

آشنایی با منطق ریاضی

مؤلف درس، سوال‌های تألیف و انتخاب سوال‌های این فصل: امیرحسین ایومحبوب

راهبرد حل مسئله 

گزاره: گزاره جمله‌ای خبری است که در حال حاضر یا آینده، دارای ارزش درست یا نادرست است. درست یا نادرست بودن یک گزاره را ارزش گزاره می‌گوییم. ارزش گزاره درست را با حرف «د» یا «T» و ارزش گزاره نادرست را با حرف «ن» یا «F» نمایش می‌دهیم.

تذکره: جمله‌های پرسشی، امری یا عاطفی، گزاره محسوب نمی‌شوند؛ زیرا خبری را بیان نمی‌کنند.

گزاره‌نما: هر جمله خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جای‌گذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل شود، گزاره‌نما نامیده می‌شود.

دامنه متغیر: در هر گزاره‌نما به مجموعه مقادیری که می‌توان آن‌ها را به جای متغیرهای آن قرار داد تا گزاره‌نما به گزاره تبدیل شود، دامنه متغیر گزاره‌نما گفته می‌شود.

مجموعه جواب گزاره‌نما: در هر گزاره‌نما به مجموعه عضوهایی از دامنه متغیر که به‌ازای آن‌ها، گزاره‌نما تبدیل به گزاره‌ای با ارزش درست شود، مجموعه جواب گزاره‌نما گفته می‌شود.

نقیض گزاره: نقیض گزاره p به صورت $\sim p$ نوشته می‌شود و آن را «چنین نیست که p » می‌خوانیم. ارزش $\sim p$ ، همواره عکس ارزش p است.

❖ جدول ارزش گزاره‌ها:

(۲) جدول ارزش برای سه گزاره p ، q و r به صورت زیر است:

p	q	r
د	د	د
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن

(۱) جدول ارزش برای دو گزاره p و q به صورت زیر است:

p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

هم‌ارزی منطقی بین گزاره‌ها: دو گزاره هم‌ارز منطقی نامیده می‌شوند هرگاه در هر حالت از جدول، ارزش درستی یکسانی داشته باشند.

در جدول ارزش گزاره‌ها، بر حسب ترکیب دو گزاره داریم:

(۱) ارزش ترکیب عطفی دو گزاره تنها در صورتی درست است که هر دو گزاره درست باشند.

(۲) ارزش ترکیب فصلی دو گزاره تنها در صورتی نادرست است که هر دو گزاره نادرست باشند.

۳) ارزش ترکیب شرطی دو گزاره تنها در صورتی نادرست است که گزاره اول (مقدم) درست و گزاره دوم (تالی) نادرست باشد.
 ۴) ارزش ترکیب دو شرطی دو گزاره تنها در صورتی درست است که گزاره دو گزاره یکسان باشد. (هر دو گزاره درست یا هر دو گزاره نادرست باشند).

❖ قوانین جبر گزاره‌ها:

الف) قوانین جابه‌جایی:

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

ب) قوانین دمورگان:

$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

پ) قوانین توزیع پذیری:

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p$$

علاوه بر قوانین فوق، هم ارزی $p \Rightarrow q \equiv q \vee \sim p$ نیز در مسائل به کار می‌رود.

❖ در حل سؤالات مربوط به اثبات هم‌ارزی دو گزاره، عموماً به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

مرحله ۱ | یکی از دو گزاره را انتخاب می‌کنیم (معمولاً گزاره‌ای که از نظر ظاهری بزرگ‌تر است).

مرحله ۲ | با استفاده از قوانین جابه‌جایی، شرکت پذیری، توزیع پذیری، دمورگان و جذب، با ساده کردن عبارت‌ها به گزاره دیگر می‌رسیم.

سورها: عباراتی مانند «به‌ازای هر مقدار» یا «به‌ازای بعضی مقادیر» هستند که برای ساختن جملات ریاضی استفاده می‌شوند و برای هر یک از این جملات علامت‌های خاصی به کار می‌رود.

از سورها برای تبدیل گزاره‌نما به گزاره استفاده می‌شود و به این وسیله گزاره‌هایی با ارزش درست یا نادرست ایجاد می‌شود.

سور عمومی: جمله « $\forall x; P(x)$ » یک سور عمومی است و تنها زمانی درست است که هیچ مثال نقضی نداشته باشد.

سور وجودی: جمله « $\exists x; P(x)$ » یک سور وجودی است و در صورتی درست است که مجموعه جواب آن تهی نباشد.

نقیض گزاره‌های سوری:

۱) نقیض گزاره « $\forall x; P(x)$ » به صورت « $\exists x; \sim P(x)$ » است.

۲) نقیض گزاره « $\exists x; P(x)$ » به صورت « $\forall x; \sim P(x)$ » است.

۱. آشنایی با منطق ریاضی

گزاره و گزاره‌نما

مرجع

(مرتبط با کار در کلاس صفحه ۳ کتاب درسی)	<p>۱. از جملات زیر کدام یک گزاره است و ارزش گزاره‌ها را مشخص کنید.</p> <p>الف) فردوسی شاعری ایرانی است. ب) عدد ۲ را روی تخته سیاه بنویس. پ) $2+3 > 4$ ت) $x+1=2$ ث) $2 \in \{1, 3, 5\}$ ج) $\emptyset \subseteq \mathbb{N}$ چ) عدد ۹۱، عددی اول است. ح) کشور اسپانیا در قاره اروپا قرار دارد. خ) چه هوای خوبی! د) عدد $5^9 + 8$، عددی اول است.</p>
(مرتبط با کار در کلاس صفحه ۳ کتاب درسی)	<p>۲. اگر \mathbb{Z} نمایش مجموعه اعداد صحیح باشد، از گزاره‌های زیر کدام درست است؟</p> <p>الف) $\{1, 2, 5\} \subseteq \mathbb{Z}$ ب) $\emptyset \subseteq \mathbb{Z}$ پ) $\sqrt{(-1)^2} \in \mathbb{Z}$ ت) $\sqrt{2} \in \mathbb{Z}$</p>
(مرتبط با تمرین ۲ صفحه ۱۷ کتاب درسی)	<p>۳. در جاهای خالی، عدد یا علامت مناسب قرار دهید به گونه‌ای که گزاره‌های حاصل دارای ارزش درستی باشند.</p> <p>الف) $\square \times 7 = 0$ ب) $(\square + 2)^2 = 25$ پ) $\frac{10 \times 4}{2} \square 5 \times 2$ ت) $\frac{8 \times \square}{4} \in \{a, 2, \frac{1}{3}\}$ ث) $0 \square \{0\}$ ج) $8(\square - 4) = 24$ چ) $12 + \square \notin \mathbb{Z}$ ح) $-3 \times \square = -3$</p>
(مرتبط با صفحه ۵ کتاب درسی)	<p>۴. دامنه متغیر هر یک از گزاره‌نماهای زیر را تعیین کنید.</p> <p>الف) x عدد اول است. ب) y شاعر است. پ) $x + 5 > 6$ ت) تاسی را پرتاب می‌کنیم و $P(\{x\}) = \frac{1}{6}$</p>

