کتاب آموزش

گسسته

۱۲ پایه

از مجموعه رشادت

احسان خیراللهی

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمه

به نام خداوند جان و خرد
کزین برتر اندیشه برنگذرد

سپاس فراوان خداوند منان که ما را آموخت و آموختن فرمود. هدف از تألیف کتاب «**ریاضیات گسسته یکتا**» از مجموعهٔ «**رشادت**»، فراهم آوردن منبعی مناسب و جامع برای موفقیت در امتحان نهایی سال دوازدهم، آزمون‌های چهارگزینه‌ای آزمایشی و از همه مهم‌تر موفقیت در کنکور می‌باشد. در این کتاب کلیهٔ مفاهیم درس ریاضیات گسسته به صورت پیشرفته آموزش داده شده و مطالب پیش‌نیاز از پایه‌های قبلی نیز یادآوری شده است.

دانش‌آموز در هر فصل، قبل از پاسخ به سؤالات تشریحی و چهارگزینه‌ای باید درسنامه را به‌طور کامل مطالعه کند تا درک عمیقی از مفاهیم آن پیدا کند. سعی شده با ذکر سؤال و تست‌های تألیفی و کنکور، توانایی دانش‌آموز افزایش یابد. در بین سؤالات چهارگزینه‌ای، بعضی با متمایز شده‌اند. آن‌ها سؤالاتی نکته‌دار یا دشوار هستند که برای به چالش کشیدن دانش‌آموز و توانایی او در حل مسائل پیچیده طرح شده‌اند. سؤالات تشریحی با رویکرد امتحان نهایی و آزمون‌های تشریحی طرح شده است که با پاسخ‌های کاملاً تشریحی مطابق با روند آموزشی کتاب درسی همراه می‌باشد. امید است کتاب حاضر پاسخگوی نیازهای دانش‌آموزان برای موفقیت در آزمون‌های ورودی دانشگاه‌های برتر باشد.

از مدیرعامل محترم **انتشارات مبتکران** جناب آقای یحیی دهقانی که امکان چاپ این کتاب را فراهم نمودند، قدردانی می‌کنم. هم‌چنین از دبیر محترم مجموعه جناب مهندس هادی عزیززاده تشکر می‌کنم که این کتاب مولود فکر خلاق ایشان است. از خانم سپیده خداوردی که زحمت حروفچینی و صفحه‌آرایی کتاب را برعهده داشته است و خانم‌ها سارا لطفی‌مقدم و بهاره خدامی (گرافیست‌ها)، زهرا گودرز و سپیده رشیدی (طراح جلد) بسیار ممنونم و برای همهٔ عزیزان آرزوی موفقیت می‌کنم.

از دبیران محترم و دانش‌آموزان ساعی خواهشمندم نظرات، پیشنهادها و انتقادهای خود را دربارهٔ این کتاب، برای بنده ارسال نمایند.

احسان خیراللهی
@math_edu96

فهرست

فصل اول
نظریه اعداد ۱

درس اول: استدلال ریاضی

درس دوم: بخشپذیری

درس سوم: رابطه هم‌نهشتی و کاربردهای آن

فصل دوم
گراف و کاربردهای آن ۲

درس اول: معرفی گراف

درس دوم: مدل‌سازی با گراف

فصل سوم

۳ ترکیبیات

درس اول: مباحثی در ترکیبیات

درس دوم: روش‌هایی برای شمارش

فصل اول

۱ نظریه اعداد

- درس اول: استدلال ریاضی
- درس دوم: بخشپذیری
- درس سوم: رابطه ی همنهشتی و کاربردهای آن

درس اول
استدلال ریاضی

یک ویژگی عمدهٔ ریاضیات آن است که در همهٔ علوم و شئون زندگی انسان کاربرد دارد و هر دانشی برای گسترش و پیشرفت خود بـه ریاضـیات نیاز دارد. این نیاز موجبات گسترش شگفت‌انگیز ریاضیات را فراهم ساخته است و امروزه آن قدر شاخه‌های متعدد در ریاضیات پدید آمـده اسـت که هر ریاضیدان فقط در زمینه‌ای خاص دارای تخصص است. جدا از همهٔ اخـتلاف‌نظرهـا، ریاضـیدانان در یـک موضـوع اتفـاق‌نظر دارنـد و آن چگونگی ثابت کردن قضیه‌های ریاضی است که استدلال ریاضی نامیده می‌شود.

استدلال ریاضی همان نتیجه‌گیری منطقی است. استدلال تابع قوانینی است که به طور طبیعی ذهن آدمی آن را به کار مـی‌بـرد. آن چـه ماهیـت استدلال را می‌سازد، قضایایی هستند که به عنوان مقدمه و تحت این قوانین برای رسیدن به نتیجه سازماندهی شده‌اند. در مقدمهٔ پاپیروس رایند کـه شاید قدیمی‌ترین تاریخ موجود ریاضی باشد (۱۶۵۰ سال قبل از میلاد) چنین آمده است:

> «به جرأت می‌توان گفت بارزترین مشخصهٔ شعور انسان که نشان‌دهندهٔ درجهٔ تمدن هر ملت است، همان قـدرت اسـتدلال کـردن است به‌طورکلی این قدرت به بهترین وجه می‌تواند در مهارت‌های ریاضی افراد آن ملت به نمایش گذاشته شود.»

اکنون با برخی از روش‌های استدلال و اثبات در ریاضی آشنا می‌شویم.

اثبات مستقیم

گزارهٔ شرطی $p \Rightarrow q$ را در نظر بگیرید، چنان‌چه بتوانیم با توجه به درستی p، درستی q را ثابت کنیم در این صورت یک اثبات مسـتقیم انجـام داده‌ایم.

