در مقدمات، بدون اینکه وارد نکات فنی تعریف گراف‌های یک‌ریخت شویم، سعی کردیم که این مفهوم را با مثال‌های متعدد برای خواننده قابل فهم کنیم. به علاوه، با یک مثال ملموس مفهوم رنگ‌آمیزی در گراف‌ها معرفی شده است. مسألهٔ سه خانه و سه چاه که در کتاب درسی گسسته اشاره شده با جزئیات فراوان بحث شده است. در بحث زیرگراف، سعی کرده‌ایم که با آوردن مسأله‌های فراوان، این مفهوم را قابل درک کنیم. روی «رسم گراف با داشتن دنباله درجات» ، به طور مشخص، تأکید داشته‌ایم.

● بخش احاطه‌گری

در بخش احاطه‌گری، خیلی کند پیش رفته‌ایم. ابتدا با یک مثال، بدون اینکه خواننده را درگیر اصطلاحات احاطه‌گری کنیم، انگیزهٔ طرح بحث احاطه‌گری مطرح شده است. بعد، به آرامی اصطلاحات و تعریف‌های احاطه‌گری معرفی شدند. سعی کردیم که به مناسبت‌های مختلف، این تعریف‌ها تکرار شوند تا خواننده به آنها عادت کند. یکی از جالب‌ترین بحث‌های کتاب حاضر، در بخش احاطه‌گری، موضوع چندجمله‌ای احاطه‌گری است؛ که در سال‌های اخیر معرفی شده است. در این کتاب، خواننده با کاربردهای چندجمله‌ای احاطه‌گری در یافتن تعداد مجموعه‌های احاطه‌گر چند گراف مهم آشنا می‌شود.

با توجه به اینکه، جبر بول* در برنامهٔ درسی کتاب‌های دبیرستانی نیست، چطور شد که بحث کاربرد جبر بول در احاطه‌گری در این کتاب مطرح شده است.

تنها چیزی که خواننده لازم است از جبر بول بداند شباهت ساختاری آن با مجموعه‌ها به همراه دو عمل اجتماع و اشتراک است. این بحث را به این دلیل مطرح کردیم که ارتباط شاخه‌های مختلف ریاضیات را به زیبایی نشان می‌دهد. چنان‌که قبلاً، در بخش نظریه اعداد، در مورد شباهت‌های ویژگی‌های ب.م.م و ک.م.م با ویژگی‌های اجتماع و اشتراک مطالبی مطرح شده است.

---

* Boolean Algebra

تمرین‌های حل نشده

حدود ۱۵۰ تمرین حل نشده با عنوان تمرین‌های اضافی در کتاب آورده شده است تا توان خواننده را در اثبات کردن و محاسبه تقویت کند. اغلب تمرین‌ها ساده‌اند؛ اما تعدادی از تمرین‌ها وجود دارند که حل آنها سرراست نیست.

چرا حل تمرین‌های کتاب درسی؟

چون در برخی از تمرین‌های کتاب درسی ابهام‌هایی وجود داشت، بر آن شدیم که همهٔ تمرین‌های کتاب درسی در موضوعات مورد بحث این کتاب، به طور کامل حل شود. به عنوان نمونه، در یک مورد از تمرینات کتاب، در بخش گراف، که اشتباهی رخ داده است، حدود سه صفحه از این کتاب، به اثبات غلط بودن گزارهٔ مطرح شده در کتاب درسی اختصاص داده شده است. در تمام تمرین‌هایی که در آنها باید گزاره‌ای اثبات می‌شد، سعی کردیم تا جایی که ممکن است اثبات‌های دقیقی برای آنها ارائه شود. به علاوه، تمرینات مشابه تمرین‌های کتاب درسی را در این کتاب ملاحظه خواهید کرد.

چرا بحث در مورد فعالیت‌ها و کار در کلاس‌های کتاب درسی؟

در کتاب درسی گسستهٔ سال دوازدهم، فعالیت‌ها و کار در کلاس‌های مناسبی مطرح شده است. در کتاب حاضر، سعی کرده‌ایم که روش‌های دیگری برای بررسی این فعالیت‌ها و کار در کلاس‌ها ارائه کنیم. در مواردی هم، روش‌های کتاب درسی را نقد کرده‌ایم.