(مرتبط با تمرین ۳ صفحه ۱۷ کتاب درسی)	<p>۵. دامنه متغیر گزاره‌های زیر، مجموعه اعداد طبیعی است. مجموعه جواب هر کدام را بنویسید.</p> <p>(الف) x بین ۱ و ۲ است. (ب) x زوج است. (پ) $x + 1 < 6$ (ت) x مربع کامل است. (ث) x دو واحد از مضارب صحیح ۷ بیش‌تر است. (ج) $\frac{2x+1}{3} \leq 5$</p>
(مرتبط با تمرین ۴ صفحه ۱۷ کتاب درسی)	<p>۶. نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.</p> <p>(الف) عدد ۲۷۱ اول است. (ب) $2 \in \{2, 3, 4\}$ (پ) $2 \neq 5$ (ت) $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} < \frac{3}{5}$ (ث) عدد ۱۰۰۱ بر ۱۳ بخش‌پذیر است. (ج) گالیله یکی از ستاره‌شناسان بزرگ تاریخ است.</p>
(مرتبط با تمرین ۴ صفحه ۱۷ کتاب درسی)	<p>۷. نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.</p> <p>(الف) ۳ عددی اول است یا $5 > 2$ (ب) π عدد گویا است و دو قطر متوازی الاضلاع مساوی هستند. (پ) اگر x عددی فرد باشد آن‌گاه $x + 1$ عددی زوج است.</p>
(مرتبط با تمرین ۵ صفحه ۱۷ کتاب درسی)	<p>۸. ارزش گزاره‌های مرکب زیر را تعیین کنید.</p> <p>(الف) ۱ عددی طبیعی است و دو قطر مستطیل مساوی هستند. (ب) عدد ۳ فرد است یا عدد ۳ متعلق به مجموعه اعداد حقیقی نیست. (پ) اگر عدد ۶ فرد باشد آن‌گاه عدد ۹ مربع کامل نیست. (ت) ۵ عدد اول نیست اگر و تنها اگر ۵ مربع کامل باشد. (ث) $(2 < 3) \wedge (3 + 7 = 8)$ (ج) $(\frac{2}{3} \neq \frac{6}{9}) \vee (3 \in \{2, 4\})$ (چ) اگر $a \in \{b\}$ آن‌گاه $a = b$ و برعکس. (ح) $4 > 5 \Rightarrow -4 < -5$ (خ) $(1 \in \mathbb{Z}) \wedge (1 \in \mathbb{N})$ (د) $(5 > 2) \Leftrightarrow (2 + 1 > 4)$</p>

جدول ارزش گزاره‌ها - ترکیب گزاره‌ها

مرجع

۹. جدول زیر را کامل کنید.					
گزاره p	گزاره q	ارزش p	ارزش q	ارزش $(p \Rightarrow q)$	ارزش $(p \wedge q)$
عدد ۱۱ فرد است					د
	$-2 < -3$			ن	(مرتبط با تمرین ۶ صفحه ۱۸ کتاب درسی)
	$4 \in \{4, 5\}$				ن
	عدد ۵ اول است.				د
۱۰. جدول ارزش‌های هر یک از گزاره‌های زیر را رسم کنید.					
الف) $\sim p \wedge p$	ب) $\sim p \vee p$	(مرتبط با تمرین ۷ صفحه ۱۸ کتاب درسی)			
پ) $p \wedge \sim q$	ت) $(p \vee q) \wedge \sim p$				
ث) $(p \vee q) \Leftrightarrow q$	ج) $\sim p \Leftrightarrow \sim q$				
چ) $p \Rightarrow p \wedge q$	ح) $(p \wedge q) \vee (\sim p \vee \sim q)$				
خ) $(p \vee q) \Rightarrow \sim(p \wedge q)$					
۱۱. با استفاده از جدول ارزش درستی گزاره‌ها نشان دهید:		(مرتبط با تمرین ۸ صفحه ۱۸ کتاب درسی)			
الف) $\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p) \vee (\sim q)$	ب) $\sim(p \vee q) \equiv (\sim p) \wedge (\sim q)$				
۱۲. با استفاده از جدول ارزش درستی گزاره‌ها نشان دهید:		(مرتبط با تمرین ۸ صفحه ۱۸ کتاب درسی)			
الف) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	ب) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$				
۱۳. با استفاده از جدول ارزش درستی گزاره‌ها نشان دهید:		(مرتبط با تمرین ۸ صفحه ۱۸ کتاب درسی)			
الف) $p \wedge (q \vee p) \equiv p$	ب) $p \vee (q \wedge p) \equiv p$				
۱۴. با استفاده از جدول ارزش درستی گزاره‌ها نشان دهید:		(مرتبط با تمرین ۸ صفحه ۱۸ کتاب درسی)			
الف) $(p \Rightarrow p) \equiv T$	ب) $(p \vee F) \equiv p$	پ) $(p \wedge T) \equiv p$			
۱۵. با استفاده از جدول ارزش درستی گزاره‌ها نشان دهید:		(مرتبط با تمرین ۸ صفحه ۱۸ کتاب درسی)			
الف) $\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$	ب) $\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q$				
پ) $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \equiv ((p \wedge q) \Rightarrow r)$	ت) $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \equiv (q \Rightarrow (p \Rightarrow r))$				
۱۶. اگر $p \Rightarrow q$ و p درست باشند، ارزش q چگونه است؟		(مرتبط با کار در کلاس صفحه‌های ۱۰ و ۱۱ کتاب درسی)			
۱۷. اگر $p \Rightarrow q$ و $\sim q$ درست باشند، ارزش $\sim p$ چگونه است؟		(مرتبط با کار در کلاس صفحه‌های ۱۰ و ۱۱ کتاب درسی)			

با استفاده از قوانین جبر گزاره‌ها نشان دهید گزاره‌های زیر همیشه درست هستند. الف) $p \Rightarrow p \vee q$ ب) $p \wedge q \Rightarrow p$	۱۸.	(مرتبط با کار در کلاس صفحه‌های ۱۰ و ۱۱ کتاب درسی)
با استفاده از قوانین جبر گزاره‌ها نشان دهید گزاره‌های زیر همیشه درست هستند. الف) $p \Rightarrow [q \Rightarrow (p \wedge q)]$ ب) $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$ ت) $[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$	۱۹.	(مرتبط با کار در کلاس صفحه‌های ۱۰ و ۱۱ کتاب درسی)
با استفاده از قوانین جبر گزاره‌ها نشان دهید گزاره‌های زیر همیشه نادرست هستند. الف) $p \wedge \sim (p \vee q)$ ب) $(p \wedge q) \wedge \sim (p \vee q)$ پ) $p \wedge (\sim (p \vee q) \vee (\sim p \wedge q))$ ت) $\sim [(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)]$	۲۰.	(مرتبط با کار در کلاس صفحه‌های ۱۰ و ۱۱ کتاب درسی)

سورها

مرجع

گزاره‌های زیر را با استفاده از نمادهای \forall و \exists بنویسید و ارزش هر یک را مشخص کنید. الف) هر عدد طبیعی اول یا مرکب است. ب) برای بعضی از مقادیر a در مجموعه اعداد حسابی داریم $a^4 < 0$. پ) همه اعداد اول، فرد هستند. ت) عدد صحیح مثبتی مانند x وجود دارد به طوری که $2 - 3x > 8$. ث) حاصل جمع هر عدد حقیقی ناصفر با معکوسش بزرگ‌تر یا مساوی ۲ است. ج) به ازای بعضی از مقادیر حقیقی مانند x ، داریم $x^4 = x^2$.	۲۱.	(مشابه تمرین ۱۰ صفحه ۱۸ کتاب درسی)
هرگاه $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -10 < x \leq 10\}$ دامنه متغیر باشد، ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید. الف) $\exists x \in A; x + 4 = 15$ ب) $\forall x \in A; x - 3 \leq 8$ پ) $\exists x \in A; x + 3 \leq -6$ ت) $\forall x \in A; 2x + 4 \geq 6$	۲۲.	(مشابه تمرین ۱۱ صفحه ۱۸ کتاب درسی)
ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید، سپس نقیض هر یک را بنویسید. الف) $\forall x \in \mathbb{R}; \frac{x^2 - 1}{x + 1} = x - 1$ ب) $\forall n \in \mathbb{N}; (2^{2^n} + 1) \in \mathbb{P}$ پ) $\forall x \in (0, +\infty); x + \frac{1}{x} \geq 2$ ت) $\exists x \in \mathbb{R}; \frac{2x - 1}{3} = 0$	۲۳.	(مشابه تمرین ۱۲ صفحه ۱۸ کتاب درسی)
ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید. الف) $\forall x \in \mathbb{R}; \exists y \in \mathbb{R}; x < y$ ب) $\forall y \in \mathbb{R}; \exists x \in \mathbb{R}; x < y$	۲۴.	(مرتبط با کار در کلاس صفحه ۱۵ کتاب درسی)
طرف دیگر هم‌ارزی‌های زیر را بنویسید. الف) $\sim (\forall x; \sim P(x)) \equiv \dots$ ب) $\sim (\forall x; P(x) \Rightarrow Q(x)) \equiv \dots$ پ) $\sim (\exists x; \sim P(x)) \equiv \dots$	۲۵.	(مرتبط با صفحه‌های ۱۵ و ۱۶ کتاب درسی)

