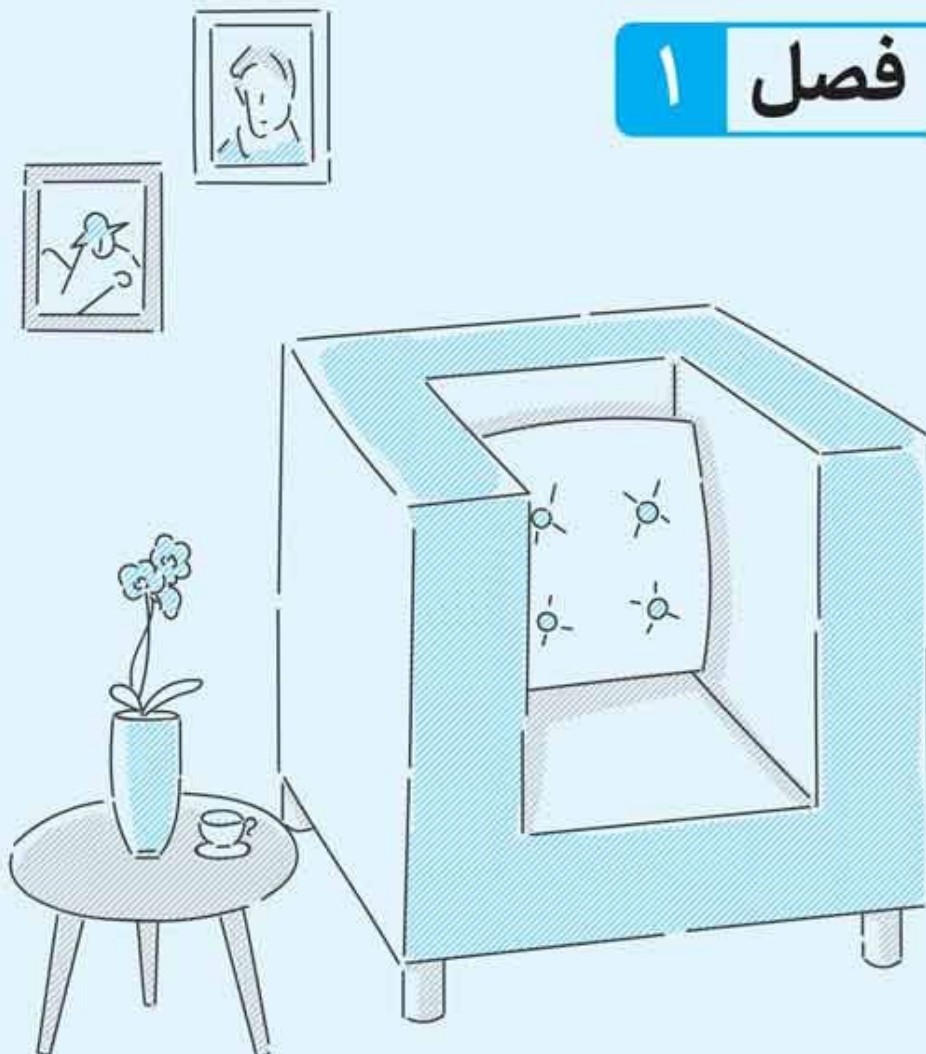


# فهرست

- ۷ فصل ۱: عبارتهای جبری (اتحادها)
- ۳۵ فصل ۲: توانهای گویا (ریشه و رادیکال)
- ۵۹ فصل ۳: نامعادله و تعیین علامت
- ۸۵ فصل ۴: الگو و دنباله
- ۱۴۱ فصل ۵: هندسه تحلیلی (خط)
- ۱۷۳ فصل ۶: معادلات گویا و گنگ
- ۱۹۷ فصل ۷: قدر مطلق و ویژگیهای آن
- ۲۳۳ فصل ۸: جزء صحیح (براکت)
- ۲۵۹ فصل ۹: مثلثات
- ۳۵۱ فصل ۱۰: تابع
- ۴۳۹ فصل ۱۱: معادله و تابع درجه دوم
- ۴۸۳ فصل ۱۲: توابع نمایی و لگاریتمی
- ۵۴۱ فصل ۱۳: حد و پیوستگی





## عبارت‌های جبری (اتحادها)

این فصل یکی از مطالب پایه‌ای ریاضی و پیش‌نیاز همه فصل‌های دیگر است. در این فصل مطالبی مانند اتحادها، تجزیه عبارت‌های جبری و مخرج مشترک‌گیری از عبارت‌های گویا را می‌آموزید.

این فصل در بودجه‌بندی سؤال‌های کنکورهای قبل نبود و از آن تستی مطرح نشده بود.

برآورد ما این است که از این فصل (۲۲) تست در کنکورهای جدید مطرح شود.

