۱ ۳ دو زوج مرتب $(۲k-۱,-b+۱)$ و $(k-\frac{۱}{۲},\frac{۲k-۱}{۳})$ نمایش یک نقطه هستند، پس این دو زوج مرتب با هم برابر بوده و در نتیجه مؤلفه‌های اول آن‌ها با هم و مؤلفه‌های دوم آن‌ها نیز با هم برابرند. در نتیجه داریم:

$$\begin{cases} ۲k-۱=k-\frac{۱}{۲} \Rightarrow k=۱-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲} \\ -b+۱=\frac{۲k-۱}{۳} \xRightarrow{k=\frac{۱}{۲}} -b+۱=\frac{۲(\frac{۱}{۲})-۱}{۳}=۰ \Rightarrow b=۱ \end{cases}$$

با توجه به مقادیر به دست‌آمده، $۲k=b$ می‌باشد.

۲ ۴ قرار است x و y اعداد صحیح باشند و مجموع قدرمطلق‌هایشان مساوی ۲ شود، پس:

$$\begin{cases} |x|=۰,|y|=۲ \Rightarrow x=۰\ ,\ y=-۲,۲ \Rightarrow \underbrace{(۰,-۲),(۰,۲)}_{\text{۲ زوج مرتب}} \in R \\ |x|=۱,|y|=۱ \Rightarrow x=-۱,۱\ ,\ y=-۱,۱ \\ \Rightarrow \underbrace{(-۱,-۱),(-۱,۱),(۱,-۱),(۱,۱)}_{\text{۴ زوج مرتب}} \in R \\ |x|=۲\ ,|y|=۰ \Rightarrow x=-۲,۲\ ,\ y=۰ \Rightarrow \underbrace{(-۲,۰),(۲,۰)}_{\text{۲ زوج مرتب}} \in R \end{cases}$$

در نتیجه R کلاً ۸ عضو زوج مرتب دارد.

۳ ۳ با توجه به این‌که $A=\{m \mid m\in\mathbb{Z}\ ,\ m^۲\le ۴\}$ می‌باشد، پس $A=\{-۲,-۱,۰,۱,۲\}$ است. از طرفی در هر عضو از رابطهٔ R، باید مؤلفهٔ اول از مؤلفهٔ دوم، کوچک‌تر باشد (یعنی $x<y$)، پس خواهیم داشت:

$$R=\{(-۲,-۱),(-۲,۰),(-۲,۱),(-۲,۲),(-۱,۰),(-۱,۱),(-۱,۲),(۰,۱),(۰,۲),(۱,۲)\}$$

بنابراین رابطهٔ R، شامل ۱۰ عضو است.

۴ ۳ برای این‌که جدول ارائه‌شده، نشانگر یک تابع باشد، باید به ازای ورودی ۳-، خروجی‌های $۲a+۱$ و ۹، مساوی باشند، یعنی این‌که:

$$۲a+۱=۹ \Rightarrow ۲a=۸ \Rightarrow a=۴$$

۵ ۴ رابطهٔ f یک تابع است، پس به دلیل وجود دو زوج مرتب $(۲,۱)$، $(۲,m^۲-۳)$، باید $m^۲-۳=۱$ باشد، در نتیجه:

$$m^۲=۴ \Rightarrow m=-۲ \text{ یا } m=۲$$

بنابراین داریم:

$$\begin{cases} \text{اگر } m=-۲ \Rightarrow f=\{(-۲,n),\underbrace{(۲,۱),(n+۱,۳),(۲,n+۱)}\} \\ \Rightarrow ۱=n+۱ \Rightarrow n=۰ \Rightarrow n-m=۰-(-۲)=۲ \\ \text{اگر } m=۲ \Rightarrow f=\{\underbrace{(۲,n),(۲,۱)},(n+۱,۳),(-۲,n+۱)\} \Rightarrow n=۱ \end{cases}$$

حواستان باشد که $n=۱$ قابل‌قبول نیست، زیرا در این صورت $f=\{(۲,۱),(۲,۳),(-۲,۲)\}$ می‌باشد و به خاطر وجود دو زوج مرتب $(۲,۱)$ و $(۲,۳)$ نتیجه می‌گیریم که f، یک تابع نیست.

۶ ۲ تابع f فقط شامل یک زوج مرتب است، پس همهٔ مؤلفه‌های اول با یکدیگر و مؤلفه‌های دوم نیز با یکدیگر مساوی هستند. بنابراین داریم:

مؤلفه‌های اول: $c^۲+۳c=-۲ \Rightarrow c^۲+۳c+۲=۰$

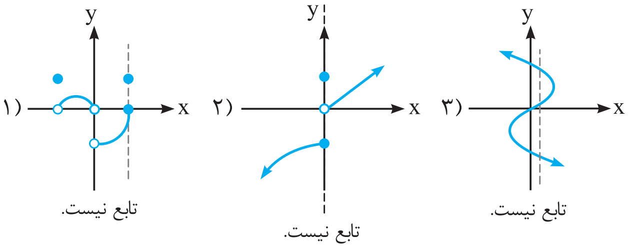
$\Rightarrow (c+۱)(c+۲)=۰ \Rightarrow c=-۱$ یا $c=-۲$

مؤلفه‌های دوم: $a^۲-۴a+۶=b=۳c+۵$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{اگر } c=-۱: \begin{cases} a^۲-۴a+۶=۳(-۱)+۵ \Rightarrow a^۲-۴a+۴=۰ \\ \Rightarrow (a-۲)^۲=۰ \Rightarrow a=۲ \\ b=۳(-۱)+۵ \Rightarrow b=۲ \Rightarrow \frac{a+c}{b}=\frac{۲+(-۱)}{۲}=\frac{۱}{۲} \end{cases} \\ \text{اگر } c=-۲: a^۲-۴a+۶=۳(-۲)+۵ \Rightarrow a^۲-۴a+۷=۰ \\ \Rightarrow \Delta=(-۴)^۲-۴(۱)(۷)=-۱۲<۰ \end{cases}$$

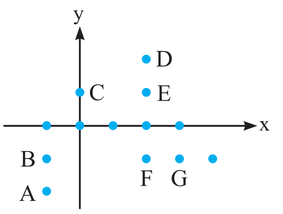
در نتیجه معادله جواب ندارد، پس $c=-۲$ قابل قبول نیست.

۷ ۴ نمودارهای رسم‌شده در گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) مربوط به یک تابع نیستند، زیرا می‌توان خطی به موازات محور yها رسم کرد که نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کند. ببینید:



اما نمودار رسم شده در گزینهٔ (۴) یک تابع را نشان می‌دهد، زیرا هر خطی که به موازات محور yها رسم شود، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

۸ ۲ یک نمودار زمانی تابع است که هر خط موازی محور y ها، آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند، پس با حذف نقاط A، B، C، D، E، F و G در شکل زیر، می‌توانیم نمودار رابطه را به یک تابع تبدیل کنیم. *(حواستون باشه که حتماً نباید نقطه‌هایی که ما مشخص کردیم رو حذف کنین. داستان اینه که شما باید هفت تا از نقطه‌هایی رو که روی خطوط موازی محور y ها قرار می‌گیرن و مانع تابع بودن می‌شن رو از سر راه بردارین.)*



۹ ۱ براساس جدول داده‌شده، می‌توان نوشت:

$$\text{دامنهٔ تابع}=\{-۶,k(k+۴),-۱\}=\{-۶,-۴,-۱\} \Rightarrow k(k+۴)=-۴$$

$$\Rightarrow k^۲+۴k+۴=۰ \Rightarrow (k+۲)^۲=۰ \Rightarrow k=-۲$$

حال سراغ برد تابع (قسمت پایینی جدول) می‌رویم:

$$\text{برد تابع}=\{۲k^۲-l,\underbrace{k-۱}_{-۳},۳\}=\{-۳,۳,۶\} \Rightarrow ۲k^۲-l=۶$$

$$\xRightarrow{k=-۲} ۲(-۲)^۲-l=۶ \Rightarrow ۸-l=۶ \Rightarrow l=۲$$

بنابراین $k+l=-۲+۲=۰$ است.

۱۰ ۴ ابتدا شروع می‌کنیم به نوشتن عضوهای دوتایی تابع f. گفته‌شده $-۳<x\le ۲$ و x عددی صحیح است، یعنی x می‌تواند ۲-، ۱-، ۰، ۱ و ۲ باشد. ضمناً $y=|x-۱|$ است، پس داریم:

$$f=\{\underset{|-۲-۱|=۳}{(-۲,۳)},(-۱,۲),(۰,۱),(۱,۰),(۲,۱)\} \Rightarrow \text{برد } f=\{۳,۲,۱,۰\}$$

بنابراین برد تابع f شامل چهار عضو است.

۱۱ ۲ دامنه و برد تابع f به صورت زیر می‌باشند:

$$D_f=\{۱۲,a^۳-۷\}\quad,\quad R_f=\{b^۲+۲,۲c^۳-۱\}$$

پس باید:

$$\begin{cases} a^۳-۷=۲۰\Rightarrow a^۳=۲۷\Rightarrow a=۳\\ b^۲+۲=۶\Rightarrow b^۲=۴ \\ ۲c^۳-۱=۱\Rightarrow ۲c^۳=۲\Rightarrow c^۳=۱\Rightarrow c=۱\end{cases}\Rightarrow \frac{ac}{b^۲}=\frac{۳\times ۱}{۴}=۰/۷۵$$

توجه کنید که اگر $b^۲+۲=۱$ باشد، آن‌گاه $b^۲=-۱$ غیرقابل قبول خواهد بود.

