انتشارات مشاوران آموزش
ناشر تخصصی عمومی و علوم انسانی

ریاضی و آمار پایه ۱۰ و ۱۱

نظام جدید

- درسنامه جامع و کامل
- ریاضی به زبان انسانی‌ها
- ۱۰۰۰ پرسش چهارگزینه‌ای
- چینش هدف‌دار تست‌ها
- تست‌های پوششی برای هر ریز مبحث
- پاسخ‌های تشریحی
- آوردن تمام مراحل حل در پاسخ‌ها

مؤلفان:

مصطفی علیزاده نائینی
محمد عسگری

سرشناسه	: علیزاده نائینی، مصطفی، ۱۳۶۳ -
عنوان و نام پدیدآور	: ریاضی و آمار ۱۰ و ۱۱/ مولف مصطفی علیزاده
مشخصات نشر	: تهران: مشاوران آموزش، ۱۳۹۷.
شناسه افزوده	: عسگری، محمد
شابک	: ۴۵۰۰۰۰ ریال : ۹۷۸-۶۰۰-۲۱۸-۰۸۳-۴
وضعیت فهرست نویسی	: فیپای مختصر
شماره کتابشناسی ملی	: ۵۰۶۳۷۳۶

انتشارات مشاوران آموزش
ناشر تخصصی عمومی و علوم انسانی

عنوان	ریاضی و آمار ۱۰ و ۱۱
ناشر	مشاوران آموزش
لیتوگرافی، چاپ و صحافی	هستی
شمارگان	۱۳۷۵ نسخه
قطع	رحلی
نوبت چاپ	اول - ۱۳۹۷
قیمت	۴۵۰۰۰ تومان
شابک	۹۷۸-۶۰۰-۲۱۸-۰۸۳-۴

دفتر انتشارات

تهران، خیابان انقلاب، خیابان ۱۲ فروردین، کوچه مهر، پلاک ۱۸
تلفن: ۶۶۹۵۳۲۰۵

دفتر فروش

تلفن: ۶۶۹۷۵۷۲۷

آشنایی با گروه تولید کتاب ریاضی و آمار

خانواده تالیف

مؤلف written by

مصطفی علیزاده نائینی
متولد ۱۳۶۳
کارشناسی ارشد ریاضی

از ریاضیات نترسید! با صبر و حوصله و تمرین از آن لذت ببرید.

مؤلف written by

محمد عسگری
متولد ۱۳۷۲
کارشناسی ارشد مکانیک

ریاضیات را آگاهانه و با اعتماد به نفس یاد بگیرید.

مدیر اتاق علمی Academic board manager

مصطفی علیزاده نائینی
متولد ۱۳۶۳
کارشناسی ارشد ریاضی

هیچ چیزی لذت بخش‌تر از فهماندن ریاضیات نیست.

عضو اتاق علمی Academic board member

مریم سرلک
متولد ۱۳۷۸
کارشناسی صنایع

ریاضیات به درک منطق و تفکر منظم کمک می‌کند.

خانواده طراحی و چاپ

ناظر چاپ publishing supervisor

مختار زندی
متولد ۱۳۶۱

صفحات کتاب را به گونه‌ای رنگ‌بندی کردیم که برای شما خسته کننده نباشد.

صفحه آرا page design

گروه گرافیک
مشاوران آموزش

با تلاش صفحه‌آرای مجموعه این کتاب پر حجم رو به اتمام رسوندیم.

طراح جلد cover design

آذر سعیدی منش
متولد ۱۳۶۷
کارشناسی ارشد گرافیک

چقدر سخت بود که بخوام علم ریاضی رو با تصویر نشون بدم. امیدوارم که پسندیده باشید.

تایپیست Type

سپهر عزیزی
متولد ۱۳۷۷

لذت بازی با اعداد منو علاقه‌مند کرد تا بخش زیادی از این کتاب ۴۰۰ صفحه‌ای را تایپ کنم.

فهرست

فصل اول عبارت‌های جبری

فصل دوم معادله درجه ۲

فصل سوم تابع

فصل چهارم آشنایی با منطق و استدلال ریاضی

فصل پنجم آمار

مثال

کمترین مقدار منحنی $y=3x^2-x+5$ کدام است؟

۱) $\frac{59}{4}$ ۲) $\frac{60}{13}$ ۳) $\frac{59}{12}$ ۴) $\frac{59}{3}$

پاسخ:

$$y=3x^2-x+5$$

چون ضریب x^2 مثبت است بنابراین منحنی به فرم $\cup$ می‌باشد و مختصات رأس سهمی به صورت $\left|\begin{matrix}-\frac{b}{2a}\\ -\frac{b^2-4ac}{4a}\end{matrix}\right.$ است، بنـابراین

کمترین مقدار منحنی عرض رأس سهمی می‌باشد.

$$y=-\frac{1-4\times3\times5}{12}=-\frac{-59}{12}=\frac{59}{12}$$

روش دوم: کافی است $f(\frac{-b}{2a})=f(\frac{1}{6})$ را حساب کنیم:

$$f(\frac{1}{6})=3\frac{1}{36}-\frac{1}{6}+5=\frac{1}{12}-\frac{1}{6}+\frac{60}{12}=\frac{1-2+60}{12}=\frac{59}{12}$$

گزینهٔ ۳ صحیح است.