و تشکر

ابتدا لازم است که از **آقای یحیی دهقانی** مدیر محترم انتشارات مبتکران تشکر کنم. سپس، از **آقای مبین** که واقعاً همکاری صمیمانه‌ای در تولید این کتاب داشتند؛ از **خانم سمیه آهنگر** تایپیست و صفحه‌آرای کتاب که با صبوری غلط‌گیری‌های متعدد ما را تحمل کردند؛ از **خانم رضیه صفریان** و **خانم نرگس سربندی** که زحمت تصویرسازی و رسم شکل‌های کتاب را به عهده داشتند؛ از **خانم سمانه ایمان‌فرد** که جلد کتاب را طراحی کردند؛ از **خانم بیتا سعیدی** و **آقای حمید وطنخواه** که ایده‌های خوبی برای اصلاح کتاب ارائه دادند و از **خانم فیروزه شاهین** که ایدهٔ آیکون‌های معلم و شاگرد را پیشنهاد دادند، کمال تشکر را دارم. از ویراستاران کتاب، آقایان **دکتر ناصر بروجردیان**، **دکتر عباس سیفی**، **دکتر شهاب‌الدین حقی** و **دکتر پیام سراجی** نیز سپاسگزارم که همراهی‌شان در ویرایش کتاب موجب غنی شدن محتوی کتاب شده است و به دلیل وجود این دوستان در کنار مؤلف، ایمان دارم که این کتاب مرجعی برای دانش‌آموزان و آموزشگران ریاضی خواهد بود.

بهار سال ۱۳۹۸

سید حسین سید موسوی

بخش ۱

مقدمه‌ای بر استدلال

بخش استدلال را با حل یک مسأله آغاز می‌کنیم و به تدریج پیش‌نیازهایی را که در این بخش به آن نیاز داریم معرفی می‌کنیم.

مسأله **گزارهٔ زیر را ثابت کنید.**

اگر a ، b و c اعداد صحیح فردی باشند، آنگاه معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲+bx+c=۰$ جواب‌های گویا ندارد.

بهتر است در یک مثال درستی این گزاره را بررسی کنم. مثلاً معادلهٔ $۳x^۲+۵x+۷=۰$ را درنظر بگیریم.

جواب‌های این معادله عبارتند از: $x=\dfrac{-۵\pm\sqrt{۲۵-۸۴}}{۶}=\dfrac{-۵\pm\sqrt{-۵۹}}{۶}$.

اما این معادله که جواب ندارد.

به محتوای گزاره دقت کنید؛ این گزاره می‌گوید، اگر ضرایب یک معادله درجهٔ دوم اعداد صحیح فرد باشند و این معادله دارای جواب باشد، آنگاه این جواب عدد گویا نیست.

پس اجازه دهید مثال دیگری مطرح کنم به طوری که معادلهٔ درجهٔ دوم داده شده دارای جواب باشد.

معادلهٔ $۱۹x^۲+۲۹x-۵۴۷=۰$ را درنظر می‌گیریم. جواب‌های این معادله به صورت زیر است.

$$x=\frac{-۲۹\pm\sqrt{۸۴۱+۴۱۵۷۲}}{۳۸}=\frac{-۲۹\pm\sqrt{۴۲۴۱۳}}{۳۸}$$

عدد فرد ۴۲۴۱۳ مربع کامل نیست، زیرا به صورت $۸k+۱$ نیست. بنابراین $\sqrt{۴۲۴۱۳}$ گویا نیست و جواب‌های این معادله گویا نیستند.

در توضیح‌هایتان ایده‌هایی از یک روش اثبات این گزاره را ارائه دادید. اما از چند گزاره استفاده کردید که خود آنها باید ثابت شوند؛ این گزاره‌ها عبارتند از:

۱) هر عدد صحیح فرد که به صورت $۸t+۱$ نباشد، مربع کامل نیست.

۲) اگر عدد صحیح و مثبت a مربع کامل نباشد، $\sqrt{a}$ گویا نیست (گنگ است).

۳) مجموع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

۴) یک عدد گنگ تقسیم بر یک عدد گویای ناصفر، عددی گنگ است.

من الان در موقعیتی قرار گرفته‌ام که نمی‌دانم کجا ایستاده‌ام؛ به عبارت دیگر، نمی‌دانم کدام‌یک از دانسته‌های قبلی در مورد اعداد حقیقی، اعداد صحیح و اعداد گویا را می‌توانیم استفاده کنیم و کدام‌یک را باید ثابت کنیم.

برای اثبات گزاره‌های ۱ تا ۴، شما باید بدانید مجموعهٔ اعداد طبیعی، اعداد صحیح، اعداد گویا و اعداد حقیقی چه ویژگی‌هایی دارند. چون اکثر اثبات‌های این بخش کتاب مربوط به این مجموعه‌هاست، ما باید روشن کنیم که از کدام ویژگی‌های این مجموعه‌ها مجازیم استفاده کنیم.