راهبرد حل مسئله

مجموعه - زیر مجموعه

نمایش مجموعه با گزاره‌نما: خاصیت مشترک اعضای یک مجموعه را با $P(x)$ نشان می‌دهیم و آن را گزاره‌نما با متغیر x می‌خوانیم. بنابراین برای نشان دادن مجموعه A در حالت کلی می‌نویسیم:

$$A = \{x \in U \mid P(x)\}$$

در رابطه فوق، U مجموعه مرجع و $P(x)$ شرطی است که با توجه به آن، اعضای مجموعه (یعنی x ها) مشخص می‌شوند.

دو مجموعه مساوی: مجموعه A و B مساوی یکدیگرند هرگاه اعضای آن‌ها نظیر به نظیر برابر یکدیگر باشند. واضح است که در دو مجموعه مساوی، تعداد اعضا نیز برابر است.

زیرمجموعه: اگر هر عضو مجموعه A به مجموعه B نیز تعلق داشته باشد، می‌گوییم A زیرمجموعه B است ($A \subseteq B$). اگر عضوی در A موجود باشد که به B تعلق نداشته باشد، آن‌گاه A زیرمجموعه B نیست.

❖ در مسائل برای اثبات آن که مجموعه A زیرمجموعه B باشد، عموماً به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

مرحله ۱ عضو دلخواهی از مجموعه A را در نظر می‌گیریم.

مرحله ۲ نشان می‌دهیم عضو در نظر گرفته شده، عضو مجموعه B نیز می‌باشد.

$$\forall x \in A \Rightarrow x \in B$$

اثبات تساوی دو مجموعه: اگر بخواهیم نشان دهیم دو مجموعه A و B مساوی یکدیگرند، کافی است ثابت کنیم $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$.

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه: اگر A یک مجموعه n عضوی باشد، آن‌گاه تعداد زیرمجموعه‌های آن برابر با 2^n است. به عنوان مثال،

یک مجموعه $3n$ عضوی دارای 2^{3n} و یک مجموعه $(n+2)$ عضوی دارای 2^{n+2} زیرمجموعه است.

متمم یک مجموعه: متمم مجموعه A نسبت به مجموعه مرجع که با نماد A' نمایش داده شده می‌شود، شامل اعضای U است که در A

$$x \in A' \Leftrightarrow x \notin A$$

وجود ندارد، به عبارت دیگر داریم:

❖ اعمال بین مجموعه‌ها: برای دو مجموعه A و B داریم:

$$1) x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$$

$$2) x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$$

$$۳) x \in A - B \Rightarrow x \in A \wedge x \notin B$$

افراز: فرض کنیم $A \neq \emptyset$ یک مجموعه و A_1, A_2, \dots, A_n زیرمجموعه‌های A باشند.

مجموعه A به n زیرمجموعه A_1, A_2, \dots, A_n افراز می‌شود، هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:

$$۱) \forall i \leq n : A_i \neq \emptyset \quad (A_i \text{ ها ناتهی باشند})$$

$$۲) \forall i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset \quad (\text{اشتراک دوبه‌دوی } A_i \text{ ها تهی باشد})$$

$$۳) A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i = A \quad (\text{اجتماع } A_i \text{ ها برابر مجموعه } A \text{ شود})$$

به‌عنوان مثال $\{3\}$ و $\{2\}$ و $\{1\}$ یا $(\{1, 2\} \text{ و } \{3\})$ ، هر کدام یک افراز برای مجموعه $\{1, 2, 3\}$ محسوب می‌شوند.

۲. مجموعه - زیرمجموعه

تعاریف مربوط به مجموعه‌ها

مرجع

مرتبط با کار در کلاس صفحه ۱۹ کتاب درسی	<p>۲۶. مجموعه‌های $A = \{2^k \mid k \in \mathbb{N}, k < 3\}$ و $B = \{3k+1 \mid k \in \mathbb{Z}, k \leq 1\}$ را با نوشتن اعضا مشخص کنید.</p>
مرتبط با کار در کلاس صفحه ۱۹ کتاب درسی	<p>۲۷. مجموعه $A = \{2^x \times 3^y \mid x, y \in \mathbb{N}, x+y=5\}$ را با نوشتن اعضا مشخص کنید.</p>
مرتبط با کار در کلاس صفحه ۱۹ کتاب درسی	<p>۲۸. مجموعه‌های زیر را به‌صورت ریاضی (گزاره‌نما) نشان دهید. الف) $A = \{-1, 0, 1, 8, 27, \dots\}$ ب) $B = \{1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\}$</p>
تبریز - مشکوه (۶ تکرار)	<p>۲۹. کدام‌یک از مجموعه‌های $A = \{m \in \mathbb{Z} \mid m < 2\}$، $B = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^3 = m\}$، $C = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^2 \leq 2m\}$ و $D = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^2 \leq 1\}$ با هم مساوی‌اند؟ (مرتبط با تمرین ۴ صفحه ۲۴ کتاب درسی)</p>
تهران - نخبگان علامه طباطبایی (۵ تکرار)	<p>۳۰. اگر $A = \{2, x+2y\}$، $B = \{5, x-y\}$ و $A = B$ باشد، آنگاه مقادیر x و y را بیابید. (مرتبط با تمرین ۷ صفحه ۲۵ کتاب درسی)</p>