مثال

اگر بیشترین مقدار منحنی با ضابطهٔ $y=(a+2)x^2-2x+a$ برابر یک باشد، مقدار a کدام است؟

۱) 1 ۲) $-1+\sqrt{13}$ ۳) $\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$ ۴) $\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$

پاسخ: منحنی ماکزیمم دارد، پس ضریب x^2 در این منحنی، مقداری منفی است، یعنی $a+2<0$ و در نتیجه $a<-2$. از طرفی عرض نقطهٔ ماکزیمم یعنی $-\frac{b^2-4ac}{4a}$ برابر یک است. بنابراین:

$$-\frac{4-4(a+2)a}{4(a+1)}=-\frac{4(1-(a+2)a)}{4(a+1)}=$$

$$-\frac{1-a(a+2)}{a+2}=-\frac{1-a^2-2a}{a+2}=\frac{a^2+2a-1}{a+2}=1\rightarrow a^2+2a-1=a+2\rightarrow a^2+a-3=0$$

$$a=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\times1\times(-3)}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$$

و چون $a<-2$ باید $a=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$ باشد. **گزینهٔ ۴ صحیح است.**

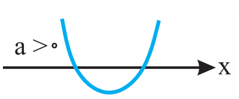
محور تقارن سهمی و نقاط تقاطع سهمی با محورهای مختصات

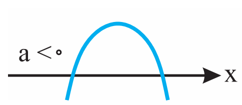
محور تقارن سهمی: در نمودار تابع درجه ۲، خطی که از رأس سهمی (S) می‌گذرد و موازی محور yها یا عمود بر محـور xهـا رسم مـی‌شـود محور تقارن سهمی نامیده می‌شود و معادلهٔ این خط به صورت $x=\frac{-b}{2a}$ است. در واقع معادلهٔ محور تقارن سهمی همان خط $x=x_S$ است.

نقاط تقاطع سهمی با محورهای مختصات

محل برخورد نمودار تابع درجه ۲ با محور xها: برای به دست آوردن نقاط تقاطع سهمی $f(x)=ax^2+bx+c$ با محور xها کافی اسـت بـه جای $f(x)$ یا y در ضابطهٔ تابع عدد صفر را قرار دهیم و معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ را حل کنیم. جواب‌های به دست آمـده از حـل این معادلهٔ درجه ۲، طول نقاط برخورد نمودار تابع با محور xها هستند. که به وضوح عرض (y) این نقاط هم برابر صفر مـی‌باشـد. اگـر معادلـهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ را به روش Δ یا همان روش کلی حل کنید یکی از سه حالت زیر اتفاق می‌افتد.

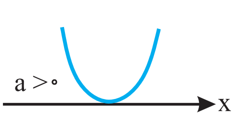
حالت اول: اگر $\Delta>0$ باشد پس معادلهٔ درجه ۲ دارای ۲ جـواب اسـت و ایـن یعنی نمودار محور xها را حتماً در ۲ نقطه قطـع مـی‌کنـد کـه بـا توجـه بـه علامت a (ضریب x^2) یکی از دو حالت روبه‌رو اتفاق می‌افتد.

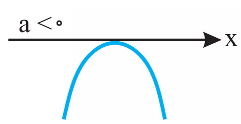




نکته در این حالت نمودار تابع $f(x)$ حداقل از سه ناحیه (سه ناحیه یا هر چهار ناحیه) از ۴ ناحیهٔ مختصاتی عبور می‌کند.

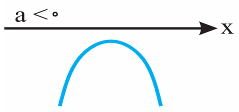
حالت دوم: اگر $\Delta=0$ آنگاه معادلهٔ درجه ۲ دارای ۱ جواب (جـواب مضـاعف) است و این یعنی نمودار محور xها را در یک نقطه قطع می‌کند که با توجه به علامت a (ضریب x^2) یکی از دو حالت روبه‌رو اتفاق می‌افتد.

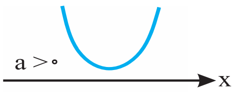




نکته در این حالت با شرط $a<0$ نمودار تابع $f(x)$ فقط از ربع سـوم و چهـارم عبـور مـی‌کنـد و اگـر $a>0$ آنگـاه نمـودار تابع $f(x)$ فقط از ربع اول و دوم عبور می‌کند.

حالت سوم: اگر $\Delta < ۰$ آنگاه معادلهٔ درجه ۲ ریشهٔ حقیقی ندارد و این بدان معنی است که نمودار محور xها را قطع نمی‌کند یعنی یا نمودار کاملاً بالای محور xها قرار دارد و یا نمودار کاملاً پایین محور xها قرار دارد. که با توجه به علامت a (ضریب $x^۲$) یکی از دو حالت روبه‌رو اتفاق می‌افتد.





نکته در این حالت اگر $a < ۰$ آنگاه نمودار تابع $f(x)$ فقط از ربع سوم و چهارم عبور می‌کند و اگر $a > ۰$ آنگاه نمودار تابع $f(x)$ فقط از ربع اول و دوم عبور خواهد کرد.

محل برخورد نمودار تابع درجه ۲ با محورy‌ها:

همانطور که قبلاً نیز گفته شده محل برخورد نمودار تابع $f(x)$ با محور yها همان نقطهٔ عرض از مبدأ تابع است، پس برای تابع $f(x) = ax^۲ + bx + c$ کافی است جای x در ضابطهٔ تابع عدد صفر را قرار دهیم و مقدار $f(x)$ را به دست آوریم.

$$f(x) = ax^۲ + bx + c \Rightarrow f(۰) = a(۰)^۲ + b(۰) + c \Rightarrow f(۰) = c$$

پس نقطهٔ برخورد سهمی به معادلهٔ $f(x) = ax^۲ + bx + c$ با محور yها همیشه نقطهٔ $(۰, c)$ است.

مثال اگر منحنی $y = (a-۲)x^۲ + ax + ۴$ نسبت به خط $x = \frac{۱}{۲}$ متقارن باشد، این منحنی محور xها را با کدام طول مثبت قطع می‌کند؟

۱) $۱ + \sqrt{۱۷}$ ۲) $\frac{۱+\sqrt{۱۷}}{۲}$ ۳) $۱ - \sqrt{۱۷}$ ۴) $\frac{-۱+\sqrt{۱۷}}{۲}$

پاسخ: محور تقارن منحنی خط $x = +\frac{۱}{۲}$ است، بنابراین:

$$x = \frac{-a}{۲(a-۲)} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow -a = \frac{۱}{۲}(۲(a-۲)) \Rightarrow -a = a - ۲ \Rightarrow ۲a = ۲ \Rightarrow a = ۱$$: محور تقارن

برای یافتن محل برخورد منفی با محور xها باید $y = ۰$ قرار دهیم و از آنجا x را محاسبه کنیم:

$$y = ۰ \Rightarrow ۰ = (۱-۲)x^۲ + x + ۴ \Rightarrow -x^۲ + x + ۴ = ۰ \Rightarrow$$

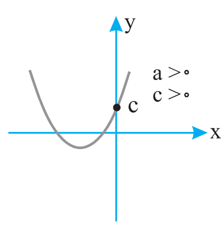
$$x = \frac{-۱ \pm \sqrt{۱^۲ - ۴\times(-۱)\times ۴}}{۲\times(-۱)} = \frac{-۱ \pm \sqrt{۱۷}}{-۲} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-۱+\sqrt{۱۷}}{-۲} = \frac{۱-\sqrt{۱۷}}{۲} \\ \frac{-۱-\sqrt{۱۷}}{-۲} = \frac{۱+\sqrt{۱۷}}{۲} \end{cases}$$

گزینهٔ ۲ صحیح است.