## اتحادهای

به جدول اتحادهای زیر توجه کنید:

| ردیف | نام یا شهرت                       | اتحادهای  | مثال  |
|------|-----------------------------------|---|---|
| ۱    | مربع مجموع دوجمله‌ای              | $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$                     | $(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$                          |
| ۲    | مربع تفاضل دوجمله‌ای              | $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$                     | $(\sqrt{x}-y)^2 = x - 2\sqrt{x}y + y^2$           |
| ۳    | مزدوج                             | $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$                        | $(x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = x^4 - y^4$              |
| ۴    | جمله مشترک                        | $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$                | $(x+2)(x-5) = x^2 - 3x - 10$                      |
| ۵    | مربع سه‌جمله‌ای                   | $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ | $(x+y-2z)^2 = x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy - 4xz - 4yz$ |
| ۶    | مکعب مجموع دوجمله‌ای              | $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$           | $(x+2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$                  |
| ۷    | مکعب تفاضل دوجمله‌ای              | $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$           | $(x-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$                  |
| ۸    | مجموع مکعب دوجمله‌ای              | $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$             | $x^3 + 8 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$                   |
| ۹    | تفاضل مکعب دوجمله‌ای (چاق و لاغر) | $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$             | $27x^3 - y^3 = (3x-y)(9x^2 + 3xy + y^2)$          |

| ردیف | نام یا شهرت                     | اتحادهای فرعی                    | مثال   |
|------|---------------------------------|----------------------------------|--|
| ۱۰   | اتحاد فرعی مربع دوجمله‌ای       | $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$        | $(x+\frac{1}{x})^2 - (x-\frac{1}{x})^2 = 4$                  |
| ۱۱   | اتحاد فرعی مکعب مجموع دوجمله‌ای | $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$ | $x^3 + \frac{1}{x^3} = (x+\frac{1}{x})^3 - 3(x+\frac{1}{x})$ |
| ۱۲   | اتحاد فرعی مکعب تفاضل دوجمله‌ای | $a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$ | $x^3 - \frac{1}{x^3} = (x-\frac{1}{x})^3 + 3(x-\frac{1}{x})$ |
| ۱۳   | اتحاد فرعی مربع دوجمله‌ای       | $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$      | $9y^2 + 4 = (3y+2)^2 - 12y$                                  |
| ۱۴   | اتحاد فرعی مربع دوجمله‌ای       | $a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$      | $9y^2 + 4 = (3y-2)^2 + 12y$                                  |

**مثال:** اگر  $4x^2 + 4xy + y^2 = 0$  باشد، حاصل  $\frac{x}{y}$  (با شرط  $y \neq 0$ ) را بیابید.

پاسخ: روش اول عبارت  $4x^2 + 4xy + y^2$  مربع مجموع دوجمله‌ای است.

$$4x^2 + 4xy + y^2 = 0 \Rightarrow (2x+y)^2 = 0 \Rightarrow 2x+y=0 \Rightarrow 2x=-y$$

$$\frac{2x}{2y} = \frac{-y}{2y} \Rightarrow \frac{x}{y} = -\frac{1}{2}$$

طرفین را بر ۲y تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{x}{y} = \frac{x}{-2x} = -\frac{1}{2}$$

روش دوم بعد از به دست آوردن رابطه بین x و y یعنی  $y = -2x$ ، خواسته مسئله را محاسبه می‌کنیم:

دقت کنید که چون y مخالف صفر است، پس مقدار x نیز مخالف صفر بوده و می‌توان آن را از صورت و مخرج حذف کرد.





Ⓢ تست: اگر  $x + \frac{1}{x} = 3$  باشد، آن گاه  $x^2 + \frac{1}{x^2}$  کدام است؟

- ۱۶ (۱)      ۱۷ (۲)      ۱۸ (۳)      ۱۹ (۴)

پاسخ: **گزینه ۳** روش اول این تست، یکی از مشهورترین سؤالات در مورد اتحادهاست. در این گونه سؤالات معمولاً حاصل ضرب دو جمله عبارت داده شده، مقدار ثابتی است به عنوان مثال در این سؤال  $x(\frac{1}{x}) = 1$  است. این سؤالات را معمولاً به کمک اتحادهای فرعی حل می‌کنیم:

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab(a+b)$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = (x + \frac{1}{x})^2 - 2x \times \frac{1}{x} (x + \frac{1}{x}) \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = (x + \frac{1}{x})^2 - 2(x + \frac{1}{x})$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = (3)^2 - 2(3) = 18 \quad \text{به جای } x + \frac{1}{x} \text{ مقدار عددی آن، یعنی ۳ را جای گذاری می‌کنیم:}$$

روش دوم اگر فرمول مربوط به اتحاد فرعی را به خاطر نداشتید می‌توانید از این روش استفاده کنید. با توجه به این که در خواسته مسئله  $x$  و  $\frac{1}{x}$  هر دو دارای توان ۳ هستند، پس طرفین معادله  $x + \frac{1}{x} = 3$  را به توان ۳ می‌رسانیم:

$$(x + \frac{1}{x})^3 = 3^3 \xrightarrow{\text{اتحاد مکعب دو جمله‌ای}} x^3 + 3x^2(\frac{1}{x}) + 3x(\frac{1}{x^2}) + \frac{1}{x^3} = 27$$

$$x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} = 27 \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = 27 - 3(x + \frac{1}{x}) = 18$$