ما فقط به آن ویژگی‌های این مجموعه‌ها اشاره می‌کنیم که در کتاب گسسته سال دوازدهم به آن نیاز داریم.

ویژگی‌های اساسی مجموعهٔ اعداد حقیقی با دو عمل جمع و ضرب

مجموعهٔ اعداد حقیقی، $\mathbb{R}$ همراه با دو عمل جمع و ضرب، دارای ویژگی‌های زیر است. به ازای هر عدد حقیقی x، y و z

۱. **شرکت‌پذیری عمل جمع** $(x+y)+z=x+(y+z)$

۲. **جابه‌جایی عمل جمع** $x+y=y+x$

۳. **وجود عضو بی‌اثر نسبت به عمل جمع** $x+0=x$

۴. **وجود عضو قرینه نسبت به عمل جمع** $x+(-x)=0$

۵. **شرکت‌پذیری عمل ضرب** $(xy)z=x(yz)$

۶. **جابه‌جایی عمل ضرب** $xy=yx$

۷. **وجود عضو بی‌اثر (همانی) نسبت به عمل ضرب** $x\cdot 1=x$

۸. **وجود عضو وارون برای اعداد ناصفر** $x\cdot x^{-1}=1 \quad (x\neq 0)$

۹. **خاصیت پخشی ضرب نسبت به جمع** $x(y+z)=xy+xz$

یک رابطهٔ «کوچکتری» $<$ ، در $\mathbb{R}$ وجود دارد که دارای ویژگی‌های زیر است:

۱۰. **قانون سه‌گانگی**. فقط یکی از موارد مقابل درست است. $x<y$ یا $x=y$ یا $y<x$

۱۱. **خاصیت تراگذری رابطهٔ کوچکتری** $x<y$ و $y<z \Rightarrow x<z$

۱۲. **خاصیت جمع نسبت به رابطهٔ کوچکتری** $x<y \Rightarrow x+z<y+z$

۱۳. **خاصیت ضرب نسبت به رابطهٔ کوچکتری** $x<y$ و $z>0 \Rightarrow xz<yz$

آیا این ویژگی‌ها اثبات نمی‌خواهند؟

این یک سؤال اساسی است که پاسخ آن داستانی دارد که فرصت پرداختن به آن در چنین کتابی وجود ندارد. در سطح این کتاب، ما درستی این ویژگی‌ها را می‌پذیریم. بعد، با استفاده از این ویژگی‌های اساسی، ده‌ها گزاره و ویژگی در مورد اعداد حقیقی ثابت می‌شود. مثلاً تمام ویژگی‌های صفحهٔ بعد ثابت می‌شوند.

به ازای هر سه عدد حقیقی a، b و c

۱) $a+c=b+c \Rightarrow a=b$

۲) $a+b=a \Rightarrow b=0$

۳) $a+b=0 \Rightarrow b=-a$

۴) $-(a+b)=(-a)+(-b)$

۵) $-0=0$

۶) $ac=bc$ و $c\neq 0 \Rightarrow a=b$

۷) $0\cdot a=0$

۸) $a\neq 0$ و $b\neq 0 \Rightarrow (ab)^{-1}=a^{-1}b^{-1}$

۹) $(-1)a=-a$

۱۰) $(-a)b=-ab$

۱۱) $-(-a)=a$

۱۲) $(-1)^2=1$

۱۳) $ab=0 \Rightarrow a=0$ یا $b=0$

۱۴) $a\neq 0 \Rightarrow (a^{-1})^{-1}=a$

۱۵) $(-a)^{-1}=-a^{-1}$

۱۶) $a\leq b$ و $b\leq a \Rightarrow a=b$

۱۷)
الف) $a\leq b$ و $b\leq c \Rightarrow a\leq c$
ب) $a\leq b$ و $b<c \Rightarrow a<c$

۱۸) $a\leq b \Rightarrow a+c\leq b+c$

۱۹) $a<b$ و $c<d \Rightarrow a+c<b+d$

۲۰) $a>0 \Leftrightarrow -a<0$

۲۱) $a\neq 0 \Rightarrow a^2>0$

۲۲) $a\leq b$ و $c>0 \Rightarrow ac\leq bc$

۲۳) $0\leq a<b$ و $0\leq c<d \Rightarrow ac<bd$

۲۴) $a<b$ و $c<0 \Rightarrow ac>bc$

۲۵) $a>0 \Rightarrow a^{-1}>0$

۲۶) اگر $a>0$ و $b>0$، آنگاه

$a<b \Leftrightarrow b^{-1}<a^{-1} \Leftrightarrow a^2<b^2$

بسیاری از این ویژگی‌ها خیلی ساده‌اند، تعجب‌آور است که باید این گزاره‌های ساده هم اثبات شود.

