



مجموعه، الگو و دنباله

فصل اول (۱۴ پیمانه)

پیمانه‌های ۱ تا ۱۴

کتاب درسی
ریاضی ۱: فصل ۱، صفحه‌های ۱ تا ۲۷
حسابان ۱: فصل ۱، صفحه‌های ۱ تا ۶



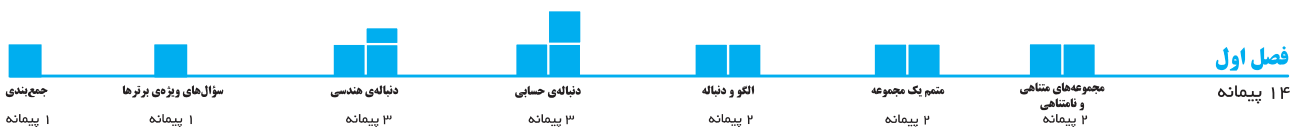
بادرخت دانش، گام به گام پیشرفت خود را ارزیابی کنید.

گام اول: میزان تسلط خود را با رنگ مشخص کنید.
آبی: مسلط.
سبز: نسبتاً مسلط.
زرد: مسلط نیست.
گام‌های بعدی: اگر در گام اول دانش خود را در حد رنگ زرد ارزیابی کردید اما در نوبت‌های بعدی پیشرفت کردید، می‌توانید خانه‌های سبز یا آبی را رنگ کنید. هرگاه به رنگ‌ها نگاه کنید متوجه می‌شوید در کدام قسمت‌ها نیاز به تمرین بیش‌تر دارید.

مجموعه، الگو و دنباله

۱۴ پیمانه
 ۱۱ پیمانه‌ی ۲۰ سوالی
 ۱ پیمانه‌ی ۱۰ سوالی
 ۱ پیمانه‌ی ۲۰ سوالی ویژه برترها
 ۱ پیمانه‌ی ۲۰ سوالی آزمون جمع‌بندی

۲۷۰ سؤال شناسنامه‌دار
 ۱۳۲ سؤال از آزمون‌های کانون
 ۸۴ سؤال طراحی شده از کتاب درسی این سؤال‌ها برای پوشش مطالب کتاب درسی طراحی شده‌اند.
 ۵۴ سؤال از کنکورهای سراسری



درس نامه — مجموعه‌های اعداد و بازه‌ها

مجموعه‌های اعداد ◀ به مجموعه‌های زیر توجه کنید:

| Q | Q' |
|--|---|
| <p>مثال:</p> $\frac{1}{2}, \frac{-3}{2}, 3/14, 0/\sqrt{3}$ | <p>مثال:</p> $\sqrt{3}, \sqrt[3]{2}, \pi, \frac{5}{\pi}, 0/101001000100010001\dots$ |
| | |

$N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$: مجموعه‌ی اعداد طبیعی
 $W = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$: مجموعه‌ی اعداد حسابی
 $Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$: مجموعه‌ی اعداد صحیح
 $Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in Z, b \neq 0 \right\}$: مجموعه‌ی اعداد گویا
 مجموعه‌ی اعداد حقیقی که گویا نیستند $Q' = Q \setminus Q$: مجموعه‌ی اعداد گنگ
 $R = Q \cup Q'$: مجموعه‌ی اعداد حقیقی

مجموعه‌ی عددهای طبیعی فرد را به صورت $O = \{2k - 1 \mid k \in N\}$ و مجموعه‌ی عددهای طبیعی زوج را به صورت $E = \{2k \mid k \in N\}$ نمایش می‌دهیم. همچنین مجموعه‌ی اعداد حسابی را می‌توانیم به صورت $W = \{k - 1 \mid k \in N\}$ نمایش دهیم.

◻ اعمال بر روی مجموعه‌های اعداد: در دو جدول زیر، اعمال بر روی مجموعه‌های اعداد نمایش داده شده است:

| نماد | به معنی | مثال | نماد | به معنی | مثال |
|---------------|-------------------|---|--------|---------|---------------------------------------|
| \in | عضویت | $\sqrt{2} \in Q', \frac{1}{2} \in Q, 0, 222\dots \in Q$ | \cap | اشتراک | $N \cap Z = N, Q \cap Q' = \emptyset$ |
| \notin | (عدم عضویت) | $-7 \notin N, 0/20200200020002\dots \notin Q$ | \cup | اجتماع | $N \cup Z = Z, Q \cup Q' = R$ |
| \subset | زیرمجموعه بودن | $N \subset W, Q' \subset R, Z \subset Q$ | $-$ | تفاضل | $W - N = \{0\}, N - W = \emptyset$ |
| $\not\subset$ | (زیرمجموعه نبودن) | $N \not\subset Q', Q \not\subset Q', Z \not\subset N$ | | | $R - Q = Q'$ |

توجه ▶ در مجموعه‌های اعداد داریم: $N \subset W \subset Z \subset Q \subset R$.

تست ◻ کدام گزینه‌ی زیر درست است؟

(۱) $Q \subset (R \cap Z)$ (۲) $(Z \cup Q) \subset W$ (۳) $(Q \cap W) \subset Z$ (۴) $(R \cap Q) \subset Q'$

پاسخ ◻ گزینه‌ی «۳» تک تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم. در گزینه‌ی (۱)، $R \cap Z = Z$ ، از طرفی $Q \not\subset Z$ ، پس این گزینه نادرست است. در گزینه‌ی (۲)، $Z \cup Q = Q$ ، از آنجایی که $Q \not\subset W$ ، پس این گزینه هم نادرست است. در گزینه‌ی (۳)، از آنجایی که $W \subset Q$ ، پس $Q \cap W = W$ ، که $W \subset Z$ ، پس رابطه درست است. در گزینه‌ی (۴)، از آنجایی که $Q \subset R$ ، پس $R \cap Q = Q$ اما $Q \not\subset Q'$ و $Q' \cap Q = \emptyset$ ، پس $Q \not\subset Q'$.

◻ مشخص کردن مجموعه‌ها: گاهی اوقات یک مجموعه را با نماد ریاضی نمایش می‌دهند، این نمایش از دو گزاره تشکیل شده است. به شکل غیر رسمی می‌نویسیم:

$A = \{ \text{قسمت دوم} \mid \text{قسمت اول} \}$

و می‌خوانیم «قسمت اول به‌طوریکه قسمت دوم». برای نوشتن اعضای مجموعه‌ی A ، باید اعضای از قسمت اول را بگیریم که توسط شرط قسمت دوم قابل قبول باشند. به عنوان مثال برای نوشتن عضوهای مجموعه‌ی $A = \{x \in Z \mid -2 \leq x < 1\}$ باید اعضای از Z را بگیریم که در شرط $-2 \leq x < 1$ صدق کنند.

این عضوها عبارتند از $-2, -1, 0$ و صفر، پس $A = \{-2, -1, 0\}$. همچنین برای مجموعه‌ی $A = \left\{ \frac{x}{x+1} \mid x \in N, 3 < x \leq 5 \right\}$ ، ابتدا اعداد قابل قبول برای شرط (سمت راست) را می‌یابیم که عبارتند از: $x = 4$ و $x = 5$ ، حال این دو مقدار را در عبارت $\frac{x}{x+1}$ قرار می‌دهیم که به ترتیب عبارتند از: $\frac{4}{5}$ و $\frac{5}{6}$ ، پس $A = \left\{ \frac{4}{5}, \frac{5}{6} \right\}$.

بازه‌ها ◻ وقتی بخواهیم کلیه‌ی اعداد حقیقی بین دو عدد را نمایش دهیم از نماد بازه استفاده می‌کنیم. این بازه‌ها را محدود بین دو عدد قرار می‌دهیم. نوع دیگر بازه‌ها، بازه‌هایی با نمایش هندسی نیم‌خط‌هایی روی محور اعداد حقیقی یا خود خط محور اعداد حقیقی هستند. که کلیه‌ی اعداد حقیقی کم‌تر یا بیشتر از یک عدد را نمایش می‌دهند. این بازه‌ها را نامحدود می‌نامیم توجه کنید که $+\infty$ و $-\infty$ اعداد حقیقی نیستند. این بازه‌ها را در جدول صفحه‌ی بعد خلاصه کرده‌ایم.

| بازه‌های محدود | | | | بازه‌های نامحدود | | | |
|----------------|----------|---|-------------|------------------|----------------|--------------------------------------|-------------|
| نوع بازه | بازه | نمایش مجموعه‌ای | نمایش هندسی | نوع بازه | بازه | نمایش مجموعه‌ای | نمایش هندسی |
| باز | (a, b) | $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ | | باز | $(a, +\infty)$ | $\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ | |
| بسته | $[a, b]$ | $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ | | نیم باز | $[a, +\infty)$ | $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$ | |
| نیم باز | $[a, b)$ | $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ | | باز | $(-\infty, a)$ | $\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$ | |
| نیم باز | $(a, b]$ | $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ | | نیم باز | $(-\infty, a]$ | $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$ | |

توجه \llcorner دقت کنید وقتی پیرانتز می‌گذاریم، یعنی خود آن عدد جزء بازه نیست و در نمایش هندسی نقطه توخالی است، به همین ترتیب وقتی کروه می‌گذاریم، یعنی خود عدد را نیز قبول می‌کنیم و در نمایش هندسی، نقطه‌ی توپر است. در بررسی بازه بودن یک مجموعه شرط لازم آن است که به شکل $\{x \in \mathbb{R} \mid O\}$ باشد، در غیر این صورت مجموعه بازه نخواهد بود.

● **مثال:** همگی عبارت‌های زیر برای بازه‌ی $(-7, 11]$ درست هستند.

- (۱) $-7 \notin (-7, 11]$ (۲) $5 \in (-7, 11]$ (۳) $11 \in (-7, 11]$
 (۴) $\{0, 3\} \subset (-7, 11]$ (۵) $\{12, 5\} \not\subset (-7, 11]$ (۶) $(-7, 11) \subset (-7, 11]$

● **نست** اگر $a \in \mathbb{N}$ ، آنگاه چند بازه به شکل $(3a-2, a+4)$ وجود دارد؟

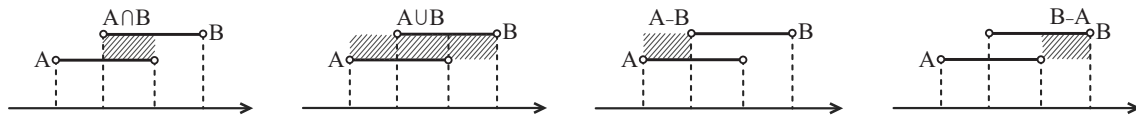
- (۱) یک (۲) دو (۳) هیچ (۴) بی‌شمار

● **پاسخ** گزینه‌ی «۲» باید $3a-2 < a+4$ ، پس $a < 3$ و $a \in \mathbb{N}$ ، پس دو مقدار $a=1$ و $a=2$ قابل قبول است، بنابراین دو بازه خواهیم داشت.

۱ **اعمال بر روی بازه‌ها:** در محاسبات اجتماع، اشتراک و تفاضل دو یا چند بازه، به طور معمول از **نمایش هندسی** استفاده کرده و به روش زیر عمل می‌کنیم:

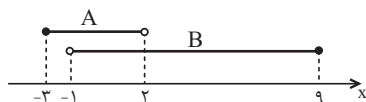
گام اول: ابتدا نمایش هندسی هریک از بازه‌ها را رسم می‌کنیم.

گام دوم: با توجه به تعریف **اشتراک** دو مجموعه (هر دو با هم) قسمتی را بگیرید که **روی هم می‌افتند** (تکرار می‌شود) و برای **اجتماع** (حداقل یکی) قسمتی را بگیرید که **حداقل یک خط** داشته باشد. برای **تفاضل** قسمتی را که **نمی‌خواهید حذف کنید**. به شکل‌های زیر توجه کنید:



● **مثال:** اگر $A = [-3, 2)$ و $B = (-1, 9]$ ، آنگاه مجموعه‌های $A \cap B$ ، $A \cup B$ و $A - B$ را به دست آورید.

○ حل: ابتدا نمایش هندسی هر دو بازه را روی یک محور رسم می‌کنیم و داریم:



$$A \cap B = (-1, 2) \quad \text{و} \quad A \cup B = [-3, 9] \quad \text{و} \quad A - B = [-3, -1]$$

● **نست** اگر داشته باشیم $A = [m, 4]$ ، $B = (-3, n)$ و $A \cup B = [-4, 9]$ ، آنگاه طول بازه‌ی مجموعه‌ی $B \cap A$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۷ (۳) ۲ (۴) ۳

● **پاسخ** گزینه‌ی «۲» با توجه به اینکه اجتماع دو مجموعه بازه‌ی $[-4, 9]$ است، پس m ابتدای بازه و n انتهای بازه است و داریم:

$$[m, 4] \cup (-3, n) = [-4, 9] \Rightarrow m = -4, n = 9$$

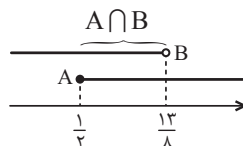
بنابراین $A = [-4, 4]$ و $B = (-3, 9)$ ، اشتراک این دو مجموعه $A \cap B = (-3, 4]$ است که طول این بازه $4 - (-3) = 7$ است.