Ⓢ اگر  $x^2 + y^2 + z^2 + 25z^2 - 2x + 2y - z + 3 = 0$  باشد، مقدار عددی  $x + y + z$  کدام است؟

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)

پاسخ: **گزینه ۲** این عبارت حتماً به صورت مجموع چند مربع کامل درمی‌آید. هر کدام از پرانتزها برای مربع کامل شدن به عدد ۱ نیاز دارند. عدد ۳ را به صورت  $1+1+1$  می‌نویسیم و هر کدام را وارد یکی از پرانتزها می‌کنیم:

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 2y + 1) + (25z^2 - z + 1) = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 + (5z-1)^2 = 0$$

مجموع چند عبارت نامنفی، برابر صفر است، پس هر کدام از عبارتها باید صفر شوند.

$$(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x=1, (y+1)^2 = 0 \Rightarrow y=-1, (5z-1)^2 = 0 \Rightarrow z=\frac{1}{5}$$

$$x+y+z=2$$



Ⓢ حاصل عبارت  $\frac{(x^2 + \frac{1}{x^2})(x^6 + \frac{1}{x^6})(x^{12} + \frac{1}{x^{12}})}{x^2 - \frac{1}{x^2}}$  به ازای  $x = \sqrt[6]{2}$  کدام است؟

- $\frac{16}{255}$  (۴)       $\frac{255}{8}$  (۳)       $\frac{85}{16}$  (۲)       $\frac{85}{8}$  (۱)

پاسخ: **گزینه ۳** صورت و مخرج را در  $x^2 - \frac{1}{x^2}$  ضرب می‌کنیم تا صورت کسر تبدیل به اتحادهای مزدوج زنجیره‌ای شود:

$$\frac{(x^2 - \frac{1}{x^2})(x^2 + \frac{1}{x^2})(x^6 + \frac{1}{x^6})(x^{12} + \frac{1}{x^{12}})}{(x^2 - \frac{1}{x^2})(x^2 - \frac{1}{x^2})} = \frac{(x^2 + \frac{1}{x^2})(x^6 + \frac{1}{x^6})(x^{12} + \frac{1}{x^{12}})}{(x^2 - \frac{1}{x^2})^2}$$

$$= \frac{(x^{12} - \frac{1}{x^{12}})(x^{12} + \frac{1}{x^{12}})}{(x^2 - \frac{1}{x^2})^2} = \frac{x^{24} - \frac{1}{x^{24}}}{x^6 + \frac{1}{x^6} - 2}$$

$$\frac{(\sqrt[6]{2})^{24} - \frac{1}{(\sqrt[6]{2})^{24}}}{(\sqrt[6]{2})^6 + \frac{1}{(\sqrt[6]{2})^6} - 2} = \frac{2^4 - \frac{1}{2^4}}{2 + \frac{1}{2} - 2} = \frac{16 - \frac{1}{16}}{\frac{1}{2}} = \frac{255}{8}$$

حال به جای  $x$  مقدار  $\sqrt[6]{2}$  را قرار می‌دهیم:

**تست:** اگر  $x = (\sqrt{2} + 1)^{\frac{1}{2}} + (\sqrt{2} - 1)^{\frac{1}{2}}$  باشد، حاصل  $x(x^2 - 3)$  کدام است؟

- (۱)  $2\sqrt{2}$  (۲)  $-2\sqrt{2}$  (۳)  $\sqrt{2}$  (۴)  $-\sqrt{2}$

**پاسخ:** **گزینه ۱** چون  $x(x^2 - 3) = x^3 - 3x$ ، پس باید حاصل  $x^3$  را محاسبه کنیم. اگر دقت کنید دو عدد  $\sqrt{2} - 1$  و  $\sqrt{2} + 1$  معکوس هم هستند (ضرب آن‌ها برابر ۱ است).

با فرض این که  $a = (\sqrt{2} + 1)^{\frac{1}{2}}$  و  $\frac{1}{a} = (\sqrt{2} - 1)^{\frac{1}{2}}$  باشند، طرفین معادله را به توان ۳ می‌رسانیم:

$$x = a + \frac{1}{a} \Rightarrow x^3 = a^3 + 3a^2\left(\frac{1}{a}\right) + 3a\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{a}\right)^3 \Rightarrow x^3 = a^3 + \left(\frac{1}{a}\right)^3 + 3\left(a + \frac{1}{a}\right)$$

$$x^3 = a^3 + \left(\frac{1}{a}\right)^3 + 3x \Rightarrow x^3 - 3x = a^3 + \frac{1}{a^3}$$

توجه کنید که  $a + \frac{1}{a}$  همان  $x$  است.