تعریف ریاضی زیر مجموعه

مرجع

کرج - حجاب یک (۸ تکرار)	۳۱. درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید. الف) $\emptyset = \{\emptyset\}$ ب) $\emptyset \subset \{\emptyset\}$ ت) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ پ) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ (مرتبط با تمرین ۳ صفحه ۲۴ کتاب درسی)
امتحان نهایی - خرداد ۸۹	۳۲. ثابت کنید مجموعه تهی زیر مجموعه تمامی مجموعه‌ها است؟ (مرتبط با صفحه ۲۳ کتاب درسی)
(مرتبط با تمرین ۲ صفحه ۲۴ کتاب درسی)	۳۳. فرض کنید $A = \{1, 2, 3, \dots, 14, 15\}$, $B = \{2, 4, \dots, 12, 14\}$, $C = \{1, 3, \dots, 13, 15\}$ و $D = \{7, 8, 9\}$ و $E = \{7, 9\}$ در هر یک از حالت‌های زیر مشخص کنید X می‌تواند کدام یک از این مجموعه‌ها باشد؟ الف) X و C عضو مشترکی ندارند. ب) $X \subseteq A$ ولی $X \not\subseteq C$ ت) $X \subseteq B$ ولی $X \not\subseteq A$ پ) $X \subseteq D$ ولی $X \not\subseteq B$ (مرتبط با تمرین ۵ صفحه ۲۵ کتاب درسی)
(مرتبط با تمرین ۵ صفحه ۲۵ کتاب درسی)	۳۴. برای سه مجموعه دلخواه A , B و C مثالی بیاورید به طوری که احکام زیر درست باشد. الف) $A \subseteq B$ و $A \in B$ ب) $A \in B$ و $B \in C$ و $A \notin C$ (مرتبط با تمرین ۵ صفحه ۲۵ کتاب درسی)
یزد - حضرت سیدالشهدا (۷ تکرار)	۳۵. برای سه مجموعه A , B و C مثالی بزنید به طوری که $A \in B$, $B \in C$, $A \subseteq C$ و $A \in C$. (مرتبط با تمرین ۵ صفحه ۲۵ کتاب درسی)
مشهد - امام حسین (۸ تکرار)	۳۶. اگر $A = \{1, 3, \{1\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}\}$ یک مجموعه باشد، درستی یا نادرستی موارد زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید. الف) $\{1\} \in A$ ب) $\{1, 2\} \subseteq A$ پ) $\{1, \{1\}\} \subseteq A$ ت) $\{2, 3\} \notin A$ (مرتبط با کار در کلاس صفحه ۱۹ کتاب درسی)
(مرتبط با کار در کلاس صفحه ۲۳ کتاب درسی)	۳۷. اگر $A \subseteq C$ و $B \subseteq C$ باشد، آنگاه نشان دهید $A \cup B \subseteq C$.
(مرتبط با صفحه ۲۲ کتاب درسی)	۳۸. برای سه مجموعه A , B و C ، نشان دهید اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ و $A \subseteq C$ آنگاه $A \subseteq C$.
شیراز - دکتر حسایی (۲) (۱۰ تکرار)	۳۹. برای دو مجموعه A و B ، اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ آنگاه $A = B$. (مرتبط با صفحه ۲۳ کتاب درسی)
(مرتبط با تمرین ۸ صفحه ۲۵ کتاب درسی)	۴۰. برای دو مجموعه A و B ثابت کنید $A - B \subseteq A$.
(مرتبط با تمرین ۹ صفحه ۲۵ کتاب درسی)	۴۱. اگر A , B و C سه مجموعه با مرجع U باشند، ثابت کنید اگر $A \subseteq B$ آنگاه: الف) $A \cup C \subseteq B \cup C$ ب) $A \cap C \subseteq B \cap C$
(مرتبط با کار در کلاس صفحه ۲۳ و تمرین ۱۰ صفحه ۲۵ کتاب درسی)	۴۲. مجموعه‌های A , B , C و D با مجموعه مرجع U را در نظر بگیرید. ثابت کنید اگر $A \subseteq B$ و $C \subseteq D$ آنگاه: الف) $A \cap C \subseteq B \cap D$ ب) $A \cup C \subseteq B \cup D$
(مرتبط با تمرین ۱۱ صفحه ۲۵ کتاب درسی)	۴۳. الف) فرض کنید $A \subseteq \emptyset$ ، ثابت کنید $A = \emptyset$. ب) فرض کنید $U \subseteq A$ ، ثابت کنید $A = U$.
(مرتبط با مثال صفحه ۲۴ کتاب درسی)	۴۴. با استفاده از روش عضوگیری دلخواه ثابت کنید: الف) $A \cap B = B \cap A$ ب) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

تهران - دکتر مصاحب (۵ تکرار)	۴۵. به روش عضوگیری دلخواه ثابت کنید اگر $A \cup B = A \cap B$ باشد، آن‌گاه $A = B$ است. (مرتبط با صفحه‌های ۲۲ تا ۲۵ کتاب درسی)
(مرتبط با تمرین ۱۲ صفحه ۲۵ کتاب درسی)	۴۶. هرگاه A و B دو مجموعه با مجموعه مرجع U باشند و $A \cap B = \emptyset$ ، در این صورت ثابت کنید: الف) $B - A = B$ ب) $A - B = A$
ساری - هوشمند مفیدی (۸ تکرار)	۴۷. اگر $A \subseteq B$ و $A' \subseteq B'$ ، آن‌گاه نشان دهید $B = U$. (U مجموعه مرجع است) (مرتبط با صفحه‌های ۲۲ تا ۲۴ کتاب درسی)
تهران - الغدیر (۶ تکرار)	۴۸. ثابت کنید اگر $B \subseteq A$ و $B \subseteq A'$ ، آن‌گاه $B = \emptyset$. (مرتبط با صفحه‌های ۲۲ تا ۲۴ کتاب درسی)
تهران - الغدیر (۶ تکرار)	۴۹. ثابت کنید اگر $A \subseteq B$ ، آن‌گاه $A - B = \emptyset$. (مرتبط با صفحه‌های ۲۲ تا ۲۴ کتاب درسی)
تبریز - نبوت (۱۲ تکرار)	۵۰. ثابت کنید اگر $A \subseteq B$ ، آن‌گاه $B' \subseteq A'$. (مرتبط با صفحه‌های ۲۲ تا ۲۴ کتاب درسی)


تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه

مرجع

اهواز - الزهرا (۲) (۸ تکرار)	۵۱. اگر ۲ عضو از مجموعه A حذف کنیم، تعداد زیر مجموعه‌های آن ۳۸۴ واحد کم می‌شود. مجموعه A چند عضو دارد؟ (مرتبط با تمرین ۶ صفحه ۲۵ کتاب درسی)
اردبیل - نخبگان (۸ تکرار)	۵۲. اگر به تعداد اعضای یک مجموعه، ۴ عضو اضافه کنیم به تعداد زیر مجموعه‌های آن ۱۲۰ واحد اضافه می‌شود. این مجموعه چند عضو دارد؟ (مرتبط با تمرین ۶ صفحه ۲۵ کتاب درسی)
(مرتبط با تمرین ۶ صفحه ۲۵ کتاب درسی)	۵۳. اگر تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه $2 + 3k$ عضوی به تعداد ۱۹۲ واحد بیش‌تر از تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه $3k$ عضوی باشد، مقدار k را به دست آورید.
(مرتبط با تمرین ۶ صفحه ۲۵ کتاب درسی)	۵۴. یک مجموعه n عضوی و یک مجموعه $(n-2)$ عضوی روی هم ۴۰ زیر مجموعه دارند. n را بیابید.
(مکمل تمرین ۶ صفحه ۲۵ کتاب درسی)	۵۵. هرگاه تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه $2m$ عضوی، ۳۲ برابر تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه m عضوی باشد، m را به دست آورید. (مرتبط با تمرین ۱۵ صفحه ۲۵ کتاب درسی)

افراز یک مجموعه

(مرتبط با تمرین ۱۳ صفحه ۲۵ کتاب درسی)	۵۶. فرض کنید $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ باشد. کدام یک از حالت‌های زیر یک افراز برای A محسوب می‌شود. الف) $\{a, c, e\}, \{b\}, \{d\}$ ب) $\{a, f\}, \{c, b\}, \{d, e, f\}$ پ) $\{c, d, e\}, \{a\}, \{b, f\}$ ت) $\{a, b, c, d, e, f\}$ ث) $\{\}, \{a, b, c, d\}, \{f\}, \{e\}$
(مرتبط با فعالیت صفحه ۲۱ کتاب درسی)	۵۷. تمام افزارهای مجموعه $A = \{a, b, c\}$ را بنویسید.
(مرتبط با فعالیت صفحه ۲۱ کتاب درسی)	۵۸. تمام افزارهایی از مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4\}$ را بنویسید که فقط شامل دو مجموعه باشند.
(مرتبط با فعالیت صفحه ۲۱ کتاب درسی)	۵۹. تمام افزارهایی از مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4\}$ را بنویسید که فقط شامل سه مجموعه باشند.