● **نست** اگر $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, 3x - 1 \geq \frac{1}{2}\}$ ، $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, 4x - \frac{3}{2} < \frac{13}{2}\}$ و $C = \{x \mid x \in \mathbb{W}, x - 4 \leq 0\}$ باشند، حاصل $(A \cap B) - C$ کدام است؟

- (۱) $[\frac{1}{2}, \frac{13}{8}) - \{0\}$ (۲) $[\frac{1}{2}, \frac{13}{8})$ (۳) $\mathbb{R} - \{0\}$ (۴) $\mathbb{R} - \{0, \pm 1, \pm 2\}$

$$A: 3x - 1 \geq \frac{1}{2} \Rightarrow 3x \geq \frac{3}{2} \Rightarrow x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow A = [\frac{1}{2}, +\infty)$$

$$B: 4x - \frac{3}{2} < \frac{13}{2} \Rightarrow 4x < \frac{13}{2} \Rightarrow x < \frac{13}{8} \Rightarrow B = (-\infty, \frac{13}{8})$$



● **پاسخ** گزینه‌ی «۱»

$$C: x - 4 \leq 0 \xrightarrow{x \in \mathbb{W}} C = \{0, 1, 2, 3, 4\} \Rightarrow (A \cap B) - C = [\frac{1}{2}, \frac{13}{8}) - \{0, 1, 2, 3, 4\} = [\frac{1}{2}, \frac{13}{8}) - \{0\}$$



وقتی مجموعه‌ها از هم جدا هستند آن‌ها را می‌توانیم به صورت اجتماع دو یا چند بازه بنویسیم. به برابری‌های زیر در بازه‌ها

توجه کنید:

$$\begin{aligned} (1) R - \{a\} &= (-\infty, a) \cup (a, +\infty) & (2) R - (a, b] &= (-\infty, a] \cup (b, +\infty) \\ (3) R - [a, b] &= (-\infty, a) \cup (b, +\infty) & (4) R - (a, b) &= (-\infty, a] \cup [b, +\infty) \end{aligned}$$



پیمانه‌ی ۱



صفحه‌های ۲ و ۳ ریاضی ۱

تیپ ۱

مجموعه‌های اعداد

(ریاضی ۱ - صفحه‌ی ۲ - کار در کلاس - مرتبط با ۱)

۱. کدام گزینه‌ی زیر درست است؟

$$(1) (\sqrt{3} + 5) \notin (R - Q) \quad (2) -\frac{3}{4} \in (Z \cup Q') \quad (3) (0/\bar{6} + \frac{2}{3}) \in (Q \cap R) \quad (4) \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}\} \subset Q'$$

(ریاضی ۱ - صفحه‌ی ۲ - کار در کلاس - مرتبط با ۱)

۲. کدام مجموعه‌ی زیر، مجموعه‌ی اعداد طبیعی را نمایش نمی‌دهد؟

$$(1) W - (W - N) \quad (2) N - Q' \quad (3) (W \cap Z) - \{0\} \quad (4) W \cup N$$

(ریاضی ۱ - صفحه‌ی ۲ - کار در کلاس - مرتبط با ۱) (آزمون کانون - ۱۹ آبان ۹۶)

۳. کدام گزینه نادرست است؟

$$(1) (Z - N) \cup W = Z \quad (2) (Z - N) \cap W = \emptyset \quad (3) N \cap (Q' - R) = \emptyset \quad (4) (Q' - N) \cup Q = R$$

۴. فرض کنید C, B, A و مجموعه‌های اعدادی هستند که $\{A, B, C\} = \{W, Z, Q'\}$ است. اگر $A \cap B = \emptyset$ و $C - A = \emptyset$ باشد، حاصل

(ریاضی ۱ - صفحه‌ی ۲ - کار در کلاس - مرتبط با ۱) (آزمون کانون - ۵ آبان ۹۶)

۴. $A - (B \cup C)$ کدام است؟

$$(1) \{-1, -2, \dots\} \quad (2) \emptyset \quad (3) Q' \quad (4) \{0, -1, -2, \dots\}$$

۵. اگر مجموعه‌های A, B, C را به صورت $A = R - Z, B = W \cap Z, C = Z \cup (R - Q)$ تعریف کنیم، کدام گزینه نادرست است؟

(ریاضی ۱ - صفحه‌ی ۲ - کار در کلاس - مرتبط با ۱) (آزمون کانون - ۴ آبان ۹۷)

$$(1) A \cap B = \emptyset \quad (2) C \subseteq (A \cup B) \quad (3) B - C = \emptyset \quad (4) A \cup C = R$$

صفحه‌های ۳ تا ۵ ریاضی ۱

تیپ ۲

تعریف بازه

(ریاضی ۱ - صفحه‌ی ۵ - کار در کلاس - مشابه ۱)

۶. کدام گزینه‌ی زیر درست نیست؟

$$(1) [-1, 2] \subset [-1, 2] \quad (2) \emptyset \subset (-15, 1] \quad (3) \{-2, 1\} \subset [-3, 0) \quad (4) [3, 5] \neq (3, 5]$$

(ریاضی ۱ - صفحه‌ی ۵ - کار در کلاس - مشابه ۱)

۷. کدام گزینه‌ی زیر درست نیست؟

$$(1) 0 \in (-3, 0] \quad (2) \frac{-5}{2} \notin \left(\frac{-5}{2}, 2\right] \quad (3) 2 \notin R - (2, 3] \quad (4) 2 \in R - (2, 3)$$

۸. اگر بازه‌ی $[2n - 1, 3n + 14]$ شامل عدد ۵ باشد، حداقل مقداری که n می‌تواند اختیار کند، کدام است؟

(ریاضی ۱ - صفحه‌ی ۳ - مرتبط با پاراگراف ۲) (آزمون کانون - ۲۱ مهر ۹۶)

$$(1) 3 \quad (2) -2 \quad (3) -3 \quad (4) 2$$

صفحه‌های ۴ و ۵ ریاضی ۱

تیپ ۳

اعمال بر روی بازه‌ها

۹. دو بازه‌ی $A = (a - 2, b)$ و $B = [a, b + 3)$ مفروض‌اند، حاصل $A \cap B$ کدام است؟ $(a < b)$

(ریاضی ۱ - صفحه‌ی ۵ - کار در کلاس - مرتبط با ۳) (آزمون کانون - ۵ آبان ۹۶)

$$(1) [b, b + 3) \quad (2) [a, b) \quad (3) (a - 2, b + 3) \quad (4) (a - 2, a)$$

۱۰. اگر اشتراک مجموعه‌های $A = (-\infty, \frac{2a - 5}{3}]$ و $B = [a, +\infty)$ ، مجموعه‌ای تک عضوی باشد، a کدام است؟

(ریاضی ۱ - صفحه‌ی ۵ - کار در کلاس - مرتبط با ۳)

$$(1) -2 \quad (2) -3 \quad (3) -4 \quad (4) -5$$

۱۱. اگر نمایش مجموعه‌های A و B به صورت بازه‌های $A = [-1, 2]$ و $B = (-3, a]$ و مجموعه $A \cap B$ غیر تهی باشد، آنگاه مجموعه‌ی تمام مقادیر ممکن برای a ، کدام است؟ (۱)

- (ریاضی ۱ - صفحه ۵ - کار در کلاس - مرتبط با ۳) (آزمون کانون - ۱۰ بهمن ۹۳)
- (۱) $\{a | a \geq -1\}$ (۲) $\{a | -1 \leq a < 2\}$ (۳) $\{a | a < -3\}$ (۴) $\{a | -2 < a < -1\}$

۱۲. اگر $m < -1$ باشد، آنگاه چند عدد صحیح در مجموعه $[\frac{1}{m}, -m] \cap [m, -\frac{1}{m}]$ قرار دارد؟ (۱)

(ریاضی ۱ - صفحه ۵ - کار در کلاس - مرتبط با ۳) (آزمون کانون - ۲۰ مهر ۹۷)

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) نمی‌توان تعیین کرد.

۱۳. اگر n عددی طبیعی باشد، اشتراک دو مجموعه $A = [-\frac{4}{n}, 4]$ و $B = (\frac{1}{n+1}, 2)$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح چند عضو دارد؟ (۱)

(ریاضی ۱ - صفحه ۵ - کار در کلاس - مرتبط با ۳)

- (۱) یک (۲) پنج (۳) هیچ (۴) بی‌شمار

۱۴. اگر $(-\infty, \frac{a}{2}] \cup [2a-1, +\infty) = \mathbb{R}$ ، حدود a کدام است؟ (۱)

- (۱) $a \leq \frac{2}{3}$ (۲) $a \leq 1$ (۳) $a \geq 1$ (۴) $a \geq \frac{2}{3}$

۱۵. اشتراک بازه‌های $(a, -2]$ و $(b, 4]$ برابر $(-\frac{2}{3}, 1)$ است. اجتماع بازه‌های $(b, -2a-1)$ و (a, b) کدام است؟ (۱)

(ریاضی ۱ - صفحه ۵ - کار در کلاس - مرتبط با ۳) (آزمون کانون - ۲۳ مهر ۹۵)

- (۱) $(-3, 1)$ (۲) $(-1, \frac{2}{3})$ (۳) $(1, 4)$ (۴) $(-3, 1) - \{-\frac{2}{3}\}$

۱۶. اگر $A = [-3, 4]$ و $B = \{x \in \mathbb{R} | (-x) \in A\}$ ، آنگاه مجموعه $A - B$ کدام بازه‌ی زیر است؟ (۱)

(ریاضی ۱ - صفحه ۵ - کار در کلاس - مرتبط با ۳) (آزمون کانون - ۲۱ آذر ۹۳)

- (۱) $(3, 4)$ (۲) $(-4, -3)$ (۳) $(-3, 3)$ (۴) $(-4, 4)$

۱۷. کدام بازه شامل تعداد بیشتری از اعداد طبیعی است؟ (۱)

(ریاضی ۱ - صفحه ۵ - کار در کلاس - مرتبط با ۳) (آزمون کانون - ۲۱ مهر ۹۶)

- (۱) $[-3, 5] \cap (2, 5)$ (۲) $[0, 3) \cup (1, 5)$ (۳) $[1, 6] - [2, 3]$ (۴) $(0, 6) \cap [1, 7)$

۱۸. اگر $A \cup B = (-3, 2]$ و $A - B = (1, 2]$ و $B - A = (-3, -1)$ ، آنگاه مجموعه A در Z چند عضو دارد؟ (۱)

(ریاضی ۱ - صفحه ۵ - کار در کلاس - مرتبط با ۳)

- (۱) یک (۲) دو (۳) سه (۴) چهار

۱۹. اگر $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 4\}$ ، آنگاه مجموعه $(A - B) \cup (B - A)$ برابر کدام گزینه است؟ (۱)

(ریاضی ۱ - صفحه ۵ - کار در کلاس - مکمل ۳)

- (۱) $\mathbb{R} - (1, 4]$ (۲) $\mathbb{R} - [1, 4)$ (۳) $\mathbb{R} - [1, 4]$ (۴) $\mathbb{R} - (1, 4)$

۲۰. اگر $A_n = (-n, n)$ باشد، حاصل $(A_1 \cup A_2 \cup A_3) - (A_1 \cap A_2)$ برابر با کدام گزینه است؟ (۱)

(ریاضی ۱ - صفحه ۵ - کار در کلاس - مرتبط با ۳) (آزمون کانون - ۱۸ آبان ۹۷)

- (۱) $(-3, 3)$ (۲) $(-1, 1)$ (۳) $(-3, -1) \cup (1, 3)$ (۴) $(-3, -1) \cup [1, 3)$



درسنامه — مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

تعریف مجموعه‌های متناهی و نامتناهی ◀ مجموعه‌هایی که تعداد اعضای آن‌ها یک عدد حسابی باشد را مجموعه‌ی متناهی می‌نامند، اگر تعداد اعضای یک مجموعه را نتوان با یک عدد بیان کرد، مجموعه را نامتناهی می‌نامند. در مجموعه‌های نامتناهی، تعداد اعضای مجموعه از هر عددی که در نظر بگیریم بزرگ‌تر است.

به مثال‌هایی از مجموعه‌های متناهی و نامتناهی در زیر توجه کنید.

| مجموعه‌های زیر نامتناهی‌اند | مجموعه‌های زیر نامتناهی‌اند |
|---|--|
| (۱) $\{a, b\}$ | (۱) مجموعه‌ی اعداد طبیعی |
| (۲) مجموعه‌ی اعداد طبیعی دو رقمی | (۲) مجموعه‌ی اعداد گویای بین $\frac{1}{4}$ و $\frac{3}{5}$ |
| (۳) مجموعه‌ی حروف الفبای انگلیسی | (۳) بازه‌ی $(-1, 1)$ |
| (۴) مجموعه‌ی اتم‌های موجود در جو زمین | (۴) مجموعه‌ی اعداد صحیح کوچکتر از -5 |
| (۵) مجموعه‌ی اعداد اول بین 10^5 تا 10^6 | (۵) مجموعه‌ی خطوطی که از نقطه‌ی $(0, 1)$ می‌گذرند |
| (۶) مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد 36 | |

توجه در بحث متناهی بودن یک مجموعه، **بزرگی** آن مجموعه اهمیت ندارد، نکته‌ی اساسی آن است که اگر وقت به اندازه‌ی کافی داشته باشیم، بتوانیم اعضای مجموعه را بشماریم. به عنوان مثال، مجموعه‌ی موش‌های کره‌ی زمین، یک مجموعه‌ی متناهی است، با اینکه تعداد آن‌ها را نمی‌دانیم. پس **ندانستن تعداد اعضای** یک مجموعه، دلیلی بر نامتناهی بودن آن مجموعه نیست.

الف- مجموعه‌های N, W, Z, Q, R و همگی نامتناهی‌اند.

ب- تمامی بازه‌ها، بیانگر یک مجموعه‌ی نامتناهی‌اند.

پ- مجموعه‌ی تهی، مجموعه‌ای متناهی است.

● **مثال:** متناهی یا نامتناهی بودن هریک از مجموعه‌های زیر را بررسی کنید.

$$(1) (R - Q) \cap N \quad (2) W \cap (Z - N) \quad (3) N \cap (Q - Z)$$

○ حل: (۱) $R - Q = Q$ ، یعنی اعداد گویا، اشتراک آن با اعداد طبیعی، برابر N است، پس $(R - Q) \cap N = N$ که مجموعه‌ای نامتناهی است.

(۲) $Z - N$ ، یعنی از اعداد صحیح، اعداد طبیعی را برداریم، بنابراین $Z - N = Z^- \cup \{0\}$ یا اعداد صحیح کوچکتر مساوی صفر. اشتراک این مجموعه با اعداد حسابی، مجموعه‌ی $\{0\}$ خواهد بود که مجموعه‌ای متناهی است.

(۳) $Q - Z$ ، یعنی از اعداد گویا، اعداد صحیح را برداریم، مجموعه‌ی حاصل با مجموعه‌ی اعداد طبیعی اشتراکی ندارد، پس $N \cap (Q - Z) = \emptyset$ و مجموعه‌ی تهی متناهی است.

● **مثال:** متناهی یا نامتناهی بودن هریک از مجموعه‌های زیر را بررسی کنید.

$$(1) A = \{\sqrt{x} \mid x \in W\} \quad (2) B = \{2n^2 - 3 \mid n \in N, -1 < \sqrt[3]{n} < 2\}$$

○ حل: (۱) برای تشکیل مجموعه‌ی A ، به جای x در \sqrt{x} اعداد حسابی قرار می‌دهیم و داریم:

$$A = \{\sqrt{0}, \sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots\} \Rightarrow A \text{ نامتناهی است.}$$

(۲) از نامساوی $2 > \sqrt[3]{n} > -1$ ، نتیجه می‌شود $-1 < n < 8$. در اعداد طبیعی این نامساوی 7 مقدار می‌پذیرد بنابراین مجموعه‌ی B متناهی خواهد بود.

الف- اگر A ، مجموعه‌ای متناهی باشد، هر زیرمجموعه‌ای از آن هم متناهی است.

ب- اگر A ، یک زیرمجموعه‌ی نامتناهی داشته باشد، آنگاه A ، مجموعه‌ای نامتناهی است.

● **مثال:** اگر $B \subset \{x \in R \mid x > 2\}$ باشد، آنگاه B ، مجموعه‌ای نامتناهی است، زیرا زیرمجموعه‌ی آن مجموعه‌ای نامتناهی است.

● **مثال:** اگر $A \subset \{x \in Z \mid 1 < x < 10\}$ باشد، آنگاه A ، مجموعه‌ای متناهی است، زیرا مجموعه‌ی A ، زیرمجموعه‌ی یک مجموعه‌ی متناهی است.

اعمال روی مجموعه‌های متناهی و نامتناهی ◀ اگر A و B دو مجموعه باشند، آنگاه جدول زیر وضعیت اعمال بر روی دو مجموعه را نمایش می‌دهد:

| وضعیت | $A \cap B$ | $A \cup B$ | $A - B$ | $B - A$ |
|-------------------------|-----------------------------------|------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| A متناهی و B متناهی | متناهی | متناهی | متناهی | متناهی |
| A نامتناهی و B متناهی | متناهی | نامتناهی | نامتناهی | متناهی |
| A نامتناهی و B نامتناهی | می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد. | نامتناهی | می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد. | می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد. |

مثال: مجموعه‌ی اعداد صحیح نامثبت و مجموعه‌ی اعداد حسابی هر دو نامتناهی‌اند ولی اشتراک آنها مجموعه‌ی $\{0\}$ است که مجموعه‌ای متناهی است. از طرفی مجموعه‌ی اعداد صحیح (Z) و مجموعه‌ی اعداد حسابی (W) هر دو نامتناهی‌اند ولی $Z - W = Z^-$ ، مجموعه‌ای نامتناهی است.