۱۲ ۳ همان‌طور که گفتیم تعداد اعضای دامنهٔ یک تابع، بزرگ‌تر یا مساوی تعداد اعضای برد آن است، پس در این‌جا داریم:

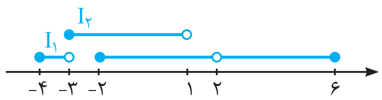
$$۷۲-۵n\ge ۴n+۳\Rightarrow ۹n\le ۶۹\Rightarrow n\le \frac{۶۹}{۹}\simeq ۷/۶$$

$\xrightarrow{n\in\mathbb{N}} n=$ ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵ یا ۶ یا ۷

۱۳ ۴ با تصویر کردن نمودار تابع f روی محور x ها و y ها به‌ترتیب دامنه و برد این تابع به دست می‌آید، بنابراین:

$$\begin{cases} \text{دامنهٔ تابع } f: I_۱=[-۴,-۳)\cup[-۲,۲)\cup(۲,۶] \\ \text{برد تابع } f: I_۲=[-۳,۱)\end{cases}$$

حال می‌خواهیم $I_۲-I_۱$ را به دست آوریم. برای این منظور داریم:



$$\Rightarrow I_۲-I_۱=[-۳,-۲)$$

۱۴ ۴ با تصویرکردن نمودار تابع f روی محور yها نتیجه می‌گیریم برد تابع f برابر $(-\infty,۳]$ است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$f\le ۳ \xrightarrow{y=\sqrt{f}} ۰\le\sqrt f\le\sqrt۳ \Rightarrow \text{برد تابع } \sqrt f=[۰,\sqrt۳]$$

۱۵ ۲ روش اول: با دقت به اعداد ورودی و خروجی ماشین f، نتیجه می‌گیریم که به هریک از ورودی‌ها، ۲ واحد اضافه‌شده و بعد به توان ۲ رسانده شده‌اند، ببینید:

$x=۰\Rightarrow y=(۰+۲)^۲=۴$ $x=۳\Rightarrow y=(۳+۲)^۲=۲۵$

$x=۵\Rightarrow y=(۵+۲)^۲=۴۹$ $x=۹\Rightarrow y=(۹+۲)^۲=۱۲۱$

$x=۱۱\Rightarrow y=(۱۱+۲)^۲=۱۶۹$ $x=۱۳\Rightarrow y=(۱۳+۲)^۲=۲۲۵$

بنابراین نتیجه می‌گیریم نمایش جبری تابع به صورت $f(x)=(x+۲)^۲=x^۲+۴x+۴$ است.

روش دوم: می‌توانید ورودی‌ها را در هریک از ضابطه‌ها که در گزینه‌ها آمده، جای‌گذاری کنید و خروجی‌های به دست آمده را با خروجی‌های صورت مسأله، مقایسه کنید تا به راحتی به گزینهٔ درست برسید (*امتحان کنین*).

۱۶ ۲ با جای‌گذاری $x=۱$، به سادگی می‌توانیم تابع نبودن گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) را نشان دهیم. کافی است $x=۱$ باشد، در این صورت:

$$|x|+|y|=۶\xrightarrow{x=۱}|y|=۵\Rightarrow y=\pm۵\Rightarrow \text{تابع نیست.}$$

اما در گزینهٔ (۲) گفته‌شده $x,y\in\mathbb{N}$، یعنی x و y هر دو مثبت‌اند و در نتیجه به ازای هر x ای که می‌دهیم، حداکثر یک مقدار برای y حاصل می‌شود، پس تابع خواهد بود.

۱۷ ۲ تک‌تک موارد را بررسی می‌کنیم:

الف) $\underbrace{|x+۲|}_{\text{بزرگ‌تریا مساوی‌صفر}}+\underbrace{\sqrt{y-۱}}_{\text{بزرگ‌تریا مساوی‌صفر}}=۰\xrightarrow{\text{باید}}\begin{cases}|x+۲|=۰\Rightarrow x=-۲\\ \sqrt{y-۱}=۰\Rightarrow y=۱\end{cases}$

$\Rightarrow(-۲,۱)\Rightarrow$ تابع است.

ب) $x^۲+y^۲-۵=۰: x=۰\Rightarrow y^۲=۵\Rightarrow y=\pm\sqrt۵\Rightarrow$ تابع نیست.

پ) $y^۲-۹y-x=۰: x=۰\Rightarrow y^۲-۹y=۰\Rightarrow y(y-۹)=۰$

$\Rightarrow y=۰\ ,\ y=۹\Rightarrow$ تابع نیست.

همان‌طور که می‌بینید، فقط مورد (الف) معرف یک تابع است.

۱۸ ۲ الف) به خاطر وجود $\sqrt x$ و $\sqrt{-x}$ و دامنهٔ آن‌ها، متغیر x فقط می‌تواند صفر باشد و در نتیجه y هم صفر می‌شود، یعنی نمودار فقط یک نقطه می‌شود و تابع است.

ب) تابع است، ببینید:

$$\frac yx+\frac xy+۲=۰\Rightarrow\frac{y^۲+x^۲+۲xy}{xy}=۰\Rightarrow\frac{(y+x)^۲}{xy}=۰\Rightarrow(y+x)^۲=۰$$

در نتیجه $y=-x$ و $\underbrace{(x,y\ne۰)}_{\text{به خاطر ریشهٔ مخرج}}$. به ازای هر مقدار x، فقط یک مقدار برای y پیدا می‌شود، پس تابع است.

پ) تابع نیست، زیرا به ازای $x=۰$ می‌توانیم هر مقدار دلخواهی را به y بدهیم $(۰\times y=۰)$.

ت) تابع نیست، زیرا:

$$x^۲=t\Rightarrow x=\pm\sqrt t\xrightarrow{f(x^۲)=x} f(t)=\pm\sqrt t\Rightarrow f(x)=\pm\sqrt x$$

در نتیجه به ازای هر x مثبتی، دو مقدار برای y حاصل می‌شود.

خلاصه این‌که فقط موارد (الف) و (ب) تابع هستند.

۱۹ ۲ همهٔ موارد را بررسی می‌کنیم:

الف) با فرض $x=۱$، می‌رسیم به $|y|=۱$ و در نتیجه $y=\pm۱$. از آن‌جا که به ازای یک مقدار برای x، دو مقدار برای y به دست آمده، پس این رابطه، تابع نیست.

ب) داریم $y=\pm\sqrt{-(۹x^۲-۶x+۱)}=\pm\sqrt{-(۳x-۱)^۲}$. از آن‌جا که عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج، باید همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد، و عبارت $-(۳x-۱)^۲$ همواره کوچک‌تر یا مساوی صفر می‌باشد، پس فقط به ازای $x=\frac{۱}{۳}$، این رادیکال تعریف شده خواهد بود که مقدار y برابر صفر می‌شود و در نتیجه این رابطه فقط شامل یک زوج مرتب با مختصات $(\frac{۱}{۳},۰)$ می‌باشد، پس تابع است.

پ) در مورد رابطهٔ $y^۳+۳y^۲+۳y+x^۲-۱=۰$ می‌توان نوشت:

$$\underbrace{y^۳+۳y^۲+۳y+۱}_{(y+۱)^۳}-۱+x^۲-۱=۰\Rightarrow(y+۱)^۳+x^۲-۲=۰$$

$$\Rightarrow(y+۱)^۳=۲-x^۲\Rightarrow y+۱=\sqrt[۳]{۲-x^۲}\Rightarrow y=-۱+\sqrt[۳]{۲-x^۲}\quad(*)$$

همان‌طور که می‌بینید، به ازای هر x حقیقی که در رابطهٔ (*) قرار دهیم، فقط یک مقدار برای y به دست می‌آید، پس تابع است.

ت) در مورد رابطهٔ $y^۲-۴y+۴=\sin x$، این‌طور می‌نویسیم:

$$(y-۲)^۲=\sin x \xrightarrow{\text{جذر}} |y-۲|=\sqrt{\sin x}$$
$$\Rightarrow y-۲=\pm\sqrt{\sin x} \Rightarrow y=۲\pm\sqrt{\sin x}$$

با فرض $x=\frac{\pi}{۲}$، خواهیم داشت:

$$y=۲\pm\sqrt{\sin\frac{\pi}{۲}}=۲\pm\sqrt{۱}=۲\pm۱=۳ \text{ یا } ۱\Rightarrow \text{تابع نیست.}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید فقط موارد (ب) و (پ) تابع هستند.

۲۰ **۱** همهٔ موارد را بررسی می‌کنیم:

الف) با فرض $x=۱$ در رابطهٔ $\sqrt[۵]{x}\,|y|=۱$، خواهیم داشت:

$$\sqrt[۵]{۱}\,|y|=۱\Rightarrow |y|=۱\Rightarrow y=\pm۱\Rightarrow \text{تابع نیست.}$$

ب) با فرض $x=۱$ در رابطهٔ $y^۴=۵^x$، خواهیم داشت:

$$y^۴=۵\Rightarrow y=\pm\sqrt[۴]{۵}\Rightarrow \text{تابع نیست.}$$

پ) همان‌طور که در رابطهٔ $\sqrt{۲x-۱}+\sqrt{y^۲-۹}=۰$ می‌بینید، مجموع دو عبارت نامنفی، برابر صفر شده است، پس تک‌تک این عبارت‌ها باید برابر صفر باشند، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} ۲x-۱=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۲} \\ y^۲-۹=۰\Rightarrow y^۲=۹\Rightarrow y=-۳ \text{ یا } ۳ \end{cases}$$

در نتیجه رابطهٔ فوق شامل دو زوج مرتب $(\frac{۱}{۲},-۳)$ و $(\frac{۱}{۲},۳)$ می‌باشد، پس تابع نیست.

ت) از رابطهٔ $\sqrt[۴]{x^۲y}\times\sqrt[۴]{x^۲y-۲}=۰$ نتیجه می‌گیریم $x^۲y=۰$ یا $x^۲y=۲$، که البته $x^۲y=۰$ قابل‌قبول نیست، زیرا در این صورت، عبارت زیر رادیکال دومی، منفی می‌شود، پس فقط $x^۲y=۲$ را می‌پذیریم و در نتیجه $y=\frac{۲}{x^۲}$ خواهد بود که تابع می‌باشد.

بنابراین فقط مورد (ت) نمایش ضابطهٔ یک تابع است.