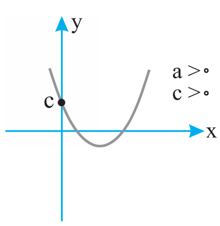
نمودار تابع درجه ۲

با توجه به علامت a و c در تابع درجهٔ ۲ (با فرض $c \neq ۰$) چهار حالت زیر امکان‌پذیر است. (با توجه به علامت Δ نمودار محور طول‌ها را در دو، یک و یا صفر نقطه قطع می‌کند.)

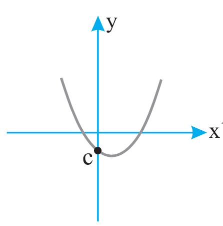
حالت اول $(a > ۰ , c > ۰)$: هر دو ریشه منفی و نمودار از ناحیهٔ ۴ عبور نمی‌کند.

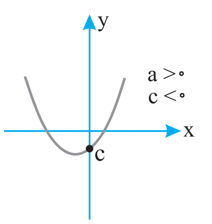


هر دو ریشه مثبت و نمودار از ناحیهٔ ۳ عبور نمی‌کند.

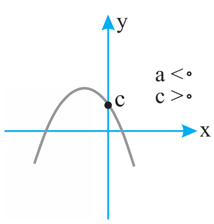


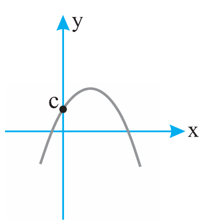
حالت دوم $(a > ۰ , c < ۰)$: یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی است و نمودار از هر چهار ناحیه عبور می‌کند. (در این حالت Δ همواره مثبت است.)





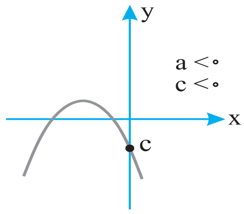
حالت سوم $(a < ۰ , c > ۰)$: یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی است و نمودار از هر چهار ناحیه عبور می‌کند. (در این حالت Δ همواره مثبت است.)



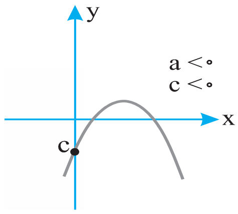


حالت چهارم $(a<0\ ,\ c<0)$:

هر دو ریشه منفی و نمودار از ناحیهٔ ۱ عبور نمی‌کند.



هر دو ریشه مثبت و نمودار از ناحیهٔ ۳ عبور نمی‌کند.



نکته در حالت‌های دوم و سوم، Δ **همواره** مثبت است و معادله حتماً دارای دو ریشهٔ مختلف‌العلامت است. (a و c مختلف‌العلامت $\Leftrightarrow$ دو ریشهٔ معادله مختلف‌العلامت)

در حالت‌های اول و چهارم، Δ می‌تواند صفر یا منفی نیز باشد. یعنی برای حالت‌های اول و چهارم شما می‌توانید برای هر نمودار، دو حالت دیگر را در نظر بگیرید، یکی حالتی که $\Delta = 0$ یعنی وقتی نمودار بر محور xها مماس است و یک حالت وقتی است که $\Delta < 0$ یعنی نمودار محور xها را قطع نمی‌کند که در این حالت، معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.

در حالت‌های اول و چهارم اگر Δ مثبت یا معادله دارای دو ریشه باشد آنگاه آن دو ریشه حتماً هم‌علامت هستند.

مثال

اگر عبارت $(a-1)x^2+(a-1)x+1$ به ازای هر مقدار x منفی باشد، a به کدام مجموعه تعلق دارد؟

۱) $\{a : 1<a<5\}$ ۲) $\{a : a<1\}$ ۳) ϕ ۴) R

پاسخ: عبارت درجهٔ دوم ax^2+bx+c همواره منفی است، اگر نمودار $y=ax^2+bx+c$ کاملاً زیر محور xها باشد، پس باید $\begin{cases} a<0 \\ \Delta<0 \end{cases}$، بنابراین برای این که عبارت درجهٔ دوم $(a-1)x^2+(a-1)x+1$ همواره منفی باشد باید:

$$\begin{cases} \text{ضریب } x^2 \text{ همواره} <0 \Rightarrow (a-1)<0 \Rightarrow a<1 \quad (1) \\ \Delta<0 \Rightarrow (a-1)^2-4(a-1)<0 \xrightarrow{\text{از } a-1 \text{ فاکتور می‌گیریم}} (a-1)(a-1-4)<0 \Rightarrow (a-1)(a-5)<0 \end{cases}$$

با توجه به ریشه‌های معادلهٔ $(a-1)(a-5)<0$، سه حالت در نظر می‌گیریم:

۱) اگر $a<1$ آنگاه $\overbrace{(a-1)}^{-}\overbrace{(a-5)}^{-} \Rightarrow (a-1)(a-5)>0$ پس $a<1$ قابل قبول نیست.

۲) اگر $1<a<5$ آنگاه $\overbrace{(a-1)}^{+}\overbrace{(a-5)}^{-} \Rightarrow (a-1)(a-5)<0$ پس $1<a<5$ قابل قبول است.

۳) اگر $a>5$ آنگاه $\overbrace{(a-1)}^{+}\overbrace{(a-5)}^{+} \Rightarrow (a-1)(a-5)>0$ پس $a>5$ قابل قبول نیست.