تست اگر $A \subset B$ و A، مجموعه‌ای نامتناهی باشد، آنگاه مجموعه‌ی $B - A$ چگونه است؟

- (۱) متناهی است. (۲) نامتناهی است. (۳) تهی است. (۴) ممکن است متناهی یا نامتناهی باشد.

پاسخ گزینه‌ی «۴» فرض کنید B مجموعه‌ی اعداد طبیعی و $A = \{2, 3, 4, \dots\}$ آنگاه $B - A = \{1\}$ مجموعه‌ای متناهی است، حال فرض کنید $B = (-1, 2)$ و $A = (0, 2)$ ، آنگاه $A \subset B$ و $B - A = (-1, 0]$ که مجموعه‌ای نامتناهی است. پس $B - A$ ممکن است متناهی یا نامتناهی باشد.

پیمانه‌ی ۲

تست ۲۰



مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

تیب ۴

صفحه‌های ۵ تا ۷ ریاضی ۱

(ریاضی ۱ - صفحه‌ی ۶ - کار در کلاس - مشابه ۱)

- (۲) مجموعه‌ی اعداد اعشاری بین $0/4$ و $0/7$
(۴) مجموعه‌ی اعداد صحیح مکعب کامل و کوچکتر از ۱۰۰۰

(ریاضی ۱ - صفحه‌ی ۶ - کار در کلاس - مشابه ۱)

- (۲) مجموعه‌ی گره‌های کره‌ی زمین
(۴) مجموعه‌ی اعداد طبیعی سه رقمی مضرب ۴

(ریاضی ۱ - صفحه‌ی ۶ - کار در کلاس - مشابه ۱)

- (۲) مجموعه‌ی اعداد گویای بین دو عدد گویا
(۴) مجموعه‌ی اعداد حقیقی مثبت که با معکوس خود برابرند.

(ریاضی ۱ - صفحه‌ی ۷ - مکمل فعالیت)

- (۴) هیچ کدام (۳) هر دو

(ریاضی ۱ - صفحه‌ی ۷ - مشابه تمرین ۲) (آزمون کانون - ۷ آذر ۹۳)

- (۲) $A_7 = \{x \mid x \text{ عدد اول بزرگتر از } 1000\}$
(۴) $A_4 = \{x \mid x \text{ عدد حقیقی کوچکتر از } 100\}$

(ریاضی ۱ - صفحه‌ی ۷ - مشابه تمرین ۲) (آزمون کانون - ۵ دی ۹۳)

- (۴) $\{x \in Z \mid -x \in N\}$ (۳) $\{x \in N \mid x > 53\}$ (۲) $\{x \in Q \mid \frac{1}{2} < x < 1\}$ (۱) $\{x \in N \mid x^2 < 1000\}$

(ریاضی ۱ - صفحه‌ی ۷ - مشابه تمرین ۲) (آزمون کانون - ۲۳ آذر ۹۲)

- (۴) $D = \{1 - x \mid x \in Z, x < 4\}$ (۳) $C = \{x^3 \mid x \in N, x \leq 10\}$ (۲) $B = \{2x \mid x \in N, 1 - x < 3\}$ (۱) $A = \{x^2 \mid x \in R, x \leq 5\}$

(ریاضی ۱ - صفحه‌ی ۷ - مکمل تمرین ۲)

چند تا از مجموعه‌های زیر متناهی نیست؟

- (الف) مجموعه‌ی اعداد طبیعی که مضرب ۴ باشند ولی مضرب ۲ نباشند.
(ب) مجموعه‌ی اعداد صحیح مثبتی که در تقسیم بر ۳ باقی‌مانده‌ی ۱ دارند.
(پ) مجموعه‌ی کوچکترین عدد صحیح بزرگتر از -۱
(ت) مجموعه‌ی اعداد گویایی که مربعشان با خودشان برابر است.

- (۱) یکی (۲) دو تا (۳) سه تا (۴) چهار تا



۲۹. اگر $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid \frac{4}{n} \in \mathbb{Z}\}$ ، $B = \{n \in \mathbb{Z} \mid \frac{(-1)^n}{n} \in \mathbb{Z}\}$ و $C = \{n \in \mathbb{W} \mid \frac{1}{n} < 1\}$ ، آنگاه: (ریاضی ۱ - صفحه ۷ - مکمل تمرین ۲)

۱) A و B متناهی و C نامتناهی است. (۹)

۲) A و C نامتناهی و B متناهی است.

۳) B و C متناهی و A نامتناهی است.

۴) B و C نامتناهی و A متناهی است.

اعمال بر روی مجموعه‌های متناهی و نامتناهی **تپ ۵** صفحه‌های ۵ تا ۷ ریاضی ۱

۳۰. اگر مجموعه‌های $A = \left\{ \frac{1}{x} \mid x \in \mathbb{N} \right\}$ و $B = \left\{ \frac{x}{8} \mid x \in \mathbb{N} \right\}$ مفروض باشند، کدام یک از مجموعه‌های زیر متناهی است؟ (ریاضی ۱ - صفحه ۷ - مرتبط با تمرین ۲) (سراسری انسانی - ۹۶)

- ۱) $A - B$ (۱) ۲) $B - A$ (۲) ۳) $A \cap B$ (۳) ۴) $A \cup B$ (۴)

۳۱. کدام مجموعه‌ی زیر نامتناهی نیست؟ (ریاضی ۱ - صفحه ۷ - مرتبط با فعالیت)

۱) $W \cap Z$ (۱) ۲) $R - Q'$ (۲) ۳) $Q - N$ (۳) ۴) $N - W$ (۴)

۳۲. اگر A مجموعه‌ی اعداد اول و B مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد باشند، کدام یک از مجموعه‌های زیر متناهی است؟ (ریاضی ۱ - صفحه ۷ - مرتبط با تمرین ۲) (سراسری انسانی خارج از کشور - ۹۶)

- ۱) $A \cup B$ (۱) ۲) $A \cap B$ (۲) ۳) $B - A$ (۳) ۴) $A - B$ (۴)

۳۳. اگر A و B دو مجموعه‌ی نامتناهی باشند، کدام یک از گزینه‌های زیر درباره‌ی این دو مجموعه نادرست است؟ (ریاضی ۱ - صفحه ۷ - مرتبط با تمرین ۳) (آزمون کانون - ۲۱ آذر ۹۳)

- ۱) مجموعه‌ی $A \cap B$ ممکن است نامتناهی باشد. (۱)
- ۲) مجموعه‌ی $A \cup B$ لزوماً نامتناهی است. (۲)
- ۳) مجموعه‌ی $A \cap B$ ممکن است متناهی باشد. (۳)
- ۴) مجموعه‌ی $A - B$ لزوماً نامتناهی است. (۴)

۳۴. اگر A مجموعه‌ی اعداد اول بزرگ‌تر از 10^{1396} و B مجموعه‌ی اعداد زوج بزرگ‌تر از 10^{1396} باشد، کدام گزینه نادرست است؟ (ریاضی ۱ - صفحه ۷ - مرتبط با تمرین ۳) (آزمون کانون - ۱۹ آبان ۹۲)

- ۱) $A \cap B$ متناهی است. (۱) ۲) $A - B$ نامتناهی است. (۲) ۳) $B - A$ نامتناهی است. (۳) ۴) $A \cup B$ متناهی است. (۴)

۳۵. اگر A مجموعه‌ای نامتناهی و B مجموعه‌ای متناهی باشد، کدام مجموعه نامتناهی است؟ (ریاضی ۱ - صفحه ۷ - مرتبط با تمرین ۳) (سراسری انسانی خارج از کشور - ۹۲)

- ۱) $A \cap B$ (۱) ۲) $B - A$ (۲) ۳) $A - B$ (۳) ۴) $(A - B) - A$ (۴)

۳۶. اگر مجموعه‌ی A متناهی و مجموعه‌های B و C نامتناهی باشند، مجموعه‌های $A \cap (B \cup C)$ و $B - (A \cap C)$ ، به ترتیب از راست به چپ، چگونه‌اند؟ (ریاضی ۱ - صفحه ۷ - مرتبط با تمرین ۳) (آزمون کانون - ۲۳ مهر ۹۵)

- ۱) متناهی - متناهی (۱) ۲) نامتناهی - نامتناهی (۲) ۳) متناهی - نامتناهی (۳) ۴) نامتناهی - متناهی (۴)

۳۷. کدام گزینه در حالت کلی درست نیست؟ (ریاضی ۱ - صفحه ۷ - مرتبط با تمرین ۶)

۱) اگر مجموعه‌ای دارای یک زیرمجموعه‌ی نامتناهی باشد، آنگاه نامتناهی است. (۱)

۲) اگر مجموعه‌ای متناهی باشد، هر زیرمجموعه‌ای از آن هم متناهی است. (۲)

۳) اشتراک دو مجموعه‌ی نامتناهی، مجموعه‌ای نامتناهی است. (۳)

۴) اگر حداقل یکی از دو مجموعه، نامتناهی باشد، اجتماع آنها مجموعه‌ای نامتناهی است. (۴)

۳۸. اگر $A \subseteq C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < -2\}$ و $B \subseteq \{x \in \mathbb{W} \mid 1 < x < 158\}$ ، آنگاه: (ریاضی ۱ - صفحه ۷ - مکمل تمرین ۶)

- ۱) A متناهی و B نامتناهی است. (۱) ۲) A نامتناهی و B متناهی است. (۲)
- ۳) A و B نامتناهی هستند. (۳) ۴) A و B متناهی هستند. (۴)

۳۹. کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟ (ریاضی ۱ - صفحه ۷ - مرتبط با تمرین‌های ۳ و ۶) (آزمون کانون - ۲۱ آبان ۹۵)

- ۱) اشتراک دو مجموعه‌ی نامتناهی، الزاماً مجموعه‌ای نامتناهی است. (۱)
- ۲) تفاضل دو مجموعه‌ی نامتناهی، الزاماً مجموعه‌ای نامتناهی است. (۲)
- ۳) اگر $A \subseteq B$ و B مجموعه‌ای نامتناهی، آنگاه مجموعه‌ی A الزاماً نامتناهی است. (۳)
- ۴) اگر $A \subseteq B$ و $A \cap B$ مجموعه‌ای نامتناهی، آنگاه مجموعه‌ی B الزاماً نامتناهی است. (۴)

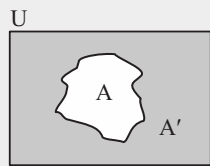
۴۰. اگر $A \subseteq B$ و B نامتناهی باشد، کدام گزینه صحیح است؟ (ریاضی ۱ - صفحه ۷ - مکمل تمرین ۶) (آزمون کانون - ۴ آبان ۹۷)

- ۱) مجموعه‌ی $B - A$ همواره نامتناهی است. (۱)
- ۲) مجموعه‌ی $A \cap B$ همواره متناهی است. (۲)
- ۳) مجموعه‌ی $A \cup B$ همواره نامتناهی است. (۳)
- ۴) مجموعه‌ی $A - B$ همواره نامتناهی است. (۴)

درس نامه

مجموعه‌ی مرجع و متمم یک مجموعه

تعریف ▶ به طور کلی، در هر بحث، مجموعه‌ای که تمامی مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعه‌ی آن باشند را مجموعه‌ی مرجع یا مجموعه‌ی جهانی می‌نامیم و با M یا U نمایش می‌دهیم. به مجموعه‌ی مرجع، مجموعه‌ی اصلی یا عام نیز گفته می‌شود.



هرگاه U مجموعه‌ی مرجع و $A \subset U$ باشد، آنگاه مجموعه‌ی $U - A$ را متمم A می‌نامیم و آن را با نماد A' (یا A^C) نمایش می‌دهیم. به عبارت دیگر A' شامل همه‌ی عضوایی از U است که در A نیستند و می‌نویسیم:

$$A' = \{x \mid x \notin A\}$$

$$\text{مجموعه‌ی } -A = \text{مجموعه‌ی مرجع } U = \text{متمم مجموعه‌ی } A$$

به بیان ساده‌تر برای یافتن متمم یک مجموعه، ابتدا به مجموعه‌ی مرجع U توجه می‌کنیم یا آن را می‌سازیم، اگر عضوی در U نباشد، مورد بحث قرار نمی‌گیرد، سپس به مجموعه‌ی A توجه می‌کنیم یا آن را می‌سازیم، برای یافتن A' ، در مجموعه‌ی U اعضای A را حذف می‌کنیم. به عبارت دیگر هر عضوی که متعلق به A است، الزاماً در A' نیست و به عکس هر عضوی که متعلق به A' است در A نیست.

● **مثال:** اگر $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ مجموعه‌ی مرجع، $A = \{0, 2, 3\}$ و $B = \{4, 5, 6, 7\}$ باشد، آنگاه A' و B' را بیابید.

$$\text{حل: } A' = U - A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} - \{0, 2, 3\} = \{1, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$B' = U - B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} - \{4, 5, 6, 7\} = \{0, 1, 2, 3, 8\}$$

● **مثال:** اگر W را به عنوان مجموعه‌ی مرجع در نظر بگیریم، آنگاه متمم مجموعه‌ی اعداد طبیعی را بیابید.

○ حل: باید N' را بیابیم. در مجموعه‌ی اعداد حسابی باید اعدادی که طبیعی هستند را حذف کنیم، که مجموعه‌ی $N' = W - N = \{0\}$ است.

● **مثال:** اگر N را مجموعه‌ی مرجع در نظر بگیریم، متمم مجموعه‌ی اعداد طبیعی زوج را بیابید.

○ حل: متمم مجموعه‌ی اعداد طبیعی زوج، مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد است.

یافتن مجموعه‌ی متمم در بازه‌ها ▶ در اینجا مجموعه‌ی مرجع R است. برای یافتن متمم به طور معمول، از نمایش هندسی استفاده می‌کنیم، بازه‌ی A را رسم کرده و قسمت‌هایی از محور که جزء A نیستند، A' را نمایش می‌دهند. به متمم بازه‌های زیر توجه کنید:

$$(1) A = [a, b] \Leftrightarrow A' = (-\infty, a) \cup (b, +\infty) \quad (2) A = [a, b) \Leftrightarrow A' = (-\infty, a) \cup [b, +\infty)$$

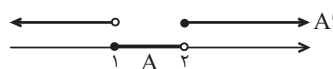
$$(3) A = (a, b] \Leftrightarrow A' = (-\infty, a] \cup (b, +\infty) \quad (4) A = (a, b) \Leftrightarrow A' = (-\infty, a] \cup [b, +\infty)$$

در حالت کلی، برای اعداد a و b در بازه، از هر سمتی که بسته باشند، متمم آن‌ها باز و به عکس از هر سمتی که باز باشند، متمم آن‌ها بسته می‌شود.

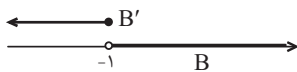
● **مثال:** اگر R مجموعه‌ی مرجع، $A = [1, 2)$ و $B = (-1, +\infty)$ باشند، آنگاه مجموعه‌های A' و B' را با نماد بازه نمایش دهید.