۲۱ **۱** ابتدا ضابطهٔ تابع $y=\frac{x^۲+۲x+۲}{x+۳}$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

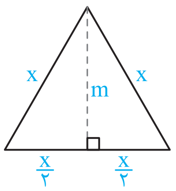
$$y=\frac{(x+۳)(x-۱)+۵}{x+۳}=x-۱+\frac{۵}{x+۳}$$

با توجه به صحیح بودن y، باید عدد ۵ بر $x+۳$ بخش‌پذیر باشد، پس داریم:

$$\begin{cases} x+۳=۱\Rightarrow x=-۲\Rightarrow \xrightarrow{x\in\mathbb{Z}} \text{قابل‌قبول} \\ \Rightarrow y=-۲-۱+\frac{۵}{۱}=۲\Rightarrow A(-۲,۲) \\ x+۳=-۱\Rightarrow x=-۴ \xrightarrow{x\in\mathbb{Z}} \text{قابل‌قبول} \\ \Rightarrow y=-۴-۱+\frac{۵}{-۱}=-۱۰\Rightarrow B(-۴,-۱۰) \\ x+۳=۵\Rightarrow x=۲ \xrightarrow{x\in\mathbb{Z}} \text{قابل‌قبول} \\ \Rightarrow y=۲-۱+\frac{۵}{۵}=۲\Rightarrow C(۲,۲) \\ x+۳=-۵\Rightarrow x=-۸ \xrightarrow{x\in\mathbb{Z}} \text{قابل‌قبول} \\ \Rightarrow y=-۸-۱+\frac{۵}{-۵}=-۱۰\Rightarrow D(-۸,-۱۰) \end{cases}$$

در نتیجه نمودار تابع فوق، از چهار زوج مرتب A، B، C و D تشکیل شده است.

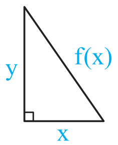
۲۲ **۱** در مثلث متساوی‌الاضلاع، میانه و ارتفاع برهم منطبق هستند، بنابراین داریم:



$$\begin{cases} \text{مساحت}: S=\frac{۱}{۲}mx \quad (*) \\ \text{رابطهٔ فیثاغورس}: (\frac{x}{۲})^۲+m^۲=x^۲\Rightarrow m^۲=\frac{۳x^۲}{۴} \\ \xrightarrow{\times\frac{۴}{۳}} x^۲=\frac{۴m^۲}{۳}\Rightarrow x=\frac{۲m}{\sqrt{۳}} \quad (**) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(*),(**)} S=\frac{۱}{۲}\times m\times\frac{۲m}{\sqrt{۳}}=\frac{m^۲}{\sqrt{۳}}\times\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}m^۲$$
$$\Rightarrow S(m)=\frac{\sqrt{۳}}{۳}m^۲$$

۲۳ **۱** با توجه به داده‌های مسأله و شکل زیر، می‌توان نوشت:



$$\text{مساحت مثلث}: \frac{۱}{۲}xy=۱۵\Rightarrow xy=۳۰$$
$$\Rightarrow y=\frac{۳۰}{x} \quad (*)$$

حال از طریق رابطهٔ فیثاغورس، خواهیم داشت:

$$f^۲(x)=x^۲+y^۲ \xrightarrow{(*)} f^۲(x)=x^۲+(\frac{۳۰}{x})^۲$$
$$\Rightarrow f^۲(x)=x^۲+\frac{۹۰۰}{x^۲}=\frac{x^۴+۹۰۰}{x^۲}$$
$$\xrightarrow{\text{جذر}} f(x)=\sqrt{\frac{x^۴+۹۰۰}{x^۲}}=\frac{\sqrt{x^۴+۹۰۰}}{x}$$

۲۴ **۲** طول ضلع مکعب را x درنظر بگیرید، در این صورت:

$$\begin{cases} \text{حجم مکعب}: V=x^۳ \\ \text{مساحت کل مکعب}: S=۶x^۲\Rightarrow x^۲=\frac{S}{۶}\Rightarrow x=(\frac{S}{۶})^{\frac{۱}{۲}} \\ \xrightarrow{V=x^۳} V=((\frac{S}{۶})^{\frac{۱}{۲}})^۳=(\frac{S}{۶})^{\frac{۳}{۲}}\Rightarrow V(S)=\frac{S}{۶}\sqrt{\frac{S}{۶}} \end{cases}$$

۲۵ **۲** دو نیم‌کره‌ای که در دو انتهای استوانه قرار دارند را می‌توانیم یک کره درنظر بگیریم. پس با این اوصاف یک استوانه داریم با یک کره. حجم هر کدام از آن‌ها را تعیین کرده و با هم جمع می‌کنیم:

$$\begin{cases} \text{حجم کره}: V_۱=\frac{۴}{۳}\pi r^۳ \quad (r: \text{شعاع کره}) \\ \text{حجم استوانه}: V_۲=\pi r^۲h \xrightarrow{h=۳۰} V_۲=۳۰\pi r^۲ \end{cases}$$

بنابراین حجم تانکر برابر است با:

$$V=V_۱+V_۲=\frac{۴}{۳}\pi r^۳+۳۰\pi r^۲=\pi r^۲(\frac{۴}{۳}r+۳۰)$$

همان‌طور که می‌بینید، حجم تانکر، $r^۲(\frac{۴}{۳}r+۳۰)$ برابر π است.

۲۶ **۳** مساحت مثلث قائم‌الزاویهٔ مورد نظر در شکل برابر است با: $S=\frac{p\times k}{۲}$. حال معادلهٔ خط گذرنده از نقاط $(p,۰)$ و $(۰,-k)$ را می‌نویسیم:

$$\text{شیب خط}=\frac{-k-۰}{۰-p}=\frac{-k}{-p}=\frac{k}{p}\Rightarrow \text{معادلهٔ خط}: y-۰=\frac{k}{p}(x-p)$$

این خط از نقطهٔ $(5,-1)$ می‌گذرد، بنابراین مختصات این نقطه در معادلهٔ خط صدق می‌کند، در نتیجه:

$$-1=\frac{k}{p}(5-p)\Rightarrow -p=5k-kp\Rightarrow -p+kp=5k$$

$$\Rightarrow p(-1+k)=5k\Rightarrow p=\frac{5k}{k-1}\qquad (*)$$

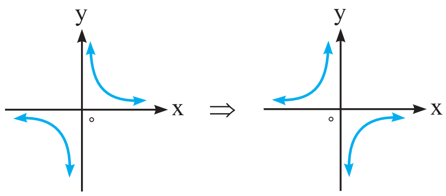
حال می‌توانیم از طریق تساوی $(*)$، مساحت مثلث را برحسب k بنویسیم. به این صورت:

$$S=\frac{p\times k}{2}\overset{(*)}{=}\frac{\frac{5k}{k-1}\times k}{2}=\frac{\frac{5k^2}{k-1}}{2}=\frac{5k^2}{2k-2}$$

۲۷ **۱** به بررسی دو مورد ارائه‌شده، می‌پردازیم:

الف) نادرست است، زیرا $x=0$ در دامنهٔ تابع وجود ندارد، ولی عدد حسابی است.

ب) درست است، زیرا دامنهٔ تابع برابر $\mathbb{R}-\{0\}$ می‌باشد که نسبت به مبدأ مختصات، تقارن دارد. از طرفی نمودار تابع نیز نسبت به مبدأ مختصات، متقارن است. ببینید:



$y=\frac{1}{x}$ $\qquad$ $y=-\frac{1}{x}$

۲۸ **۴** با توجه به داده‌های مسأله و گزینه‌های داده‌شده، نتیجه می‌گیریم که همهٔ گزینه‌ها، توابع کسری گویا هستند و در صورتی دامنهٔ آن‌ها برابر $\mathbb{R}$ می‌شود که مخرج کسر، ریشه نداشته باشد.

حال با در نظر گرفتن $f(x)=x^2-x$ و $g(x)=x+2$ می‌رویم سراغ بررسی گزینه‌ها:

$$1)\ \ y=\frac{1}{g(x)-f(x)}=\frac{1}{(x+2)-(x^2-x)}=\frac{1}{-x^2+2x+2}$$

مخرج: $-x^2+2x+2=0\Rightarrow \Delta=2^2-4(-1)(2)=4+8=12>0$

بنابراین مخرج کسر دارای دو ریشهٔ متمایز است (مثلاً $x=\alpha$ و $x=\beta$) و در نتیجه دامنهٔ آن برابر $\mathbb{R}$ نمی‌شود، بلکه برابر $\mathbb{R}-\{\alpha,\beta\}$ است.

$$2)\ \ y=\left(\frac{g}{f}\right)(x)=\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{x+2}{x^2-x}\Rightarrow \text{مخرج}: x^2-x=0$$

$$\Rightarrow x(x-1)=0\Rightarrow x=0 \text{ یا } 1\Rightarrow D_y=\mathbb{R}-\{0,1\}$$

$$3)\ \ y=\frac{g^2(x)}{f(x)-2}=\frac{(x+2)^2}{x^2-x-2}\Rightarrow \text{مخرج}: x^2-x-2=0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x+1)=0\Rightarrow x=2 \text{ یا } -1$$

$$\Rightarrow D_y=\mathbb{R}-\{-1,2\}$$

$$4)\ \ y=\frac{f(x)+1}{f(x)+g(x)}=\frac{(x^2-x)+1}{(x^2-x)+(x+2)}=\frac{x^2-x+1}{x^2+2}$$

$$\Rightarrow \text{مخرج}: x^2+2=0\Rightarrow x^2=-2\Rightarrow \text{غیرقابل‌قبول}$$

همان‌طور که می‌بینید مخرج کسر، ریشهٔ حقیقی ندارد و در نتیجه دامنهٔ این تابع برابر $\mathbb{R}$ است.

۲۹ **۴** با توجه به نمودار داده شده، دامنهٔ تابع برابر $\mathbb{R}-\{-1\}$ است، پس گزینه‌های (۱) و (۲) رد می‌شوند. حال می‌رویم سراغ گزینه‌های (۳) و (۴):

گزینهٔ (۳): $y=\frac{2x^2+2x}{x+1}=\frac{2x\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}}=2x\ ;\ x\in\mathbb{R}-\{-1\}$

گزینهٔ (۴): $y=\frac{2x^2+2x}{-x-1}=\frac{2x\cancel{(x+1)}}{-\cancel{(x+1)}}=-2x\ ;\ x\in\mathbb{R}-\{-1\}$

شیب خط رسم شده در نمودار، منفی است، پس گزینهٔ (۴) را می‌پذیریم.