راهبرد حل مسئله 

قوانین و اعمال بین مجموعه‌ها

❖ مهم‌ترین و کاربردی‌ترین روابط جبر مجموعه‌ها عبارتند از:

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

(۱) قوانین جابه‌جایی:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$$

(۲) قوانین شرکت‌پذیری:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

(۳) قوانین توزیع‌پذیری:

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

(۴) قوانین دمورگان:

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

(۵) قوانین جذب:

ویژگی‌های اجتماع عبارتند از:

$$A \cup A' = U \quad (۳)$$

$$A \cup U = U \quad (۲)$$

$$A \cup \emptyset = A \quad (۱)$$

ویژگی‌های اشتراک عبارتند از:

$$A \cap A' = \emptyset \quad (۳)$$

$$A \cap U = A \quad (۲)$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset \quad (۱)$$

تکته

با استفاده از تعریف تفاضل دو مجموعه، همواره در مسائل به جای عبارت $A - B$ ، می‌توان از عبارت $A \cap B'$ استفاده کرد. ویژگی‌های تفاضل عبارتند از:

$$U - A = A' \quad (۲) \quad A - \emptyset = A \quad (۱)$$

(۳) اگر $A \subseteq B$ ، آن‌گاه $A - B = \emptyset$.(۴) اگر A و B دو مجموعه جدا از هم باشند، آن‌گاه $A - B = A$ و $B - A = B$.

ضرب دکارتی دو مجموعه: اگر A و B دو مجموعه باشند، آن گاه ضرب دکارتی A و B که با نماد $A \times B$ نمایش داده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \wedge y \in B\}$$

ضرب دکارتی دو مجموعه در حالت کلی خاصیت جابه‌جایی ندارد، یعنی $A \times B \neq B \times A$.

نکته

اگر $A \times B = B \times A$ باشد، آن گاه حداقل یکی از حالت‌های زیر برقرار است:

$$A = B \quad (۳)$$

$$B = \emptyset \quad (۲)$$

$$A = \emptyset \quad (۱)$$

تعداد اعضای ضرب دکارتی: اگر تعداد اعضای مجموعه‌های A و B را به ترتیب با $|A|$ و $|B|$ نمایش دهیم، آن گاه تعداد اعضای ضرب دکارتی این دو مجموعه برابر است با:

$$|A \times B| = |A| \times |B|$$

همچنین با استفاده از قوانین جبر مجموعه‌ها می‌توان روابط زیر را برای تعداد اعضای مجموعه‌ها به دست آورد:

$$۱) |(A \times B) \cap (B \times A)| = |(A \cap B) \times (A \cap B)| = |A \cap B|^2$$

$$۲) |(A \times B) \cup (B \times A)| = 2|A||B| - |A \cap B|^2$$

$$۳) |(A \times B) - (B \times A)| = |A||B| - |A \cap B|^2$$

❖ برای رسم نمودار مختصاتی $A \times B$ ، عموماً به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:




مرحله ۱ نقاطی را که طول آن‌ها برابر با اعضای مجموعه A و عرض آن‌ها برابر با اعضای مجموعه B باشد، مشخص می‌کنیم.

مرحله ۲ نقاط مشخص شده را در صفحه مختصات رسم می‌کنیم.

۳. قوانین و اعمال بین مجموعه‌ها

جبر مجموعه‌ها

مرجع

(مرتبط با صفحه‌های ۲۶ تا ۳۵ کتاب درسی)	۶۰. اگر $n \in \mathbb{N}$ و $A_n = [-n, 2+n]$ ، مطلوب است محاسبه‌ی $\bigcup_{n=1}^4 A_n$ و $\bigcap_{n=1}^4 A_n$.
(مرتبط با صفحه‌های ۲۶ تا ۳۵ کتاب درسی)	۶۱. اگر $n \in \mathbb{N}$ و $A_n = [-n^2, n+1]$ باشد، مجموعه $\bigcup_{n=1}^3 A_n - \bigcap_{n=1}^3 A_n$ را مشخص کنید.
(مرتبط با صفحه‌های ۲۶ تا ۳۵ کتاب درسی)	۶۲. اگر $n \in \mathbb{N}$ و $A_n = [-\frac{1}{n}, \frac{n}{2}]$ باشد، مجموعه‌های $\bigcup_{n=1}^4 A_n$ و $\bigcap_{n=1}^4 A_n$ را بیابید. 
(مرتبط با تمرین ۲ صفحه ۳۸ کتاب درسی)	۶۳. با استفاده از قوانین جبر مجموعه‌ها ثابت کنید: الف) $(A' \cap B') \cap A = \emptyset$ ب) $(A \cap B) \cup (B' \cap A) = A$
(مرتبط با تمرین ۳ صفحه ۳۸ کتاب درسی)	۶۴. هر یک از عبارتهای زیر را با استفاده از قوانین جبر مجموعه‌ها ساده کنید. الف) $(A \cup B) - B$ ب) $[(A \cup B) - A] \cup (A \cap B)$
(مرتبط با کار در کلاس ۳ صفحه ۳۰ و مرتبط با مثال صفحه ۳۱ کتاب درسی)	۶۵. به کمک جبر مجموعه‌ها ثابت کنید. الف) $(B \cup C) - A = (B - A) \cup (C - A)$ ب) $(B - A)' \cap B = A \cap B$
(مرتبط با صفحه‌های ۲۸ تا ۳۴ کتاب درسی)	۶۶. با استفاده از قوانین جبر مجموعه‌ها، درستی رابطه‌ی زیر را ثابت کنید:  $(A - B) \cup (A \cap C) = A - (B - C)$
امتحان نهایی - دی ۹۳	۶۷. با استفاده از قوانین جبر مجموعه‌ها ثابت کنید: $A - (A \cap B) = A - B$ (مرتبط با صفحه‌های ۲۸ تا ۳۴ کتاب درسی)
(مرتبط با تمرین ۴ صفحه ۳۸ کتاب درسی)	۶۸. درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید. الف) $(A - B) \cup (A \cap B) = A$ ب) $(A \cup B) \cap (A' \cap B') = \emptyset$
(مرتبط با تمرین ۴ صفحه ۳۸ کتاب درسی)	۶۹. به کمک جبر مجموعه‌ها نشان دهید: $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$.
(مرتبط با تمرین ۴ صفحه ۳۸ کتاب درسی)	۷۰. به کمک جبر مجموعه‌ها نشان دهید: $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$.
(مرتبط با تمرین ۴ صفحه ۳۸ کتاب درسی)	۷۱. ثابت کنید اگر $A \cup B = A \cup C$ و $A \cap B = A \cap C$ ، آن‌گاه $B = C$. 

۷۲. عبارت زیر را ساده کنید:	$(A' \cap B) \cup [(B \cap A) - B'] \cap (B \cup A)$	(مرتبط با تمرین ۳ صفحه ۳۸ کتاب درسی)
۷۳. با استفاده از جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:	$[A \cap (A \cap B)'] \cup [B \cap (A \cap B)'] = B$	(مرتبط با صفحه‌های ۲۸ تا ۳۴ کتاب درسی)
۷۴. با استفاده از جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:	$(A \cap B) - (A \cap C) = A \cap (B - C)$	(مرتبط با مثال صفحه ۳۰ کتاب درسی)
۷۵. به کمک جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:	$(A \cup B' \cup C') \cap [(B \cap C) \cup A] = A$	(مرتبط با صفحه‌های ۲۸ تا ۳۴ کتاب درسی)
۷۶. با استفاده از قوانین جبر مجموعه‌ها، درستی رابطه زیر را ثابت کنید.	$[A \cap (A' \cup B)] \cup [B \cap (A' \cup B')] = B$	امتحان نهایی - خرداد ۸۹ (مرتبط با صفحه‌های ۲۸ تا ۳۴ کتاب درسی)
۷۷. به کمک جبر مجموعه‌ها درستی رابطه زیر را ثابت کنید:	$(A - B) \cup (A - C) \cup (A \cap B \cap C) = A$	تهران - علامه امینی (ره) (۵ تکرار) (مرتبط با صفحه‌های ۲۸ تا ۳۴ کتاب درسی)
۷۸. با استفاده از قوانین جبر مجموعه‌ها درستی رابطه زیر را ثابت کنید:	$(A \cup B) - (B \cup C) = (A - B) - C$	امتحان نهایی - خرداد ۸۸ (مرتبط با صفحه‌های ۲۸ تا ۳۴ کتاب درسی)
۷۹. با استفاده از جبر مجموعه‌ها ثابت کنید اگر $A \subseteq B$ ، آن‌گاه $B' \subseteq A'$.		تهران - ره‌جویان دانش (۵ تکرار) (مرتبط با فعالیت صفحه ۳۲ کتاب درسی)
۸۰. با استفاده از جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:	$[(A - B) \cup (B - A)] \cup (A \cap B) = A \cup B$	تهران - نخبگان علامه طباطبایی (۶ تکرار) (مرتبط با تمرین ۴ صفحه ۳۸ کتاب درسی)