پس برای آن که Δی معادله، منفی باشد، $1<a<5$ (۲) به دست می‌آید.

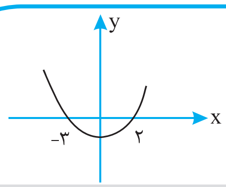
از آن‌جا که شرایط (۱) و (۲) باید با هم برقرار باشند، بنابراین این عبارت نمی‌تواند همواره منفی باشد. پس مقداری برای a یافت نمی‌شود.

گزینهٔ ۲ پاسخ صحیح است.

نکتهٔ بسیار مهم: اگر نقاط $(\alpha,0)$ و $(\beta,0)$ ریشه‌های یک معادلهٔ درجهٔ ۲ باشند، آنگاه صورت کلی آن معادله به صورت $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ و خط $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$ محور تقارن منحنی خواهد بود.

مثال

معادلهٔ سهمی به شکل مقابل کدام عبارت می‌تواند باشد؟



۱) x^2+x-4 ۲) $\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}x-9$

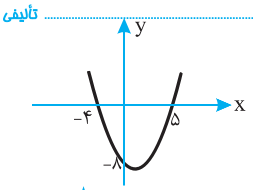
۳) $-x^2-x+4$ ۴) $-\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x+9$

پاسخ: با توجه به این که سهمی از نقاط $(2,0)$ و $(-3,0)$ می‌گذرد، پس معادلهٔ آن به فرم $y=a(x-2)(x+3)$ می‌باشد و $y=a(x^2+x-6)=ax^2+ax-6a$

چون سهمی دارای می‌نیمم است، پس $a>0$ می‌باشد.

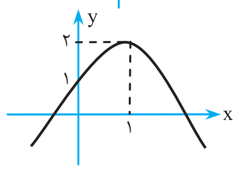
با توجه به گزینه‌ها، گزینه‌های ۳ و ۴ غلط هستند زیرا $a>0$ می‌باشد. و با توجه به این که عبارت ثابت در معادلهٔ درجه۲ یعنی $-6a$ باید ۶- برابر ضریب x^2 یعنی a باشد پس **گزینهٔ ۲ صحیح است.**

۵۰۶- معادلهٔ سهمی مقابل و رأس آن کدام است؟ .... تألیفی



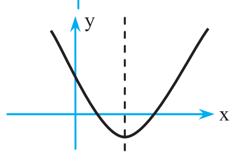
(۱) $x=-\frac{1}{2}\ ,\ y=\frac{2}{5}x^2-\frac{2}{5}x-8$
(۲) $x=\frac{1}{2}\ ,\ y=\frac{5}{2}x^2-\frac{5}{2}x-8$
(۳) $x=-\frac{1}{2}\ ,\ y=-\frac{2}{5}x^2+\frac{2}{5}x+8$
(۴) $x=\frac{1}{2}\ ,\ y=\frac{2}{5}x^2-\frac{2}{5}x-8$

۵۰۷- نمودار مقابل مربوط به کدام معادله است؟ .... سراسری - ۷۶



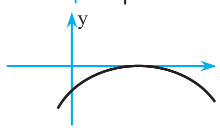
(۱) $y=-x^2+2x+1$
(۲) $y=x^2-2x+1$
(۳) $y=-\frac{1}{2}x^2+x+1$
(۴) $y=x^2-x+2$

۵۰۸- شکل مقابل، نمودار کدام تابع است؟ .... سراسری - ۷۷



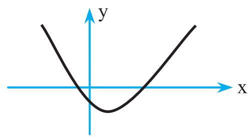
(۱) $y=-x^2+4x+3$
(۲) $y=x^2+4x+3$
(۳) $y=x^2-4x+4$
(۴) $y=x^2-4x+3$

۵۰۹- به ازای کدام مقدار a شکل مقابل نمودار تابع $y=-2x^2+4x+a$ است؟ .... سراسری - ۷۸



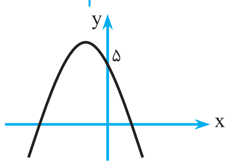
(۱) -2
(۲) -1
(۳) 1
(۴) 1

۵۱۰- معادلهٔ سهمی شکل مقابل کدام است؟ .... سراسری - ۷۹



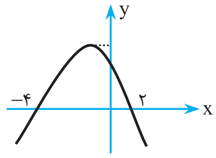
(۱) $y=x^2+2x-2$
(۲) $y=x^2-2x-2$
(۳) $y=-x^2+2x-2$
(۴) $y=-x^2+2x+2$

۵۱۱- شکل مقابل نمودار کدام تابع است؟ .... سراسری - ۸۳



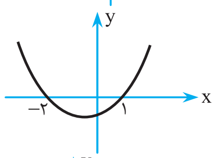
(۱) $y=x^2+4x+5$
(۲) $y=x^2-4x+5$
(۳) $y=-x^2+4x+5$
(۴) $y=-x^2-4x+5$

۵۱۲- معادلهٔ سهمی شکل مقابل کدام است؟ .... سراسری - ۸۶



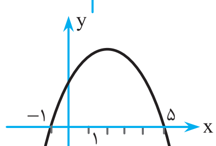
(۱) $y=2x^2-x+2$
(۲) $y=-\frac{1}{2}x^2+x+4$
(۳) $y=-\frac{1}{2}x^2-x+4$
(۴) $y=\frac{1}{2}x^2+x-4$

۵۱۳- معادلهٔ سهمی شکل مقابل، به کدام صورت است؟ .... سراسری خارج کشور - ۸۸



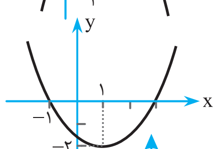
(۱) $y=2x^2-2x-4$
(۲) $y=2x^2+2x-4$
(۳) $y=-2x^2+2x-4$
(۴) $y=-2x^2+4x-4$

۵۱۴- معادلهٔ سهمی در شکل مقابل، کدام است؟ .... سراسری - ۸۸



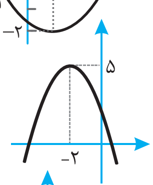
(۱) $y=x^2-3x+5$
(۲) $y=x^2-4x+5$
(۳) $y=-x^2+4x+5$
(۴) $y=-x^2-4x+5$