۳۰ **۲** باید مخرج کسر، فاقد ریشه باشد تا کسر داده‌شده، همواره تعریف‌شده باشد. بنابراین:

$$\Delta_{\text{مخرج}}<0\Rightarrow (-5)^2-4(4)(3a)<0\Rightarrow 25-48a<0\Rightarrow 25<48a$$

$$\Rightarrow \frac{25}{48}<a$$

۳۱ **۲** برای تعیین دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{\frac{1}{x-1}-2}{\frac{1}{x}-1}$، باید ریشه‌های مخرج‌ها را پیدا کنیم و از $\mathbb{R}$ کم کنیم، بنابراین خواهیم داشت:

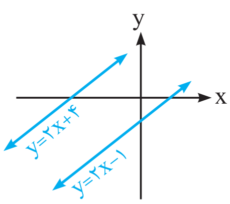
$$\begin{cases} x-1=0\Rightarrow x=1\\ x=0\\ \frac{1}{x}-1=0\Rightarrow \frac{1}{x}=1\Rightarrow x=1\end{cases}$$

در نتیجه دامنهٔ تابع برابر $\mathbb{R}-\{0,1\}$ می‌باشد که در مقایسه با $\mathbb{R}-A$ نتیجه می‌گیریم $A=\{0,1\}$ است که دو عضو دارد.

۳۲ **۲** در گزینهٔ (۳) نه دامنه‌ها مساوی‌اند و نه بردها. ببینید:

$$\begin{cases} y=\sqrt{-x}\Rightarrow D_y=(-\infty,0],\ R_y=[0,+\infty)\\ y=-\sqrt{x}\Rightarrow D_y=[0,+\infty), R_y=(-\infty,0]\end{cases}$$

در گزینهٔ (۱) دامنهٔ هر دو تابع، $\mathbb{R}$ است، ولی برد آن‌ها فرق دارد. برد یکی $\{3\}$ و برد دیگری $\{5\}$ است. در گزینهٔ (۴) دامنه‌ها یکی هستند (هر دو $\mathbb{R}$ می‌باشند)، بردها هم یکی هستند (*اون هم هر دو $\mathbb{R}$ اند*)، ولی این دو خط با هم موازی نبوده و در یک نقطه، همدیگر را قطع می‌کنند (طول نقطهٔ برخورد: $1+3x=2-x\Rightarrow 4x=1\Rightarrow x=\frac{1}{4}$). اما در مورد گزینهٔ (۲)، هم دامنهٔ دو تابع، یکسان است ($\mathbb{R}$) و هم بردشان یکی است (*اون هم* $\mathbb{R}$) و ضمناً شیب دو خط، برابر است یعنی با هم موازی‌اند، پس هیچ نقطهٔ مشترکی هم با یک‌دیگر ندارند. ببینید:



۳۳ **۳** تنها موارد (ب) و (ت) نادرست‌اند. ببینید:

ب) $g(x)=\sqrt{\frac{5-x}{6-x}}\ :\ \frac{5-x}{6-x}\geq 0\Rightarrow$

x		5		6	
$\frac{5-x}{6-x}$	$+$	0	$-$	تعریف‌نشده	$+$

$$\Rightarrow D_f=(-\infty,5]\cup(6,+\infty)$$

ت) $u(x)=\frac{x}{x}\ :\ x=0\Rightarrow D_u=\mathbb{R}-\{0\}$

۳۴ | ۱ داریم $g(x)=x^3-3x$، پس:

$$f(x)=\sqrt{x-g(x)}=\sqrt{x-(x^3-3x)}=\sqrt{4x-x^3}$$

حال برای تعیین دامنهٔ تابع f، کافی است نامساوی $4x-x^3\geq 0$ را حل کنیم.

برای این منظور، داریم:

$x(4-x^2)\geq 0 \xRightarrow{\text{تعیین علامت}}$

x		-2		0		2	
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$-x^2+4$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$x(4-x^2)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$$\Rightarrow D_f=(-\infty,-2]\cup[0,2]$$

۳۵ | ۱ عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\frac{3-|x|}{\underbrace{3+x^2}_{\text{مثبت}}}\geq 0\Rightarrow 3-|x|\geq 0\Rightarrow |x|\leq 3\Rightarrow -3\leq x\leq 3$$

$$\Rightarrow D_f=\{x:-3\leq x\leq 3\}$$

۳۶ | ۳ می‌توان نوشت:

$$-x^2(x^2-16)^4\geq 0\xRightarrow{\times(-1)}x^2(x^2-16)^4\leq 0\xRightarrow{\text{فقط}}x^2(x^2-16)^4=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x^2=0\Rightarrow x=0\\(x^2-16)^4=0\Rightarrow x^2-16=0\Rightarrow x^2=16\end{cases}$$

$$\xRightarrow{\text{جذر}}|x|=4\Rightarrow x=-4 \text{ یا } x=4$$

بنابراین $D_f=\{-4,0,4\}$ است و در نتیجه شامل سه عدد صحیح می‌باشد.

۳۷ | ۲ می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}x^2-9\geq 0\Rightarrow x^2\geq 9\xRightarrow{\text{جذر}}|x|\geq 3\Rightarrow x\leq -3 \text{ یا } x\geq 3 & (1)\\16-x^2>0\Rightarrow x^2<16\xRightarrow{\text{جذر}}|x|<4\Rightarrow -4<x<4 & (2)\end{cases}$$

$\xRightarrow{(1)\cap(2)}$ 

$$\Rightarrow D_f=(-4,-3]\cup[3,4)$$

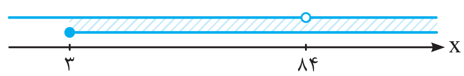
حال اگر سراغ گزینه‌ها بروید، متوجه می‌شوید که گزینهٔ (۲) نیز همین بازه را نشان می‌دهد. ببینید:

$$3\leq|x|<4\Rightarrow\begin{cases}3\leq|x|\Rightarrow x\leq -3 \text{ یا } x\geq 3\\|x|<4\Rightarrow -4<x<4\end{cases}$$

$$\xRightarrow{\text{اشتراک}}x\in(-4,-3]\cup[3,4)$$

۳۸ | ۱ می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}x-3\geq 0\Rightarrow x\geq 3 & (1)\\\sqrt{x-3}-9\neq 0\Rightarrow\sqrt{x-3}\neq 9\xRightarrow{\text{توان ۲}}x-3\neq 81\Rightarrow x\neq 84 & (2)\end{cases}$$

$\xRightarrow{(1)\cap(2)}$ 

$$\Rightarrow D_f=[3,+\infty)-\{84\}$$

با مقایسهٔ جواب به دست‌آمده با $[a,+\infty)-\{b\}$ نتیجه می‌گیریم $a=3$ و $b=84$ است، پس $\frac{b}{a}=\frac{84}{3}=28$ می‌باشد.

۳۹ | ۲ با توجه به اطلاعات ماشین داده‌شده، می‌توان نوشت:

$$x\xrightarrow{\text{توان ۴}}x^4\xrightarrow{\text{قرینه}}-x^4\xrightarrow{+16}-x^4+16\xrightarrow{\text{معکوس}}\frac{1}{-x^4+16}$$

$$\xrightarrow{\text{ریشهٔ مرتبهٔ چهارم}}\sqrt[4]{\frac{1}{-x^4+16}}=f(x)$$

گفته‌شده ورودی‌ها (یعنی xها) در بازهٔ (a,b) قرار دارند، پس دامنهٔ تابع f را به دست می‌آوریم تا بازهٔ (a,b) مشخص شود. برای این‌منظور، داریم:

$$\frac{1}{-x^4+16}\geq 0\Rightarrow -x^4+16>0\Rightarrow x^4<16\Rightarrow|x|<\sqrt[4]{16}$$

$$\Rightarrow|x|<2\Rightarrow -2<x<2$$

بنابراین $(a,b)=(-2,2)$ و بیشترین مقدار $b-a$ برابر $2-(-2)=4$ می‌باشد.

۴۰ | ۳ **روش اول:** باید نامعادلهٔ $\frac{2x+1}{x+2}-x\geq 0$ را حل کنیم:

$$\frac{2x+1-x(x+2)}{x+2}\geq 0\Rightarrow\frac{\cancel{2x}+1-x^2-\cancel{2x}}{x+2}\geq 0\Rightarrow\frac{-x^2+1}{x+2}\geq 0$$

$\xRightarrow{\text{جدول تعیین علامت}}$

x		-2		-1		1	
$-x^2+1$	$-$		$-$	0	$+$	0	$-$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$\frac{-x^2+1}{x+2}$	$+$	تعریف نشده	$-$	0	$+$	0	$-$

$$\Rightarrow \text{مجموعه جواب}: D_f=(-\infty,-2)\cup[-1,1]$$

روش دوم: عددگذاری از طریق گزینه‌ها.

۴۱ | ۳ باید عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج، بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد، پس:

$$\begin{cases}x-5\geq 0\Rightarrow x\geq 5 & (1)\\11-\sqrt{x-5}\geq 0\Rightarrow 11\geq\sqrt{x-5}\xRightarrow{\text{توان ۲}}121\geq x-5\Rightarrow 126\geq x & (2)\end{cases}$$

$$\xRightarrow{(1)\cap(2)}5\leq x\leq 126\Rightarrow D_y=[5,126]$$

در نتیجه دامنهٔ تابع شامل اعداد طبیعی ۵، ۶، ۷، ۸، ... و ۱۲۶ است که تعدادشان برابر $126-5+1$ یعنی ۱۲۲ می‌باشد.