○ حل:

$$A' = R - A = R - [1, 2) = (-\infty, 1) \cup [2, +\infty)$$

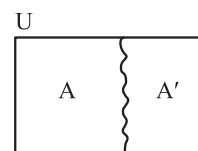


$$B' = R - B = R - (-1, +\infty) = (-\infty, -1]$$



خواص متقابل A' و A ▶ به کمک نمودار ون و تعریف متمم می‌توان خواصی را در متمم یافت. به حالت‌های زیر توجه کنید:

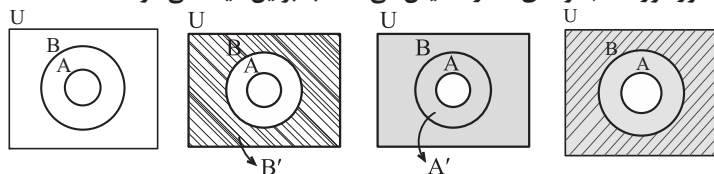
| بیان ریاضی | توضیح |
|--|--|
| $U' = \emptyset$ و $\emptyset' = U$ | متمم مجموعه‌ی مرجع، مجموعه‌ی تهی و متمم تهی، مجموعه‌ی مرجع است. |
| $(A')' = A$ | متمم متمم هر مجموعه‌ای با خود آن برابر است. |
| (1) $A \cap A' = \emptyset$ (2) $A \cup A' = U$ | اشتراک هر مجموعه با متمم آن، تهی است و اجتماع هر مجموعه با متمم آن، مجموعه‌ی مرجع است. |
| (1) $A - A' = A$ (2) $A' - A = A'$ | تفاضل هر مجموعه از متمم آن، برابر متمم مجموعه است. |





متتم و زیر مجموعه ◀ فرض کنید مجموعه‌های A و B در مجموعه مرجع U داده شده‌اند. اگر $A \subset B$ باشد، آنگاه $B' \subset A'$.

در شکل زیر، قسمت سایه زده شده مجموعه‌ی A' و قسمت هاشور خورده مجموعه‌ی B' را نمایش می‌دهد. بنابراین دیده می‌شود که $B' \subset A'$.



نکته به خواص زیر در جبر مجموعه‌ها توجه کنید: (با نمودار ون درستی را بررسی کنید).

$$(1) A \subset B \Rightarrow \begin{cases} A \cap B = A \\ A \cup B = B \end{cases} \quad (2) A \cap B = \emptyset \Rightarrow \begin{cases} A \subset B' \\ B \subset A' \end{cases}$$

متتم مجموعه‌های متناهی و نامتناهی ◀ فرض کنید U مجموعه مرجع باشد، در جدول زیر متناهی یا نامتناهی بودن متتم زیرمجموعه‌های

آن بررسی شده است:

| وضعیت U | وضعیت A | وضعیت A' | مثال |
|-------------------|--------------------|----------------------------------|--|
| U متناهی باشد | حتماً متناهی است | حتماً متناهی است | $U = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{2, 3\}$ $\Rightarrow A' = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ |
| U نامتناهی باشد | اگر متناهی باشد | حتماً نامتناهی است | اگر مجموعه مرجع، اعداد طبیعی و $A = \{1, 2\}$ باشد، آنگاه: $A' = \{3, 4, 5, \dots\}$ |
| | اگر نامتناهی باشد. | ممکن است متناهی یا نامتناهی باشد | اگر مجموعه مرجع، اعداد صحیح باشد، مجموعه اعداد صحیح مثبت زیرمجموعه‌ی آن و نامتناهی است، متتم آن، مجموعه اعداد صحیح کوچکتر یا مساوی صفر و نامتناهی است. |

متتم و اعمال بر روی مجموعه‌ها ◀ اگر A و B دو زیرمجموعه از مجموعه مرجع U باشند، آنگاه با استفاده از نمودار ون و هاشور زدن

مجموعه‌های مورد نظر، می‌توان درستی قوانین زیر را بررسی کرد:

$$(1) (A \cap B)' = A' \cup B' \quad (2) (A \cup B)' = A' \cap B' \quad (3) A - B = A \cap B'$$

در (1) و (2) دقت کنید، وقتی متتم بر اجتماع یا اشتراک دو مجموعه اثر کند، هر کدام را متتم کرده و علامت اجتماع به اشتراک و به عکس عوض می‌شود.

مثال: اگر U ، مجموعه اعداد صحیح و $A' = \{5, 6, 7, 8\}$ و $B' = \{7, 8, 9, 10\}$ ، آنگاه مجموعه‌های $(A \cup B)'$ و $A - B$ را بیابید.

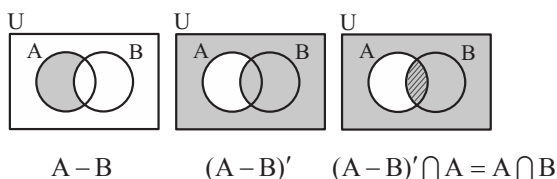
حل: $(A \cup B)' = A' \cap B' = \{5, 6, 7, 8\} \cap \{7, 8, 9, 10\} = \{7, 8\}$

$A - B = A \cap B' = \{\dots, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 9, 10, 11, \dots\} \cap \{7, 8, 9, 10\} = \{9, 10\}$

توجه ◀◀ در محاسبات مربوط به متتم و جبر مجموعه‌ها، استفاده از نمودار ون کمک زیادی می‌کند. در این حالت یک شکل در حالت کلی (دو

مجموعه اشتراک داشته باشند) در نظر گرفته و در هر مرحله از هاشور زدن ناحیه استفاده می‌کنیم.

مثال: درستی رابطه‌ی $(A - B)' \cap A = A \cap B$ را بررسی کنید.



حل: به شکل زیر توجه کنید:

نکته به خواص زیر در جبر مجموعه‌ها توجه کنید: (با نمودار ون درستی را بررسی کنید).

$$(1) A - (A \cap B) = A - B \quad (2) A - B = B' - A'$$



۴۱. اگر Z را به عنوان مجموعه‌ی مرجع در نظر بگیریم، آنگاه N' کدام مجموعه‌ی زیر است؟
 (۱) مجموعه‌ی اعداد حسابی
 (۲) مجموعه‌ی اعداد صحیح نامنفی
 (۳) مجموعه‌ی اعداد صحیح نامثبت
 (۴) مجموعه‌ی اعداد صحیح مثبت
۴۲. اگر Z مجموعه‌ی مرجع باشد، آنگاه مجموعه‌ی W' کدام است؟
 (۱) N
 (۲) $\{-k \mid k \in N\}$
 (۳) $Z - N$
 (۴) $R - W$
۴۳. اگر R مجموعه‌ی مرجع باشد، کدام گزینه نادرست است؟
 (۱) $-2/1 \in N'$
 (۲) $2\sqrt{5} \in (R - Q')$
 (۳) $-\frac{0/1}{3} \in Q$
 (۴) $\sqrt{2} \in Z'$
۴۴. اگر N مجموعه‌ی مرجع باشد، متمم مجموعه‌ی $A = \{x \in N : x^2 < 100\}$ کدام است؟
 (۱) $\{100, +\infty\}$
 (۲) $\{1, 12, 13, 14, \dots\}$
 (۳) $\{x \in N \mid x > 11\}$
 (۴) $\{x \in N \mid x > 9\}$
۴۵. اگر $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ، $A = \{4, 5, 6\}$ و $B' = \{1, 2, 3, 4\}$ ، آنگاه مجموعه‌ی $A - B$ چند عضو دارد؟
 (۱) ۱ عضو
 (۲) ۲ عضو
 (۳) ۳ عضو
 (۴) ۴ عضو
۴۶. اگر $A = \{a \mid -a \in N\}$ ، $B = \{1 - b \mid -b \in W\}$ باشد و مجموعه‌ی Z را مجموعه‌ی مرجع فرض کنیم، مجموعه‌ی $A' \cap B'$ کدام است؟
 (۱) W
 (۲) $Z - N$
 (۳) $\{0\}$
 (۴) \emptyset
۴۷. اگر A و B زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی مرجع U باشند بطوریکه $U = \{2, 4, 6, \dots, 98, 100\}$ ، A مجموعه‌ی اعداد بخش پذیر بر ۶ و B مجموعه‌ی اعداد مربع کامل، آنگاه $A - B'$ چند عضو دارد؟
 (۱) ۱۲
 (۲) ۵
 (۳) ۳
 (۴) ۱
۴۸. اگر $U = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$ را به عنوان مجموعه‌ی مرجع در نظر بگیریم و $A \subset U$ ، آنگاه A را کدام مجموعه‌ی زیر در نظر بگیریم تا تعداد عضوهای مجموعه‌ی A' بیشتر باشد؟
 (۱) اعداد فرد
 (۲) مقسوم‌علیه‌های عدد ۳
 (۳) اعداد اول
 (۴) مربع کامل
۴۹. اگر $A = \{x \in R \mid -1 < 2 - x \leq 5\}$ و $B = \{x \in Z \mid \frac{2x+3}{x} \in W\}$ ، آنگاه مجموعه‌ی $A \cap B'$ شامل چند عدد طبیعی است؟
 (۱) سه
 (۲) دو
 (۳) یک
 (۴) هیچ
۵۰. مجموعه‌ی U ، مجموعه‌ی مرجع و $A \subset U$ ، کدام مجموعه همواره با A برابر است؟
 (۱) $A' \cup \emptyset'$
 (۲) $(A \cup U') \cup U$
 (۳) $(A \cap \emptyset) \cup A'$
 (۴) $(A' \cap \emptyset) \cup A$
۵۱. اگر A یک مجموعه‌ی نامتناهی و B مجموعه‌ای متناهی از مجموعه مرجع U باشد، آنگاه کدام گزینه الزاماً نامتناهی است؟
 (۱) $A - B$
 (۲) A'
 (۳) B'
 (۴) $A \cap B$
۵۲. اگر $A \subseteq B$ و A مجموعه‌ای نامتناهی باشد، آنگاه کدام مجموعه حتماً نامتناهی است؟
 (۱) B'
 (۲) $A \cap B$
 (۳) $B - A$
 (۴) $A' \cap B'$
۵۳. اگر $A \subseteq B$ باشد، آن‌گاه چند مورد از گزاره‌های زیر همواره درست است؟ (U مجموعه‌ی مرجع است).
 (الف) $B \subseteq A'$
 (ب) $A \cup B = U$
 (پ) $B - A = B$
 (ت) $A \cap B = \emptyset$
۵۴. متمم مجموعه‌ی $A \cup (B - A)$ کدام است؟
 (۱) $A' \cup B'$
 (۲) $A' - B$
 (۳) $B' - A'$
 (۴) $A' - B'$



۵۵. اگر R مجموعه‌ی مرجع باشد، آن‌گاه کدام یک از روابط زیر صحیح نمی‌باشد؟ (ریاضی ۱- صفحه‌ی ۹- کار در کلاس- مرتبط با ۶) (آزمون کانون - ۲۰ مهر ۹۷)

- ۱) $W' - Z' = \{-K \mid K \in N\}$ (۲) $N' - W' = \{0\}$ (۳) $Q' \cup N \subseteq W'$ (۴) $Q - W \subseteq N'$ (۵)

۵۶. اگر $A \cup B = U$ باشد، کدام گزاره همواره صحیح است؟ (ریاضی ۱- صفحه‌ی ۹- کار در کلاس- مرتبط با ۶) (آزمون کانون - ۵ آبان ۹۶)

- ۱) $A \cap B' = \emptyset$ (۲) $A - B = B - A$ (۳) $A' = B - A$ (۴) $A' \cup B' = U$ (۵)

۵۷. اگر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$ باشند، اشتراک مجموعه‌ی $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ یا } x \geq 1\}$ و $A' \cap B'$ چند عضو صحیح دارد؟ (ریاضی ۱- صفحه‌ی ۹- کار در کلاس- مکمل ۶) (آزمون کانون - ۴ آبان ۹۷)

- ۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی‌شمار (۵)

۵۸. اگر مجموعه‌ی مرجع، مجموعه‌ی اعداد طبیعی و $A = \{30\}$ و $B = \{2k - 1 \mid k \in A\}$ باشد، آنگاه تعداد اعضای مجموعه‌ی $A - (A \cap B')$ کدام است؟ (ریاضی ۱- صفحه‌ی ۹- کار در کلاس- مرتبط با ۶) (آزمون کانون- ۱۷ شهریور ۹۶)

- ۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۳ (۵)

۵۹. اگر $M = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ مجموعه‌ی مرجع، $A = \{1, 3, 5\}$ و $B = \{2, 3, 4, 5\}$ باشد، کدام عدد متعلق به مجموعه‌ی $(A - B)' \cap (A \cup B)'$ نیست؟ (ریاضی ۱- صفحه‌ی ۹- کار در کلاس- مرتبط با ۶)

- ۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸ (۵)

۶۰. اگر $A \cap B = \{a, b, c, d\}$ و $A \cap C = \{b, c, e, f\}$ ، آنگاه $A - (B - C)'$ کدام است؟ (ریاضی ۱- صفحه‌ی ۹- کار در کلاس- مرتبط با ۶)

- ۱) $\{a, c, e, f\}$ (۲) $\{a, d\}$ (۳) $\{e, f\}$ (۴) $\{b, d\}$ (۵)

درسنامه ————— تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه



❑ دو مجموعه‌ی جدا از هم ◀ اگر اشتراک دو مجموعه تهی باشد، آنگاه دو مجموعه را جدا از هم یا مجزا می‌نامند.

بنابراین اگر A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم باشند، آنگاه $A \cap B = \emptyset$.

دو مجموعه‌ی $A = \{7, 8\}$ و $B = \{3, 4\}$ جدا از هم هستند، زیرا عضو مشترکی ندارند. مجموعه‌ی اعداد گویا و مجموعه‌ی اعداد گنگ جدا از هم هستند.

نکته الف- هر مجموعه با متمم خود، جدا از هم‌اند، یعنی A و A' جدا از هم‌اند.

ب- اگر A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم باشند، آنگاه با استفاده از نمودار ون می‌توان درستی روابط زیر را نشان داد:

- (۱) $A - B = A$ (۲) $B - A = B$ (۳) $A \subset B'$ (۴) $B \subset A'$

پ- دو مجموعه‌ی $A - B$ و $B - A$ همواره جدا از هم‌اند، در نتیجه: $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$.

❑ **تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه** ◀ فرض کنید A و B دو زیرمجموعه‌ی دلخواه متناهی از مجموعه‌ی مرجع متناهی U هستند. اگر $n(A)$ و $n(B)$ به ترتیب تعداد اعضای مجموعه‌های A و B باشند، آنگاه تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه را با $n(A \cup B)$ نمایش می‌دهیم و خواهیم داشت:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

در این فرمول، $n(A \cap B)$ تعداد اعضای اشتراک دو مجموعه است.

● **مثال:** اگر $n(A) = 10$ ، $n(B) = 7$ و $n(A \cup B) = 13$ باشند، $n(A \cap B)$ را بیابید.

○ حل: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow 13 = 10 + 7 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 4$

● **مثال:** در یک کلاس ۳۰ نفری، ۱۵ نفر فوتبال و ۱۰ نفر والیبال بازی می‌کنند و ۵ نفر، هم فوتبال و هم والیبال بازی می‌کنند. چند نفر در این کلاس، فوتبال یا والیبال بازی می‌کنند؟

○ حل: اگر مجموعه‌ی A را دانش‌آموزان فوتبالیست و مجموعه‌ی B را دانش‌آموزان والیبال‌باز در نظر بگیریم، آنگاه:

$$n(A \cup B) = 15 + 10 - 5 = 20 \Rightarrow n(A \cup B) = 20 \text{ نفر و } n(B) = 10 \text{ و } n(A) = 15$$

برای دو مجموعه‌ی جدا از هم A و B ، داریم: $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$. زیرا $n(A \cap B) = 0$.



مثال: اگر $A = \{6, 7\}$ و $B = \{2, 3, 4\}$ ، آنگاه $A \cup B$ و تعداد اعضای آن را بیابید.