۵۱۵- معادلهٔ سهمی شکل روبه‌رو، کدام است؟ .... سراسری - ۹۲



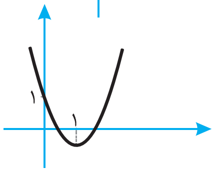
(۱) $y=x^2-x-3$
(۲) $y=2x^2+x-1$
(۳) $y=-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{2}$
(۴) $y=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}$

۵۱۶- شکل روبه‌رو، نمودار کدام تابع است؟ .... سراسری - ۹۴



(۱) $y=x^2+4x+3$
(۲) $y=-x^2-2x+4$
(۳) $y=-\frac{1}{2}x^2-2x+5$
(۴) $y=-\frac{1}{2}x^2-2x+3$

۵۱۷- شکل روبه‌رو، نمودار کدام تابع زیر است؟ .... سراسری خارج کشور - ۹۴



(۱) $y=2x^2+4x+1$
(۲) $y=2x^2-2x+1$
(۳) $y=2x^2-4x+1$
(۴) $y=-2x^2+4x+1$

در تابع درجه دوم $y=ax^۲+bx+c$ طول نقطهٔ رأس سهمی $x=\frac{-b}{۲a}$ است.

$$y=\underbrace{۳}_{a}x^۲+\underbrace{a}_{b}x+\underbrace{b}_{c}\Rightarrow x=\frac{-b}{۲a}\Rightarrow -۱=\frac{-a}{۲(۳)}\Rightarrow -۱=\frac{-a}{۶}\Rightarrow -a=-۶\Rightarrow a=۶$$

$a=۶$ را در معادلهٔ اصلی یعنی $y=۳x^۲+۶x+b$ جایگزین می‌کنیم با این فرض که عرض رأس سهمی یعنی y برابر ۴- است که در صورت سؤال گفته است، پس:

$$y=۳x^۲+۶x+b\xrightarrow[y=-۴]{x=-۱}-۴=۳(-۱)^۲+۶(-۱)+b\Rightarrow -۴=۳-۶+b\Rightarrow -۴+۳=b\Rightarrow b=-۱$$

پس معادلهٔ سهمی به صورت $y=۳x^۲+۶x-۱$ است و عدد ثابت یعنی (۱-) عرض محل تلاقی سهمی با محور yها است. **گزینهٔ ۳ صحیح است.**

۵۰۴- خط $y=۳x-۵$ بر منحنی $y=(m+۴)x^۲+۲mx$ مماس است، پس معادلهٔ تلاقی آنها ریشهٔ مضاعف دارد، بنابراین:

$$(m+۴)x^۲+۲mx=۳x-۵\Rightarrow (m+۴)x^۲+(۲m-۳)x+۵=۰$$

$$\Delta=(۲m-۳)^۲-۴(m+۴)۵=۰\Rightarrow ۴m^۲-۱۲m+۹-۲۰m-۸۰=۰\Rightarrow ۴m^۲-۳۲m-۷۱=۰$$

مجموع مقادیر m ها برابر است با مجموع ریشه‌های معادلهٔ بالا، پس جواب برابر است با $۸=-\frac{(-۳۲)}{۴}=-\frac{b}{a}$. **گزینهٔ ۱ صحیح است.**

۵۰۵- در سهمی به معادلهٔ $y=-x^۲+۴x-۲$ ، $a<۰$ است پس سهمی دارای ماکزیمم است. پس گزینهٔ چهار جواب نیست. طول رأس سهمی را به دست می‌آوریم: $x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۴}{۲(-۱)}=۲$ پس گزینهٔ دو غلط است چرا که با توجه به شکلِ گزینهٔ دو، رأس سهمی باید ۲- باشد. و از محاسبهٔ عرض رأس سهمی که با توجه به ضابطه $y=-۲^۲+۴\times۲-۲=۲$ می‌باشد، مشخص می‌شود که گزینهٔ یک نیز غلط است. **گزینهٔ ۳ صحیح است.**

۵۰۶- با توجه به این که سهمی محور طول‌ها را در نقاط $(۵,۰)$ و $(-۴,۰)$ قطع می‌کند، پس معادلهٔ آن بـه فـرم $y=a(x-۵)(x+۴)$ مـی‌باشـد و چـون سهمی دارای نقطهٔ مینیمم است، نتیجه می‌گیریم $a>۰$ می‌باشد. از طرفی نمودار سهمی از نقطهٔ $(۰,-۸)$ می‌گذرد.
بنابراین مختصات آن در ضابطهٔ سهمی صدق می‌کند، یعنی داریم:

$$y=a(x-۵)(x+۴)=a(x^۲-x-۲۰)=ax^۲-ax-۲۰a\xrightarrow{x=۰\ ,\ y=-۸}-۸=-۲۰a\rightarrow a=\frac{۸}{۲۰}=\frac{۲}{۵}$$

معادلهٔ سهمی: $y=\frac{۲}{۵}x^۲-\frac{۲}{۵}x-۸$

رأس سهمی را از دو روش می‌توان به دست آورد: $x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{(-\frac{۲}{۵})}{۲(\frac{۲}{۵})}=\frac{۱}{۲}$ ، $x=\frac{۵+(-۴)}{۲}=\frac{۱}{۲}$ (وسط دو نقطه‌ای که نمودار را قطع می‌کند.)

گزینهٔ ۴ صحیح است.