۴۲ | ۱ به خاطر وجود $\sqrt{x+3}$، باید $x+3\geq 0$ باشد، پس $\underbrace{x\geq -3}_{(1)}$ است. از طرفی به خاطر وجود $\sqrt{2x-\sqrt{x+3}}$، باید $2x-\sqrt{x+3}\geq 0$ باشد، بنابراین:

$$2x\geq\sqrt{x+3}\xRightarrow{x\geq 0}4x^2\geq x+3\Rightarrow 4x^2-x-3\geq 0$$

$$\xRightarrow[x\geq 0]{\text{تعیین علامت}}x\geq 1\quad(2)$$

با اشتراک‌گیری از موارد (۱) و (۲) به دست می‌آید: $D_f=[1,+\infty)$، پس دامنهٔ تابع شامل همهٔ اعداد طبیعی می‌باشد.

۴۳ | ۴ کافی است مقادیر a را طوری بیابیم که به ازای هر عدد حقیقی x، نامعادلهٔ $ax^2+ax+1>0$ برقرار باشد و برای این موضوع باید $\Delta<0$ و $(x^2 \text{ضریب})>0$ باشد، پس:

$$\Delta<0\Rightarrow a^2-4a<0\Rightarrow a(a-4)<0$$

$\Rightarrow$

a		0		4	
a^2-4a	$+$	0	$-$	0	$+$

$\Rightarrow 0<a<4\quad(1)$

$$x^2 \text{ضریب}>0\Rightarrow a>0\quad(2)\xRightarrow{(1)\cap(2)}0<a<4\xRightarrow{a\in\mathbb{N}}a\in\{1,2,3\}$$

۴۴ | ۱ x فقط می‌تواند برابر $-\frac{۱}{۳}$ باشد. این یعنی که عبارت زیر رادیکال، همواره کوچک‌تر یا مساوی صفر است. در واقع عبارت زیر رادیکال به صورت $k(x+\frac{۱}{۳})^۲$ است و چون ضریب $x^۲$، برابر ۴- است، پس $k=-۴$ می‌باشد. در نتیجه:

$$-۴x^۲+ax-۲b=-۴(x+\frac{۱}{۳})^۲=-۴(x^۲+\frac{۲}{۳}x+\frac{۱}{۹})$$

$$=-۴x^۲-\frac{۸}{۳}x-\frac{۴}{۹}\Rightarrow\begin{cases}a=-\frac{۸}{۳}\\ -۲b=-\frac{۴}{۹}\Rightarrow b=\frac{۲}{۹}\end{cases}$$

$$\Rightarrow a+b=-\frac{۸}{۳}+\frac{۲}{۹}=\frac{-۲۴+۲}{۹}=-\frac{۲۲}{۹}$$

۴۵ | ۱ عبارت زیر رادیکال را کوچک‌تر از صفر قرار می‌دهیم تا اعدادی که در دامنه قرار ندارند را پیدا کنیم:

$$|۲-|x-۳||-۱<۰\Rightarrow||x-۳|-۲|<۱\Rightarrow -۱<|x-۳|-۲<۱$$

$$\xrightarrow{+۲} ۱<|x-۳|<۳\Rightarrow\begin{cases}۱<x-۳<۳\xrightarrow{+۳}۴<x<۶\\ -۳<x-۳<-۱\xrightarrow{+۳}۰<x<۲\end{cases}$$

بنابراین اعداد صحیح ۱ و ۵ در دامنهٔ تابع وجود ندارند که حاصل‌ضرب آن‌ها برابر ۵ می‌باشد.

۴۶ | ۳ ابتدا $f(-x)$ را می‌سازیم، سپس دامنه‌اش را پیدا می‌کنیم.

$$f(-x)=\sqrt{-x+|-x+۲|}\Rightarrow -x+|-x+۲|\geq۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\text{اگر } x\geq۲: -x+(x-۲)\geq۰\Rightarrow -۲\geq۰ \text{ غیرممکن}\Rightarrow\varnothing\\ \text{اگر } x<۲: -x+(-x+۲)\geq۰\Rightarrow ۲x\leq۲\Rightarrow x\leq۱\xrightarrow{\cap(x<۲)}x\leq۱\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اجتماع}} x\leq۱$$

۴۷ | ۴ کافی است عبارت زیر رادیکال را کوچک‌تر از صفر قرار دهیم تا بتوانیم مجموعهٔ اعدادی که در دامنهٔ تابع قرار ندارند را به دست آوریم:

$$|x-۶|-|x-۳|<۰\Rightarrow|x-۶|<|x-۳|\xrightarrow{\text{توان ۲}}(x-۶)^۲<(x-۳)^۲$$

$$\Rightarrow \cancel{x^۲}-۱۲x+۳۶<\cancel{x^۲}-۶x+۹\Rightarrow ۲۷<۶x\Rightarrow\frac{۲۷}{۶}<x\Rightarrow\frac{۹}{۲}<x$$

بنابراین اعداد طبیعی ۵، ۶، ۷، ۸ و ... در دامنهٔ تابع وجود ندارند، که تعدادشان بی‌شمار است.

یادآوری: برای حل نامعادلهٔ $|f(x)|\leq|g(x)|$ می‌توانیم طرفین نامعادله را به توان ۲ برسانیم و آن را به صورت $f^۲(x)\leq g^۲(x)$ بنویسیم و بعد مجموعه جواب این نامعادله را به دست آوریم.

۴۸ | ۴ می‌توان نوشت:

$x(x^۲-۱)\geq۰\Rightarrow$

x		-۱		۰		۱	
x	-		-	۰	+		+
$x^۲-۱$	+	۰	-		-	۰	+
$x(x^۲-۱)$	-	۰	+	۰	-	۰	+

$\Rightarrow -۱\leq x\leq۰$ یا $x\geq۱$ (۱)

از طرفی داریم:

$|x|+x>۰\Rightarrow|x|>-x\Rightarrow x>۰$ (۲)

با اشتراک گرفتن از موارد (۱) و (۲) خواهیم داشت: $x\geq۱$.

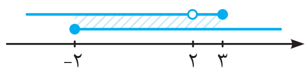
۴۹ | ۴ $xf(x)$ زیر رادیکال قرارگرفته، پس باید $xf(x)\geq۰$ که برای این امر باید x و $f(x)$ هم‌علامت یا لااقل یکی صفر باشد:

x	-۴		-۳		۰		۱		۲
x		-		-	۰	+		+	
f(x)		+	۰	-		-	۰	+	
xf(x)		-	۰	+	۰	-	۰	+	۰

$\Rightarrow$ مجموعه جواب: $D_f=[-۳,۰]\cup[۱,۲]$

۵۰ | ۴ می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}x+۲\geq۰\Rightarrow x\geq-۲ & (۱)\\ ۳-f(x)>۰\Rightarrow f(x)<۳\xrightarrow{\text{باتوجه‌به‌نمودار } f}x\leq۳\ ,\ x\neq۲ & (۲)\end{cases}$$

$\xrightarrow{(۱)\cap(۲)}$ 

$\Rightarrow D_y=[-۲,۳]-\{۲\}$

همان‌طور که می‌بینید اعداد صحیح ۲-، ۱-، ۰، ۱ و ۳ متعلق به دامنهٔ تابع مورد نظر هستند.

۵۱ | ۴ باید عبارت زیر رادیکال، بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد، پس:

$$f(\frac{۱}{x})-f(x)\geq۰\xrightarrow{f(x)=۲^x}۲^{\frac{۱}{x}}-۲^x\geq۰\Rightarrow۲^{\frac{۱}{x}}\geq۲^x\Rightarrow\frac{۱}{x}\geq x$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{x}-x\geq۰\Rightarrow\frac{۱-x^۲}{x}\geq۰$$

$\xrightarrow{\text{تعیین‌علامت}}$

x		-۱		۰		۱	
$۱-x^۲$	-	۰	+		+	۰	-
x	-		-	۰	+		+
$\frac{۱-x^۲}{x}$	+	۰	-	تعریف نشده	+	۰	-

$\Rightarrow x\in(-\infty,-۱]\cup(۰,۱]$

۵۲ | ۲ با چیزهایی که گفتیم، این‌طوری می‌شود:

$$\begin{cases}x^۲-۹>۰\\x-۴>۰\\x-۴\neq۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^۲>۹\xrightarrow{\text{جذر}}|x|>۳\\x>۴\\x\neq۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<-۳ \text{ یا } x>۳\\x>۴\\x\neq۵\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}}x>۴, x\neq۵\Rightarrow D_y=(۴,+\infty)-\{۵\}$$

۵۳ | ۳ در مورد دامنهٔ تابع $y=\log_{g(x)}f(x)$ داریم:

$$f(x)>۰\xrightarrow{\text{طبق نمودار}}x<۳\ ,\ g(x)>۰\xrightarrow{\text{طبق نمودار}}x>-۱$$

$$g(x)\neq۱\xrightarrow{\text{طبق نمودار}}x\neq۰\xrightarrow{\text{اشتراک}}D_y=(-۱,۳)-\{۰\}$$

در نتیجه اعداد صحیح موجود در دامنهٔ تابع عبارتند از $x=۱$ و $x=۲$.