سؤال ۱ **ثابت کنید اگر k حاصل‌ضرب دو عدد متوالی باشد، آن‌گاه $4k+1$ مربع کامل است.**

حل اگر n عددی طبیعی باشد در این صورت داریم:

$$k = n(n+1) \Rightarrow 4k+1 = 4n(n+1)+1 = 4n(n+1)+1 = 4n^2+4n+1 = (2n+1)^2$$

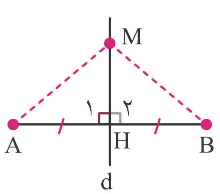
سؤال ۲ **ثابت کنید مربع هر عدد صحیح فرد در تقسیم بر ۸ دارای باقی‌ماندهٔ ۱ است.**

حل اگر a فرد باشد در این صورت عددی صحیح مانند k وجود دارد به‌طوری‌که $a = 2k+1$ داریم:

$$(2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 4\underbrace{k(k+1)}_{2k' \in \mathbb{Z}}+1 = 8k'+1$$

سؤال ۳ **ثابت کنید هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است.**

حل فرض می‌کنیم d عمودمنصف پاره‌خط AB بوده و M نقطه‌ای دلخواه روی d باشـد. از M بـه A و B وصل می‌کنیم. داریم:



$$\begin{cases} MH = MH \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \\ AH = BH \end{cases} \xrightarrow{(\text{ض ز ض})} \overset{\Delta}{AMH} \cong \overset{\Delta}{BMH} \Rightarrow AM = MB$$

سؤال ۴ **ثابت کنید هر عدد فرد برابر تفاضل مربعات دو عدد صحیح است.**

حل اگر a عددی فرد باشد در این صورت عددی صحیح مانند k وجود دارد به طوری که $a = 2k+1$. داریم:

$$a = 2k+1 = 2k+1+k^2-k^2 = (k^2+2k+1)-k^2 = (k+1)^2-k^2$$

سؤال ۵ **ثابت کنید مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.**

حل اگر a و b اعدادی فرد باشند در این صورت اعداد صحیحی مانند k و k' وجود دارد به‌طوری که $a=2k+1$ و $b=2k'+1$ باشند. داریم:

$$a+b=2k+1+2k'+1=2k+2k'+2=2\underbrace{(k+k'+1)}_{k''\in\mathbb{Z}}=2k''$$

سؤال ۶ **ثابت کنید مجموع هر دو عدد گویا، عددی گویاست.**

حل اعداد گویا به فرم $\frac{a}{b}$ هستند به‌طوری‌که $b\neq 0$ و $a,b\in\mathbb{Z}$ می‌باشند. اگر فرض کنیم y,x دو عدد گویا باشند، در این صورت اعداد صحیح d,c,b,a وجود دارند به‌طوری‌که $x=\frac{a}{b}$ و $y=\frac{c}{d}$ $(b,d\neq 0)$. داریم:

$$x+y=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

از آن‌جایی‌که $ad+bc$ و bd اعدادی صحیح هستند و $bd\neq 0$، نتیجه می‌گیریم $x+y$ عددی گویاست.

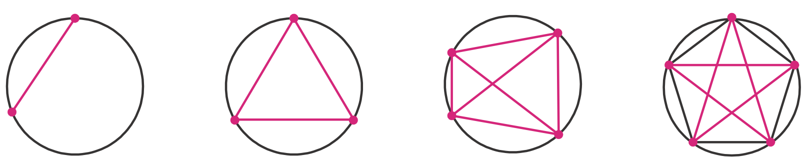
سؤال ۷ **ثابت کنید حاصل‌ضرب سه عدد متوالی بر ۶ بخش‌پذیر است.**

حل از هر n عدد متوالی دقیقاً یکی از آن‌ها بر n بخش‌پذیر است. پس از هر ۳ عدد صحیح متوالی حداقل یکی بر ۲ و یکی بر ۳ بخش‌پذیر است بنابراین حاصل‌ضرب آن‌ها بر ۶ بخش‌پذیر است.

مثال نقض

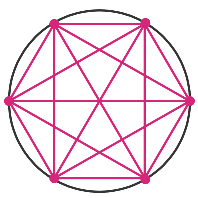
بعضی از قضایا هستند که همواره برقرارند که به آن‌ها قضایای کلی گفته می‌شود. به طور مثال $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ به‌ازای همهٔ x های عضو $\mathbb{R}$ برقرار است.

اما گاهی اتفاق می‌افتد که با مثالی، عمومیت نتیجه‌ای که حدس می‌زنیم نقض می‌شود. مثلاً اگر دو نقطهٔ اختیاری روی محیط دایره را به وسیلهٔ یک پاره‌خط به هم وصل کنیم، دایره به دو ناحیه تقسیم می‌شود. با اتصال سه نقطهٔ اختیاری روی محیط دایره، دایره به ۴ ناحیه تقسیم می‌شود. شکل‌های زیر این موضوع را برای ۴،۳،۲ و ۵ نقطهٔ اختیاری روی محیط دایره نشان می‌دهد.



تعداد نقطه‌ها	۲	۳	۴	۵
تعداد ناحیه‌ها	۲	۴	۸	۱۶

ممکن است حدس بزنیم با اتصال n نقطهٔ اختیاری روی محیط دایره، دایره به 2^{n-1} ناحیه تقسیم می‌شود.



مشخص است که براساس پاره‌ای از مشاهدات نمی‌توان درستی یک حکم در حالت کلی را نتیجه گرفت کما اینکه ممکن است که این حکم در حالت کلی نیز درست نباشد. چنان‌چه بخواهیم ثابت کنیم یک حکم در حالت کلی درست نیست، کافی است با بیان مثالی نتیجه بگیریم که حکم درست نمی‌باشد. مثلاً با اتصال ۵ نقطهٔ اختیاری روی محیط دایره، دایره به ۳۰ ناحیه همانند شکل مقابل تقسیم می‌شود. این مثال نشان دهندهٔ نادرستی حدس ماست. اگر حتی یک مثال پیدا شود که حدس ما را نادرست کند در این صورت می‌گوییم با مثال نقض نادرستی حدس ثابت شده است.

به مثالی که نشان می‌دهد یک حکم در حالت کلی دوست نیست، **مثال نقض** می‌گوییم.

سؤال ۸ **آیا 2^n-1 به‌ازای هر عدد فرد $n\geq 3$، اول است؟**

حل خیر ـ به‌ازای $n=9$ عدد $2^9-1=511=7\times 73$ مرکب است.

سؤال ۹ اگر x و y دو عدد حقیقی باشند به‌طوری که $\sin x = \sin y$، آیا همواره $\tan x = \tan y$ برقرار است؟

حل خیر ـ اگرفرض کنیم $x = \frac{\pi}{۶}$ و $y = \frac{۵\pi}{۶}$ باشند در این صورت $\sin x = \sin y = \frac{۱}{۲}$ است اما $\tan x = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$ و $\tan y = \frac{-\sqrt{۳}}{۳}$ می‌باشد.