۵۰۷- از شکل می‌فهمیم که سهمی دارای ماکزیمم است. پس گزینه‌های دو و چهار، جواب نیستند. چون ضریب $x^۲$ منفی باید باشـد ولـی در ایـن دو گزینـه مثبت است. برای تشخیص جواب بین گزینه‌های یک یا سه، محور تقارن را به دست می‌آوریم:

محور تقارن در گزینهٔ سه : $x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۱}{-۱}=۱$ محور تقارن در گزینهٔ یک : $x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۲}{-۲}=۱$

همان‌طورکه در شکل می‌بینید $x=۱$ محور تقارن است که در هر دو گزینهٔ سه و یک، خط $x=۱$ محور تقارن سهمی است. پس تا اینجا هر دو گزینـه درست هستند. حال کافی است نقطهٔ $(۱,۲)$ یعنی رأس سهمی را در هر دو گزینهٔ یک و سه امتحان کنـیم، بـا جـای‌گذاری در گزینـه‌های یـک و سـه می‌بینیم که فقط در گزینهٔ یک صدق می‌کند. در گزینهٔ یک: $y=-x^۲+۲x+۱\xrightarrow{x=۱}y=۲$

در گزینهٔ سه: $y=-\frac{۱}{۲}x^۲+x+۱\xrightarrow{x=۱}y=-\frac{۱}{۲}+۲$ **گزینهٔ ۱ صحیح است.**

۵۰۸- اولاً تابع دارای مینیمم است. پس $a>۰$ است و گزینهٔ یک جواب نیست. هم چنین رأس سهمی با توجه به شکل در ناحیـهٔ چهـارم قـرار دارد کـه x آن مثبت و y آن منفی باید باشد. در گزینه‌های دو تا چهار این موضوع را امتحان می‌کنیم:

(چون x مثبت نشد نیازی به محاسبهٔ y نداریم) گزینهٔ دو غلط است. گزینهٔ دو : $x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۴}{۲}=-۲$

(چون y منفی نشد) گزینهٔ سه غلط است. گزینهٔ سه : $x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-(-۴)}{۲}=۲\xrightarrow{y=x^۲-۴x+۴}y=۲^۲-۴(۲)+۴=۰$

گزینهٔ چهار درست است. گزینهٔ چهار : $x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-(-۴)}{۲}=۲\xrightarrow{y=x^۲-۴x+۳}y=۲^۲-۴(۲)+۳=-۱$ **گزینهٔ ۴ صحیح است.**

۵۰۹- در تابع سهمی $y=-۲x^۲+۴x+a$ ، a چه نقشی را ایفا می‌کند؟ «عرض از مبدأ». عرض از مبدأ چه نقطه‌ای است. نقطه‌ای است که x آن صفر است و y آن همان a است. پس تا اینجا متوجه می‌شویم که با توجه به شکل، a باید منفی باشد. پس گزینه‌های یک یا دو جواب هستند.
باید ببینیم صورت سؤال باز چه اطلاعاتی در اختیار ما می‌گذارد. ما بـه کمک صورت سؤال می‌توانیم طـول رأس سـهمی را بـه دسـت آوریـم کـه برابـر بـا $\frac{-b}{۲a}=\frac{-۴}{-۴}=۱$ می‌باشد. باز یک دادهٔ دیگر نیز شکل به ما می‌دهد. رأس سهمی روی کدام محور واقع شده است؟ همان‌طورکه از شکل مشخص می‌شود عرض رأس برابر صفر است. پس اگر مختصات رأس سهمی یعنی نقطهٔ $(۱,۰)$ را در معادله جای‌گذاری کنیم فقط یک مجهول باقی می‌ماند که a است:

$$y=-۲x^۲+۴x+a\xrightarrow{(۱,۰)}۰=-۲+۴+a\Rightarrow a=-۲$$

گزینهٔ ۱ صحیح است.

۵۱۰- اولاً شاخک‌های سهمی به سمت بالاست پس تابع دارای مینمم است. پس $a>۰$. بنابراین گزینه‌های سه و چهار جواب نیستند. پس بحث در گزینه‌های یک و دو است. از روی شکل مشخص است که طول رأس سهمی مثبت است. اگر گزینه‌های یک و دو را امتحان کنیم طول رأس به ترتیب عبارت است از:

طول رأس سهمی در گزینهٔ یک : $x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۲}{۲}=-۱$ پس گزینهٔ یک غلط است   طول رأس سهمی در گزینهٔ دو : $x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-(-۲)}{۲}=۱$

گزینهٔ ۲ صحیح است.

۵۱۱- اولاً در نمودار تابع، شاخک‌ها به سمت پایین است پس تابع ماکسیمم دارد. پس ضریب $x^۲$ منفی است. بنابراین گزینه‌های سه یا چهار جواب هستند. اکنون نشانهٔ دیگری وجود دارد که از طریق آن می‌توانیم به جواب برسیم. از روی شکل مشخص است که طول رأس سهمی یعنی $x=\frac{-b}{۲a}$ منفی است چرا که رأس سهمی در ناحیهٔ دوم قرار گرفته است. پس رأس سهمی را در گزینه‌های سه و چهار پیدا می‌کنیم

طول رأس سهمی در گزینهٔ سه : $x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۴}{-۲}=۲$ پس گزینهٔ سه نیز غلط است.

طول رأس سهمی در گزینهٔ چهار : $x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-(-۴)}{۲(-۱)}=-۲$

گزینهٔ ۴ صحیح است.

۵۱۲- با توجه به شکل می‌فهمیم که اولاً سهمی دارای ماکزیمم است. بنابراین ضریب $x^۲$ در تابع باید منفی باشد (نادرستی گزینه‌های یک و چهار) ثانیاً طول نقطهٔ رأس تابع منفی است که در گزینه‌های ۲ و ۳ آن را محاسبه می‌کنیم.

طول رأس سهمی در گزینهٔ دو : $x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۱}{۲(-\frac{۱}{۲})}=۱$ (گزینهٔ دو غلط است.)

طول رأس سهمی در گزینهٔ سه : $x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-(-۱)}{۲(-\frac{۱}{۲})}=\frac{۱}{-۱}=-۱$ (گزینهٔ سه صحیح است.)

گزینهٔ ۳ صحیح است.

۵۱۳- شاخک‌های سهمی رو به بالا است: بنابراین ضریب $x^۲$ باید مثبت باشد. یعنی گزینه‌های یک یا دو صحیح است.
سهمی از نقطهٔ $\begin{array}{|c}۱\\۰\end{array}$ می‌گذرد که با جای‌گذاری در گزینه‌های یک و دو می‌بینیم که فقط در گزینهٔ دو صدق می‌کند.