حل: A و B جدا از هم‌اند، پس: $A \cup B = \{6, 7\} \cup \{2, 3, 4\} = \{2, 3, 4, 6, 7\}$

پس $n(A \cup B) = 5$. توجه کنید که $n(A) = 2$ و $n(B) = 3$.

تعیین تعداد عضوهای یک مجموعه با استفاده از نمودار ون: در مسائل این بخش، با استفاده از نمودار ون و کامل کردن آن، می‌توان مجهول خواسته شده را یافت. تعداد اعضای مجموعه‌های این نمودار با چهار عدد ثابت a ، b ، c و d کامل می‌شود که در آن:

$n(A \cap B) =$ تعداد تمامی عضوهایی که در هر دو مجموعه‌ی A و B هستند. $c =$

$n(A) =$ تعداد عضوهای مجموعه‌ی A . $a + c =$

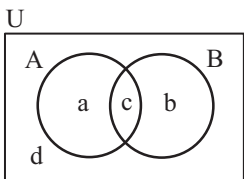
$n(B) =$ تعداد عضوهای مجموعه‌ی B . $b + c =$

$n(A \cup B) =$ تعداد تمامی عضوهایی که در مجموعه‌ی A یا B هستند. $a + c + b =$

$n(A - B) =$ تعداد عضوهایی که فقط در مجموعه‌ی A هستند. $a =$

$n(B - A) =$ تعداد عضوهایی که فقط در مجموعه‌ی B هستند. $b =$

$n(A' \cap B') =$ تعداد تمامی عضوهایی که در هیچ‌یک از مجموعه‌های A یا B نیستند. $d =$



برای رسم نمودار ون از c (اشتراک دو مجموعه) شروع می‌کنیم. (اگر c معلوم باشد، آن را قرار می‌دهیم و اگر مجهول باشد،



برحسب مجهول c قرار می‌دهیم)، سپس مقادیر a و b و در انتها d را یافته و نمودار را کامل کرده و مجهول خواسته شده را می‌یابیم.

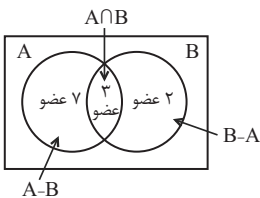
تست: مجموعه‌ی A ، ۱۰ عضوی و مجموعه‌ی B ، ۵ عضوی است. اگر مجموعه‌ی $A - B$ ، ۷ عضوی باشد، مجموعه‌ی $A \cup B$ چند عضو دارد؟

۷ (۱) ۱۲ (۲) ۱۳ (۳) ۱۵ (۴)

پاسخ: گزینه‌ی «۲» از نمودار ون استفاده می‌کنیم و اطلاعات را قرار می‌دهیم. از ۱۰ عضو A طبق $A - B$ ، ۷

عضو در B نیست، پس ۳ عضو در اشتراک است، B ، ۵ عضوی است، پس $B - A$ ، ۲ عضوی است. $A \cup B$

مجموع این اعضاست، یعنی $n(A \cup B) = 7 + 3 + 2 = 12$.

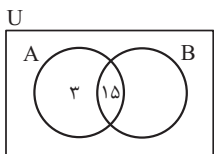


تست: اگر $n(A) = 18$ و $n(A \cap B) = 15$ باشد، مقدار $n(A \cap B')$ کدام است؟

۳ (۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۹ (۴)

پاسخ: گزینه‌ی «۱» نمودار ون را رسم می‌کنیم. چون اشتراک A و B ، ۱۵ عضو دارد، پس ۳ عضو فقط در A هستند ولی

در B نیستند. از آنجایی که $A \cap B' = A - B$ ، با توجه به نمودار $n(A \cap B') = 3$ است.



مثال: در یک کلاس ۴۰ نفری، ۱۷ نفر عضو گروه سرود، ۲۱ نفر عضو گروه تئاتر و ۷ نفر عضو هیچ گروهی نیستند. چند نفر از دانش‌آموزان این کلاس،

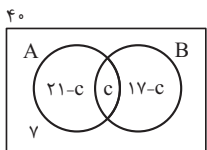
عضو هر دو گروه هستند؟ چند نفر فقط عضو گروه سرود هستند؟

حل: نمودار ون را رسم می‌کنیم (شکل روبه‌رو). تعداد دانش‌آموزانی که عضو هر دو گروه هستند را c در نظر می‌گیریم که

مجهول است، پس مسأله را با c ادامه می‌دهیم؛ بنابراین نمودار به‌صورت مقابل است.

$$40 = (21 - c) + c + (17 - c) + 7 \Rightarrow 40 = 45 - c \Rightarrow c = 5$$

پس ۵ نفر عضو هر دو گروه هستند. تعداد نفراتی که فقط عضو گروه سرود هستند $17 - 5 = 12$ نفرند.



در حل مسائل مربوط به معادله‌های مجموعه‌ای، به تبدیل کلمات کلیدی زیر توجه کنید:



الف) « A و B » معادل $A \cap B$ است. ب) « A یا B » معادل $A \cup B$ است.

ت) «فقط A » معادل $A - B$ است. ث) «فقط A یا فقط B » معادل $(A - B) \cup (B - A)$ است. هـ) «به جز A » معادل A' است.

مثال: یک روستا ۴۰۰ کشاورز دارد که ۳۰۰ نفر از آنها گندم یا جو می‌کارند. در صورتی که ۲۱۰ نفر گندم و ۱۴۰ نفر جو بکارند، آنگاه:

الف) چند نفر هم گندم می‌کارند و هم جو؟ ب) چند نفر فقط گندم می‌کارند؟ پ) چند نفر جو نمی‌کارند؟

راه حل اول: استفاده‌ی مستقیم از فرمول:

الف) در این سؤال $n(U) = 400$ (مجموعه‌ی کشاورزان روستاست) و A مجموعه‌ی کشاورزانی که گندم می‌کارند، پس $n(A) = 210$ و B

مجموعه‌ی کشاورزانی که جو می‌کارند پس $n(B) = 140$ ، لذا طبق فرمول اجتماع داریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow 300 = 210 + 140 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 50$$



ب) تعداد کشاورزانی که فقط گندم می‌کارند، برابر است با:

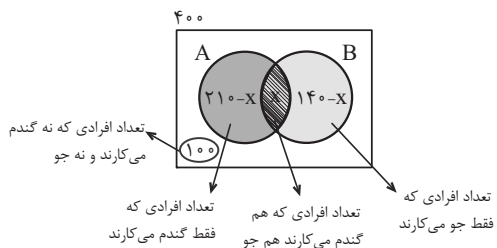
تعداد کشاورزانی که هم گندم می‌کارند و هم جو - تعداد کشاورزانی که گندم می‌کارند = تعداد کشاورزانی که فقط گندم می‌کارند

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 210 - 50 = 160$$

$$n(B') = n(U) - n(B) = 400 - 140 = 260$$

پ) تعداد کشاورزانی که جو نمی‌کارند، برابر است با:

○ راه حل دوم: استفاده از نمودار ون: چون $n(A \cap B)$ مجهول است، با فرض $n(A \cap B) = x$ ، نمودار ون را کامل می‌کنیم.



$$n(A \cup B) = 300$$

$$\Rightarrow 300 = (210 - x) + x + (140 - x) \Rightarrow x = 50$$

ب) باید $x = 210 - x$ را بیابیم، پس:

$$x = 50 \rightarrow 210 - 50 = 160 = \text{تعداد افرادی که فقط گندم می‌کارند.}$$

$$400 - 140 = 260$$

پ) تعداد افرادی که جو نمی‌کارند برابر است با:



پیمانه‌ی ۴



صفحه‌ی ۱۰ ریاضی ۱

تیپ ۷

دو مجموعه‌ی جدا از هم (مجزا)

۶۱. اگر $E - F = E$ باشد، چه رابطه‌ای بین دو مجموعه‌ی ناتهی E و F ، همواره برقرار است؟

(ریاضی ۱ - صفحه‌ی ۱۰ - فعالیت - مرتبط با نتیجه‌ی ۱) (آزمون کانون - ۲۲ آذر ۹۲)

۴) E و F جدا از هم هستند.

۳) $E = F$

۲) $F \subset E$

۱) $E \subset F$

۶۲. اگر A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم در مجموعه‌ی مرجع U باشند، مجموعه‌ی $((A - B) \cup (B - A))'$ برابر کدام مجموعه است؟

(ریاضی ۱ - صفحه‌ی ۱۰ - فعالیت - مرتبط با ۱) (آزمون کانون - ۷ آبان ۹۵)

۴) $A' \cap B'$

۳) $A' \cap B$

۲) $A' \cup B'$

۱) $A \cup B$

۶۳. اگر A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم باشند، آنگاه کدام گزینه همواره صحیح است؟ (U مجموعه‌ی مرجع است.)

(ریاضی ۱ - صفحه‌ی ۱۰ - فعالیت - مرتبط با ۱) (آزمون کانون - ۵ آبان ۹۶)

۴) $(A \cup B)' = \emptyset$

۳) $A - B = \emptyset$

۲) $A \cup B = U$

۱) $(A \cap B)' = U$

صفحه‌های ۱۰ تا ۱۳ ریاضی ۱

تیپ ۸

تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

۶۴. اگر A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم و U مجموعه‌ی مرجع باشد، در صورتی که $n(A) = 4$ و $n(B) = 9$ ، آنگاه $n(A \cup B)$ کدام است؟

(ریاضی ۱ - صفحه‌ی ۱۰ - فعالیت - مرتبط با ۲)

۴) ۹

۳) ۲۶

۲) ۵

۱) ۱۳

۶۵. اگر A و B دو زیرمجموعه از مجموعه‌ی مرجع U ، $n(A) = 14$ و $n(A \cup B) = 25$ باشند، تعداد اعضای مجموعه‌ی $A \cap B$ حداکثر چقدر است؟

(ریاضی ۱ - صفحه‌ی ۱۳ - مرتبط با تمرین ۳)

۴) ۱۴

۳) ۱۳

۲) ۱۲

۱) ۱۱

۶۶. اگر A و B دو زیرمجموعه از مجموعه‌ی مرجع U ، $n(A) = 14$ ، $n(A') = 10$ و $n(B') = 8$ باشند، آنگاه $n(B)$ کدام است؟

(ریاضی ۱ - صفحه‌ی ۱۳ - مرتبط با تمرین ۴)

۴) ۷

۳) ۹

۲) ۸

۱) ۱۶

۶۷. اگر $n(U) = 50$ ، $n(B) = 35$ ، $n(A' \cup B') = 30$ و $n(A') = 20$ باشند، مقدار $n(A \cup B)$ کدام است؟

(ریاضی ۱ - صفحه‌ی ۱۳ - مرتبط با تمرین ۴) (آزمون کانون - ۲۰ مهر ۹۷)

۴) ۲۰

۳) ۴۵

۲) ۴۰

۱) ۳۵

۶۸. فرض کنید A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعه‌ی مرجع U باشند، به طوری که $n(U) = 100$ ، $n(A) = 30$ ، $n(A \cap B) = 10$ و $n(A \cup B) = 50$ ، حاصل $n(A' \cup B') - n(A' \cap B')$ کدام است؟

(ریاضی ۱ - صفحه‌ی ۱۳ - مرتبط با تمرین ۴) (آزمون کانون - ۴ آبان ۹۷)

۴) ۵۰

۳) ۴۰

۲) ۳۰

۱) ۲۰

۶۹. اگر مجموعه‌ی A ، $2m$ عضو و مجموعه‌ی B ، n عضو و مجموعه‌ی $A \cap B$ ، $\frac{m+n}{2}$ عضو داشته باشد، مجموعه‌ی $(A-B) \cup (B-A)$ چند عضو خواهد داشت؟

(ریاضی ۱- صفحه‌های ۱۳- مرتبط با تمرین ۴) (آزمون کانون- ۸ بهمن ۹۵)

(۱) m (۲) n (۳) $m+n$ (۴) $m+2n$

۷۰. اگر مجموعه‌ی A دارای ۴ عضو و مجموعه‌ی B دارای ۱۰ عضو باشد، به طوری که $B' \subset A'$ ، آن گاه $(A-B) \cup (B-A)$ چند عضو دارد؟

(ریاضی ۱- صفحه‌های ۱۰ و ۱۳- ترکیبی) (آزمون کانون - ۴ آبان ۹۷)

(۱) صفر (۲) ۱۴ (۳) ۶ (۴) ۱۰

۷۱. اجتماع دو مجموعه‌ی A و B دارای ۴۰ عضو است. مجموعه‌های $(A-B)$ و $(B-A)$ به ترتیب ۱۲ و ۱۸ عضو دارند. اگر از هر یک از مجموعه‌های A و B ، ۹ عضو برداشته شود، از مجموعه‌ی اشتراک آنها ۴ عضو کم می‌شود. تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه‌ی جدید کدام است؟

(ریاضی ۱- صفحه‌های ۱۳- مرتبط با تمرین ۴) (سراسری انسانی- ۹۴)

(۱) ۲۲ (۲) ۲۳ (۳) ۲۴ (۴) ۲۶

۷۲. مجموعه‌ی A دارای ۳۶ عضو و مجموعه‌ی B دارای ۲۸ عضو است. اشتراک آنها ۱۵ عضو دارد. اگر ۱۶ عضو از مجموعه‌ی A حذف شود، از اشتراک آنها ۹ عضو حذف می‌شود، تعداد عضوهای اجتماع مجموعه‌ی جدید با مجموعه‌ی B ، کدام است؟

(ریاضی ۱- صفحه‌های ۱۳- مرتبط با تمرین ۴) (سراسری انسانی خارج از کشور- ۹۴)

(۱) ۴۰ (۲) ۴۱ (۳) ۴۲ (۴) ۴۵

۷۳. در یک کلاس درس، ۱۹ نفر به تاریخ و ۱۴ نفر به جغرافی علاقه‌مندند و ۶ نفر به هر دو درس و ۵ نفر به هیچ‌کدام از این دو درس علاقه‌ای ندارند، این کلاس چند دانش‌آموز دارد؟

(ریاضی ۱- صفحه‌های ۱۳- مرتبط با تمرین ۵)

(۱) ۳۰ (۲) ۳۲ (۳) ۲۷ (۴) ۲۸

۷۴. از بین دانش‌آموزان یک کلاس، ۲۹ نفر حداقل عضو یکی از گروه‌های A یا B و سه نفر عضو هر دو گروه هستند. اگر تعداد اعضای گروه A ، ۴ نفر بیشتر از گروه B باشد، چند نفر فقط عضو گروه B هستند؟

(ریاضی ۱- صفحه‌های ۱۳- مرتبط با تمرین ۵) (آزمون کانون - ۴ آبان ۹۷)

(۱) ۱۱ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴) ۱۸

۷۵. در یک کلاس $2x$ نفری، $x-7$ نفر فقط در درس ریاضی و $\frac{2}{3}x$ نفر فقط در درس علوم نمره‌ی بالای ۱۵ گرفته‌اند. اگر تعداد کسانی که یا در هر دو درس نمره‌ی بالای ۱۵ گرفته‌اند یا در هیچ‌کدام نمره‌ی بالای ۱۵ نگرفته‌اند، برابر با ۱۲ باشد، تعداد کل افراد کلاس کدام است؟

(ریاضی ۱- صفحه‌های ۱۳- مرتبط با تمرین ۶) (آزمون کانون- ۶ مرداد ۹۶)