۵۴ | ۱

$$f(x)=\frac{\sin(x-\frac{\pi}{۴})}{\cos(x-\frac{\pi}{۴})}+۲:\cos(x-\frac{\pi}{۴})=۰\Rightarrow x-\frac{\pi}{۴}=k\pi+\frac{\pi}{۲}$$

$\Rightarrow x=k\pi+\frac{۳\pi}{۴}$ یا $x=k\pi-\frac{\pi}{۴}:k\in\mathbb{Z}\Rightarrow$ این‌ها ریشه‌های مخرج‌اند.

$$\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{k\pi-\frac{\pi}{۴}\mid k\in\mathbb{Z}\}$$

۵۵ **۲** کافی است مقادیر موجود در برد را به‌جای y جای‌گذاری کنیم تا به ازای هریک از آن‌ها، عضو مربوطه از دامنه به دست آید، ببینید:

$$\begin{cases} \text{اگر } y=-2 \Rightarrow -2=\dfrac{x-1}{2x+3} \Rightarrow -4x-6=x-1 \Rightarrow -5x=5 \Rightarrow x=-1 \\ \text{اگر } y=0 \Rightarrow 0=\dfrac{x-1}{2x+3} \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ \text{اگر } y=\dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{1}{3}=\dfrac{x-1}{2x+3} \Rightarrow 3x-3=2x+3 \Rightarrow x=6 \end{cases}$$

بنابراین دامنهٔ تابع برابر $\{-1,1,6\}$ است، و مجموع آن‌ها برابر است با:

$$-1+1+6=6$$

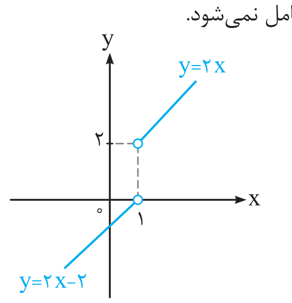
۵۶ **۳** نمودار تابع f را رسم می‌کنیم و با تصویر کردن آن روی محور yها، برد تابع را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=2x-1+\frac{x-1}{|x-1|}=\begin{cases} 2x-1+\dfrac{x-1}{x-1} & ; \quad x>1 \\ 2x-1+\dfrac{x-1}{-(x-1)} & ; \quad x<1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} 2x-1+1 & ; \quad x>1 \\ 2x-1-1 & ; \quad x<1 \end{cases}$$

همان‌طور که از نمودار پیداست، تصویر تابع روی محور yها که همان برد تابع می‌باشد، برابر است با $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$، بنابراین اعداد صحیح ۰ و ۱ و ۲ را شامل نمی‌شود.

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} 2x & ; \quad x>1 \\ 2x-2 & ; \quad x<1 \end{cases} \Rightarrow$$



۵۷ **۳** **روش اول:** عبارت زیر رادیکال، یک تابع درجه دوم است که ضریب x^2 در آن برابر ۴ می‌باشد، پس مثبت است، بنابراین طبق آن‌چه که در درسنامه گفتیم برد تابع $y=4x^2-4x+2$ برابر می‌شود با:

$$R_y=\left[\frac{4ac-b^2}{4a},+\infty\right)=\left[\frac{4(4)(2)-(-4)^2}{4(4)},+\infty\right)$$

$$=\left[\frac{32-16}{16},+\infty\right)=\left[\frac{16}{16},+\infty\right)=[1,+\infty)$$

در نتیجه داریم:

$$4x^2-4x+2\geq 1 \xRightarrow{\text{جذر}} \underbrace{\sqrt{4x^2-4x+2}}_{f(x)}\geq\sqrt{1}=1$$

$$\Rightarrow \text{برد تابع } f: R_f=[1,+\infty)$$

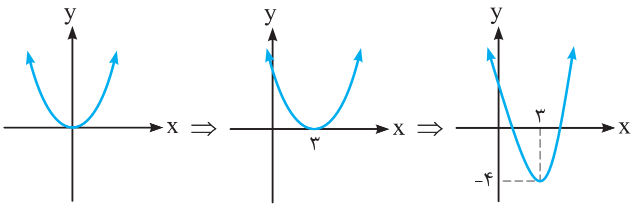
روش دوم: ابتدا با مربع کامل کردن عبارت زیر رادیکال، ظاهر تابع را کمی عوض می‌کنیم:

$$y=\sqrt{4x^2-4x+2}=\sqrt{\underbrace{4x^2-4x+1}_{(2x-1)^2}+1}=\sqrt{(2x-1)^2+1}$$

از آن‌جاکه $(2x-1)^2\geq 0$، پس $(2x-1)^2+1\geq 1$ و در نتیجه $\sqrt{(2x-1)^2+1}\geq 1$، بنابراین $R_f=[1,+\infty)$.

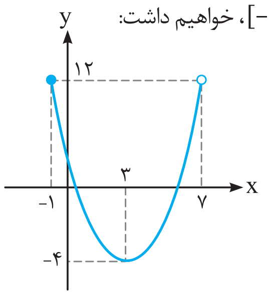
۵۸ **۳** ابتدا نمودار تابع $f(x)=x^2-6x+5$ را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=x^2-6x+9-4=(x-3)^2-4$$



$y=x^2 \qquad y=(x-3)^2 \qquad y=(x-3)^2-4$

حال با در نظر گرفتن دامنهٔ تابع به صورت $[-1,7)$، خواهیم داشت:



$$\begin{cases} f(-1)=(-1)^2-6(-1)+5=12 \\ f(7)=7^2-6(7)+5=12 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{برد تابع}: R_f=[-4,12]$$

۵۹ **۲** ابتدا ضابطهٔ تابع $y=x^6+x^3+1$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$y=x^6+x^3+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1=\left(x^3+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

از آن‌جا که گفته‌شده $x\geq 0$، پس خواهیم داشت:

$$x^3\geq 0 \xRightarrow{+\frac{1}{2}} x^3+\frac{1}{2}\geq\frac{1}{2} \xRightarrow{\text{توان ۲}} \left(x^3+\frac{1}{2}\right)^2\geq\frac{1}{4}$$

$$\xRightarrow{+\frac{3}{4}} \underbrace{\left(x^3+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}_{y}\geq 1 \Rightarrow y\geq 1 \Rightarrow \text{برد تابع}: R_y=[1,+\infty)$$

۶۰ **۳** ضابطهٔ تابع را به صورت زیر، ساده می‌کنیم:

$$y=\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x^2+1+1}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

حال فرض کنیم $\sqrt{x^2+1}=a$، پس تابع به شکل $a+\frac{1}{a}$ می‌باشد و چون a مثبت است، پس $a+\frac{1}{a}\geq 2$ می‌باشد. یعنی $y\geq 2$ و در نتیجه $R_y=[2,+\infty)$ است.

۶۱ **۱** از آن‌جاکه y، تابعی رادیکالی با فرجهٔ زوج است، پس $y\geq 0$، از طرفی:

$$y=\sqrt{23-x^2} \xRightarrow{\text{توان ۲}} y^2=23-x^2 \Rightarrow x^2=23-y^2$$

$$\xRightarrow{x^2\geq 0} 23-y^2\geq 0 \Rightarrow y^2\leq 23$$

$$\xRightarrow{\text{جذر}} |y|\leq\sqrt{23} \Rightarrow -\sqrt{23}\leq y\leq\sqrt{23} \quad (*)$$

با توجه به این‌که $y\geq 0$ است، پس از نامساوی (*) نتیجه می‌گیریم $0\leq y\leq\sqrt{23}$، یعنی برد تابع فوق برابر است با $[0,\sqrt{23}]$ که شامل اعداد حسابی ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ می‌باشد.

۶۲ **۳** y تابعی رادیکالی با فرجهٔ زوج است، پس $y \ge ۰$. از طرفی:

$$y=\sqrt{۶-\sqrt{۱۰-x}} \xrightarrow{\text{توان ۲}} y^۲=۶-\sqrt{۱۰-x}$$

$$\Rightarrow \sqrt{۱۰-x}=۶-y^۲ \xrightarrow{\sqrt{۱۰-x}\ge ۰} ۶-y^۲\ge ۰ \Rightarrow y^۲\le ۶$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} |y|\le\sqrt{۶} \Rightarrow -\sqrt{۶}\le y\le \sqrt{۶} \quad (*)$$

چون $y\ge ۰$ است، پس از نامساوی $(*)$ نتیجه می‌گیریم $۰\le y\le\sqrt{۶}$، یعنی برد تابع برابر $[۰,\sqrt{۶}]$ است.

۶۳ **۲** ابتدا دامنهٔ تابع را تعیین می‌کنیم:

$\frac{۲-x}{x}\ge ۰ \xrightarrow{\text{تعیین‌علامت}}$

x		۰		۲	
۲ − x	+		+	۰	−
x	−	۰	+		+
(۲ − x)/x	−	تعریف‌نشده	+	۰	−

$\Rightarrow D_f=(۰,۲]$

با توجه به دامنهٔ تابع ($۰<x\le ۲$)، نتیجه می‌گیریم $|x|=x$، بنابراین:

$$f(x)=(x+|x|)\sqrt{\frac{۲-x}{x}}=(x+x)\sqrt{\frac{۲-x}{x}}=۲x\sqrt{\frac{۲-x}{x}}$$

$$\xrightarrow{۰<x\le ۲} ۲\sqrt{x^۲\left(\frac{۲-x}{x}\right)}=۲\sqrt{x(۲-x)}$$

$$=۲\sqrt{۲x-x^۲}=۲\sqrt{۲x-x^۲-۱+۱}$$

$$=۲\sqrt{-(x^۲-۲x+۱)+۱}=۲\sqrt{-(x-۱)^۲+۱}$$

حال از طریق دامنهٔ تابع، برد آن را به دست می‌آوریم، ببینید:

$$۰<x\le ۲ \xrightarrow{-۱} -۱<x-۱\le ۱ \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۰\le (x-۱)^۲\le ۱$$

$$\xrightarrow{\times(-۱)} -۱\le -(x-۱)^۲\le ۰ \xrightarrow{+۱} ۰\le ۱-(x-۱)^۲\le ۱$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} ۰\le \sqrt{۱-(x-۱)^۲}\le ۱ \xrightarrow{\times ۲} ۰\le \underbrace{۲\sqrt{۱-(x-۱)^۲}}_{f(x)}\le ۲$$

$$\Rightarrow ۰\le f(x)\le ۲$$

بنابراین برد تابع f برابر بازهٔ $[۰,۲]$ است.

۶۴ **۴** روش اول: برای تعیین برد تابع $y=\frac{۵x+۱}{۲x-۴}$ می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$۲xy-۴y=۵x+۱\Rightarrow ۲xy-۵x=۴y+۱\Rightarrow x(۲y-۵)=۴y+۱$$

$$\Rightarrow x=\frac{۴y+۱}{۲y-۵} \quad (*)$$

همان‌طور که در تساوی $(*)$ می‌بینید، y نباید برابر $\frac{۵}{۲}$ باشد (چون مخرج کسر، برابر صفر می‌شود)، بنابراین $y\ne \frac{۵}{۲}$ و در نتیجه برد تابع برابر است با $\mathbb{R}-\{\frac{۵}{۲}\}$.