سؤال ۱۰ اگر برای هر سه مجموعهٔ A، B و C داشته باشیم $A \cup B = A \cup C$، آن‌گاه $B = C$ برقرار است؟

حل خیر ـ فرض کنید $A = \{۱,۲,۳\}$، $B = \{۱\}$ و $C = \{۲\}$ باشند در این صورت $A \cup B = A \cup C$ است اما $B \neq C$ می‌باشد.

سؤال ۱۱ اگر x,y دو عدد حقیقی باشند در این صورت $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ برقرار است؟

حل خیر ـ اگر فرض کنیم $x = ۳$ و $y = ۶$ باشد در این صورت $\sqrt{۹} \neq \sqrt{۳} + \sqrt{۶}$ است زیرا $۳ = \sqrt{۹}$ و $\sqrt{۳} \simeq ۱/۷$ و $\sqrt{۶} \simeq ۲/۴۵$ می‌باشند.

سؤال ۱۲ اگر x عددی حقیقی باشد در این صورت $x^۲ > x$ برقرار است؟

حل خیر ـ اگر فرض کنیم $x = \frac{۱}{۲}$ باشد در این صورت $\frac{۱}{۲} \not< \frac{۱}{۴}$ است.

سؤال ۱۳ اگر x عددی حقیقی و غیرصفر باشد در این صورت $\frac{۱}{x} \leq x$ برقرار است؟

حل خیر ـ اگر فرض کنیم $x = \frac{۱}{۳}$ باشد در این صورت $۳ \not\leq \frac{۱}{۳}$ است.

سؤال ۱۴ فرض کنید y,x اعداد طبیعی باشند به‌طوری‌که $x^۳$ بر $y^۲$ بخش‌پذیر باشد. آیا درست است که x بر y بخش‌پذیر می‌باشد؟

حل خیر ـ اگر فرض کنیم $x = ۴$ و $y = ۸$ باشند در این صورت $۶۴ = ۴^۳$ بر $۶۴ = ۸^۲$ بخش‌پذیر است ولی ۴ بر ۸ بخش‌پذیر نیست.

سؤال ۱۵ اگر y,x دو عدد حقیقی باشند در این صورت $[x-y] = [x] - [y]$ برقرار می‌باشد؟

حل خیر ـ اگر فرض کنیم $x = ۰$ و $y = \frac{۱}{۵}$ باشند در این صورت $\left[۰ - \frac{۱}{۵}\right] = -۱$ و $[۰] - \left[\frac{۱}{۵}\right] = ۰$ می‌باشند. بنابراین $[x-y] \neq [x] - [y]$ است.

سؤال ۱۶ آیا مجموع دو عدد گنگ، عددی گنگ است؟

حل خیر ـ اگر فرض کنیم $x = ۲ - \sqrt{۲}$ و $y = ۲ + \sqrt{۲}$ اعدادی گنگ باشند در این صورت $x + y = ۴$ می‌باشد که عددی گنگ نیست.

سؤال ۱۷ آیا حاصل‌ضرب دو عدد گنگ عددی گنگ است؟

حل خیر ـ اگر فرض کنیم $x = ۲\sqrt{۲}$ و $y = ۳\sqrt{۲}$ اعدادی گنگ باشند در این صورت $x.y = ۱۲$ می‌باشد که عددی گنگ نیست.

تست ۱ کدام‌یک از گزینه‌های زیر، مثال نقضی برای گزارهٔ «ارتفاع‌های هر مثلث در نقطه‌ای درون یا بیرون مثلث هم‌رس‌اند.» می‌باشد؟

۱) مثلث حاده الزاویه ۲) مثلث متساوی الساقین ۳) مثلث قائم‌الزاویه ۴) مثلث منفرجه الزاویه

پاسخ گزینهٔ ۳ درست است.

محل هم‌رسی ارتفاع‌های مثلث قائم‌الزاویه روی مثلث (رأس قائمه) است.

تست ۲ کدام گزینه کلیت حکم «حاصل‌ضرب هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است» را نقض می‌کند؟

۱) $\sqrt{۳۶},\sqrt{۹}$ ۲) $\sqrt{۱۲۵},\sqrt{۵}$ ۳) $\sqrt{۱۲۵},\sqrt{۱۵}$ ۴) $\sqrt{۱۲},\sqrt{۲۴}$

پاسخ گزینهٔ ۲ درست است.

اعداد $\sqrt{۵}$ و $\sqrt{۱۲۵}$ هر دو گنگ هستند ولی حاصل‌ضرب آن‌ها $۲۵=\sqrt{۶۲۵}=\sqrt{۱۲۵}\times\sqrt{۵}$ گویاست. توجه داشته باشید اعداد گزینهٔ ۱ گنگ نیستند.

تست ۳ کدام گزینه مثال نقضی برای گزارهٔ «هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع اعداد طبیعی نوشت.» می‌باشد؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

پاسخ گزینهٔ ۳ درست است.

توجه داشته باشید اعدادی که توانی از ۲ می‌باشند را نمی‌توان به صورت جمع چند عدد طبیعی نوشت.

$$۶=۱+۲+۳\quad,\quad ۷=۳+۴\quad,\quad ۹=۴+۵$$

اثبات با درنظرگرفتن همه حالت‌ها (روش اشباع)

گاهی برای اثبات یک گزاره لازم است همهٔ موارد ممکن در مورد مسئله را در نظر بگیریم. مثلاً می‌خواهیم ثابت کنیم عدد $(n^۲-۵n+۷)$ به‌ازای هر مقدار طبیعی n، عددی فرد است. دو حالت را باید بررسی کنیم:

۱ n زوج باشد. در این صورت عددی صحیح مانند k وجود دارد به‌طوری‌که $n=۲k$ است. داریم:

$$n^۲-۵n+۷=(۲k)^۲-۵(۲k)+۷=۴k^۲-۱۰k+۶+۱=۲\underbrace{(۲k^۲-۵k+۳)}_{k'\in\mathbb{Z}}+۱=۲k'+۱$$

۲ n فرد باشد. در این صورت عددی صحیح مانند k وجود دارد به‌طوری‌که $n=۲k+۱$ است. داریم:

$$n^۲-۵n+۷=(۲k+۱)^۲-۵(۲k+۱)+۷=۴k^۲+۴k+۱-۱۰k-۵+۷=۴k^۲-۶k+۱=۲\underbrace{(۲k^۲-۳k)}_{k'\in\mathbb{Z}}+۱=۲k'+۱$$

می‌بینیم که در هر دو حالت، فرد بودن $n^۲-۵n+۷$ را نتیجه می‌گیریم.