(۱) ۱۵ (۲) ۳۰ (۳) ۲۴ (۴) ۴۸

۷۶. در یک کلاس ۴۰ نفری، ۱۸ نفر در فوق برنامه‌ی هنری و ۲۱ نفر در فوق برنامه‌ی علمی شرکت کرده‌اند. اگر ۹ نفر آنها در این دو برنامه شرکت نکرده باشند، چند نفر آنان در هر دو برنامه شرکت کرده‌اند؟

(ریاضی ۱- صفحه‌های ۱۲- کار در کلاس- مشابه ۲) (سراسری انسانی - ۹۵)

(۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۷۷. در یک کلاس ۳۰ نفری، اگر ۹ نفر در برنامه‌های پژوهشی و ۴ نفر هم در هر دو نوع برنامه‌ی پژوهشی و پرورشی شرکت کرده باشند و ۷ نفر در هیچ‌کدام از برنامه‌ها شرکت نکرده باشند، چند نفر فقط در برنامه‌های پرورشی شرکت کرده‌اند؟

(ریاضی ۱- صفحه‌های ۱۳- مرتبط با تمرین ۶) (آزمون کانون - ۲۱ مهر ۹۶)

(۱) ۱۴ (۲) ۱۳ (۳) ۱۰ (۴) ۱۵

۷۸. در یک مهمانی ۲۵ نفر شرکت کرده‌اند. اگر ۱۴ نفر چای و ۱۷ نفر قهوه نوشیده باشند و ۶ نفر نه چای و نه قهوه نوشیده باشند، چند نفر حداکثر یک نوع نوشیدنی نوشیده‌اند؟

(ریاضی ۱- صفحه‌های ۱۳- مرتبط با تمرین ۶) (آزمون کانون- ۲۴ شهریور ۹۶)

(۱) ۱۲ (۲) ۷ (۳) ۱۳ (۴) ۱۹

۷۹. در یک نظرسنجی از ۱۲۰ نفر در شهر تهران، مشخص شد که ۷۲ نفر در یک هفته‌ی گذشته از مترو و ۴۹ نفر از اتوبوس استفاده کرده‌اند. همچنین ۲۴ نفر از آن‌ها اعلام کرده‌اند که در این مدت از هر دو وسیله‌ی نقلیه استفاده کرده‌اند. چند نفر دقیقاً از یکی از دو وسیله استفاده کرده‌اند؟

(ریاضی ۱- صفحه‌های ۱۳- مرتبط با تمرین ۶)

(۱) ۵۶ (۲) ۶۸ (۳) ۷۳ (۴) ۵۲

۸۰. دانش‌آموزان یک کلاس ۲۱ نفره حداقل به یکی از زمینه‌های ورزش، مطالعه یا موسیقی علاقه‌مند هستند. ۱۱ نفر به ورزش، ۹ نفر به مطالعه، ۳ نفر به ورزش و مطالعه، ۴ نفر به ورزش و موسیقی و ۴ نفر به موسیقی و مطالعه علاقه‌مندند. یک دانش‌آموز هم به تمام فعالیت‌ها علاقه دارد. از میان دانش‌آموزان، چند نفر به موسیقی علاقه‌مندند؟

(ریاضی ۱- صفحه‌های ۱۳- مرتبط با تمرین ۶) (آزمون کانون - ۴ آبان ۹۷)

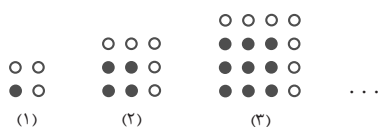
(۱) ۶ (۲) ۹ (۳) ۱۱ (۴) ۱۲



درسنامه — الگو (الگوهای خطی و الگوهای غیرخطی)

❑ **الگو** وقتی یک طرح هندسی را در قالب یک الگو به ما می‌دهند، با شکل‌هایی روبه‌رو هستیم که **تعداد اعضای** مورد بررسی در هر مرحله از **قاعده‌ی معینی** بر حسب **شماره‌ی مرحله** پیروی می‌کند. تعداد عضوهای مرحله‌ی اول را جمله‌ی اول می‌نامیم و با a_1 نمایش می‌دهیم و تعداد عضوهای مرحله‌ی دوم را جمله‌ی دوم می‌نامیم و با a_2 نمایش می‌دهیم و به همین ترتیب، تعداد عضوها در مرحله‌ی n ام را جمله‌ی n ام می‌نامیم و با a_n نمایش می‌دهیم. a_n جمله‌ی عمومی الگوست که فرمول ریاضی بر حسب متغیر n دارد، این متغیر بر حسب شماره‌ی هر مرحله (۱، ۲، ۳ و ...) است. با پیدا کردن جمله‌ی عمومی می‌توانیم مقدار هر جمله‌ی الگو (تعداد اعضا در هر مرحله) را بیابیم. در الگوها، برای یافتن یک مدل ریاضی، رابطه‌ای بین شماره‌ی هر مرحله (اندیس جمله) و مقدار آن (مقدار جمله) می‌یابیم که این رابطه در تمامی مراحل (شکل‌ها) ثابت است.

● **مثال:** در شکل زیر، گویی از دایره‌های غیر رنگی داده شده است. یک جمله‌ی عمومی برای این دایره‌های غیر رنگی بیابید. چند دایره‌ی غیر رنگی در مرحله‌ی دهم داریم؟

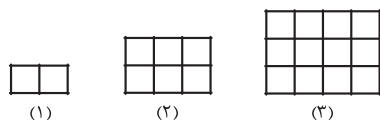


○ حل: در هر مرحله، دو دایره‌ی غیر رنگی اضافه می‌شود.

| n (شماره‌ی مرحله) | ۱ | ۲ | ۳ | ... | n |
|----------------------------------|------------------|------------------|------------------|-----|------------------|
| a_n (تعداد دایره‌های غیر رنگی) | ۳ | ۵ | ۷ | | |
| الگو (رابطه‌ی n و a_n) | $2 \times 1 + 1$ | $2 \times 2 + 1$ | $2 \times 3 + 1$ | ... | $2 \times n + 1$ |

بنابراین جمله‌ی عمومی الگو $a_n = 2n + 1$ است. تعداد دایره‌های غیر رنگی در مرحله‌ی دهم برابر است با: $a_{10} = 2 \times 10 + 1 = 21$.

● **مثال:** در شکل روبه‌رو، گویی از مربع‌های کوچک رسم شده است.



الف) جمله‌ی عمومی این الگو را بیابید.

ب) از کدام مرحله به بعد، تعداد مربع‌های کوچک بیشتر از ۷۲ است؟

○ حل: الف) برای یافتن جمله‌ی عمومی باید تعداد مربع‌های کوچک در هر مرحله را به شماره‌ی آن مرحله نسبت دهیم. به جدول زیر دقت کنید.

| | | | | | | |
|----------------|--------------|--------------|--------------|-----|----------|---|
| مرحله: | ۱ | ۲ | ۳ | ... | n | |
| تعداد مربع‌ها: | 1×2 | 2×3 | 3×4 | ... | $n(n+1)$ | $\Rightarrow a_n = n(n+1)$ جمله‌ی عمومی |

ب) باید $a_n > 72$ باشد، پس $n(n+1) > 72$:

$$n^2 + n - 72 > 0 \rightarrow (n+9)(n-8) > 0 \rightarrow n > 8 \text{ یا } n < -9 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n \geq 9$$

پس از شکل نهم به بعد، تعداد مربع‌ها از ۷۲ بیشتر است.

در سطح کتاب درسی با دو نوع الگو روبه‌رو هستیم: الگوهای خطی و الگوهای غیر خطی. معروفترین الگوهای غیر خطی، الگوهای مربعی و مثلثی هستند. در ادامه این الگوها را بررسی می‌کنیم.

❑ **الگوهای خطی** اگر میزان افزایش یا کاهش جملات یک الگو (تغییر هر شکل نسبت به شکل قبلی) مقدار ثابتی باشد، آن الگو خطی است. جمله‌ی عمومی الگوی خطی به صورت $t_n = an + b$ است (a و b اعداد حقیقی دلخواه و ثابت). n شماره‌ی جمله و a میزان افزایش یا کاهش است. یک الگوی خطی، نقاطی به مختصات (n, t_n) بر روی خط $y = ax + b$ هستند که در آن n عددی طبیعی است. در این حالت، میزان تغییر جملات، به ازای تغییرات n ، شیب خط، یعنی عدد a است.

● **مثال:** نشان دهید اعداد ...، ۱۷، ۱۲، ۷، ۲، یک الگوی خطی را نمایش می‌دهند. جمله‌ی عمومی آن را بیابید.

○ حل: اختلاف هر دو جمله متوالی، مقدار ثابت ۵ است، پس الگوی داده شده خطی است. برای یافتن جمله‌ی عمومی، با توجه به اینکه میزان افزایش جملات ۵ است، پس $a = 5$ و داریم $t_n = 5n + b$ ، برای یافتن b ، از مقدار یک جمله استفاده می‌کنیم، $t_2 = 7$ ، پس $7 = 5 \times 2 + b$ در نتیجه، $b = -3$ و جمله‌ی عمومی الگوی خطی $t_n = 5n - 3$ است.

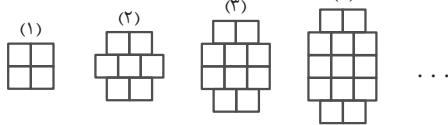
● **مثال:** اگر جملات چهارم و نهم یک الگوی خطی به ترتیب ۱۴ و ۲۹ باشند، جمله‌ی عمومی این الگو را بیابید.

○ **حل:** جمله‌ی عمومی الگوی خطی را $t_n = an + b$ فرض می‌کنیم، بنابراین طبق فرض داریم:

$$\begin{cases} t_4 = 14 \Rightarrow 14 = 4a + b \\ t_9 = 29 \Rightarrow 29 = 9a + b \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} 29 - 14 = 5a \Rightarrow a = 3$$

$$\xrightarrow{a=3} 14 = 4 \times 3 + b \Rightarrow b = 2 \Rightarrow t_n = 3n + 2$$

● **مثال:** مطابق الگوی زیر، چند مربع کوچک در مرحله‌ی دهم خواهیم داشت؟



○ **حل:** ابتدا داده‌ها را سازماندهی می‌کنیم.

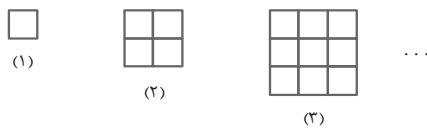
| | | | | | |
|----------------------------------|---|---|----|----|-----|
| مرحله | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ... |
| مقدار جمله (تعداد مربع‌های کوچک) | ۴ | ۷ | ۱۰ | ۱۳ | ... |
| اختلاف جملات | | ۳ | ۳ | ۳ | |

اختلاف جملات متوالی، مقدار ثابت ۳ است، پس الگو خطی است، شیب خط $a = 3$ و جمله‌ی اول ۴ است، پس $b = 1$ و جمله‌ی عمومی به صورت $t_n = 3n + 1$ است. در مرحله‌ی دهم $t_{10} = 3 \times 10 + 1 = 31$ است و در مرحله‌ی دهم، ۳۱ مربع داریم.

■ **الگوهای غیر خطی** ◀ هرگاه در یک الگو، اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی مقدار ثابتی نباشد، الگو غیرخطی است. معروفترین الگوهای غیرخطی الگوهای مربعی و مثلثی هستند.

● **مثال:** در شکل زیر، تعداد مربع‌های کوچک در هر مرحله، از الگوی منظمی پیروی می‌کند. فرمولی برای تعداد مربع‌های کوچک در هر مرحله بیابید.

○ **حل:** با کمی دقت می‌بینیم که مقدار هر جمله (تعداد مربع‌های کوچک)، مربع شماره‌ی همان جمله است، به جدول زیر توجه کنید:



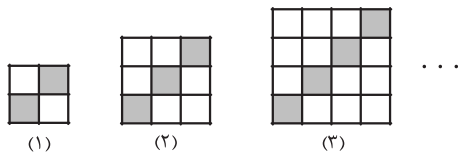
| | | | | | |
|----------------------------------|----------------|----------------|----------------|-----|----------------|
| مرحله | ۱ | ۲ | ۳ | ... | n |
| مقدار جمله (تعداد مربع‌های کوچک) | ۱ ^۲ | ۲ ^۲ | ۳ ^۲ | ... | n ^۲ |

جمله‌ی عمومی این الگو به صورت $a_n = n^2$ است. این الگو را **الگوی مربعی** می‌نامیم.

● **مثال:** در شکل روبه‌رو، الگویی از مربع‌های هم‌مساحت رنگی و غیررنگی رسم شده است.

(الف) جمله‌ی عمومی الگوی مربع‌های غیررنگی را بیابید.

(ب) با توجه به شکل، در کدام مرحله، تعداد مربع‌های غیررنگی برابر ۱۱۰ است؟



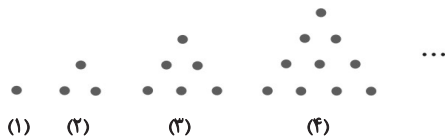
○ **حل:** (الف) تعداد کل مربع‌های هم‌مساحت متوالی به ترتیب عبارتند از: ۲^۲، ۳^۲، ۴^۲ و ... و تعداد مربع‌های رنگی عبارتند از: ۲، ۳، ۴ و ... بنابراین:

| | | | | | | |
|---------------------|--------------------|--------------------|--------------------|-----|----------------------------|---|
| مرحله : | ۱ | ۲ | ۳ | ... | n | |
| تعداد مربع‌های سفید | ۲ ^۲ - ۲ | ۳ ^۲ - ۳ | ۴ ^۲ - ۴ | ... | (n+1) ^۲ - (n+1) | $\Rightarrow a_n = (n+1)^2 - (n+1) = n^2 + n$ |

(ب) باید $n(n+1) = 110$ باشد، بنابراین $n(n+1) = 10 \times 11 = 110$ پس $n = 10$.

● **مثال:** برای الگوی زیر، شکل هفتم از چند دایره تشکیل شده است؟ جمله‌ی عمومی آن را بیابید.

○ **حل:** جملات این الگو را به صورت زیر تنظیم می‌کنیم.



| | | | | | | |
|----------------|---|-----|-------|---------|-----|-------------|
| مرحله | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ... | n |
| تعداد دایره‌ها | ۱ | ۱+۲ | ۱+۲+۳ | ۱+۲+۳+۴ | ... | ۱+۲+۳+...+n |

پس در شکل هفتم داریم $a_7 = 1+2+3+4+5+6+7 = 28$ ، بنابراین $a_7 = 28$ و جمله‌ی عمومی آن به صورت زیر است.

$$a_n = \underbrace{1 + 2 + 3 + \dots + n}_{n \text{ تا}} = \frac{n(n+1)}{2} \quad (\text{الگوی مثلثی})$$

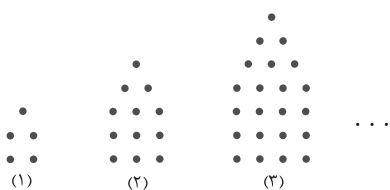
جمله‌ی عمومی این الگو به صورت $a_n = 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ است. این الگو را **الگوی مثلثی** می‌نامیم.