هدف این کتاب، واقعاً، اثبات این ویژگی‌ها نیست. فقط می‌خواهیم بگوییم جز تعدادی گزاره (که درستی آنها را می‌پذیریم)، بقیه گزاره‌های درستی که در ریاضیات مطرح می‌شوند، اثبات می‌شوند. برای نمونه، تعدادی از اینها را اثبات می‌کنیم.

مسئله ثابت کنید به ازای هر عدد حقیقی a داریم $0\times a=0$.

تساوی $0\times a=0$ که خیلی واضح است؛ واقعاً می‌خواهید این تساوی را ثابت کنید. هیچ‌وقت تصور نمی‌کردم که چنین گزاره بدیهی‌ای هم باید ثابت شود.

ما در اعداد حقیقی جز آن چند خاصیت اصلی، همهٔ خواص دیگر را ثابت می‌کنیم.

دارم فکر می‌کنم که چطور باید شروع کرد. نگاهی به آن چند خاصیت اصلی اعداد حقیقی می‌اندازم؛ از خود می‌پرسم آیا از ویژگی‌های جابه‌جایی یا شرکت‌پذیری جمع و ضرب استفاده کنم؛ آیا خاصیت پخشی را به کار ببرم. الان که خوب حکم را نگاه می‌کنم، به نظر می‌رسد که به نوعی از خاصیت صفر باید استفاده کنم.

بله، کلید اثبات این مسأله، نوشتن ۰ به صورت ۰+۰ است. سپس $a\times ۰$ به صورت $a\times(۰+۰)$ نوشته می‌شود. حالا باید خاصیت پخشی ضرب نسبت به جمع را به کار ببریم. می‌دانیم $a\times ۰=a\times(۰+۰)$ ، بنابراین $a\times ۰=a\times ۰+a\times ۰$. بعد با توجه به قاعدهٔ حذف نسبت به عمل جمع، اثبات تمام می‌شود. اکنون می‌توانیم اثبات این گزاره را به صورت دقیق‌تر بنویسیم.

اثبات

$$a\times ۰=a\times(۰+۰)$$

$$a\times ۰=a\times ۰+a\times ۰$$

$$a\times ۰+۰=a\times ۰+a\times ۰$$

با استفاده از خاصیت حذف نسبت به عمل جمع، $a\times ۰$ را از طرفین تساوی حذف می‌کنیم؛ بنابراین $a\times ۰=۰$.

مسأله **اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، ثابت کنید: $a=b \Leftarrow b\le a$ و $a\le b$.***

در ویژگی‌های اساسی اعداد حقیقی، فقط در مورد رابطهٔ کوچکتری، یعنی $<$، صحبت شده است.

بله، ما رابطهٔ $a\le b$ را به صورت $a=b$ یا $a<b$ تعریف می‌کنیم.

اثبات این گزاره ساده است. چون همزمان امکان ندارد $a<b$ و $b<a$ اتفاق بیفتد؛ بنابراین نتیجه می‌گیریم $a=b$.

این چیزی که شما به نام اثبات ارائه دادید، در واقع، ایده اصلی اثبات است. ما در این کتاب، می‌خواهیم یاد بگیریم که چگونه یک اثبات به طور صحیح نوشته می‌شود.

اثبات فرض کنید a و b دو عدد حقیقی دلخواهی هستند، به طوری که $b\le a$ و $a\le b$. با توجه به تعریف $\le$ داریم:

$a\le b$ و $b\le a$

$\Leftrightarrow (a<b \vee a=b)\wedge(b<a \vee a=b)$

$\Leftrightarrow (a=b)\vee(a<b \wedge b<a)$ (زیرا $((p\vee q)\wedge(r\vee q)\equiv q\vee(p\wedge r)$)

$\Leftrightarrow (a=b)\vee F$ (بنابر خاصیت سه‌گانگی، گزارهٔ $a<b \wedge b<a$ نادرست است.)

$\Leftrightarrow a=b$ (زیرا $P\vee F\equiv P$)

اعداد طبیعی، اعداد صحیح و اعداد گویا چه ویژگی‌هایی دارند؟

* در سراسر این کتاب، در گزاره‌های به صورت $(p\wedge q)\Rightarrow r$، پرانتزها را ممکن است حذف کنیم و آن را به صورت $p\wedge q\Rightarrow r$ بنویسیم.