به جای  $a$  و  $\frac{1}{a}$  به ترتیب  $(\sqrt{2} + 1)^{\frac{1}{2}}$  و  $(\sqrt{2} - 1)^{\frac{1}{2}}$  را جای گذاری می‌کنیم:

$$x^3 - 3x = x(x^2 - 3) = \left((\sqrt{2} + 1)^{\frac{1}{2}}\right)^3 + \left((\sqrt{2} - 1)^{\frac{1}{2}}\right)^3 = (\sqrt{2} + 1) + (\sqrt{2} - 1) = 2\sqrt{2}$$

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz)$$

اتحاد اویلر عبارت است از:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{4}((x - y)^2 + (y - z)^2 + (x - z)^2)$$

همین‌طور می‌توان ثابت نمود که:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z) \times \frac{1}{4}((x - y)^2 + (y - z)^2 + (x - z)^2)$$

بنابراین اتحاد اویلر را به صورت روبه‌رو نیز می‌توان نوشت:

در اتحاد اویلر اگر  $x + y + z = 0$  باشد، آن‌گاه  $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$  است.

**تست:** حاصل عبارت  $(2 + \sqrt{3})^2 - (2\sqrt{3})^2 - (2 - \sqrt{3})^2$  کدام است؟

- (۱)  $-3\sqrt{3}$  (۲)  $3\sqrt{3}$  (۳)  $-6\sqrt{3}$  (۴)  $6\sqrt{3}$

**پاسخ:** **گزینه ۴** عبارت را به صورت اتحاد اویلر درمی‌آوریم:

همان‌طور که می‌بینید مجموع  $2 + \sqrt{3}$ ،  $-2\sqrt{3}$  و  $-2 + \sqrt{3}$  برابر صفر است، پس طبق نتیجه گرفته شده از اتحاد اویلر داریم:

$$\begin{aligned} (2 + \sqrt{3})^2 + (-2\sqrt{3})^2 + (-2 + \sqrt{3})^2 &= 3(2 + \sqrt{3})(-2\sqrt{3})(-2 + \sqrt{3}) = 3(2 + \sqrt{3})(2\sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) \\ &= 6\sqrt{3}(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 6\sqrt{3}(4 - 3) = 6\sqrt{3} \end{aligned}$$

## تجزیه

**شمارنده‌های یک عدد:** اعدادی هستند که عدد فرض شده بر آن‌ها بخش‌پذیر باشد، به عنوان نمونه اعداد  $\{1, 2, 3, 6\}$  شمارنده‌های عدد ۶ می‌باشند. **مضارب یک عدد:** حاصل ضرب آن عدد در سایر اعداد صحیح می‌باشد، به عنوان نمونه عدد ۲۰ یکی از مضارب ۵ است.

**تجزیه:** هرگاه عبارتی را به صورت حاصل ضرب شمارنده‌هایش بنویسیم آن را تجزیه کرده‌ایم.

در این مبحث، به تعدادی از روش‌های مرسوم در تجزیه اشاره می‌کنیم.

### ۱) استفاده از فاکتورگیری ساده

یکی از ساده‌ترین روش‌های تجزیه، فاکتور گرفتن از عامل مشترک چند عبارت است، مانند  $x^3 - 2x^2 = x^2(x - 2)$ . یادتان باشد زمانی از این روش استفاده می‌کنیم که عبارت مقدار ثابت نداشته باشد (تجزیه به شکل  $x^2 - 2x^2 + 1 = x^2(x - 2) + 1$  ارزشی ندارد).

### ۲) استفاده از اتحاد مزدوج

در سؤالاتی که تفاضل دو مربع کامل را داشته باشیم، بهترین کار استفاده از اتحاد مزدوج است.



① **تست:** در تجزیه عبارت  $16x^4 - y^4$  کدام عامل وجود ندارد؟

پاسخ: **گزینه ۱** برای تجزیه، ابتدا عبارت را به توان دو تبدیل می‌کنیم:

$$16x^4 - y^4 = (4x^2)^2 - (y^2)^2 = (4x^2 - y^2)(4x^2 + y^2)$$

مجدداً عبارت  $4x^2 - y^2$  تفاضل دو جمله مربع کامل است، پس:

$$4x^2 - y^2 = (2x)^2 - (y)^2 = (2x - y)(2x + y)$$

بنابراین تجزیه کامل  $16x^4 - y^4$  عبارت است از:

$$(2x - y)(2x + y)(4x^2 + y^2)$$

### ③ استفاده از اتحاد جمله مشترک

معمولاً در سه‌جمله‌ای‌هایی که درجه دوم باشند از اتحاد  $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$  کمک می‌گیریم، مانند:

$$x^2 + 5x + 4 = x^2 + (4+1)x + 1 \times 4 = (x+1)(x+4)$$

① **تست:** کدام عامل در تجزیه  $x^2 - xy - 6y^2$  وجود دارد؟

پاسخ: **گزینه ۴** عبارت  $x^2 - xy - 6y^2$  را می‌توان به صورت  $x^2 + (2y - 3y)x + (2y)(-3y)$  نوشت و بعد آن را به کمک اتحاد جمله مشترک به صورت  $(x+2y)(x-3y)$  تجزیه نمود.