اگر زوج بودن n را با p و فرد بودن n را با q و فرد بودن $n^۲-۵n+۷$ را با r نمایش دهیم، قضیه را می‌توان به صورت $p\vee q\Rightarrow r$ نمایش داد و با توجه به هم‌ارزی‌هایی که در فصل اول آمار و احتمال یکتا بیان کردیم، هرگاه ترکیب شرطی از راست روی ترکیب فصلی توزیع شود در این صورت فاصل را عاطف تبدیل می‌کند، داریم:

$$\begin{aligned}p\vee q\Rightarrow r&\equiv\sim(p\vee q)\vee r\\&\equiv(\sim p\wedge\sim q)\vee r\\&\equiv(\sim p\vee r)\wedge(\sim q\vee r)\\&\equiv(p\Rightarrow r)\wedge(q\Rightarrow r)\end{aligned}$$

توجه

اگر در فرض، n گزارهٔ مختلف داشته باشیم، داریم:

$$\mathbf{(p_۱\vee p_۲\vee\cdots\vee p_n)\Rightarrow r\equiv(p_۱\Rightarrow r)\wedge(p_۲\Rightarrow r)\wedge\cdots\wedge(p_n\Rightarrow r)}$$

سؤال ۱۸ **ثابت کنید اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $ab=0$، آن‌گاه $a=0$ یا $b=0$ است.**

حل برای a دو حالت وجود دارد که عبارتند از:

۱ اگر $a=0$ باشد، در این حالت حکم برقرار است زیرا حاصل‌ضرب صفر در عدد حقیقی برابر صفر است.

۲ اگر $a\neq 0$ باشد، در این صورت a^{-1} یک عدد حقیقی است و با ضرب طرفین رابطهٔ $ab=0$ در a^{-1} داریم:

$$ab=0 \Rightarrow a^{-1}(ab)=0 \Rightarrow b=0$$

سؤال ۱۹ **اگر a و b دو عدد صحیح باشند و ab فرد باشد، ثابت کنید a^2+b^2 عددی زوج است.**

حل حاصل‌ضرب دو عدد هنگامی فرد می‌شود که هر دو عدد فرد باشند. بنابراین a و b فرد هستند که در این صورت اعداد صحیح k و k' وجود دارند به‌طوری که $a=2k+1$ و $b=2k'+1$. داریم:

$$a^2+b^2=(2k+1)^2+(2k'+1)^2=4k^2+4k+1+4k'^2+4k'+1=4k^2+4k'^2+4k+4k'+2=2\underbrace{(k^2+k'^2+2k+2k'+1)}_{k''\in\mathbb{Z}}=2k''$$

سؤال ۲۰ **$A=\{3,4\}$ یک زیرمجموعه از مجموعه $S=\{1,2,\cdots,6\}$ است و $n\in S$، اگر $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ عددی زوج باشد، ثابت کنید $n\in A$.**

حل می‌دانیم $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ مجذور $\frac{n(n+1)}{2}$ است. بنابراین اگر $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ عددی زوج باشد در این صورت $\frac{n(n+1)}{2}$ نیز عددی زوج است. پس عددی صحیح مانند k وجود دارد به‌طوری که $\frac{n(n+1)}{2}=2k$ است. پس $n(n+1)=4k$ می‌باشد و نتیجه می‌گیریم از دو عدد متوالی n و $n+1$ یکی باید مضرب ۴ باشد.

۱ اگر n مضرب ۴ باشد از آن‌جایی‌که $1\le n\le 6$ است بنابراین فقط $n=4$ قابل قبول است.

۲ اگر $(n+1)$ مضرب ۴ باشد از آن‌جایی‌که $1\le n\le 6$ است. نتیجه می‌گیریم $2\le n+1\le 7$ می‌باشد بنابراین فقط $n+1=4$ یا همان $n=3$ قابل قبول است.

برهان خلف (اثبات غیرمستقیم)

یکی دیگر از روش‌های معتبر برای اثبات مسائل، استفاده از **برهان خلف** است که روش غیرمستقیم اثبات مسائل می‌باشد. بدین صورت که گاهی اوقات برای اثبات یک قضیه، ابتدا فرض می‌کنیم که حکم قضیه نادرست باشد، سپس با استفاده از قوانین منطق گزاره‌ها و دنباله‌ای از استدلال‌های درست و مبتنی بر فرض به یک نتیجه غیرممکن (تناقض) یا نتیجهٔ متضاد با فرض قضیه می‌رسیم (یعنی به نتیجه‌ای می‌رسیم که می‌دانیم درست نیست) و از آن‌جا معلوم می‌گردد که فرض نادرست بودن حکم باطل است و درستی حکم ثابت می‌گردد.

برای استفاده از برهان خلف باید گام‌های زیر را برداشت:

✓ **گام اول:** فرض می‌کنیم حکم سؤال نادرست باشد. (فرض خلف)

✓ **گام دوم:** نشان می‌دهیم که این فرض، نتیجه‌ای می‌دهد که حقایق دانسته شده‌ای را نقض می‌کند یا نتیجه‌ای متناقض با فرض مسئله می‌دهد.

✓ **گام سوم:** حال‌که به یک تناقض یا نتیجه‌ای متناقض با فرض مسئله رسیدیم، معلوم می‌شود که فرض اولیه (فرض خلف) نادرست است و بنابراین حکم سؤال درست می‌باشد.

توجه داشته باشید در قضایای شرطی $(p\Rightarrow q)$ برای اثبات می‌بایست از اطلاعات فرض (p)، درستی اطلاعات حکم (q) را نشان دهیم. در برهان خلف از نادرستی حکم، نادرستی فرض را نتیجه‌گیری می‌کنیم. زیرا می‌دانیم دو گزارهٔ $p\Rightarrow q$ و $\sim q\Rightarrow \sim p$ با هم هم‌ارز منطقی می‌باشند. در سال یازدهم در پایان درس اول فصل اول با اثبات غیرمستقیم (اثبات عکس نقیض) آشنا شدیم، برهان خلف حالت کلی‌تری از اثبات عکس نقیض است که در آمار و احتمال با آن آشنا شدیم زیرا در برهان خلف، گزاره‌ای را اثبات می‌کنیم که ممکن است حکم یک قضیهٔ شرطی نباشد.