ضرب دکارتی بین دو مجموعه

مرجع

۸۱. مقادیر x و y را طوری تعیین کنید که دو زوج مرتب $(x^2, x+y)$ و (y^2, y^2) با یکدیگر مساوی باشند.		(مرتبط با صفحه ۳۵ کتاب درسی)
۸۲. مقادیر x و y را طوری به دست آورید که زوج‌های مرتب $(2^{3x+y}, 125)$ و $(5^{3y}, 64)$ برابر باشند.		بندرانزلی - امام حسین (ع) (۵ تکرار) (مرتبط با صفحه ۳۵ کتاب درسی)
۸۳. هرگاه $A = \{2x - y, 7\}$ و $B = \{5x - 2y, 3\}$ و $A \times B = B \times A$ باشد، مقادیر x و y را به دست آورید.		زنجان - سروش (۴ تکرار) (مرتبط با تمرین ۵ صفحه ۳۸ کتاب درسی)

<p>۸۴. اگر $A = \{y - 1, 6, z\}$ و $B = \{x + 2, 5, -1\}$، در این صورت با فرض $A \times B = B \times A$، بیش‌ترین مقدار برای $(x + y + z)$ را بیابید.</p>	<p>(مرتبط با تمرین ۵ صفحه ۳۸ کتاب درسی)</p>
<p>۸۵. اگر $A = \{2^n \mid n \in W, n < 3\}$ و $B = \{2k - 1 \mid k \in Z, k \leq 1\}$ دو مجموعه باشند، آن‌گاه A و B را با نوشتن عضوها مشخص کنید و سپس اعضای $B \times A$ را بنویسید.</p>	<p>(مرتبط با مثال صفحه ۳۵ کتاب درسی)</p>
<p>۸۶. اگر $A = \{x \in Z \mid x < 2\}$ و $B = \{2k + 1 \mid k \in Z, -2 \leq k \leq 0\}$ باشند، حاصل $A \times B - A^2$ را با اعضا مشخص کنید.</p>	<p>(مکمل مثال صفحه ۳۵ کتاب درسی)</p>
<p>۸۷. اگر $B = \{x \mid x \in Z, x^2 + x - 20 = 0\}$ و $A = \{2^x \mid x \in Z, x \leq 1\}$ باشد، آن‌گاه اعضای A، B و $A \times B$ را بیابید.</p>	<p>(مرتبط با مثال صفحه ۳۵ کتاب درسی)</p>
<p>۸۸. مجموعه‌های $A = \{1\}$ و $B = \{x \in Z \mid x^2 - x = 0\}$ مفروض‌اند. الف) مجموعه B را با نوشتن اعضا مشخص کنید. ب) اعضای مجموعه $A^2 - (B \times A)$ را مشخص کنید و نمودار آن را در صفحه مختصات رسم کنید.</p>	<p>امتحان نهایی - شهریور ۹۳ (مکمل فعالیت صفحه ۳۶ کتاب درسی)</p>
<p>۸۹. اگر $A = \{x \in N \mid x^2 < 25\}$ و $B = \{x \in Z \mid -3 < x < 3\}$ باشند، اعضای مجموعه‌های زیر را بیابید. الف) $A^2 - B^2$ ب) $(A \times B) \cap (B \times A)$</p>	<p>سنندج - فرزاتگان (۴ تکرار) (مکمل مثال صفحه ۳۵ کتاب درسی)</p>
<p>۹۰. اگر $A = \{x \in N \mid x^2 < 10\}$ و $B = \{3^x \mid x \in Z, -2 < x < 2\}$ باشند، آن‌گاه تعداد زیر مجموعه‌های $(A \times B) - (B \times A)$ را بیابید.</p>	<p>تهران - امام علی (ع) (۴ تکرار) (مرتبط با مثال صفحه ۳۵ کتاب درسی)</p>
<p>۹۱. اگر $A = [-1, +\infty)$ و $B = [-2, 2]$ باشند، نمودار حاصل ضرب دکارتی $B \times A$ را رسم کنید.</p>	<p>امتحان نهایی - خرداد ۹۳ (مرتبط با تمرین ۶ صفحه ۳۸ کتاب درسی)</p>
<p>۹۲. اگر $A = [-2, 2]$ و $B = (-1, 4)$ باشند، نمودار حاصل ضرب دکارتی $A \times B$ را رسم کنید.</p>	<p>(مرتبط با تمرین ۶ صفحه ۳۸ کتاب درسی)</p>
<p>۹۳. اگر $A = (-1, 1)$ و $B = [0, 1]$ باشند، حاصل $A^2 - B^2$ را روی محور مختصات نشان دهید.</p>	<p>امتحان نهایی - خرداد ۸۴ (مکمل تمرین ۶ صفحه ۳۸ کتاب درسی)</p>
<p>۹۴. اگر $A = [0, 2]$ و $B = \{0, 2\}$ باشند، آن‌گاه نمودار $(A \times B) \cup (B \times A)$ را رسم کنید.</p>	<p>قم - فرزاتگان (۴ تکرار) (مکمل تمرین ۶ صفحه ۳۸ کتاب درسی)</p>
<p>۹۵. به روش عضوگیری ثابت کنید: $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$</p>	<p>تهران - ندای زینب (س) (۱۱ تکرار) (مرتبط با صفحه‌های ۳۵ تا ۳۸ کتاب درسی)</p>
<p>۹۶. اگر $A_n = [-\frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}]$ باشد، ابتدا A_1 و A_2 را مشخص کرده و سپس $A_1 \times A_2$ را رسم کنید.</p>	<p>تهران - علامه طباطبایی (۹ تکرار) (مکمل تمرین ۶ صفحه ۳۸ کتاب درسی)</p>



فصل دوم

درخت دانش احتمال

با درخت دانش، گام به گام به پیشرفت خود را ارزیابی کنید.

گام اول: میزان تسلط خود را با رنگ‌های زیر مشخص کنید.

آبی: مسلط.

سبز: نسبتاً مسلط.

زرد: مسلط نیست.

گام‌های بعدی: اگر در گام اول دانش خود را در حد رنگ زرد ارزیابی کردید، اما در نوبت‌های بعدی پیشرفت کردید، می‌توانید خانه‌های سبز یا آبی را رنگ کنید. هرگاه به رنگ‌ها نگاه کنید متوجه می‌شوید در کدام قسمت‌ها نیاز به تمرین بیشتر دارید.