در این تجزیه این سؤال پیش می‌آید که چطور فهمیدید که دو عبارت، قابل تجزیه به  $2y$  و  $-3y$  است؟

اتحاد جمله مشترک به صورت (حاصل ضرب  $x$  + (مجموع  $x^2$ ) می‌باشد، پس در این سؤال  $-6y^2$  حاصل ضرب دو جمله است، پس این دو عدد  $(2y)$  یا  $(-3y)$  یا  $(2y)$  و  $(-3y)$  و  $(y)$  و  $(-6y)$  می‌باشند. اگر این زوج‌ها را با هم جمع کنیم، فقط دو زوج  $2y$  و  $-3y$  هستند که مجموع آن‌ها  $-y$  می‌شود که در عبارت اولیه ضریب  $x$  است.

### ④ استفاده از اتحادهای جاق و لاغر

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

در تفاضل و مجموع دو مکعب می‌توانیم از این اتحادها کمک بگیریم:

① **تست:** کدام عامل در تجزیه  $x^6 - 64y^6$  موجود نیست؟

پاسخ: **گزینه ۴** ابتدا به کمک اتحاد مزدوج توان ۶ را به توان ۳ تبدیل می‌کنیم:

$$x^6 - 64y^6 = (x^2)^3 - (4y^2)^3 = (x^2 - 4y^2)(x^2 + 4y^2)$$

حال می‌توان به کمک اتحادهای جاق و لاغر هر پرانتز را جداگانه تجزیه کرد:

$$(x^2 - 4y^2)(x^2 + 4y^2) = [(x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)] \times [(x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2)]$$

### ⑤ استفاده از تجزیه به کمک فاکتورگیری مضاعف

معمولاً برای تجزیه چهارجمله‌ای‌ها از این روش استفاده می‌کنیم به این ترتیب که آن‌ها را دو تا دو تا کنار هم می‌گذاریم و از عامل مشترک آن‌ها فاکتور می‌گیریم تا در هر دو زوج به عوامل یکسانی دست پیدا کنیم. در نهایت با فاکتورگیری دوم از این عوامل یکسان، عبارت را تجزیه می‌کنیم.

① **تست:** عامل درجه اول عبارت  $x^3 - 6x^2 + 6x - 36$ ، پس از تجزیه کامل کدام است؟

پاسخ: **گزینه ۱** ابتدا چهارجمله‌ای را دو به دو دسته‌بندی می‌کنیم:

$$x^3 - 6x^2 + 6x - 36 = (x^3 - 6x^2) + (6x - 36) = x^2(x - 6) + 6(x - 6) = (x - 6)(x^2 + 6)$$

گاهی سؤال می‌شود که چرا زوج‌ها را این‌طور انتخاب کردید، مثلاً در این سؤال  $x^3$  و  $6x$  را با هم زوج نگرفتید. بگذارید این‌ها را زوج بگیریم و ببینیم چه می‌شود:

$$(x^3 + 6x) - (6x^2 + 36) = x(x^2 + 6) - 6(x^2 + 6) = (x^2 + 6)(x - 6)$$

می‌بینید که باز هم، همان شد. آیا این اتفاق همیشه می‌افتد؟

خیر، گاهی از طریق آزمون و خطا باید بفهمیم که زوج انتخابی درست است یا خیر.





## مخرج مشترک

برای مخرج مشترک‌گیری از کسرها، باید ابتدا مخرج‌های آن‌ها را تا حد امکان تجزیه کنیم، سپس مخرج مشترک را با ضرب عوامل غیرمشترک در عوامل مشترک با توان بیشتر (ساختن ک.م.م) به دست آوریم.

**تست:** حاصل عبارت  $\frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{x^2+2x^2-3}$  به صورت کسر  $\frac{A}{B}$  درآمده است که قابل ساده کردن نیست، مقدار A به ازای  $x=1$

کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۶ (۱)

پاسخ: **گزینه ۱** ابتدا هر یک از مخرج‌ها را تجزیه می‌کنیم:

$$x^2-1 = (x^2)^2 - 1^2 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$$

$$x^2+2x^2-3 = (x^2)^2 + 2(x^2) - 3 = (x^2+3)(x^2-1) = (x^2+3)(x-1)(x+1)$$

برای ساختن مخرج مشترک، عوامل مشترک با توان بیشتر را در عوامل غیرمشترک ضرب می‌کنیم.