سؤال ۲۱ **ثابت کنید $\sqrt{2}$ عددی گنگ است.**

حل فرض می‌کنیم حکم درست نباشد یعنی $\sqrt{2}$ عددی گویا باشد (فرض خلف). در این صورت اعداد صحیح a و b وجود دارند به‌طوری که نسبت به هم اول می‌باشند و $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ است. بنابراین $a^2=2b^2$ می‌باشد. از این رابطه نتیجه می‌گیریم a^2 عددی زوج است پس a نیز عددی زوج می‌باشد. بنابراین عدد صحیح k وجود دارد به‌طوری که $a=2k$ است. داریم:

$$a^2=2b^2 \Rightarrow 4k^2=2b^2 \Rightarrow b^2=2k^2$$

پس b^2 نیز عددی زوج است بنابراین b هم عددی زوج می‌باشد. از آن‌جایی‌که a و b هر دو مضرب ۲ هستند نمی‌توانند نسبت به هم اول باشند که با فرض اولیه (a و b نسبت به هم اول باشند) در تناقض است پس با فرض گویا بودن $\sqrt{2}$ نیز در تناقض می‌باشد. بنابراین فرض خلف نادرست است پس $\sqrt{2}$ عددی گنگ می‌باشد.

سؤال ۲۲ **ثابت اگر a عددی صحیح باشد و a^2 عددی فرد باشد، آن‌گاه a عددی فرد است.**

حل به‌جای اثبات این حکم، عکس نقیض آنرا ثابت می‌کنیم.

$$(a \text{ عددی فرد است} \Rightarrow a^2 \text{ عددی فرد است}) \equiv (a \text{ عددی زوج است} \Rightarrow a^2 \text{ عددی زوج است})$$

پس اگر a عددی زوج باشد، عددی صحیح مانند k وجود دارد به‌طوری که $a=2k$ باشد. داریم:

$$a^2=(2k)^2=4k^2=2\underbrace{(2k^2)}_{k'\in\mathbb{Z}}=2k'$$

در نتیجه a^2 نیز عددی زوج است که این یک نتیجهٔ متناقض با فرض مسئله است (a^2 عددی فرد است)، زیرا a^2 نمی‌تواند هم زوج و هم فرد باشد بنابراین تنها توجیه این تناقض این است که فرض زوج بودن a (فرض خلف) نادرست است پس a باید عددی فرد باشد.

سؤال ۲۳ **ثابت کنید حاصل جمع عدد گویا x و عدد گنگ y، عددی گنگ است.**

حل فرض می‌کنیم $(x+y)$ گنگ نباشد (فرض خلف)، بنابراین عددی گویا است. داریم:

$$x+y=a \Rightarrow y=a-x$$

از آن‌جایی که a و x هر دو گویا می‌باشند نتیجه می‌گیریم y نیز عددی گویاست زیرا تفاضل دو عدد گویا، عددی گویا می‌باشد. که این در تناقض با فرض مسئله است پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

سؤال ۲۴ **ثابت کنید اگر n عددی صحیح و n^2 مضرب ۳ باشد، آن‌گاه n مضرب ۳ است.**

حل به جای اثبات حکم، عکس نقیض آن را ثابت می‌کنیم.

$$(n \text{ مضرب ۳ است} \Rightarrow n^2 \text{ مضرب ۳ باشد}) \equiv (n \text{ مضرب ۳ نباشد} \Rightarrow n^2 \text{ مضرب ۳ نیست})$$

چنان‌چه n مضرب ۳ نباشد و $n\in\mathbb{Z}$، پس $n=3k+1$ یا $n=3k+2$ است. بنابراین داریم:

$$n^2=(3k+1)^2=9k^2+6k+1=3\underbrace{(3k^2+2k)}_{k'\in\mathbb{Z}}+1=3k'+1 \quad \text{یا} \quad n^2=(3k+2)^2=9k^2+12k+3+1=3\underbrace{(3k^2+4k+1)}_{k''\in\mathbb{Z}}+1=3k''+1$$

در نتیجه n^2 مضرب ۳ نیست که این یک تناقض با فرض مسئله است. پس فرض خلف نادرست است و n حتماً مضرب ۳ است.

سؤال ۲۵ **ثابت کنید حاصل‌ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی گنگ است.**

حل اگر x عددی گنگ و y عددی گویا و ناصفر باشند، ابتدا فرض می‌کنیم $xy=z$ عددی گویاست (فرض خلف).

$$xy=z \Rightarrow x=\frac{z}{y}$$

از آن‌جایی که z و y اعدادی گویا هستند و $y\neq 0$، نتیجه می‌گیریم x هم عددی گویاست که با فرض مسئله در تناقض است پس فرض خلف باطل و xy عددی گنگ است.

سؤال ۲۶ **a_1, a_2, a_3 اعدادی صحیح می‌باشند. b_1, b_2, b_3 نیز همان اعداد می‌باشند ولی به‌ترتیب دیگری قرار گرفته‌اند. ثابت کنید $(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)$ عددی زوج است.**

حل فرض می‌کنیم $(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)$ عددی فرد است بنابراین هر سه فرد می‌باشند و حاصل جمع هر سه عددی فرد است در حالی‌که واضح است که $(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+(a_3-b_3)=0$ و عددی زوج می‌باشد. بنابراین به تناقض رسیدیم و فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

سؤال ۲۷ **ثابت کنید اگر تابع f در $x=a$ پیوسته ولی g در $x=a$ ناپیوسته باشد، $f+g$ در $x=a$ ناپیوسته است.**

حل فرض می‌کنیم $h(x)=(f+g)(x)$ در $x=a$ پیوسته است (فرض خلف). داریم:

$$h(x)=(f+g)(x) \Rightarrow h(x)=f(x)+g(x) \Rightarrow g(x)=h(x)-f(x)$$

از آن‌جایی‌که تابع f و تابع h در $x=a$ پیوسته می‌باشند بنابراین تفاضل آن‌ها نیز در $x=a$ پیوسته است پس تابع g در $x=a$ پیوسته است که با فرض مسئله در تناقض است بنابراین فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

سؤال ۲۸ **ثابت کنید $\sin 15^\circ$ عددی گنگ است.**

حل فرض می‌کنیم $\sin 15^\circ$ عددی گویا باشد (فرض خلف). از آن‌جایی‌که $\cos 30^\circ = 1-2\sin^2 15^\circ$ بنابراین $\cos 30^\circ$ نیز عددی گویاست زیرا ۱ و $2\sin^2 15^\circ$ دو عدد گویا هستند و تفاضل آن‌ها نیز عددی گویا می‌باشد. می‌دانیم $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ است و نتیجه گرفتیم $\frac{\sqrt{3}}{2}$ عددی گویاست ولی $\frac{\sqrt{3}}{2}$ عددی گنگ است. چون به تناقض رسیدیم بنابراین فرض خلف باطل و $\sin 15^\circ$ عددی گنگ می‌باشد.