مجموعهٔ اعداد حقیقی سه زیرمجموعهٔ مهم دارد، که عبارتند از: مجموعهٔ اعداد طبیعی، مجموعهٔ اعداد صحیح و مجموعهٔ اعداد گویا. در این قسمت، به معرفی ویژگی‌های اصلی این سه مجموعه می‌پردازیم.
شما اعداد طبیعی و اعداد صحیح را چگونه توصیف می‌کنید؟

اعداد طبیعی مجموعه‌ای گسسته است، به طوری که فاصلهٔ هر دو عدد طبیعی متمایز از هم حداقل برابر با ۱ است. در واقع، از جمع ۱ با خودش به دفعات دلخواه، اعداد طبیعی ساخته می‌شوند.

اما مجموعهٔ اعداد صحیح هم، با این تعبیر شما، مجموعه‌ای گسسته است.

تفاوت بین مجموعهٔ اعداد صحیح و اعداد طبیعی در آن است که هر عدد صحیح یک قرینه در مجموعهٔ اعداد صحیح دارد که اجازه می‌دهد که عمل تفریق را در آن به صورت $a-b=a+(-b)$ تعریف کنیم؛ در صورتی که عمل تفریق در مجموعهٔ اعداد طبیعی تعریف نمی‌شود.

تفاوت دیگر، آن است که مجموعهٔ اعداد طبیعی و هر زیرمجموعهٔ غیرتهی آن دارای کوچک‌ترین عضو هستند، ولی در $\mathbb{Z}$ ، زیرمجموعه‌های بسیاری وجود دارند که کوچک‌ترین عضو ندارند؛ مانند مجموعهٔ $\{...,۳,۴,۵\}$.
مجموعهٔ اعداد طبیعی را با $\mathbb{N}$ و مجموعهٔ اعداد صحیح را با $\mathbb{Z}$ نشان می‌دهیم. بنابراین:

$$\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,...\} \quad \text{و} \quad \mathbb{Z}=\mathbb{N}\cup\{۰\}\cup(-\mathbb{N})=\{...,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,...\}$$

چرا مجموعهٔ اعداد طبیعی و مجموعهٔ اعداد صحیح نسبت به عمل جمع و ضرب بسته‌اند؟

سؤال مهمی است. دیدیم که در مجموعهٔ اعداد حقیقی دو عمل جمع و ضرب تعریف شده‌اند؛ یعنی مجموع و حاصل‌ضرب دو عدد حقیقی عددی حقیقی است. ولی واقعاً باید ثابت شود که مجموع و حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی عددی طبیعی و مجموع و حاصل‌ضرب دو عدد صحیح هم عددی صحیح است. اثبات این ویژگی‌ها، نیاز به ابزاری دارد که ما آنها را معرفی نکرده‌ایم (اصل استقراء)؛ بنابراین آنها را بدون اثبات می‌پذیریم.
اکنون به معرفی اعداد گویا و ویژگی‌های آن می‌پردازیم. مجموعهٔ اعداد گویا که با نماد $\mathbb{Q}$ نمایش داده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mathbb{Q}=\{x\in\mathbb{R} \mid x=\frac{a}{b}, b\neq ۰, a,b\in\mathbb{Z}\}$$

توجه داریم که اعداد a و b در نمایش یک عدد گویای $x=\frac{a}{b}$ منحصر به فرد نیستند؛ مثلاً $\frac{-۶}{-۹}=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}$.
به علاوه، مجموعهٔ اعداد صحیح زیرمجموعهٔ اعداد گویاست؛ زیرا اگر $a\in\mathbb{Z}$ ، آنگاه $a=\frac{a}{۱}\in\mathbb{Q}$.

تفاوت اساسی اعداد گویا با اعداد صحیح چیست؟

یکی از مهم‌ترین تفاوت‌های این دو مجموعه آن است که هر عدد گویای ناصفر، وارون گویا دارد؛ یعنی اگر r عدد گویای ناصفری باشد، r^{-1} عدد گویاست. درحالی که در $\mathbb{Z}$، فقط ۱ و ۱− وارون دارند.

این وارون گویا داشتن عناصر غیرصفر مجموعهٔ اعداد گویا چه فایده‌ای دارد؟

در مجموعهٔ اعداد صحیح، معادله‌ای مانند $3x = 4$ جواب ندارد؛ اما همین معادله در مجموعهٔ اعداد گویا جواب دارد. برای حل این معادله در $\mathbb{Q}$ ، طرفین معادله را در وارون ۳ یعنی $\frac{1}{3}$ ضرب می‌کنیم، جواب $x = \frac{4}{3}$ به‌دست می‌آید.

در یکی از کار در کلاس‌های کتاب درسی (صفحهٔ ۳) خواسته شده است که گزارهٔ زیر ثابت شود.

«مجموع هر دو عدد گویا، عددی گویاست.»