(گزینهٔ یک غلط است.) $y=۲x^۲-۲x-۴\xrightarrow{x=۱}y=۲-۲-۴=-۴$

(گزینهٔ دو درست است.) $y=۲x^۲+۲x-۴\xrightarrow{x=۱}y=۲+۲-۴=۰$

گزینهٔ ۲ صحیح است.

۵۱۴- چون سهمی رو به پایین باز می‌شود پس ضریب $x^۲$ کوچک‌تر از صفر است $(a<۰)$. پس گزینه‌های یک و دو نادرست‌اند. حال در گزینه‌های سه و چهار رأس سهمی را پیدا می‌کنیم:

طول رأس سهمی در گزینهٔ سه: $y=-x^۲+۴x+۵\Rightarrow x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۴}{۲(-۱)}=۲$

طول رأس سهمی در گزینهٔ چهار: $y=-x^۲-۴x+۵\Rightarrow x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-(-۴)}{۲(-۱)}=-۲$

با توجه به شکل دیده می‌شود که رأس سهمی در ناحیهٔ اوّل قرار دارد پس $x_S>۰$ باید باشد. پس گزینهٔ سه درست است.

گزینهٔ ۳ صحیح است.

۵۱۵- سهمی دارای شاخک‌های رو به بالاست پس مینیمم دارد. سهمی که مینیمم داشته باشد، ضریب $x^۲$ در آن مثبت است. پس گزینهٔ سه غلط است. به شکل نگاه می‌کنیم نقطه‌ای را در سهمی پیدا می‌کنیم که x و y آن را داشته باشیم. نقطهٔ $(-۱,۰)$ را در گزینه‌های یک، دو و چهار جای‌گذاری می‌کنیم.

گزینهٔ یک : $y=x^۲-x-۳\xrightarrow{x=-۱}y=۱+۱-۳=-۱$ غلط است چون y برابر با صفر نشد.

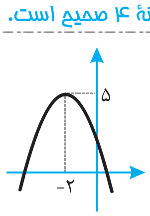
گزینهٔ دو: $y=۲x^۲+x-۱\xrightarrow{x=-۱}y=۲(-۱)^۲+(-۱)-۱=۲-۲=۰$

گزینهٔ چهار : $y=\frac{۱}{۲}x^۲-x-\frac{۳}{۲}\xrightarrow{x=-۱}y=\frac{۱}{۲}(-۱)^۲-(-۱)-\frac{۳}{۲}=\frac{۱}{۲}+۱-\frac{۳}{۲}=\frac{۳}{۲}-\frac{۳}{۲}=۰$

می‌بینید که هم گزینهٔ دو درست شد و هم گزینهٔ چهار. حال به سراغ رأس سهمی می‌رویم، رأس سهمی در گزینهٔ دو دارای طول $x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۱}{۴}$ می‌باشد که منفی است درحالی‌که با توجه به شکل رأس سهمی مثبت است. پس گزینهٔ دو نادرست است و پاسخ گزینهٔ چهار است.

گزینهٔ ۴ صحیح است.

۵۱۶- جهت سهمی رو به پایین است، پس ضریب $x^۲$ منفی است. پس گزینهٔ یک نادرست است.
رأس سهمی نقطهٔ $S(-۲,۵)$ است. پس $x_S=-۲\ ,\ y_S=۵$
حال مختصات رأس سهمی را در گزینه‌ها چک می‌کنیم.



گزینهٔ دو: $y=-x^۲-۲x+۴\Rightarrow x_S=-\frac{b}{۲a}=-\frac{(-۲)}{۲(-۱)}=-۱\neq ۲\Rightarrow$ نادرست است

گزینهٔ سه: $y=-\frac{۱}{۲}x^۲-۲x+۵\Rightarrow x_S=-\frac{b}{۲a}=-\frac{(-۲)}{۲(-\frac{۱}{۲})}=-۲$

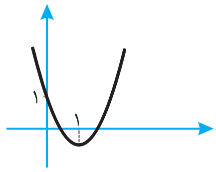
$y_S=-\frac{۱}{۲}x_S^۲-۲x_S+۵=-\frac{۱}{۲}(-۲)^۲-۲(-۲)+۵=-۲+۴+۵=۷\neq ۵\Rightarrow$ نادرست است.

البته می‌توانستیم بگوییم با توجه به عرض از مبدأ نمودار که کمتر از ۵ است، تابع $y=-\frac{۱}{۲}x^۲-۲x+۵$ نادرست است.

گزینهٔ چهار: $y=-\frac{۱}{۲}x^۲-۲x+۳ \Rightarrow x_s=-\frac{b}{۲a}=-\frac{(-۲)}{۲(-\frac{۱}{۲})}=-۲$

$y_s=-\frac{۱}{۲}x_s^۲-۲x_s+۳=-\frac{۱}{۲}(-۲)^۲-۲(-۲)+۳=-۲+۴+۳=۵ \Rightarrow$ صحیح است.

گزینهٔ ۴ صحیح است.



۵۱۷- جهت سهمی رو به بالاست، پس ضریب $x^۲$ مثبت است. پس گزینهٔ چهار نادرست است.

طول رأس سهمی $x_s=-\frac{b}{۲a}=۱$ است:

گزینهٔ یک: $y=۲x^۲+۴x+۱ \Rightarrow -\frac{b}{۲a}=-\frac{۴}{۲(۲)}=-۱\neq ۱ \Rightarrow$ نادرست است

گزینهٔ دو: $y=۲x^۲-۲x+۱ \Rightarrow x_s=-\frac{b}{۲a}=-\frac{(-۲)}{۲(۲)}=\frac{۱}{۲}\neq ۱ \Rightarrow$ نادرست است

گزینهٔ سه: $x_s=-\frac{b}{۲a}=-\frac{(-۴)}{۲(۲)}=۱ \Rightarrow$ صحیح است

گزینهٔ ۳ صحیح است.

۵۱۸- سهمی رو به پایین است، پس ضریب $x^۲$ منفی است پس گزینهٔ چهار نادرست است.
سهمی بر محور xها مماس است. پس تنها یک ریشهٔ منفی دارد، در نتیجه $\Delta=۰$ است. این موضوع را در گزینه‌ها امتحان می‌کنیم.