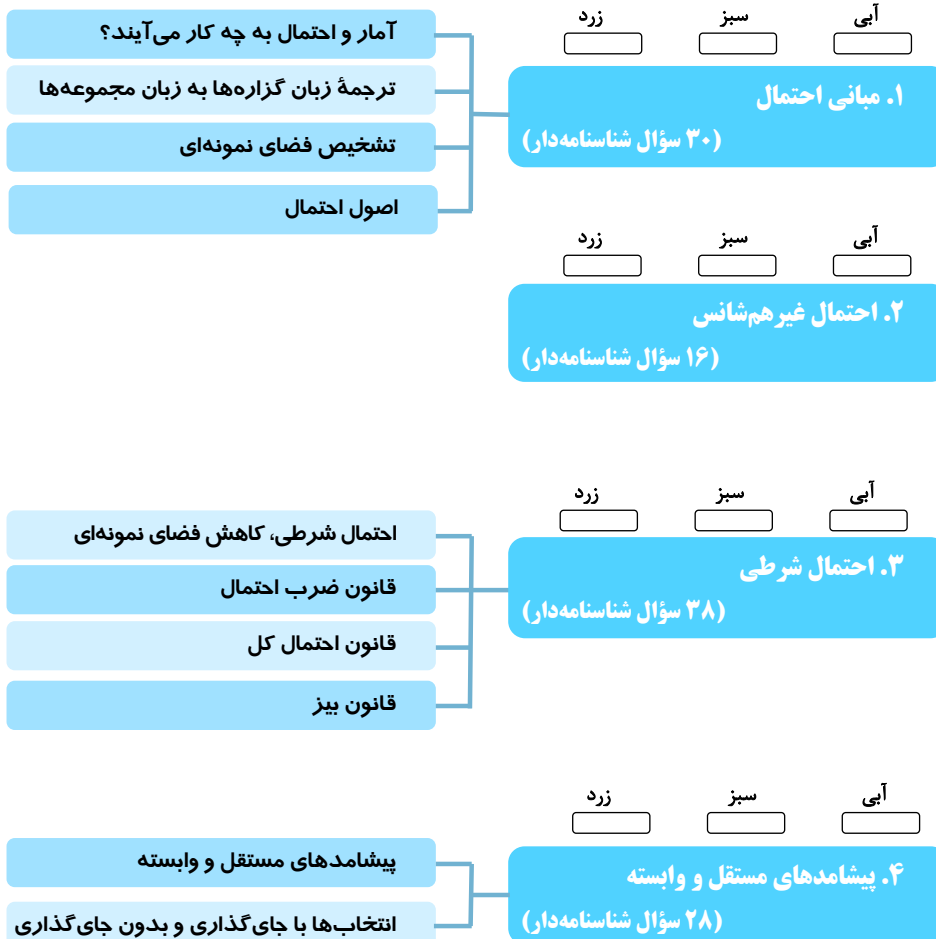
احتمال

۱۱۹ سؤال شناسنامه‌دار، شامل:

۶۰ سؤال از مدارس سراسر کشور

۵۲ سؤال مکمل و مرتبط با کتاب درسی

۷ سؤال ویژه استعدادهای درخشان



راهبرد حل مسئله



مبانی احتمال

مؤلف درس، سؤال‌های تألیفی و انتخاب سؤال‌های این فصل: سیدوحید ذولفقاری

❖ تعاریف: فضای نمونه و پیشامد:

- ابزارهای حل مسائلی که با ناآگاهی نسبی از شرایط و یا وقایع آینده همراه است، علم آمار و احتمال است.

- علم احتمال: بررسی یک نمونه نامعلوم از یک جامعه معلوم است.

- علم آمار: شناختن جامعه نامعلوم با استفاده از نمونه‌های جمع‌آوری شده معلوم است.

- فضای نمونه: به مجموعه تمام رویدادهای ممکن در یک آزمایش، فضای نمونه می‌گویند.

- برآمد: به هر عضو فضای نمونه، یک برآمد می‌گویند.

- پیشامد: به هر زیرمجموعه از مجموعه فضای نمونه، پیشامد می‌گویند.

- پیشامد ناسازگار: اگر برای دو پیشامد A و B داشته باشیم $A \cap B = \emptyset$ ، آن‌گاه به A و B دو پیشامد ناسازگار می‌گویند. (در غیر این صورت سازگارند).

نکته

در صورتی که آزمایشی متشکل از دو آزمایش با فضای نمونه S_1 و S_2 باشد، فضای نمونه آن $S_1 \times S_2$ است. مشابه این موضوع برای هر تعداد آزمایش هم‌زمان درست است.

نکته

برای هر پیشامد مثل A ، احتمال رخ دادن آن با $P(A)$ نمایش داده می‌شود که عددی حقیقی در بازه $[0, 1]$ است.

اصول احتمال عبارتند از:

$$(1) P(S) = 1 \quad (S \text{ فضای نمونه می‌باشد.})$$

(۲) برای هر دو پیشامد A و B که $A \cap B = \emptyset$ (دو پیشامد ناسازگار)، داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

❖ قضایای احتمال:

$$P(A') = 1 - P(A) \quad ۱$$

$$P(\emptyset) = 0 \quad ۲$$

۳ اگر A ، B و C پیشامدهایی دوبه‌دو ناسازگار باشند، آن‌گاه:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

۴ برای هر دو پیشامد دلخواه A و B داریم:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

۵ برای هر دو پیشامد دلخواه A و B داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

❖ در مسائلی که احتمال یک یا چند پیشامد داده شده و احتمال پیشامدی دیگر خواسته شده است:

مرحله ۱ با کمک جبر مجموعه‌ها پیشامدهای داده شده را تا حد امکان ساده کنید.

مرحله ۲ با کمک جبر مجموعه‌ها و قضایای احتمال، احتمال پیشامد خواسته شده را ساده کنید.

مرحله ۳ با کمک قضایای احتمال، حاصل مورد نظر را از احتمال پیشامدهای داده شده، محاسبه کنید.

❖ در مسائلی که محاسبه احتمال رخ دادن پیشامد خاصی در یک آزمایش خواسته شده است، مراحل زیر را طی می‌کنیم:

مرحله ۱ به کمک اصول ترکیبات و شمارش، تعداد اعضای فضای نمونه را محاسبه می‌کنیم.

مرحله ۲ به کمک اصول ترکیبات و شمارش، تعداد اعضای پیشامد مورد نظر را که می‌خواهیم رخ دهد، محاسبه می‌کنیم.

مرحله ۳ با تقسیم تعداد اعضای پیشامد تصادفی بر تعداد اعضای فضای نمونه، احتمال رخ دادن پیشامد مورد نظر را محاسبه می‌کنیم.

❖ در مسائلی که تعدادی پیشامد تعریف شده است و خواسته سؤال، احتمال وقوع ترکیبی از این پیشامدها است، مراحل زیر را طی می‌کنیم:

مرحله ۱ با کمک جبر مجموعه‌ها و قضایای احتمال، پیشامد ترکیبی مورد نظر را تشکیل داده و تا جای ممکن آن را ساده می‌کنیم.

مرحله ۲ احتمال پیشامدهای ساده شده را با توجه به فضای نمونه داده شده، محاسبه می‌کنیم.

مرحله ۳ با جای‌گذاری مقادیر محاسبه شده در عبارت ساده شده در مرحله اول، احتمال پیشامد ترکیبی را به دست می‌آوریم.

۱. مبانی احتمال

آمار و احتمال به چه کار می‌آیند؟

مرجع

(مرتبط با صفحه ۴۰ کتاب درسی)	۹۷. الف) به بررسی یک نمونه نامعلوم از یک جامعه معلوم، علم ... و به علم شناختن جامعه نامعلوم با استفاده از نمونه‌های جمع‌آوری شده معلوم، علم ... می‌گویند. ب) ابزارهای حل مسائلی که با ناآگاهی نسبی از شرایط یا وقایع آینده همراه است را علوم ... می‌نامند.
(مرتبط با صفحه ۴۰ کتاب درسی)	۹۸. مشخص کنید کدام یک از موارد زیر صحیح و کدام غلط است؟ الف) علم احتمال، شناختن جامعه نامعلوم با استفاده از نمونه‌های جمع‌آوری شده معلوم می‌باشد. ب) هرگاه بخواهیم مسئله‌ای را با کمک علم احتمال بررسی کنیم، قدم اول شناخت فضای نمونه است.
(مشابه کار در کلاس با صفحه ۴۱ کتاب درسی)	۹۹. مشخص کنید کدام یک از موارد زیر مربوط به علم آمار و کدام یک مربوط به علم احتمال است؟ ۱- سرانه مطالعه دانش‌آموزان مقطع متوسطه چند ساعت است؟ ۲- چند درصد امکان دارد عددی که به تصادف از مجموعه اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۰۰ انتخاب شده، بر ۷ بخش‌پذیر باشد؟ ۳- نحوه پیش‌بینی حرکات در بازی شطرنج توسط کامپیوتر ۴- احتمال ارتکاب به جرم در بازه‌های سنی متفاوت ۵- پیش‌بینی روند تغییرات شاخص بورس