عوامل مشترک:  $(x-1)$ ،  $(x+1)$  و عوامل غیرمشترک:  $(x^2+3)$ ،  $(x^2+1)$

مخرج مشترک:  $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^2+3)$

$$\frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{x^2+2x^2-3} = \frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} + \frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+3)}$$

بنابراین:

$$= \frac{1 \times (x^2+3)}{(x-1)(x+1)(x^2+3)(x^2+1)} + \frac{1 \times (x^2+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+3)(x^2+1)}$$

حال مخرج مشترک می‌گیریم:

$$= \frac{(x^2+3) + (x^2+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+3)(x^2+1)}$$

در نتیجه کسر به صورت زیر درمی‌آید:

صورت کسر برابر  $2x^2+4$  است و به‌ازای  $x=1$  برابر ۶ می‌شود.



## پرسش‌های چهارگزینه‌ای

اتحادهای



۱. محیط مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۳۴ واحد و طول وتر آن ۱۵ واحد است. مساحت آن کدام است؟

- ۳۲ (۱)      ۳۴ (۲)      ۳۶ (۳)      ۴۰ (۴)

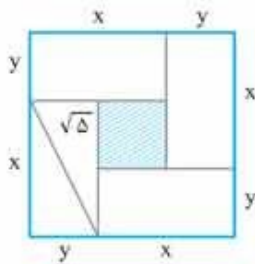
۲. در شکل مقابل مساحت ناحیه‌ی هاشور خورده کدام است؟

(1)  $(x - y)^2$

(2)  $(x - 2y)^2$

(3)  $(x + y)^2$

(4)  $(x + 2y)^2$



۳. در صورتی که حاصل  $999995^2$  را به صورت  $10^m - 10^n + 25$  بنویسیم، مقدار  $m + n$  کدام است؟

- ۱۷ (۱)      ۱۹ (۲)      ۲۱ (۳)      ۲۳ (۴)

۴. حاصل عبارت  $(a+b)^2 + (b+c)^2 + (a+c)^2 - (a+b+c)^2$  برابر است با:

- (1)  $a^2 + b^2 + c^2$       (2)  $ab + bc + ac$       (3)  $(a+b+c)^2$       (4)  $2(ab+bc+ac)$

۵. اگر  $x = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$  باشد، حاصل  $x^2 - 2x + \frac{3}{2}$  کدام است؟

- (1) ۲      (2)  $\sqrt{2}$       (3) ۱      (4) -۱

۶. اگر  $x = 2 + \sqrt{3}$  باشد، حاصل  $x^2 - 4x$  کدام است؟

- (1) -۲      (2) -۱      (3) ۱      (4) ۲

۷. عبارت  $4x^2 + Ax + \frac{9}{4}$  مربع کامل است. A کدام می‌تواند باشد؟

- (1) ۸      (2) ۱۲      (3) ۳      (4) ۶

۸. به عبارت  $4x^2 - 10x + 9$  کدام جمله افزوده شود تا حاصل به صورت مربع کامل دوجمله‌ای باشد؟

- (1)  $2x$       (2)  $4x$       (3)  $-4x$       (4)  $-2x$

۹. با افزودن کدام عدد به سه جمله‌ای  $4x^2 + 6x + 2$  حاصل به صورت مجذور دوجمله‌ای نوشته می‌شود؟

- (1)  $\frac{1}{4}$       (2)  $\frac{3}{4}$       (3) ۲      (4) ۷

۱۰. اگر  $a^2 + b^2 + c^2 + 2 = 2(a+b+c)$  باشد، مقدار a کدام است؟

- (1) ۱      (2) ۲      (3) ۳      (4) ۴

۱۱. از رابطه  $a^2 + 5b^2 - 2ab - 2b + 1 = 0$  مقدار a کدام است؟

- (1) -۲      (2) -۱      (3) ۱      (4) ۲

۱۲. اگر  $a^2 + b^2 = 2a + 2b - 2$  باشد، حاصل  $(a+b)^2$  کدام است؟

- (1) ۹      (2) ۸      (3) ۱۶      (4) ۳۲

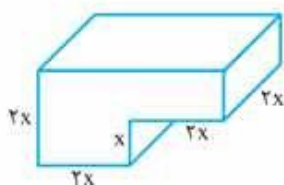
۱۳. در شکل مقابل یک منبع آب به گنجایش ۱۵۰۰ لیتر رسم شده است. x چند متر است؟

(1)  $\frac{1}{5}$

(2)  $\frac{1}{4}$

(3)  $\frac{1}{5}$

(4)  $\frac{1}{6}$



(تمرین کتاب درسی)

۴۸۹۹.۹۹۶۰۰۴ (۴)

۴۹۹۹.۹۹۷۰۰۴ (۳)

۱۴. حاصل  $۹۹۸^۲$  و  $۷۱ \times ۶۹$  به ترتیب برابر است با:

۴۹۹۹.۹۹۶۰۰۴ (۲)      ۴۸۹۹.۹۹۷۰۰۴ (۱)

۱۵. حاصل عبارت  $(1-x)(1+x)(x^2+2)$  کدام است؟

$x^4 + x^2 - 2$  (۴)

$x^4 + 3x^2 - 2$  (۳)