تست ۴ **کدام قضیه را به روش برهان خلف نمی‌توان اثبات کرد؟**

۱) دو خط موازی با یک خط، با هم موازی‌اند.
۲) اگر n^2 مضرب ۱۰ باشد، آنگاه n هم مضرب ۱۰ است.
۳) معادلهٔ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$ در مجموعهٔ اعداد فرد جواب ندارد.
۴) میانگین ۵ عدد صحیح متوالی، عدد وسطی است.

پاسخ گزینهٔ **۴** درست است.

اثبات گزینهٔ ۴ به روش مستقیم انجام می‌شود.

تست ۵ **در اثبات حکم زیر به روش برهان خلف به کدام تناقض می‌رسیم؟**

«حاصل‌ضرب تمام اعداد اول کوچک‌تر یا مساوی P به اضافهٔ یک، یا اول است یا عامل اول بزرگ‌تر از P دارد.»

۱) یک، مضرب یکی از اعداد اول است.
۲) تعداد اعداد اول متناهی است.
۳) ضرب اعداد اول، اول است.
۴) $5<3$

پاسخ گزینهٔ **۱** درست است.

اگر $p_1, p_2, \cdots, p_n$ اعداد اول کوچک‌تر یا مساوی عدد P باشند، فرض می‌کنیم $A=p_1p_2\cdots p_n+1$ بر $(1\le i\le n)p_i$ بخش‌پذیر باشد (فرض خلف). پس عدد صحیح q وجود دارد به‌طوری‌که $A=p_iq$ و از آن‌جایی‌که حاصل‌ضرب $p_1p_2\cdots p_n$ بر p_i بخش‌پذیر است، پس عدد صحیح q' وجود دارد به‌گونه‌ای که $p_1p_2\cdots p_n=p_iq'$. اکنون از تساوی $A=p_1p_2\cdots p_n+1$ نتیجه می‌گیریم $p_iq=p_iq'+1$، پس $p_i(q-q')=1$. بنابراین نتیجه می‌گیریم عدد ۱ بر p_i بخش‌پذیر است اما می‌دانیم که عدد ۱ بر هیچ عدد اولی بخش‌پذیر نیست. پس به تناقض رسیدیم و فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

اثبات‌های بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز)

اگر ارزش دو گزاره یکسان باشد آن‌ها را گزاره‌های هم‌ارز (هم ارزش) می‌نامیم. اگر P و Q دو گزارهٔ هم‌ارز (یعنی همواره هر دو درست یا هر دو نادرست) باشند، آن‌گاه گزاره‌های $P \Rightarrow Q$ و $Q \Rightarrow P$ هر دو درست هستند و در نتیجه $P \Leftrightarrow Q$ یک گزاره درست است.

به عکس اگر ترکیب دوشرطی $P \Leftrightarrow Q$ درست باشد، آن‌گاه P و Q دو گزارهٔ هم‌ارز خواهند بود و اگر ارزش یکی از آن‌ها را بدانیم، ارزش دیگری نیز همان خواهد بود و به کمک این موضوع می‌توانیم درستی یا نادرستی یک گزاره را بررسی کنیم.

مثال ترکیب دوشرطی $(a,b \in \mathbb{R}) a=b \Leftrightarrow a^3=b^3$ درست است ولی ترکیب دوشرطی $(a,b \in \mathbb{R}) a=b \Leftrightarrow a^2=b^2$ درست نیست. زیرا به‌ازای $a=2$ و $b=-2$ گزارهٔ $a^2=b^2$ درست است ولی گزاره $a=b$ درست نمی‌باشد.

سؤال ۲۹ اگر $a,b \in \mathbb{R}$، کدام‌یک از ترکیب‌های دوشرطی زیر درست است؟

الف) $a<b \Leftrightarrow a^2<b^2$ ب) $a<b \Leftrightarrow a^3<b^3$

حل گزارهٔ «ب» درست است زیرا در گزارهٔ «الف» به‌ازای $a=-5$ و $b=0$ گزارهٔ $a<b$ درست است ولی گزارهٔ $a^2<b^2$ درست نمی‌باشد.

مثال ترکیب‌های دوشرطی $|x|=|y| \Leftrightarrow |x^2|=|y^2|$ و $0 \le x < 1 \Leftrightarrow [x]=0$ درست می‌باشند. گاهی مواقع برای اثبات یک حکم آن را به حکمی ساده‌تر تبدیل می‌کنیم که هم‌ارز با حکم اولیه باشد و این کار تا آن‌جا ادامه می‌دهیم تا به حکمی که درستی آن برای ما معلوم باشد برسیم.

سؤال ۳۰ اگر a یک عدد حقیقی مثبت باشد ثابت کنید $a+\frac{1}{a} \ge 2$.

حل چون $a>0$، ابتدا طرفین را در a ضرب می‌کنیم. داریم:

$$a+\frac{1}{a} \ge 2 \Leftrightarrow a^2+1 \ge 2a$$
$$\Leftrightarrow a^2+1-2a \ge 0$$
$$\Leftrightarrow (a-1)^2 \ge 0 \quad \text{همواره برقرار است}$$

چون حکم هم‌ارز گزاره‌ای است که همواره برقرار می‌باشد پس حکم ثابت شده است.

سؤال ۳۱ ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی از میانگین هندسی آن‌ها کمتر نیست.