ترجمه زبان گزاره‌ها به زبان مجموعه‌ها

مرجع

(مرتبط با صفحه ۴۲ کتاب درسی)	۱۰۰. فضای نمونه را تعریف کنید؟
(مرتبط با صفحه ۴۲ کتاب درسی)	۱۰۱. برآمد چیست؟
(مرتبط با صفحه ۴۳ کتاب درسی)	۱۰۲. پیشامد چیست؟
(مرتبط با کار در کلاس صفحه ۴۶ کتاب درسی)	۱۰۳. مشخص کنید که در هر قسمت، دو پیشامدی که آمده است با هم سازگارند یا ناسازگارند؟ الف) دانش‌آموزی که به تصادف از کلاس انتخاب می‌کنید: A: متولد ماه مهر باشد. B: متولد فصل تابستان باشد. ب) سکه‌ای که سه بار پرتاب می‌کنید: A: هر سه بار مشابه بیاید. B: زوج بار رو بیاید. پ) فردا، A: خورشید در آسمان دیده شود. B: باران ببارد. ت) تاسی را پی‌درپی پرتاب می‌کنیم، A: برای اولین بار در مرتبه سوم ۶ بیاید. B: تا پرتاب سوم دو بار ۶ بیاید.

<p>(مرتبط با صفحه ۴۷ کتاب درسی)</p>	<p>۱۰۴. فضای نمونه $S = \{a, b, c, d, e\}$ را در نظر بگیرید. اگر پیشامدهای A و B را به صورت زیر تعریف کنیم، به سؤالات پاسخ دهید:</p> $A = \{a, b, c\}$ $B = \{b, c, d\}$ <p>الف) پیشامد $A \cap B$ را مشخص کنید. ب) پیشامد $A \cup B$ را مشخص کنید. پ) اگر پیشامد $\{c\}$ اتفاق بیفتد، کدام یک از پیشامدهای A و B اتفاق افتاده است؟</p>
<p>امتحان نهایی - خرداد ۹۶ (۹ تکرار)</p>	<p>۱۰۵. فرض کنید A، B و C سه پیشامد باشند، برای هر کدام از پیشامدهای زیر یک عبارت مجموعه‌ای بنویسید.</p> <p>الف) پیشامد A یا B یا C اتفاق بیفتد. ب) فقط پیشامد A اتفاق بیفتد.</p> <p>(مرتبط با صفحه ۴۵ کتاب درسی)</p>
<p>امتحان نهایی - خرداد ۹۵ (۵ تکرار)</p>	<p>۱۰۶. اگر A و B دو پیشامد در فضای نمونه‌ای S باشند، با رسم نمودار ون، پیشامد «تنها یکی از دو پیشامد A یا B اتفاق بیفتد» را نمایش دهید.</p> <p>(مرتبط با صفحه ۴۵ کتاب درسی)</p>

تشخیص فضای نمونه‌ای

مرجع

<p>(مرتبط با تمرین صفحه ۴۷ کتاب درسی)</p>	<p>۱۰۷. علی و احمد با هم یک مرتبه سنگ، کاغذ و قیچی بازی می‌کنند. فضای نمونه برای این بازی چیست؟</p>
<p>(مرتبط با تمرین صفحه ۴۷ کتاب درسی)</p>	<p>۱۰۸. ۱۰ نفر با طول قد متفاوت وارد یک سالن می‌شوند. اگر برای ما فقط ترتیب قد آن‌ها اهمیت داشته باشد. تعداد اعضای فضای نمونه برای ورود این افراد به سالن را به دست آورید.</p>
<p>(مرتبط با تمرین صفحه ۴۷ کتاب درسی)</p>	<p>۱۰۹. در یک ایستگاه هواشناسی، در هر لحظه وضعیت آب و هوا با پنج پارامتر مشخص می‌شود: دمای هوا، رطوبت هوا، سرعت باد، وضعیت هوا و بارش در ۲۴ ساعت گذشته. برای سادگی، وضعیت آب و هوا را با شرح زیر خلاصه می‌کنیم: آیا از نظر دما، سرد است یا گرم یا معتدل؟ آیا از نظر رطوبت، خشک است یا مرطوب یا شرجی؟ آیا باد می‌وزد یا نمی‌وزد؟ آیا هوا صاف است یا ابری؟ آیا در ۲۴ ساعت گذشته بارندگی رخ داده است یا خیر؟</p> <p>برای وضعیت هوا در یک لحظه در یک ایستگاه هواشناسی فضای نمونه را به شکل حاصل ضرب دکارتی چند مجموعه بنویسید. این فضا چند عضو دارد؟</p>



امتحان نهایی - خرداد ۹۳
(۱۸ تکرار)

(مشابه تمرین ۱ صفحه ۴۷ کتاب درسی)

۱۱۰. در خانواده‌ای با سه فرزند:

الف) فضای نمونه را بنویسید.

ب) پیشامد A که در آن خانواده حداکثر یک فرزند دختر باشد.

پ) پیشامد B که در آن خانواده فقط یک فرزند دختر باشد.

ت) پیشامد $A' \cup B'$ را مشخص کنید.

اصول احتمال

مرجع

۱۱۱. برای پیشامد A از فضای نمونه S ، با کمک اصول احتمال ثابت کنید:	الف) $P(A') = 1 - P(A)$ ب) $P(\emptyset) = 0$	(مرتبط با فعالیت صفحه ۴۵ کتاب درسی)
۱۱۲. اگر A ، B و C پیشامدهای دوه‌دو ناسازگار باشند، ثابت کنید:	$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$	(مرتبط با فعالیت صفحه ۴۵ کتاب درسی)
۱۱۳. برای دو پیشامد A و B از فضای نمونه S ، با کمک اصول احتمال ثابت کنید:	$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$	(مرتبط با فعالیت صفحه ۴۵ کتاب درسی)
۱۱۴. برای دو پیشامد A و B از فضای نمونه S ، با کمک اصول احتمال ثابت کنید:	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	(مرتبط با فعالیت صفحه ۴۶ کتاب درسی)
۱۱۵. با استفاده از اصول احتمال، گزاره‌های زیر را ثابت کنید: الف) اگر $B \subseteq A$ داریم: $P(A - B) = P(A) - P(B)$. ب) اگر $B \subseteq A$ ، آن‌گاه: $P(B) \leq P(A)$.		(مرتبط با تمرین صفحه ۴۷ کتاب درسی)
۱۱۶. برای دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S داریم: $P(A) = P(B) = 1$ ، نشان دهید:	$P(A \cap B) = 1$	امتحان نهایی - شهریور ۹۴ (۱۱ تکرار) (مرتبط با صفحه ۴۵ کتاب درسی)
۱۱۷. ثابت کنید برای دو پیشامد دلخواه A و B داریم:	$P(A' \cap B') = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$	امتحان نهایی - خرداد ۹۶ (۱۲ تکرار) (مرتبط با صفحه ۴۵ کتاب درسی)
۱۱۸. اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند ثابت کنید: $P(A' \cup B) - P(A \cap B) = 1 - P(A)$		(مرتبط با صفحه ۴۶ کتاب درسی)
۱۱۹. اگر $P(A) = \frac{1}{5}$ ، $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$ و A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، آن‌گاه $P(B')$ را حساب کنید.		امتحان نهایی - دی ۹۵ (۵ تکرار) (مرتبط با صفحه ۴۶ کتاب درسی)