گزینهٔ یک: $-۲x^۲+۴x-۲=۰ \Rightarrow \Delta=۱۶-۴(-۲)(-۲)=۱۶-۱۶=۰$

گزینهٔ دو: $-۲x^۲-۴x-۲=۰ \Rightarrow \Delta=۱۶-۴(-۲)(-۲)=۱۶-۱۶=۰$

گزینهٔ سه: $-x^۲-۲x-۲=۰ \Rightarrow \Delta=۴-۴(-۱)(-۲)=۴-۸=-۴$

پس گزینهٔ سه نادرست است. می‌دانیم که اگر معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ دارای ریشهٔ مضاعف باشد، آنگاه مقدار ریشهٔ مضاعف برابر $x=-\frac{b}{۲a}$ می‌باشد. این موضوع را در گزینه‌های یک و دو امتحان می‌کنیم:

گزینهٔ یک: $-۲x^۲+۴x-۲=۰ \Rightarrow$ ریشهٔ مضاعف $=x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۴}{۲(-۲)}=۱$

گزینهٔ دو: $-۲x^۲-۴x-۲=۰ \Rightarrow$ ریشهٔ مضاعف $=x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{(-۴)}{۲(-۲)}=-۱$

با توجه به شکل، ریشهٔ معادله منفی است، پس $x=-۱$ یعنی گزینهٔ دو قابل قبول است.
تذکر: می‌توان ریشه‌های مضاعف را به شکل زیر هم به دست آورد:

گزینهٔ یک: $-۲x^۲+۴x-۲=۰ \Rightarrow -۲(x^۲-۲x+۱)=۰ \Rightarrow -۲(x-۱)^۲=۰ \Rightarrow x=۱$

گزینهٔ دو: $-۲x^۲-۴x-۲=۰ \Rightarrow -۲(x^۲+۲x+۱)=۰ \Rightarrow -۲(x+۱)^۲=۰ \Rightarrow x=-۱$

گزینهٔ ۲ صحیح است.

۵۱۹- سهمی رو به بالا است، پس ضریب $x^۲$ مثبت است پس گزینهٔ چهار نادرست است.
سهمی بر محور xها مماس است. پس تنها یک ریشهٔ مثبت دارد، در نتیجه $\Delta=۰$ است. این موضوع را در گزینه‌ها امتحان می‌کنیم.

گزینهٔ یک: $y=\frac{۱}{۲}x^۲-۲x+۲=۰ \Rightarrow \Delta=۴-۴(\frac{۱}{۲})(۲)=۴-۴=۰$

گزینهٔ دو: $y=\frac{۱}{۲}x^۲-x+۲=۰ \Rightarrow \Delta=۱-۴(\frac{۱}{۲})(-۲)=۱-۴=-۳$

گزینهٔ سه: $y=x^۲-۲x+۲=۰ \Rightarrow \Delta=۴-۴(۱)(۲)=۴-۸=-۴$

گزینهٔ ۱ صحیح است.

۵۲۰- دو روش برای حل سؤال داریم یک روش، روش فرمولی است و یک روش، روش مفهومی است:
روش مفهومی: شکل را به طور تقریبی رسم می‌کنیم. اولاً $a<۰$ است پس نمودار، دارای ماکزیمم است. رأس سهمی را به دست می‌آوریم: $x=-\frac{b}{۲a}=\frac{۰}{۲a}=۰ \xrightarrow{y=-\frac{۱}{۲}x^۲+۱} y=-\frac{۱}{۲}(۰)+۱=۱$ پس $S\left|\begin{matrix}۰\\ ۱\end{matrix}\right.$ ثانیاً صورت سؤال گفته است رأس سهمی را «۲ واحد به سمت چپ» می‌بریم.
پس x رأس سهمی ۲- می‌شود. باز گفته است: «یک واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم» پس y رأس سهمی از نقطهٔ ۱ که قرار داشت، ۱ واحد بالاتر برود، پس می‌شود ۲ . نتیجه این که مختصات جدید رأس سهمی می‌شود $(-۲,۲)$
گزینهٔ چهار قطعاً غلط است چرا که مختصات رأس سهمی تغییر کرده است، ماکزیمم داشتن که تغییر نکرده است. (a در این گزینه مثبت است یعنی مینیمم دارد). در گزینهٔ یک مختصات رأس را چک می‌کنیم: $-\frac{b}{۲a}=\frac{-۲}{۲(\frac{-۱}{۲})}=۲$ غلط است چرا که x رأس سهمی باید ۲- باشد. گزینهٔ ۳ هم به همین دلیل غلط است. اما گزینهٔ دو مختصاتش یکسان است. جای‌گذاری کنید!
روش فرمولی: سهمی داده شده را یک بار باید ۲ واحد به چپ و یک بار دیگر ۱ واحد به سمت بالا انتقال دهیم. پس به ترتیب عمل می‌کنیم:

$f(x)=-\frac{۱}{۲}x^۲+۱ \xrightarrow{\text{دو واحد به سمت چپ}} f(x)=-\frac{۱}{۲}(x+۲)^۲+۱ \xrightarrow{\text{یک واحد به سمت بالا}} f(x)=-\frac{۱}{۲}(x+۲)^۲+۱+۱$

$\Rightarrow f(x)=-\frac{۱}{۲}(x^۲+۴x+۴)+۲=-\frac{۱}{۲}x^۲-۲x$

گزینهٔ ۲ صحیح است.

۵۲۱- نمودار تابع داده شده را یک بار باید ۲ واحد به راست و یک بار دیگر ۴ واحد به سمت پایین انتقال دهیم. پس به ترتیب عمل می‌کنیم:

$f(x)=-۲x^۲+۵ \xrightarrow{\text{دو واحد به سمت راست}} f(x)=-۲(x-۲)^۲+۵ \xrightarrow{\text{چهار واحد به سمت پایین}} f(x)=-۲(x-۲)^۲+۵-۴$

$\Rightarrow f(x)=-۲(x-۲)^۲+۱=-۲(x^۲-۴x+۴)+۱=-۲x^۲+۸x-۷$

گزینهٔ ۱ صحیح است.