حل فرض می‌کنیم $x,y \ge 0$، در این صورت باید ثابت کنیم $\frac{x+y}{2} \ge \sqrt{xy}$. برای این کار ابتدا دو طرف را به توان دو می‌رسانیم، سپس طرفین را در ۴ ضرب می‌کنیم و در آخر طرفین را با $-4xy$ جمع می‌کنیم. داریم:

$$\frac{x+y}{2} \ge \sqrt{xy} \Leftrightarrow \frac{x^2+2xy+y^2}{4} \ge xy$$
$$\Leftrightarrow x^2+2xy+y^2 \ge 4xy$$
$$\Leftrightarrow x^2-2xy+y^2 \ge 0$$
$$\Leftrightarrow (x-y)^2 \ge 0 \quad \text{همواره برقرار است}$$

سؤال ۳۲ برای سه عدد حقیقی z,y,x ثابت کنید $x^2+y^2+z^2 \ge xy+yz+xz$. *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

حل

$$x^2+y^2+z^2 \ge xy+yz+xz \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz \ge 0$$
$$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2xz \ge 0$$
$$\Leftrightarrow (x^2-2xy+y^2)+(x^2-2xz+z^2)+(y^2-2yz+z^2) \ge 0$$
$$\Leftrightarrow (x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2 \ge 0 \quad \text{همواره برقرار است.}$$

سؤال ۳۳ **اگر x و y دو عدد حقیقی غیرصفر باشند و $xy > 0$، ثابت کنید $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$.** *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

حل فرض می‌کنیم $a = \frac{x}{y}$ باشد، از آن‌جایی‌که $xy > 0$، بدیهی است که $a > 0$ می‌باشد. داریم:

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \Leftrightarrow a^2 + 1 \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 \geq 0$$ همواره برقرار است.

سؤال ۳۴ **برای دو عدد حقیقی مثبت x و y ثابت کنید $x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2$.**

حل

$$x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2 \Leftrightarrow x^3 + y^3 - x^2y - xy^2 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (x^3 - x^2y) + (y^3 - xy^2) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow x^2(x-y) + y^2(y-x) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (x-y)(x^2 - y^2) \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)(x-y)(x+y) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (x-y)^2(x+y) \geq 0$$ همواره برقرار است.

پرسش‌های تشریحی

۱. اگر n یک عدد طبیعی باشد، آیا زوج بودن n و زوج بودن $n^{۲}$ هم‌ارزند؟

۲. آیا دو گزارهٔ زیر هم‌ارزند؟

الف) نقطهٔ C روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد.

ب) فاصلهٔ نقطهٔ C از دو سر پاره‌خط AB یکسان است.

۳. برای دو عدد حقیقی x و y ثابت کنید $x^{۲}+y^{۲}+۱\geq xy+x+y$. (مشابه تمرین کتاب درسی)

۴. اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha+\beta$ گویا باشد ثابت کنید $\alpha-\beta$ و $\alpha+۲\beta$ گنگ هستند. (مشابه تمرین کتاب درسی)

۵. با استفاده از برهان خلف ثابت کنید $\sqrt{۵}$ عددی گنگ است.

۶. اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، با استفاده از اثبات بازگشتی درستی رابطهٔ $a^{۲}+۱\geq b(۲-b)$ را بررسی کنید.

۷. کدام‌یک از احکام زیر درست است؟ احکام درست را اثبات کنید و برای رد احکام نادرست یک مثال نقض بیاورید.

الف) توان دوم یک عدد همیشه از آن عدد بزرگ‌تر است.

ب) حاصل‌ضرب دو عدد صحیح زوج متوالی مضرب ۸ است.

۸. ثابت کنید $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$ عددی گنگ است.

۹. ثابت کنید $\log_{۲}^{۵}$ عددی گنگ است.

۱۰. آیا به ازای هر عدد فرد n، $۲^{n}-۲$ بر n بخش‌پذیر است؟

۱. بله ـ زیرا هر دو گزاره هم‌ارز هستند و از درستی هر کدام می‌شود درستی دیگری را نتیجه گرفت.

۲. بله ـ زیرا هر دو حکم معادل هستند و از درستی هریک می‌توان درستی دیگری را نتیجه گرفت.

۳. با استفاده از اثبات بازگشتی می‌توان نوشت:

$$x^۲+y^۲+۱\geq xy+x+y \Leftrightarrow x^۲+y^۲+۱-xy-x-y\geq ۰$$
$$\Leftrightarrow ۲x^۲+۲y^۲+۲-۲xy-۲x-۲y\geq ۰$$
$$\Leftrightarrow (x^۲-۲xy+y^۲)+(x^۲-۲x+۱)+(y^۲-۲y+۱)\geq ۰$$
$$\Leftrightarrow (x-y)^۲+(x-۱)+(y-۱)^۲\geq ۰$$ همواره برقرار است.

۴. الف) فرض می‌کنیم $\alpha-\beta$ عددی گویا باشد (فرض خلف).

$$(\alpha+\beta)-۲\beta=(\alpha-\beta)\Rightarrow \beta=\frac{(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)}{۲}$$

از آن‌جایی‌که $\alpha+\beta$ و $\alpha-\beta$ گویا هستند بنابراین نصف تفاضل آن‌ها نیز عددی گویاست بنابراین β عددی گویا می‌باشد که با فرض مسئله در تناقض است بنابراین فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

ب) فرض می‌کنیم $\alpha+۲\beta$ عددی گویا باشد (فرض خلف).

$$(\alpha+\beta)+\beta=\alpha+۲\beta\Rightarrow \beta=(\alpha+۲\beta)-(\alpha+\beta)$$

از آن‌جایی‌که $\alpha+\beta$ و $\alpha+۲\beta$ گویا هستند بنابراین تفاضل آن‌ها نیز عددی گویاست پس β نیز عددی گویا می‌باشد که با فرض مسئله در تناقض است بنابراین فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

۵. فرض می‌کنیم $\sqrt{۵}$ عددی گویا باشد (فرض خلف). در این صورت اعداد صحیح a و b وجود دارند به طوری که نسبت به هم اول باشند و $\sqrt{۵}=\frac{a}{b}$. در نتیجه $\frac{a^۲}{b^۲}=۵$ می‌باشد پس $a^۲=۵b^۲$. بنابراین نتیجه می‌گیریم $a^۲$ مضرب ۵ است و از آن‌جایی‌که a عددی صحیح است بنابراین a نیز مضرب ۵ می‌باشد. داریم:

$$a=۵k\Rightarrow ۲۵k^۲=۵b^۲\Rightarrow b^۲=۵k^۲$$

اکنون نتیجه می‌گیریم $b^۲$ مضرب ۵ است و از آن‌جایی‌که b عددی صحیح است بنابراین b نیز مضرب ۵ می‌باشد که با فرض مسئله (اول بودن a و b) در تناقض است بنابراین فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

۶.

$$a^۲+۱\geq b(۲-b)\Leftrightarrow a^۲+۱+b^۲-۲b\geq ۰$$
$$\Leftrightarrow a^۲+(b-۱)^۲\geq ۰$$ همواره برقرار است.