$-x^4 - x^2 + 2$  (۲)       $-x^4 - 3x^2 + 2$  (۱)

۱۶. حاصل  $(x - \frac{1}{y})(8x^2 + 2)(2x + 1)$  کدام است؟

$16x^4 - 1$  (۴)

$64x^4 - 1$  (۳)

$\frac{1}{y}(16x^4 - 1)$  (۲)       $4x^4 - 1$  (۱)

۱۷. اگر  $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-7} = 5$  باشد، حاصل  $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-7}$  کدام است؟

$\frac{1}{2}$  (۴)

۲ (۳)

$\frac{1}{5}$  (۲)      ۱ (۱)

۱۸. حاصل  $(1 - \frac{1}{3})(1 + \frac{1}{3})(1 + \frac{1}{9})(1 + \frac{1}{81}) + \frac{1}{81 \times 81}$  کدام است؟

$\frac{4}{3}$  (۴)

۱ (۳)

$\frac{3}{2}$  (۲)       $\frac{2}{3}$  (۱)

۱۹. حاصل عبارت روبه‌رو کدام است؟

$(1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{2^2})(1 + \frac{1}{2^4})(1 + \frac{1}{2^8})(1 + \frac{1}{2^{16}})$

$2 - 2^{-2^1}$  (۴)

$2^{2^1} - 2$  (۳)

$\frac{1}{2^{2^1}} - 2$  (۲)       $2 - 2^{2^1}$  (۱)

۲۰. حاصل عبارت  $A = (2+1)(2^2+1)(2^4+1)...(2^{2^k}+1)$  برابر است با:

$2^{128} - 1$  (۴)

$2^{256} - 1$  (۳)

$2^{128} + 1$  (۲)       $2^{256} + 1$  (۱)

(ریاضی ۹۵)

۲۱. اگر  $\alpha = \sqrt[3]{3\sqrt{2}-4}$  و  $\beta = \sqrt[3]{3\sqrt{2}+4}$  باشند، حاصل  $(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta)(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta)$  کدام است؟

$7\sqrt{2}$  (۴)

$6\sqrt{2}$  (۳)

۸ (۲)      ۶ (۱)

۲۲. حاصل عبارت جبری  $(2x+1)(4x^2-2x+1)$  به‌ازای  $x = \sqrt[3]{2}$  کدام است؟

۲۱ (۴)

۱۷ (۳)

۱۴ (۲)      ۷ (۱)

۲۳. حاصل عبارت  $(x-1)(x^2+x+1)(x^2+1)$  کدام است؟

$x^6 - 1$  (۴)

$x^3 - 1$  (۳)

$(x-1)^2(x^2+1)$  (۲)       $(x-1)^2$  (۱)

۲۴. حاصل  $(x+1)(-x+x^2+1) - (x-1)(x^2+x+1)$  کدام است؟

۲ (۴)

$2x^2$  (۳)

-۲ (۲)      صفر (۱)

۲۵. حاصل عبارت  $(a^2-1)(a^{12}+1)(a^6+1)(a^4+a^2+1)$  برابر است با:

$a^{24} - 1$  (۴)

$a^{16} - 1$  (۳)

$a^8 - 1$  (۲)       $a^4 - 1$  (۱)

۲۶. حاصل عبارت  $\frac{(x^3 + \frac{1}{x^3})(x^6 + \frac{1}{x^6})(x^{12} + \frac{1}{x^{12}})}{x^3 - \frac{1}{x^3}}$  به‌ازای  $x = \sqrt[6]{2}$  کدام است؟

$\frac{255}{16}$  (۴)

$\frac{255}{8}$  (۳)

$\frac{15}{16}$  (۲)       $\frac{15}{8}$  (۱)

۲۷. اگر  $\sqrt{8} = x^2 + \frac{1}{x^2}$  باشد، حاصل  $x^6 - \frac{1}{x^6}$  کدام می‌تواند باشد؟

۱۸ (۴)

۱۶ (۳)

۱۴ (۲)      ۱۲ (۱)

۲۸. حاصل عبارت  $\frac{x^2+y^2+z^2-3xyz}{x+y+z}$  به شرط  $x+y+z \neq 0$  برابر کدام است؟

$\frac{(x-y)^2}{2} + \frac{(x-z)^2}{2} + \frac{(y-z)^2}{2}$  (۲)

$(x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2$  (۱)

$\frac{(x+y)^2}{2} + \frac{(x+z)^2}{2} + \frac{(y+z)^2}{2}$  (۴)

$(x+y)^2 + (x+z)^2 + (y+z)^2$  (۳)

۲۹. حاصل  $(2 + \sqrt{3})^2 - (2\sqrt{3})^2 - (2 - \sqrt{3})^2$  کدام است؟

- (۱)  $-2\sqrt{3}$  (۲)  $3\sqrt{3}$  (۳)  $-6\sqrt{3}$  (۴)  $6\sqrt{3}$

۳۰. حاصل عبارت  $(a-2)(a-1)a(a+1)+1$  کدام است؟

- (۱)  $(a^2+a+1)^2$  (۲)  $(a^2-a-1)^2$  (۳)  $(a^2+3a-1)^2$  (۴)  $(a^2-3a+1)^2$