این گزاره چگونه ثابت می‌شود؟

شما چه اثباتی برای این گزاره پیشنهاد می‌کنید؟

اثبات من برای این گزاره به صورت زیر است. می‌دانیم جمع دو عدد گویا به صورت $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ تعریف می‌شود. چون کسر $\frac{ad+bc}{bd}$ یک عدد گویاست، بنابراین مجموع دو عدد گویا عددی گویاست.

تساوی $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ چرا درست است؟

اثباتش ساده است، مخرج‌ها را به صورت زیر یکسان می‌کنیم.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$$

شما مسأله را تبدیل کردید به خاصیت $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$ ؛ که خودش باید ثابت شود. هدف من از این پرسش‌ها آن است که بگوییم ***این سؤال در کتاب نباید مطرح می‌شد***؛ زیرا در کتاب گسسته و در کتاب‌های سال‌های یازدهم و دهم و کلاس‌های پایین‌تر، هیچ‌جا دلیل این تساوی را بیان نکرده‌اند.

آیا واقعاً تساوی $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ ثابت می‌شود؟ خوب، ما می‌توانیم بگوییم جمع دو عدد گویا را به این صورت تعریف می‌کنیم.

بعد سؤال پیش می‌آید که آیا این تعریف جمع اعداد گویا ارتباطی با جمع اعداد حقیقی دارد یا نه. برای اینکه این بحث‌ها پیش نیاید، تساوی $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ را ثابت می‌کنیم.

می‌دانیم $\frac{x}{y}=xy^{-1}$. بنابراین $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=ab^{-1}+cd^{-1}$. اکنون ایدهٔ هم‌مخرج کردن را به صورت زیر به کار می‌بریم:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=ab^{-1}+cd^{-1}=ab^{-1}\cdot d^{-1}d+cd^{-1}b^{-1}b \quad (xx^{-1}=1\ \text{زیرا})$$
$$=(ad+bc)b^{-1}d^{-1}$$
$$=(ad+bc)(bd)^{-1}$$
$$=\frac{ad+bc}{bd}$$

حالا نشان می‌دهیم $\frac{ad+bc}{bd}$ عددی گویاست. چون a، b، c و d اعدادی صحیح‌اند و مجموع و حاصل‌ضرب اعداد صحیح اعدادی صحیح هستند، $ad+bc$ و bd نیز اعدادی صحیح‌اند. به علاوه، از اینکه b و d اعداد صحیح ناصفری هستند، نتیجه می‌گیریم که $bd\neq 0$. بنابراین ما دو مطلب زیر را ثابت کردیم.

۱ اگر $r=\frac{a}{b}$ و $s=\frac{c}{d}$ دو عدد گویا باشند، مجموع آنها به صورت $r+s=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ است.

۲ اگر r و s دو عدد گویا باشند، $r+s$ عددی گویاست.

مسأله **ثابت کنید حاصل‌ضرب دو عدد گویا عددی گویاست.**

اگر بنویسیم $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$، شما می‌پرسید که این تساوی از کجا آمده است.

بله، اول باید این تساوی ثابت شود. ایدهٔ این اثبات، مانند قبل، استفاده از تعریف $\frac{a}{b}=ab^{-1}$ است.

اثبات فرض کنید r و s دو عدد گویای دلخواه هستند؛ بنابراین $r=\frac{a}{b}$ و $s=\frac{c}{d}$، که در آن a، b، c و d اعدادی صحیح و b و d ناصفرند.

$$rs=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=ab^{-1}\cdot cd^{-1}=acb^{-1}d^{-1}=ac(bd)^{-1}=\frac{ac}{bd}$$

به علاوه $\frac{ac}{bd}$ یک عدد گویاست، زیرا ac و bd اعداد صحیح و $bd\neq 0$.

گزاره‌های با سور عمومی

گزاره‌های از نوع $\forall x \; P(x)$* همیشه برای من اسرارآمیز بوده‌اند. چگونه این نوع گزاره‌ها را درک کنم؟

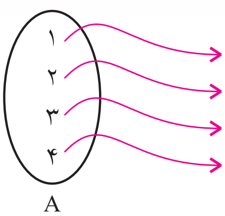
این نوع گزاره‌ها که گزاره‌های با سور عمومی نامیده می‌شوند، از دو قسمت تشکیل یافته‌اند. ابتدا توجه کنید که ما یک $P(x)$ داریم که خاصیتی را در مورد عناصر یک مجموعه بیان می‌کند. بعد، قسمت «$\forall x$» که می‌گوید این خاصیت $P(x)$ برای همهٔ عناصر این مجموعهٔ مرجع (عالم سخن) برقرار است.