۷. الف) نادرست ـ اگر $x=\frac{۱}{۲}$ باشد در این صورت $x^۲<x$ است.

ب) $x=۲q\ ,\ y=۲q+۲\ ,\ q\in\mathbb{Z}\ \Rightarrow\ xy=۲q(۲q+۲)=۴\underbrace{q(q+۱)}_{۲q'}=۸q'$

۸. فرض می‌کنیم $\sqrt{۳}+\sqrt{۲}$ عددی گویا باشد (فرض خلف). در این صورت اعداد صحیح و غیرصفر a و b وجود دارند به‌طوری که $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}=\frac{a}{b}$ باشد. داریم:

$$\sqrt{۳}=\frac{a}{b}-\sqrt{۲}\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}}۳=\frac{a^۲}{b^۲}-\frac{۲\sqrt{۲}a}{b}+۲\Rightarrow\frac{۲\sqrt{۲}a}{b}=\frac{a^۲}{b^۲}-۱$$
$$\Rightarrow\frac{۲\sqrt{۲}a}{b}=\frac{a^۲-b^۲}{b^۲}\xrightarrow{\text{طرفین را در } \frac{b}{۲a} \text{ ضرب می‌کنیم}}\sqrt{۲}=\frac{a^۲-b^۲}{۲ab}$$

از آن‌جایی که a و b اعداد صحیح غیرصفر می‌باشند نتیجه می‌گیریم $\sqrt{۲}$ عددی گویاست درحالی‌که می‌دانیم $\sqrt{۲}$ عددی گنگ است. بنابراین به تناقض رسیدیم و فرض خلف باطل است. پس $\sqrt{۳}+\sqrt{۲}$ عددی گنگ است.

۹. فرض می‌کنیم $\log_{۲}^{۵}$ عددی گویا باشد (فرض خلف). در این صورت اعداد طبیعی a و b وجود دارند به‌طوری که $\log_{۲}^{۵}=\frac{a}{b}$ باشد. داریم:

$$\log_{۲}^{۵}=\frac{a}{b}\Rightarrow ۵=۲^{\frac{a}{b}}\Rightarrow ۵^{b}=۲^{a}$$

می‌دانیم عدد ۵ به هر توانی که برسد حاصل عددی فرد است و عدد ۲ به هر توانی برسد حاصل عددی زوج می‌باشد. بنابراین سمت چپ عددی فرد و سمت راست عددی زوج است، به تناقض رسیدیم بنابراین فرض خلف باطل است و $\log_{۲}^{۵}$ عددی گنگ است.

۱۰. خیر ـ به‌ازای $n=۹$ مقدار $۲^{۹}-۲=۵۱۰$ بر ۹ بخش‌پذیر نیست.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱. اثبات کدام قضیه را نمی‌توان به روش برهان خلف انجام داد؟

۱) عدد $\sqrt{5}$ گنگ است.

۲) از یک نقطه فقط یک خط موازی خط مفروض می‌توان رسم کرد.

۳) در یک صفحه از نقطهٔ مفروض فقط یک خط می‌توان بر خط مفروض عمود کرد.

۴) مربع هر عدد طبیعی فرد از مضرب ۸ یک واحد بیشتر است.

۲. برای .... حکم «اگر n عددی طبیعی و n^2 مضرب ۳ باشد آن‌گاه n نیز مضرب ۳ است.» از .... استفاده می‌کنیم.

۱) اثبات ـ مثال نقض ۲) اثبات ـ برهان خلف ۳) رد ـ مثال نقض ۴) رد ـ برهان خلف

۳. برای حکم «حاصل‌ضرب دو عدد اول به علاوهٔ یک، همواره عددی زوج است.» کدام گزینه یک مثال نقض است؟

۱) ۵,۷ ۲) ۱۱,۷ ۳) ۲,۱۷ ۴) ۴,۱۷

۴. کدام گزینه را می‌توان با مثال نقض رد کرد؟

۱) ارتفاع هر مثلث داخل مثلث است.

۲) هر مستطیل یک متوازی‌الاضلاع است.

۳) اگر $x > 1$ باشد، $x^2 > 1$ است.

۴) اگر $x \in \mathbb{R}$ باشد، $x^2 - x + 1$ مثبت است.

۵. کدام گزینه صحیح است؟

۱) مثال نقض در حقیقت برای رد قضایای کلی به کار می‌رود.

۲) برهان خلف در واقع نوعی مثال نقض است.

۳) از مثال نقض می‌توان برای اثبات قضایای کلی استفاده کرد.

۴) از برهان خلف می‌توان برای اثبات قضایای کلی استفاده کرد.

۶. کدام گزینه درست است ولی عکس آن درست نیست؟

۱) اگر $a^2 > 9$، آن‌گاه $a > 3$.

۲) اگر $ab = 0$، آن‌گاه $a = 0$ یا $b = 0$.

۳) اگر ab عددی گنگ باشد، آن‌گاه a گنگ یا b گنگ است.

۴) اگر عدد طبیعی a اول باشد، آن‌گاه a فقط دو مقسوم‌علیه مثبت دارد.

۷. عکس کدام گزینه درست است؟

۱) اگر یک چهارضلعی مربع باشد، چهارضلع آن با هم برابرند.

۲) اگر یک چهارضلعی مستطیل باشد، مربع نیز می‌باشد.

۳) اگر یک چهارضلعی مربع باشد، دو قطر آن با هم برابرند.

۴) اگر یک چهارضلعی مربع باشد، دو قطر آن بر هم عمودند.

۸. برای اثبات این که « $\sqrt{3} - \sqrt{5}$ عددی گنگ است.» بهتر است از کدام استدلال ریاضی استفاده کنیم؟

۱) روش اشباع ۲) مثال نقض ۳) برهان خلف ۴) اثبات بازگشتی

۹. کدام گزینه مثال نقضی برای گزارهٔ «اگر $4p+1$ اول باشد، p نیز اول است.» می‌باشد؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۷ ۳) ۲۹ ۴) ۴۵

۱۰. کدام گزینه مثال نقضی برای گزارهٔ «حاصل جمع هر دو عدد گنگ مثبت، عددی گویاست.» می‌باشد؟

۱) $2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}$ ۲) $\sqrt{3}+3, \sqrt{3}-3$ ۳) $5-\sqrt{2}, -5+\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{2}+1, \sqrt{2}-1$