روش دوم: براساس نکته‌ای که در درسنامه گفتیم، برد تابع $y=\frac{۵x-۱}{۲x-۴}$ برابر $\mathbb{R}-\{\frac{۵}{۲}\}$ می‌باشد.

۶۵ **۴**

$$f=\{(۱,\underbrace{m+n}_{f(۱)=m+n}),(-۱,\underbrace{۲m-n}_{f(-۱)=۲m-n}),(۳,m+۲n)\}$$

گفته‌شده $(۱,۴)\in f$ و $(-۱,۲)\in f$، پس:

$$\begin{cases} f(۱)=۴\Rightarrow m+n=۴ \\ f(-۱)=۲\Rightarrow ۲m-n=۲ \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} ۳m=۶\Rightarrow m=۲\Rightarrow n=۲$$

$$\Rightarrow f(۳)=m+۲n=۲+۲(۲)=۶$$

۶۶ **۲** منظور تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ است. برویم سراغ بررسی موارد:

الف) درست است، زیرا وقتی $x=۵۰۰$ باشد، آن‌گاه $f(۵۰۰)=\frac{۱}{۵۰۰}$ خواهد بود.

ب) نادرست است، زیرا وقتی تعداد شرکت‌کننده‌ها خیلی زیاد می‌شود (یعنی مقدار x بزرگ می‌شود)، آن‌گاه مقدار عددی کسر $\frac{۱}{x}$ کوچک می‌شود، پس سهم مشارکت هر داوطلب، خیلی کم خواهد شد.

پ) درست است، زیرا معادلهٔ $\frac{۱}{x}=۰$ ریشه ندارد.

ت) درست است، زیرا $x=۰$ ریشهٔ مخرج کسر $\frac{۱}{x}$ است.

ث) نادرست است، زیرا در $x=۰$ باید قلم از روی کاغذ برداشته شود.

پس تنها ۳ مورد درست است.

۶۷ **۱** بر اساس نمودار $f(۰)=۱$ است، بنابراین:

$$f(۰)=\sqrt{a(۰)+b}=\sqrt{b}=۱\Rightarrow b=۱\Rightarrow f(x)=\sqrt{ax+۱}$$

از طرفی $f(۵)=۲$ است، پس:

$$f(۵)=\sqrt{۵a+۱}=۲\xrightarrow{\text{توان ۲}} ۵a+۱=۴\Rightarrow ۵a=۳\Rightarrow a=\frac{۳}{۵}$$

$$\Rightarrow f(x)=\sqrt{\frac{۳}{۵}x+۱}\Rightarrow f\left(\frac{۴۰}{۳}\right)=\sqrt{\frac{۳}{۵}\left(\frac{۴۰}{۳}\right)+۱}$$

$$=\sqrt{۸+۱}=\sqrt{۹}=۳$$

۶۸ **۲** می‌توان نوشت:

$$f(x)=\sqrt{-x^۲+۴x+۱۲}=\sqrt{-(x^۲-۴x-۱۲)}$$

$$=\sqrt{-(\underbrace{x^۲-۴x+۴}-۴-۱۲)}=\sqrt{-((x-۲)^۲-۱۶)}$$

$$\Rightarrow f(x)=\sqrt{-(x-۲)^۲+۱۶}$$

حال با جای‌گذاری $x=۲+\sqrt{۷}$ در ضابطهٔ $f(x)$، خواهیم داشت:

$$f(۲+\sqrt{۷})=\sqrt{-(۲+\sqrt{۷}-۲)^۲+۱۶}=\sqrt{-(\sqrt{۷})^۲+۱۶}$$

$$=\sqrt{-۷+۱۶}=\sqrt{۹}=۳$$

از طرفی اگر $x=۲$ باشد، آن‌گاه: $f(۲)=\sqrt{-(۲-۲)^۲+۱۶}=\sqrt{۱۶}=۴$

در نتیجه داریم:

$$f(۲+\sqrt{۷})-f(۲)=۳-۴=-۱$$

۶۹ **۴** با توجه به $f(x)=\frac{۹^x+۱}{۳^x}$، می‌توان نوشت:

$$f(x)=\frac{۹^x}{۳^x}+\frac{۱}{۳^x}=\left(\frac{۹}{۳}\right)^x+\frac{۱}{۳^x}=۳^x+۳^{-x}$$

$$\Rightarrow f(-x)=۳^{-x}+۳^x \quad (*)$$

$$\xrightarrow{(*)} f(x)-f(-x)=\cancel{۳^x}+\cancel{۳^{-x}}-\cancel{۳^{-x}}-\cancel{۳^x}=۰$$

۷۰ **۳** با توجه به این‌که $f(x)=۵x$ است، به بررسی تک‌تک گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱) $f(a-b)=۵(a-b)=۵a-۵b$, $f(a)=۵a$, $f(b)=۵b$

$\Rightarrow f(a-b)=f(a)-f(b)$ ✓

۲) $f(4a+b)=5(4a+b)=20a+5b, 4f(a)=4(5a)=20a,$

$f(b)=5b \Rightarrow f(4a+b)=4f(a)+f(b)$ ✓

۳) $f(ab)=5ab$, $f(a).f(b)=5a\times 5b=25ab$

$\Rightarrow f(ab)\neq f(a).f(b)$ ✗

۴) $f(ab)=5ab, af(b)=a\times(5b)=5ab \Rightarrow f(ab)=af(b)$ ✓

۷۱ **۳** با توجه به این‌که $G=\{-1,0,1,2,3\}$ و $f=\{(x,4-2x):x\in G\}$، پس می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} x=-1\Rightarrow 4-2x=4-2(-1)=6\\ x=0\Rightarrow 4-2x=4-2(0)=4\\ x=1\Rightarrow 4-2x=4-2(1)=2\\ x=2\Rightarrow 4-2x=4-2(2)=0\\ x=3\Rightarrow 4-2x=4-2(3)=-2\end{cases}$$

$$\Rightarrow f=\{(-1,6),(0,4),(1,2),(2,0),(3,-2)\}$$

$$\Rightarrow \frac{f(1)-f(0)}{f(\underbrace{f(1)}_{2})+1}=\frac{2-4}{0+1}=-\frac{2}{1}=-2$$

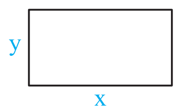
۷۲ **۲** ابتدا $x=2$ را در تساوی $f(x)-x^3+2x+f(2)=0$ جای‌گذاری می‌کنیم تا مقدار $f(2)$ به دست آید:

$$f(2)-8+4+f(2)=0\Rightarrow 2f(2)=4\Rightarrow f(2)=2$$

بنابراین $f(x)-x^3+2x+2=0$ است، به عبارتی $f(x)=x^3-2x-2$، پس:

$$\begin{cases} f(3)=3^3-2(3)-2=27-6-2=19\\ f(1)=1^3-2(1)-2=1-4=-3\end{cases}\Rightarrow f(3)f(1)=19\times(-3)=-57$$

۷۳ **۴** محیط مستطیل برابر ۱۲است، پس با توجه به شکل زیر، خواهیم داشت:



$$2(x+y)=12\Rightarrow x+y=6\Rightarrow y=6-x \quad (*)$$

از طرفی داریم:

$$\text{تابع مساحت}=x\times y\overset{(*)}{=}x(6-x)\Rightarrow f(x)=x(6-x)=6x-x^2$$

$$\Rightarrow f(1)-f(2)=(6-1)-(12-4)=5-8=-3$$

۷۴ **۱** دو عدد را برابر x و y در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $x>y$، در این صورت، طبق گفته‌های مسأله $x-y=2$ و یا $y=x-2$. از طرفی:

$$x^3+y^3=x^3+(x-2)^3\Rightarrow f(x)=x^3+(x-2)^3$$

$$\Rightarrow \frac{f(2)}{f(3)}=\frac{8+0}{27+1}=\frac{8}{28}=\frac{2}{7}$$

۷۵ **۴** می‌توان نوشت:

$$f(\sqrt{x}+2)=x+4\sqrt{x}+6=\underbrace{x+4\sqrt{x}+4}_{(\sqrt{x}+2)^2}+2=(\sqrt{x}+2)^2+2$$

حال فرض کنیم $\sqrt{x}+2=t$، در این صورت:

$$f(t)=t^2+2\Rightarrow f(\sqrt{5})=(\sqrt{5})^2+2=5+2=7$$

۷۶ **۱** با توجه به این‌که $f(x)=x^2(2-x)^2$ می‌باشد، کافی است $f(1+x)$ و $f(1-x)$ را حساب کرده و از هم کم کنیم:

$$\left.\begin{aligned} f(1+x)&=(1+x)^2(2-(1+x))^2=(1+x)^2(1-x)^2\\ f(1-x)&=(1-x)^2(2-(1-x))^2=(1-x)^2(1+x)^2\end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow f(1+x)-f(1-x)=0$$

۷۷ **۴** با جای‌گذاری $x=2$ و $x=-2$ در تساوی زیر خواهیم داشت:

$$f(-x)+2xf(x)=4x^2-3$$

$$\begin{cases} \text{اگر}\ x=2\Rightarrow f(-2)+4f(2)=4(2)^2-3\\ \text{اگر}\ x=-2\Rightarrow f(2)-4f(-2)=4(-2)^2-3\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} f(-2)+4f(2)=13\\ f(2)-4f(-2)=13\end{cases}\xrightarrow{\times 4}\begin{cases} 4f(-2)+16f(2)=52\\ f(2)-4f(-2)=13\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جمع}} 17f(2)=65\Rightarrow f(2)=\frac{65}{17}$$