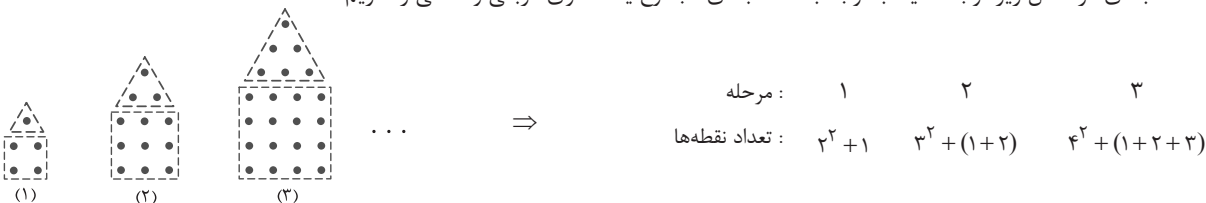
در بعضی از موارد، الگوی غیرخطی داده شده ترکیبی از الگوی خطی و مربعی، خطی و مثلثی یا مربعی و مثلثی است. با دسته‌بندی مناسب در هر شکل، می‌توان این الگوهای پنهان در شکل را یافت. در ابتدا به دنبال اعداد مربعی در شکل باشید.



● مثال: با توجه به الگوی زیر، تعداد نقطه‌ها در شکل ششم چندتا است؟ جمله‌ی عمومی آن را بیابید.



○ حل: به دسته‌بندی در شکل زیر توجه کنید. با توجه به دسته‌بندی مجموع یک الگوی مربعی و مثلثی را داریم:



$$\begin{array}{l} \text{مرحله:} \quad 1 \qquad 2 \qquad 3 \\ \text{تعداد نقطه‌ها:} \quad 3^2 + 1 \quad 6^2 + (1+2) \quad 10^2 + (1+2+3) \end{array}$$

بنابراین در مرحله‌ی n ام، تعداد نقطه‌ها $a_n = (n+1)^2 + \frac{n(n+1)}{2}$ است. تعداد نقطه‌ها در شکل ششم برابر است با:

$$a_6 = (6+1)^2 + \frac{6 \times 7}{2} = 49 + 21 = 70$$



پیمانه‌ی ۵



صفحه‌های ۱۴ تا ۱۷ ریاضی ۱

تیب ۹

الگوهای خطی

(ریاضی ۱ - صفحه ۱۶ - مرتبط با پاراگراف ۲)

۸۱ کدام یک از الگوهای زیر خطی است؟

(۱) $1, -2, 1, -2, \dots$ (۲) $7, 11, 17, 25, \dots$ (۳) $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \dots$ (۴) $2, 4, 8, 16, \dots$

۸۲ در یک الگوی خطی جمله‌ی سوم برابر با ۷ و جمله‌ی هفتم برابر با ۱۵ است. جمله‌ی عمومی این الگو کدام است؟

(ریاضی ۱ - صفحه ۱۶ - مشابه مثال) (آزمون کانون - ۱۹ آذر ۹۵)

(۱) $t_n = n + 8$ (۲) $t_n = 3n - 2$ (۳) $t_n = n + 4$ (۴) $t_n = 2n + 1$

(ریاضی ۱ - صفحه ۱۶ - مرتبط با مثال) (آزمون کانون - ۷ آبان ۹۵)

۸۳ در یک الگوی خطی با جملات متمایز، حاصل کدام عبارت برابر جمله‌ی سیزدهم نیست؟

(۱) $5a_5 - 4a_3$ (۲) $\frac{a_8 + a_{18}}{2}$ (۳) $\frac{5a_{20} - a_{24}}{4}$ (۴) $\frac{5a_8 + a_{28}}{6}$

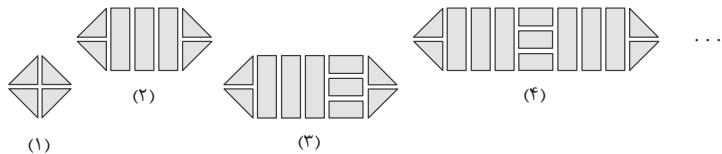
۸۴ در یک الگوی خطی، جمله‌ی چهاردهم، چهار برابر جمله‌ی سوم است. در این الگو نسبت جمله‌ی بیست و دوم به جمله‌ی پنجم کدام است؟

(ریاضی ۱ - صفحه ۱۶ - مکمل مثال) (آزمون کانون - ۴ آبان ۹۷)

(۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

(ریاضی ۱ - صفحه ۱۵ - فعالیت - مشابه ۱)

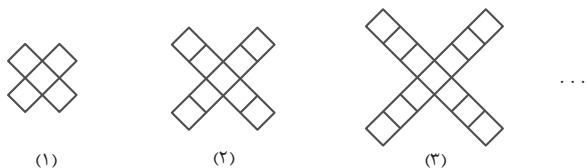
۸۵ در شکل مقابل، تعداد قطعه‌ها در طرح دهم برابر است با:



(۱) ۳۱
(۲) ۳۷
(۳) ۴۱
(۴) ۴۷

(ریاضی ۱ - صفحه ۱۷ - کار در کلاس - مشابه ۱)

۸۶ برای ساختن حرف X الگوی زیر را داریم. با توجه به این الگو، دهمین شکل، دارای چند مربع است؟



(۱) ۳۹
(۲) ۴۰
(۳) ۴۱
(۴) ۴۲

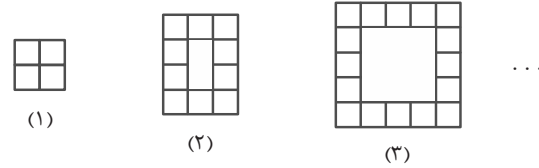
۸۷ شکل زیر، چوب کبریت‌های استفاده شده در هر مرحله‌ی طرح را نمایش می‌دهد. در کدام مرحله‌ی طرح، تعداد چوب کبریت‌های استفاده شده ۲۴۵ خواهد بود؟

(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۱۵- فعالیت- مشابه ۱)



- ۲۸ (۱)
- ۴۸ (۲)
- ۴۴ (۳)
- ۴۴ (۴)

(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۱۷- کار در کلاس- مشابه ۱)



۸۸ با توجه به شکل زیر، در مرحله‌ی هفتم چند مربع کوچک خواهیم داشت؟

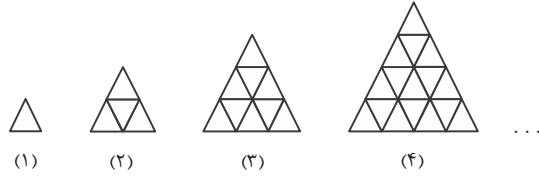
- ۴۰ (۱)
- ۳۶ (۲)
- ۶۴ (۳)
- ۵۰ (۴)

صفحه‌های ۱۷ تا ۲۰ ریاضی ۱

تیپ ۱۰

الگوهای غیرخطی

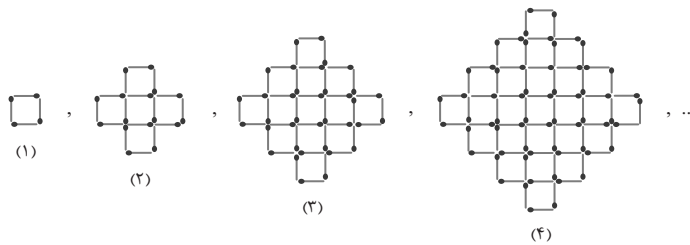
(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۱۸- فعالیت- مرتبط با ۴)



۸۹ مطابق شکل زیر، در طرح هفتم، چند مثلث کوچک داریم؟

- ۲۷ (۱)
- ۳۵ (۲)
- ۴۹ (۳)
- ۳۶ (۴)

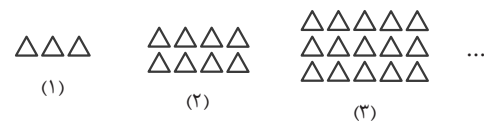
(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۱۸- فعالیت- مرتبط با ۴) (آزمون کانون- ۱۸ فروردین ۹۶)



۹۰ با توجه به الگوی زیر، در کدام مرحله تعداد چوب کبریت‌ها برابر ۱۹۶ است؟

- ۶ (۱)
- ۷ (۲)
- ۱۴ (۳)
- ۱۶ (۴)

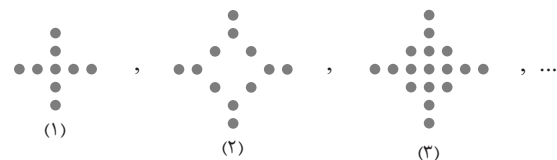
(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۲۰- مرتبط با تمرین ۲) (آزمون کانون- ۱۷ آذر ۹۶)



۹۱ در الگوی زیر، شکل دهم از چند مثلث تشکیل شده است؟

- ۸۶ (۱)
- ۹۸ (۲)
- ۱۱۲ (۳)
- ۱۲۰ (۴)

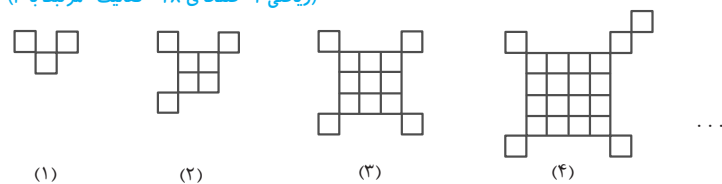
(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۲۰- مشابه تمرین ۲) (آزمون کانون- ۳ آذر ۹۶)



۹۲ در چندمین شکل از الگوی غیرخطی زیر، تعداد دایره‌های سیاه برابر ۱۲۹ می‌شود؟

- ۷ (۱)
- ۱۱ (۲)
- ۱۹ (۳)
- ۱۰ (۴)

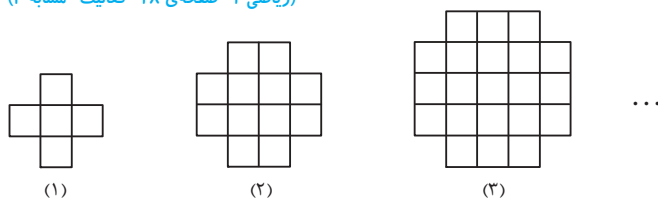
(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۱۸- فعالیت- مرتبط با ۳)



۹۳ در الگوی زیر، شکل شماره‌ی ۹ چند مربع کوچک دارد؟

- ۹۱ (۱)
- ۸۷ (۲)
- ۸۳ (۳)
- ۷۹ (۴)

(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۱۸- فعالیت- مشابه ۴)



۹۴ در الگوی زیر، شکل ششم از چند مربع کوچک تشکیل شده است؟

- ۶۴ (۱)
- ۶۰ (۲)
- ۵۶ (۳)
- ۵۴ (۴)



۹۵. در آرایه‌ی مثلثی مقابل، مجموع دایره‌ها در دو شکل یازدهم و دوازدهم کدام است؟

۱۵

(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۱۹- کار در کلاس- مشابه ۴) (سراسری انسانی خارج از کشور- ۸۶)



۱۲۱ (۱)

۱۴۴ (۲)

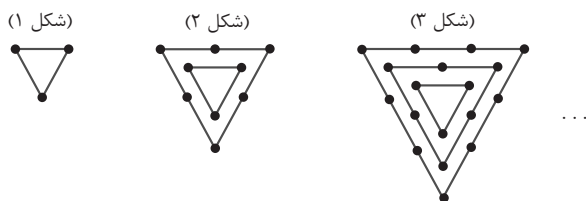
۱۴۵ (۳)

۱۴۸ (۴)

۹۶. با توجه به الگوی زیر، شکل ششم از چند نقطه‌ی توپر تشکیل شده است؟

۱۶

(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۱۹- کار در کلاس- مشابه ۴)



۳۲ (۱)

۴۳ (۲)

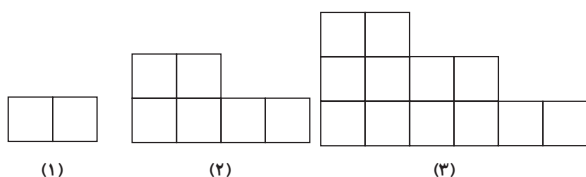
۵۳ (۳)

۶۳ (۴)

۹۷. تعداد مربع‌های کوچک در شکل‌های زیر، تشکیل یک الگوی غیرخطی می‌دهند. جمله‌ی نهم این الگو کدام است؟

۱۷

(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۲۰- مرتبط با تمرین ۱) (آزمون کانون - ۴ آبان ۹۷)



۱۱۰ (۱)

۷۲ (۲)

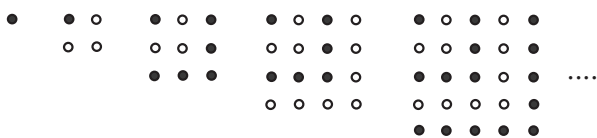
۸۰ (۳)

۹۰ (۴)

۹۸. در الگوی مقابل، تعداد صفرهای توخالی در شکل دوازدهم کدام است؟

۱۸

(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۱۹- کار در کلاس- مرتبط با ۴) (سراسری انسانی خارج از کشور- ۸۸)



۵۵ (۱)

۶۶ (۲)

۷۲ (۳)

۷۸ (۴)

۹۹. در آرایه‌ی زیر، تفاضل تعداد صفرهای توپر در دو شکل دهم و یازدهم کدام است؟

۱۹

(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۱۹- کار در کلاس- مرتبط با ۴) (سراسری انسانی- ۸۶)



صفر (۱)

۱۷ (۲)

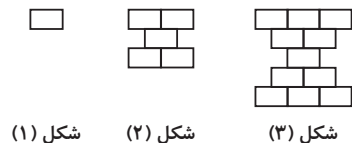
۱۹ (۳)

۲۱ (۴)

۱۰۰. در الگوی زیر تعداد آجرها در شکل دهم چقدر است؟ (هر یک آجر است.)

۲۰

(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۱۹- کار در کلاس- مرتبط با ۴) (آزمون کانون - ۱۸ آبان ۹۷)



۱۱۰ (۱)

۱۰۹ (۲)

۱۰۰ (۳)

۹۹ (۴)

شکل (۱)

شکل (۲)

شکل (۳)

تعریف دنباله ← هر تعداد عدد که پشت سر هم قرار می‌گیرند را یک دنباله می‌نامند. این اعداد، جملات دنباله نامیده می‌شوند. دنباله‌ها را به شکل زیر نمایش می‌دهند:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

که در آن a_1 جمله‌ی اول، a_2 جمله‌ی دوم و به همین ترتیب a_n جمله‌ی n ام یا جمله‌ی عمومی نامیده می‌شود.

۱ معلوم بودن جمله‌ی عمومی: وقتی جمله‌ی عمومی معلوم است، می‌توان مقدار هر جمله، رابطه‌ی بین جملات، تعداد جملات منفی یا مثبت و ... دنباله را به دست آورد. توجه کنید که در تمامی این حالت‌ها، مقادیر n (شماره‌ی جملات) متعلق به اعداد طبیعی هستند.

● **مثال:** اگر جمله‌ی عمومی یک دنباله به صورت $a_n = n^2 - 5n$ باشد، چهار جمله‌ی اول دنباله را یافته و آنها را بنویسید.

○ حل: $a_1 = 1^2 - 5 \times 1 = -4$, $a_2 = 2^2 - 5 \times 2 = -6$, $a_3 = 3^2 - 5 \times 3 = -6$, $a_4 = 4^2 - 5 \times 4 = -4$

بنابراین جملات دنباله به صورت $\dots, n^2 - 5n, \dots, -4, -6, -6, -4, \dots$ خواهند بود.

● **مثال:** چند جمله از دنباله با جمله‌ی عمومی $a_n = (-1)^{2n+1}(3n-19)$ ، مثبت است؟

○ حل: باید تعداد جمله‌هایی را بیابیم که $a_n > 0$ ، از آنجایی که $2n^2$ به ازای هر مقدار طبیعی n ، عددی زوج است، پس $2n^2 + 1$ همواره عددی فرد است، در نتیجه $(-1)^{2n^2+1} = -1$:

$$a_n = (-1)^{2n^2+1}(3n-19) > 0 \Rightarrow -(3n-19) > 0 \Rightarrow 3n-19 < 0 \Rightarrow n < \frac{19}{3}$$

بنابراین مجموعه مقادیر قابل قبول n ، برابر $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ است و شش جمله مثبت است.