* در این کتاب، گزارهٔ $\forall x\,(P(x))$ را به طور خلاصه به صورت $\forall x \; P(x)$ می‌نویسیم.

این ادعای بزرگی است که گزارهٔ $\forall x \ P(x)$ بیان می‌کند. چگونه ثابت می‌شود که $P(x)$ به ازای هر x درست است؟

با یک مثال، سؤال شما را پاسخ می‌دهیم.

مثال فرض کنید عالم سخن ما مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ و خاصیت $P(x)$ به صورت $۵x-x^۲>۰$ باشد. گزارهٔ $\forall x \ P(x)$ با عالم سخن A را می‌توان به طور دقیق‌تر به شکل $\forall x \in A \ ۵x-x^۲>۰$ نوشت. اکنون تک‌تک عناصر عالم سخن را در خاصیت $P(x)$ امتحان می‌کنیم.



$P(۱):۵-۱>۰$ پس $P(۱)$ درست است.

$P(۲):۱۰-۴>۰$ پس $P(۲)$ درست است.

$P(۳):۱۵-۹>۰$ پس $P(۳)$ درست است.

$P(۴):۲۰-۱۶>۰$ پس $P(۴)$ درست است.

چون به ازای هر عضو عالم سخن، $P(x)$ درست است، بنابراین گزارهٔ $\forall x \ ۵x-x^۲>۰$ با عالم سخن $A=\{۱,۲,۳,۴\}$، گزاره‌ای درست است.

در اینجا، ما خوش‌شانس بودیم که عالم سخن گزارهٔ $\forall x \ P(x)$ مجموعه‌ای متناهی با تعداد اعضای کم بود. اگر عالم سخن مجموعه‌ای نامتناهی باشد، این روش را نمی‌توان به کار برد.

بله، امتحان کردن تک‌تک اعضاء عالم سخن در خاصیت $P(x)$ برای عالم سخن‌های نامتناهی نامکن است. اما می‌توان با انتخاب یک عضو نمونه از عالم سخن، درستی گزارهٔ $\forall x \ P(x)$ را ثابت کرد.

چطور می‌توان با انتخاب یک عضو از عالم سخن، نشان داد که $P(x)$ برای هر عضو عالم سخن درست است؟

من منظورم این نبود که یک عضو خاص از عناصر عالم سخن را انتخاب کنیم. عضوی که از عالم سخن انتخاب می‌کنیم، عضوی دلخواه از عالم سخن باید باشد.

عضو دلخواه یعنی چه؟

بله درک این «عضو دلخواه» ساده نیست. برای اینکه مفهوم عضو دلخواه را بفهمیم، به مثال زیر توجه کنید.

مثال گزارهٔ $\forall x \ x-۲\sqrt{x}\geq -۱$ را با عالم سخن $A=[۰,\infty)$ درنظر بگیرید.

شما یک عدد از عالم سخن $A=[۰,\infty)$ را در ذهنتان تجسم کنید.

من عدد ۹۷ را در ذهنم تجسم کرده‌ام.

اکنون فرض کنید $P(x):\ x-۲\sqrt{x}\geq -۱$ و سپس درستی $P(۹۷)$ را ثابت کنید.

$$P(۹۷):۹۷-۲\sqrt{۹۷}\geq -۱$$
$$۹۷-۲\sqrt{۹۷}+۱\geq ۰$$
$$(\sqrt{۹۷})^{۲}-۲\sqrt{۹۷}+۱\geq ۰$$
$$(\sqrt{۹۷}-۱)^{۲}\geq ۰$$

بله، گزارهٔ $P(۹۷)$ درست است؛ زیرا $(\sqrt{۹۷}-۱)^{۲}\geq ۰$ گزاره‌ای درست است.

بعداً یاد می‌گیریم که شما باید به صورت زیر اثبات‌تان را بنویسید.

چون $(\sqrt{۹۷}-۱)^{۲}\geq ۰$ درست است، بنابراین $۹۷-۲\sqrt{۹۷}+۱\geq ۰$.

پس $۹۷-۲\sqrt{۹۷}\geq -۱$ درست است. درنتیجه، گزارهٔ $P(۹۷)$ درست است.

اما این عدد ۹۷، هنوز یک عدد خاص است.

شما در این اثبات، واقعاً به ویژگی‌های خاص عدد ۹۷ کاری نداشتید، مثلاً از اینکه ***۹۷ یک عدد طبیعی است***؛ ***مربع کامل نیست***؛ ***عددی فرد است***؛ ***عددی اول است*** و غیره هیچ استفاده‌ای نکردیم. فقط از اینکه ۹۷ عددی حقیقی و نامنفی است استفاده شده است. حالا به جای ۹۷، ما عدد a را قرار می‌دهیم که a عضوی از عالم سخن $A=[۰,\infty)$ است. می‌خواهیم نشان دهیم $P(a)$ ؛ یعنی $a-۲\sqrt{a}\geq -۱$، درست است.