۷۸ **۱** نمودار تابع f، محور xها را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع کرده، پس نقطهٔ $(1,0)$ در تابع صدق می‌کند، یعنی $a+b+c=0$. محور yها را هم در -6 قطع کرده، پس نقطهٔ $(0,-6)$ هم در تابع صدق می‌کند، یعنی $-6=0+0+c$، پس $c=-6$. همچنین از نقطهٔ $(-2,-6)$ می‌گذرد، پس:

$$(-2,-6)\in f\Rightarrow -6=4a-2b-6\Rightarrow 4a-2b=0$$

$$\xrightarrow{\div 2} 2a-b=0\Rightarrow\begin{cases} 2a-b=0\\ a+b-6=0\end{cases}\Rightarrow a=2\ ,\ b=4$$

بنابراین $f(x)=2x^2+4x-6$ است و داریم: $f(-1)=2-4-6=-8$

۷۹ **۴** روش اول: کافی است در تساوی $f(x-3)=x^2-4x+5$، به‌جای x، قرار دهیم $4-x$ تا فوراً $f(1-x)$ به دست آید:

$$x\to 4-x: f((4-x)-3)=(4-x)^2-4(4-x)+5$$

$$\Rightarrow f(1-x)=16-8x+x^2-16+4x+5=x^2-4x+5$$

روش دوم: ابتدا ضابطهٔ $f(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(x-3)=x^2-4x+5=x^2-6x+9+2x-4=(x-3)^2+2x-4$$

$$=(x-3)^2+2(x-3)+2\xrightarrow{x-3=t} f(t)=t^2+2t+2$$

حال عبارت $(1-x)$ را در ضابطهٔ f قرار می‌دهیم:

$$f(1-x)=(1-x)^2+2(1-x)+2$$

$$=1-2x+x^2+2-2x+2=x^2-4x+5$$

۸۰ **۲** روش اول:

$$f(x)=\sqrt{x^2-4}\Rightarrow f(a+\frac{1}{a})=\sqrt{(a+\frac{1}{a})^2-4}$$

$$=\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}+2\cancel{a}(\frac{1}{\cancel{a}})}=\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}-2}$$

$$=\sqrt{(a-\frac{1}{a})^2}=\left|a-\frac{1}{a}\right| \quad (*)$$

چون $0<a<1$، پس $a<\frac{1}{a}$ و $a-\frac{1}{a}$ منفی می‌شود و داریم:

$$f(a+\frac{1}{a})\overset{(*)}{=}-a+\frac{1}{a}$$

از طرفی داریم:

$$g(x)=\sqrt{x^2+4}\Rightarrow g(a-\frac{1}{a})=\sqrt{(a-\frac{1}{a})^2+4}$$

$$=\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}-2(a)(\frac{1}{a})+4}=\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}+2}$$

$$=\sqrt{(a+\frac{1}{a})^2}=\left|a+\frac{1}{a}\right|$$

چون $0 < a < 1$، پس $a+\frac{1}{a}$ مثبت می‌شود و داریم $g(a-\frac{1}{a})=a+\frac{1}{a}$.

در نتیجه:

$$f(a+\frac{1}{a})+g(a-\frac{1}{a})=-a+\frac{1}{a}+a+\frac{1}{a}=\frac{2}{a}$$

روش دوم: اگر به جای a، عدد $\frac{1}{2}$ بگذاریم، آن‌گاه داریم:

$$f(a+\frac{1}{a})+g(a-\frac{1}{a})=f(\frac{1}{2}+2)+g(\frac{1}{2}-2)$$

$$=f(\frac{5}{2})+g(-\frac{3}{2})=\sqrt{(\frac{5}{2})^2-4}+\sqrt{(-\frac{3}{2})^2+4}$$

$$=\sqrt{\frac{25}{4}-4}+\sqrt{\frac{9}{4}+4}=\sqrt{\frac{9}{4}}+\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=\frac{8}{2}=4$$

که این عدد (یعنی ۴) را می‌توانیم با جای‌گذاری $a=\frac{1}{2}$ در گزینهٔ (۲) به دست آوریم.

۸۱ **۲** گفته‌شده $f(x)+f(x-4)=0$. اگر x را به $x+4$ تبدیل کنیم، خواهیم داشت: $f(x+4)+f(x)=0$ و اگر در این معادله، دوباره x را به $x+4$ تبدیل کنیم، می‌توان نوشت:

$$f((x+4)+4)+f(x+4)=f(x+8)+f(x+4)=0 \qquad (*)$$

در نتیجه داریم:

$$\xrightarrow{\times(-1)}\begin{cases} f(x)+f(x-4)=0 \\ f(x+4)+f(x)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -f(x)-f(x-4)=0 \\ f(x+4)+f(x)=0 \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\text{جمع کنیم}} f(x+4)-f(x-4)=0 \Rightarrow f(x+4)=f(x-4)$$

بنابراین رابطهٔ (*) را می‌توان به صورت $f(x+8)+f(x-4)=0$ هم نوشت، بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

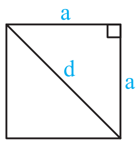
۸۲ **۴** به بررسی تک‌تک گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱) اگر قطر مربع را d و مساحت آن را S بنامیم، آن‌گاه $S=\frac{1}{2}d^2$، پس رابطهٔ بین d و S، یک تابع خطی نیست.

۲) اگر شعاع دایره را r و مساحت آن را S بنامیم، آن‌گاه $S=\pi r^2$، پس این رابطه هم یک تابع خطی نیست.

۳) اگر طول یال مکعب را a و حجم آن را V بنامیم، آن‌گاه $V=a^3$، پس این رابطه هم یک تابع خطی نیست.

۴) اگر ضلع مربع را a و قطر آن را d بنامیم، آن‌گاه طبق رابطهٔ فیثاغورس می‌توان نوشت:



$$d^2=a^2+a^2 \Rightarrow d^2=2a^2 \Rightarrow d=\sqrt{2}a$$

همان‌طور که می‌بینید رابطهٔ به دست آمده، بیانگر یک تابع خطی برحسب ضلع مربع (a) است.

۸۳ **۱** دامنهٔ تابع $f(x)=3x+4$، بازهٔ $[-1,+\infty)$ است، پس:

$$x \ge -1 \xRightarrow{\times 3} 3x \ge -3 \xRightarrow{+4} 3x+4 \ge 1$$

$$\Rightarrow f(x) \ge 1 \Rightarrow \text{برد تابع } f: R_1=[1,+\infty)$$

همچنین دامنهٔ تابع $g(x)=\frac{x}{2}+2$، بازهٔ $(-\infty,-4]$ است، پس:

$$x \le -4 \xRightarrow{\times\frac{1}{2}} \frac{x}{2} \le -2 \xRightarrow{+2} \frac{x}{2}+2 \le 0$$

$$\Rightarrow g(x) \le 0 \Rightarrow \text{برد تابع } g: R_2=(-\infty,0]$$

بنابراین خواهیم داشت: $R_1 \cup R_2=[1,+\infty)\cup(-\infty,0]=R-(0,1)$

۸۴ **۴** از روی جدول، داریم:

$$\begin{cases} f(2)=6 \xRightarrow{f(x)=ax+b} \\ f(4)=4 \xRightarrow{f(x)=ax+b} \end{cases} \begin{cases} 2a+b=6 \xRightarrow{\times(-1)} \\ 4a+b=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2a-b=-6 \\ 4a+b=4 \end{cases} \Rightarrow 2a=-2 \Rightarrow a=-1 \Rightarrow b=8$$

بنابراین: $-a-2b=-(-1)-2(8)=1-16=-15$

البته می‌تونستین به جای $f(2)=6$ و $f(4)=4$ (که ما از روی جدول گفتیم)، شما دوتای دیگه رو بگیرید و محاسبات بالا رو انجام بدید (مثلاً بگیر $f(6)=2$ و $f(8)=0$).

۸۵ **۱** با داده‌های مسأله، این‌طوری می‌نویسیم:

$$f(x)=mx+b \xRightarrow{f(2)=5} 2m+b=5$$

از طرفی $f(x+2)=f(x)+2$، یعنی این‌که:

$$m(x+2)+b=mx+b+2 \Rightarrow \cancel{mx}+2m+\cancel{b}=\cancel{mx}+\cancel{b}+2$$

$$\Rightarrow 2m=2 \Rightarrow m=1$$

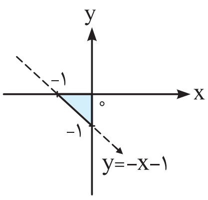
بنابراین $2(1)+b=5$، پس $b=3$ و داریم $\frac{m}{b}=\frac{1}{3}$.

۸۶ **۲** ابتدا معادلهٔ خط گذرنده از نقاط $A(k,5)$ و $B(5,k)$ را به دست می‌آوریم، به این صورت:

$$y-5=\frac{k-5}{5-k}(x-k) \Rightarrow y-5=(-1)(x-k)$$

$$\Rightarrow y-5=-x+k \Rightarrow y=-x+k+5$$

حال این خط محور yها را در نقطه‌ای به عرض -1 قطع کرده است، یعنی مختصات نقطهٔ $(0,-1)$ در معادلهٔ خط به دست آمده صدق می‌کند، پس:



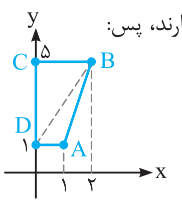
$$-1=0+k+5 \Rightarrow k=-6$$

$$\Rightarrow \text{معادلهٔ خط}: y=-x-6+5 \Rightarrow y=-x-1$$

با رسم نمودار خط $y=-x-1$ در دستگاه مختصات، خواهیم داشت:

$$\Rightarrow S_{\text{رنگی}}=\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$$

۸۷ **۳** نقاط A و B روی خط $y=4x-3$ قرار دارند، پس:



$$x=1 \Rightarrow y_A=4(1)-3=1: A(1,1)$$

$$y=5 \Rightarrow 5=4x_B-3 \Rightarrow 4x_B=8$$

$$\Rightarrow x_B=2: B(2,5)$$

تصویر نقطهٔ A روی محور yها نقطهٔ $D(0,1)$ و تصویر نقطهٔ B روی محور yها نقطهٔ $C(0,5)$ می‌شود، بنابراین داریم:

$$\text{شیب قطر } BD: m=\frac{y_D-y_B}{x_D-x_B}=\frac{1-5}{0-2}=\frac{-4}{-2}=2$$