۲ معلوم بودن جملات دنباله: با در اختیار داشتن جملات یک دنباله، در اغلب موارد می‌توانیم با یافتن رابطه‌ی بین هر دو جمله‌ی متوالی، جمله‌ی عمومی دنباله و جملات دیگر دنباله را بیابیم.

● **مثال:** یک جمله‌ی عمومی برای هر یک از دنباله‌های زیر بیابید.

(a) $-1, 4, -9, 16, -25, \dots$ (b) $1, 2, 1, 4, 1, 6, 1, 8, \dots$

○ حل: (a) جملات ردیف فرد همگی منفی و جملات ردیف زوج همگی مثبت‌اند و از نظر قدر مطلق، مقدار هر جمله برابر مربع شماره‌ی آن جمله است، پس جمله‌ی عمومی به صورت $a_n = (-1)^n n^2$ می‌تواند باشد.

(b) جملات ردیف فرد همگی برابر یک و جملات ردیف زوج اعداد طبیعی زوج‌اند، بنابراین این دنباله را به صورت $a_n = \begin{cases} n & \text{زوج } n \\ 1 & \text{فرد } n \end{cases}$ می‌نویسیم.

۳ دنباله‌های معروف: در جدول زیر معروفترین دنباله‌هایی که به آن‌ها در تست‌ها برخورد می‌کنیم، آورده شده است. در هر یک از آن‌ها a ، b و c اعداد حقیقی‌اند.

| نام دنباله | جمله‌ی عمومی | ویژگی جملات دنباله |
|---------------------|------------------------------------|---|
| دنباله‌ی ثابت | $t_n = c$ | اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی، صفر است. |
| دنباله‌ی خطی | $t_n = an + b$ | اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی، مقداری ثابت است. |
| دنباله‌ی درجه‌ی دوم | $t_n = an^2 + bn + c$, $a \neq 0$ | اختلاف جملات متوالی، خود یک دنباله‌ی خطی تشکیل می‌دهند. در این حالت اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی دنباله‌ی خطی برابر $2a$ است. |
| دنباله‌ی مربعی | $t_n = n^2$ | هر جمله‌ی آن، مربع شماره‌ی آن جمله است. |
| دنباله‌ی مثلثی | $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$ | هر جمله‌ی آن، برابر مجموع اعداد طبیعی، از ۱ تا شماره‌ی همان جمله است. |

● **مثال:** آیا دنباله‌ی $0, 2, 6, 12, 20, \dots$ می‌تواند یک دنباله‌ی درجه‌ی دوم را نمایش دهد؟ جمله‌ی عمومی دنباله را بیابید.

○ **حل:** چون اختلاف جملات متوالی، خود یک دنباله‌ی خطی تشکیل می‌دهند، پس دنباله‌ی داده شده، مربوط به $0, 2, 6, 12, 20, \dots$ یک دنباله‌ی درجه‌ی دوم است. جمله‌ی عمومی را $t_n = an^2 + bn + c$ در نظر می‌گیریم. چون اختلاف جملات متوالی دنباله‌ی خطی ۲ است، پس در نتیجه $2a = 2$ در نتیجه $a = 1$. برای یافتن b و c کافی است دو جمله از دنباله را در نظر بگیریم. $t_1 = 0$ و $t_2 = 2$:

$$\begin{cases} t_1 = 0 \Rightarrow 1 + b + c = 0 \Rightarrow b + c = -1 \\ t_2 = 2 \Rightarrow 4 + 2b + c = 2 \Rightarrow 2b + c = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b + c = -1 \\ 2b + c = -2 \end{cases}$$

با حل دستگاه $b = -1$ و $c = 0$ به دست می‌آید و در نتیجه جمله‌ی عمومی دنباله به صورت $t_n = n^2 - n$ است.

● **تست** جمله‌ی عمومی دنباله‌ی به صورت $a_n = bn^2 + cn$ است. اگر جملات اول و دوم این دنباله به ترتیب برابر ۳ و ۸ باشند، جمله‌ی دهم آن کدام است؟

- ۴۰ (۱) ۸۰ (۲) ۱۲۰ (۳) ۱۶۰ (۴)

پاسخ گزینه‌ی «۳»

$$a_n = bn^2 + cn \Rightarrow \begin{cases} a_1 = b + c \\ a_2 = 4b + 2c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = b + c \\ 8 = 4b + 2c \end{cases} \Rightarrow b = 1, c = 2 \Rightarrow a_n = n^2 + 2n \xrightarrow{n=10} a_{10} = (10)^2 + 2(10) = 120$$

● **مثال:** در دنباله‌ی $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$ جملات هشتم و نهم را بیابید.

○ **حل:** با کمی دقت می‌بینیم که از جمله‌ی سوم به بعد، هر جمله برابر مجموع دو جمله‌ی قبل از خود است، پس جمله‌ی هشتم $8 + 13 = 21$ و جمله‌ی نهم $13 + 21 = 34$ است.

● **مثال:** در دنباله‌ی اعداد $a_1 = 3, a_n = a_{n-1} - 1, a_{n+1} = a_n - 1$ ، جمله‌ی چهارم دنباله را بیابید.

○ **حل:**

$$\begin{aligned} n=1 &\Rightarrow a_{1+1} = a_1 - 1 \Rightarrow a_2 = a_1 - 1 = 3 - 1 = 2 \Rightarrow a_2 = 2 \\ n=2 &\Rightarrow a_{2+1} = a_2 - 1 \Rightarrow a_3 = a_2 - 1 = 2 - 1 = 1 \Rightarrow a_3 = 1 \\ n=3 &\Rightarrow a_{3+1} = a_3 - 1 \Rightarrow a_4 = a_3 - 1 = 1 - 1 = 0 \Rightarrow a_4 = 0 \end{aligned}$$

۲۰
تست

پیمانه‌ی ۶



صفحه‌های ۱۸ تا ۲۰ ریاضی ۱

تیپ ۱۱

دنباله‌ها

۱۰۱. اگر جمله‌ی عمومی یک دنباله، به صورت $a_n = 2(-2)^{n+1}$ باشد، جمله‌ی چندم این دنباله برابر ۱۲۸ است؟

(ریاضی ۱ - صفحه‌ی ۱۹ - کار در کلاس - مرتبط با ۲) (آزمون کانون - ۹ آبان ۹۳)

- چهارم (۱) پنجم (۲) هفتم (۳) هشتم (۴)

۱۰۲. اگر در یک دنباله $a_{2n-1} = \frac{n+3}{2n+3}$ باشد، جمله‌ی یازدهم آن کدام است؟

(ریاضی ۱ - صفحه‌ی ۱۹ - کار در کلاس - مرتبط با ۲) (آزمون کانون - ۱۸ آبان ۹۷)

- ۵ (۱) ۱۴ (۲) ۳ (۳) ۸ (۴)

۱۰۳. چند جمله از دنباله با جمله‌ی عمومی $a_n = 3n - 13$ ، منفی است؟

(ریاضی ۱ - صفحه‌ی ۱۹ - کار در کلاس - مشابه ۲) (آزمون کانون - ۲۵ آبان ۹۳)

- سه جمله (۱) چهار جمله (۲) دو جمله (۳) بی‌شمار (۴)

۱۰۴. در دنباله با جمله‌ی عمومی $a_n = \frac{n}{81} + (-\frac{1}{3})^n$ ، چند جمله‌ی منفی وجود دارد؟

(ریاضی ۱ - صفحه‌ی ۱۹ - کار در کلاس - مرتبط با ۲)

- دو جمله (۱) یک جمله (۲) هیچ (۳) بی‌شمار (۴)

۱۰۵. حاصلضرب شش جمله‌ی اول دنباله با جمله‌ی عمومی $a_n = (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}$ کدام است؟

(ریاضی ۱ - صفحه‌ی ۱۹ - کار در کلاس - مرتبط با ۲)

- ۱ (۱) ۱ (۲) ۱ (۳) ۱ (۴)

۱۰۶. در دنباله با جمله‌ی عمومی $a_n = (-1)^{n+1} \times n$ ، مجموع ۲۰۰ جمله‌ی اول این دنباله کدام است؟ (ریاضی ۱ - صفحه ۱۹ - کار در کلاس - مرتبط با ۲)

- ۱) -۱ (۶) ۲) -۱۰۰ (۲) ۳) ۱۰۰ (۳) ۴) ۱ (۴)

۱۰۷. اگر چند جمله‌ی اول یک دنباله به صورت $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \dots$ باشد، جمله‌ی عمومی آن به کدام صورت می‌تواند باشد؟ (ریاضی ۱ - صفحه ۱۹ - کار در کلاس - مشابه ۳)

۱) $a_n = \frac{2n-1}{n}$ (۱) ۲) $a_n = \frac{2n+1}{n}$ (۲) ۳) $a_n = \frac{2n+1}{2n}$ (۳) ۴) $a_n = \frac{2n-1}{2n}$ (۴)

۱۰۸. از بین گزینه‌های زیر، کدام جمله‌ی عمومی نمی‌تواند مربوط به جملات نوشته شده از دنباله‌ی داده شده باشد؟ (ریاضی ۱ - صفحه ۱۹ - کار در کلاس - مرتبط با ۳) (آزمون کانون - ۱۰ آبان ۹۲)

- ۱) $1, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \dots, \frac{2n}{n+1}, \dots$ (۱) ۲) $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots, \frac{-1}{2} + n, \dots$ (۲)
 ۳) $1, -3, 9, -27, \dots, (-3)^n, \dots$ (۳) ۴) $1, 0, -1, \dots, 2^n - n^2, \dots$ (۴)

۱۰۹. جمله‌ی هفتم از دنباله‌ی اعداد $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{4}{17}, \dots$ کدام است؟ (ریاضی ۱ - صفحه ۱۹ - کار در کلاس - مشابه ۳) (آزمون کانون - ۱۹ آبان ۹۶)

- ۱) $0/12$ (۱) ۲) $0/14$ (۲) ۳) $0/15$ (۳) ۴) $0/17$ (۴)

۱۱۰. در دنباله‌ی درجه‌ی دوم $1, 5, 12, 22, 35, \dots$ جمله‌ی سی‌ام چه عددی است؟ (ریاضی ۱ - صفحه ۲۰ - مشابه تمرین ۴) (آزمون کانون - ۲۲ فروردین ۹۲)

- ۱) ۱۳۳۵ (۱) ۲) ۱۳۳۴ (۲) ۳) ۱۳۳۶ (۳) ۴) ۱۳۳۷ (۴)

۱۱۱. در دنباله‌ی درجه‌ی دوم $1, 3, 6, 10, \dots$ مجموع جملات هفتم و هشتم، برابر کدام است؟ (ریاضی ۱ - صفحه ۱۹ - کار در کلاس - مرتبط با ۴)

- ۱) ۴۹ (۱) ۲) ۵۶ (۲) ۳) ۶۴ (۳) ۴) ۸۱ (۴)

۱۱۲. در دنباله‌ی درجه‌ی دوم $1, 3, 6, 10, \dots$ اگر هر جمله را با جمله‌ی قبل از خودش جمع کنیم، جمله‌ی بیست و پنجم دنباله‌ی جدید کدام است؟ (ریاضی ۱ - صفحه ۱۹ - کار در کلاس - مرتبط با ۴)

- ۱) ۶۷۶ (۱) ۲) ۶۲۵ (۲) ۳) ۵۷۶ (۳) ۴) ۴۰۰ (۴)

دنباله‌های بازگشتی تیپ ۱۲ صفحه‌های ۱۸ تا ۲۰ ریاضی ۱

۱۱۳. در دنباله‌ی $1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$ مجموع جملات هشتم و نهم کدام است؟ (ریاضی ۱ - صفحه ۱۹ - کار در کلاس - مشابه ۳)

- ۱) ۴۷ (۱) ۲) ۵۵ (۲) ۳) ۳۴ (۳) ۴) ۷۰ (۴)

۱۱۴. رابطه‌ی $U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$ بین جملات یک دنباله برقرار است. اگر $U_1 = U_2 = 1$ باشد، جمله‌ی نهم این دنباله کدام است؟ (ریاضی ۱ - صفحه ۱۹ - کار در کلاس - مشابه ۳) (سراسری تجربی - ۷۸)

- ۱) ۳۵ (۱) ۲) ۳۴ (۲) ۳) ۳۳ (۳) ۴) ۳۲ (۴)

۱۱۵. در دنباله‌ی $3, 15, 75, 375, \dots$ مجموع جملات n ام و $(n+1)$ ام، چند برابر جمله‌ی $(n-1)$ ام می‌تواند باشد؟ (ریاضی ۱ - صفحه ۱۹ - کار در کلاس - مشابه ۳)

- ۱) ۵۰ (۱) ۲) ۴۵ (۲) ۳) ۳۰ (۳) ۴) ۲۵ (۴)

۱۱۶. در دنباله‌ای با جمله‌ی n ام a_n داریم $a_{n+1} = a_n + (n+1)$ و $a_1 = 1$ ، جمله‌ی هشتم کدام است؟ (ریاضی ۱ - صفحه ۱۹ - کار در کلاس - مشابه ۳) (سراسری انسانی خارج از کشور - ۹۱)

- ۱) ۳۶ (۱) ۲) ۳۵ (۲) ۳) ۳۲ (۳) ۴) ۳۸ (۴)

۱۱۷. در دنباله‌ی اعداد $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 1$ ، جمله‌ی دهم، کدام است؟ (ریاضی ۱ - صفحه ۱۹ - کار در کلاس - مشابه ۳) (سراسری انسانی خارج از کشور - ۹۴)

- ۱) ۹۷۹ (۱) ۲) ۹۸۷ (۲) ۳) ۱۰۱۵ (۳) ۴) ۱۰۲۳ (۴)

۱۱۸. در دنباله‌ی اعداد $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 2n + 1$ ، جمله‌ی بیست و سوم کدام است؟ (ریاضی ۱ - صفحه ۱۹ - کار در کلاس - مشابه ۳) (سراسری انسانی - ۹۴)

- ۱) ۴۸۴ (۱) ۲) ۵۱۷ (۲) ۳) ۵۲۹ (۳) ۴) ۵۷۶ (۴)

۱۱۹. در یک دنباله‌ی اعداد، $a_1 = 1$ و برای هر $n \geq 2$ داریم: $a_n = 2a_{n-1} + 1$ ، جمله‌ی هشتم این دنباله کدام است؟ (ریاضی ۱ - صفحه ۱۹ - کار در کلاس - مشابه ۳) (سراسری تجربی - ۹۵)

- ۱) ۱۲۷ (۱) ۲) ۱۵۹ (۲) ۳) ۲۴۷ (۳) ۴) ۲۵۵ (۴)

۱۲۰. در یک دنباله‌ی اعداد $a_1 = 3$ و برای هر $n \geq 2$ داریم: $a_n = 2a_{n-1} - 2$ ، حاصل $a_8 - a_7$ ، کدام است؟ (ریاضی ۱ - صفحه ۱۹ - کار در کلاس - مشابه ۳) (سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۵)

- ۱) ۳۲ (۱) ۲) ۴۸ (۲) ۳) ۵۶ (۳) ۴) ۶۴ (۴)