چون $(\sqrt{a}-۱)^{۲}\geq ۰$ به ازای $a\geq ۰$ درست است، بنابراین: $a-۲\sqrt{a}+۱\geq ۰$؛ درنتیجه به ازای هر $a\geq ۰$ داریم:

$$a-۲\sqrt{a}\geq -۱$$

این عدد a ، همان عضو دلفواه از عالم سفن است. یعنی یکباره، برای همهٔ عناصر عالم سفن نشان داریم $P(a)$ درست است.

اجازه دهید نکات زیر را در مورد گزاره‌های باسور عمومی اضافه کنیم.

❶ در بعضی از گزاره‌های با سور عمومی، مانند $\sin^{۲}x+\cos^{۲}x=۱$، عبارت «برای هر x» یا « $\forall x$» نوشته نمی‌شود، اگرچه واقعاً منظورشان از نوشتن $\sin^{۲}x+\cos^{۲}x=۱$ گزارهٔ $\forall x\in\mathbb{R}\ \sin^{۲}x+\cos^{۲}x=۱$ است. گزارهٔ زیر هم یک گزارهٔ با سور عمومی است که قسمت « $\forall a,b\in\mathbb{R}$» نوشته نشده است.

$$(a+b)^{۲}=a^{۲}+۲ab+b^{۲}$$

❷ گاهی گزاره‌های با سور عمومی به صورت شرطی بیان می‌شوند، بدون اینکه عبارت «به ازای هر x» یا « $\forall x$» آورده شود. مثلاً گزارهٔ «*اگر n یک عدد صحیح باشد، آنگاه $۳n^۲+۵n$ عددی زوج است.*» ، را در نظر بگیرید. این گزاره، در واقع گزاره با سور عمومی زیر است.

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad (\text{زوج است.}\ ۳n^۲+۵n)$$

این مثال‌ها را نگاه کنید؛ همهٔ این مثال‌ها، گزاره‌های با سور عمومی هستند، که قسمت « $\forall x$» یا « $\forall n$» آنها نوشته نشده است.

الف $x>۳ \Rightarrow x^۲>۹$

ب $n^۲$ زوج است. $\Leftrightarrow$ n زوج است.

شما گزارهٔ الف را باید به صورت زیر بخوانید:

الف *هر عدد حقیقی بزرگتر از ۳، مربع‌اش از ۹ بزرگ‌تر است.*

گزارهٔ ب به صورت زیر خوانده می‌شود.

ب *هر عدد صحیح زوج است اگر و تنها اگر مربعش زوج باشد.*

گزاره‌های با سور وجودی

تا به حال، گزاره‌هایی که بررسی می‌کردیم گزاره‌های از نوع $\forall x \ P(x)$ بوده است. اکنون می‌خواهیم گزاره‌های با سور وجودی یعنی $\exists x \ P(x)$ را مطرح کنیم. این گزاره می‌گوید: عضوی در عالم سخن وجود دارد که به ازای آن خاصیت $P(x)$ برقرار است. گاهی تشخیص این نوع گزاره‌ها ساده نیست. به مثال زیر توجه کنید.

مثال گزارهٔ «معادلهٔ $x^۲-۳=۰$ در $\mathbb{R}$ جواب دارد.» را درنظر بگیرید. این گزاره یک گزاره با سور وجودی است.

از کجا می‌توان فهمید که این یک گزاره با سور وجودی است؟

یک معادله $f(x)=۰$ جواب دارد، یعنی x ای از دامنهٔ تابع f وجود دارد که در معادله صدق می‌کند؛ به عبارت دیگر x ای از دامنهٔ تابع وجود دارد به طوری که $f(x)=۰$. بنابراین معادلهٔ $x^۲-۳=۰$ جواب دارد، یعنی x ای در $\mathbb{R}$ وجود دارد به طوری که $x^۲-۳=۰$. درنتیجه، این گزاره به صورت $\exists x \in \mathbb{R} \ \ x^۲-۳=۰$ بیان می‌شود که یک گزاره با سور وجودی است.

درستی گزاره‌های با سور وجودی چگونه ثابت می‌شود؟

برای اثبات گزارهٔ $\exists x \ P(x)$

- *عضو* $x=a$ *از عالم سخن را مشخص می‌کنیم.*
- *ثابت می‌کنیم* $P(a)$ *درست است.*