۳۱. حاصل عبارت  $a(a+1)(a+2)(a+3)+1$  کدام است؟

- (۱)  $(a+1)^4$  (۲)  $(a^2+3a+1)^2$  (۳)  $(a^2+1)^2$  (۴)  $(a^2+a+1)^2$

تجزیه

۳۲. اگر  $A^2 - B^2 = 91$  و  $A + B = 7$  باشند، حال عدد  $A \times B$  کدام است؟

- (۱)  $-30$  (۲)  $-18$  (۳)  $12$  (۴)  $20$

۳۳. اگر  $4a^2 - b^2 = 91$  و  $2a + b = 7$  باشند، مقدار  $a + b$  کدام است؟

- (۱)  $2$  (۲)  $3$  (۳)  $4$  (۴)  $5$

۳۴. اگر  $a - \frac{1}{a} = \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}$  باشد، حاصل عبارت  $a + \frac{1}{a}$  کدام است؟ ( $a > 0, a \neq 1$ )

- (۱)  $3$  (۲)  $\sqrt{3}$  (۳)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  (۴)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۳۵. در عبارت  $(1-x^{16}) + \dots = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)$  به جای نقطه چین کدام عامل قرار می‌گیرد؟

- (۱)  $1-x$  (۲)  $1-x^2$  (۳)  $1-x^4$  (۴)  $1-x^8$

۳۶. حاصل  $(\sqrt{3} + x)^2$  کدام است؟

- (۱)  $3\sqrt{3} - 9x + 3x^2 - x^2$  (۲)  $3\sqrt{3} + 9x + 3x^2 + x^2$   
(۳)  $3\sqrt{3} + 9x + 2\sqrt{3}x^2 + x^2$  (۴)  $3\sqrt{3} - 9x + 2\sqrt{3}x^2 - x^2$

۳۷. حاصل  $99^2$  کدام است؟

- (۱)  $972999$  (۲)  $970299$  (۳)  $972990$  (۴)  $997029$

۳۸. اگر  $x = \frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}}$  باشد، حاصل  $x^2 - 2x$  کدام است؟

- (۱)  $6 - 7\sqrt{2}$  (۲)  $2 + 3\sqrt{2}$  (۳)  $6 + 7\sqrt{2}$  (۴)  $5 - 3\sqrt{2}$

۳۹. اگر  $x = \frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}}$  باشد، حاصل  $x^2 - 5x$  کدام است؟

- (۱)  $1$  (۲)  $\sqrt{2}$  (۳)  $2\sqrt{2}$  (۴)  $2$

۴۰. اگر  $xy = -72$  و  $x + y = 6$  باشد، حاصل  $x^2 + y^2$  کدام است؟

- (۱)  $1215$  (۲)  $1416$  (۳)  $1512$  (۴)  $1614$

۴۱. اگر داشته باشیم  $\begin{cases} x+y=10 \\ x^2+y^2=58 \end{cases}$ ، مقدار  $x^2 + y^3$  کدام است؟

- (۱)  $370$  (۲)  $360$  (۳)  $385$  (۴)  $358$

۴۲. حاصل عبارت  $A = (x - \sqrt[3]{2})^2 (x^2 + \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4})^2$  به ازای  $x = \sqrt{\sqrt{2} + 2}$  کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{2} + 2$  (۲)  $4$  (۳)  $\sqrt{2} + 4$  (۴)  $2$

۴۳. کدام دو جمله‌ای در تجزیه عبارت  $2x^3 + 2x^2 - 4x$  وجود ندارد؟

- (۱)  $x+1$  (۲)  $x-1$  (۳)  $x+2$  (۴)  $x^2-x$

۴۴. در تجزیه عبارت  $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - 6, x \neq 0$  کدام عامل وجود دارد؟

- (۱)  $\frac{1}{x} + 1$  (۲)  $\frac{1}{x} - 3$  (۳)  $\frac{1}{x} - 1$  (۴)  $\frac{1}{x} + 3$





۴۵. کدام عامل در تجزیه عبارت جبری  $x^5 - 81x$  وجود ندارد؟

- (۱)  $x^2 + 9$  (۲)  $x - 9$  (۳)  $x + 3$  (۴)  $x - 3$

۴۶. در تجزیه عبارت  $4x^3 - 6x^2 + 2x$ ، کدام عامل وجود دارد؟

- (۱)  $2x + 1$  (۲)  $2x - 1$  (۳)  $x + 1$  (۴)  $x + 2$

۴۷. چند جمله‌ای  $x^3 + x^2 + x + 1$  بر کدام عبارت بخش‌پذیر است؟

- (۱)  $x^2 + x$  (۲)  $x^2 - x + 1$  (۳)  $x^2 + x + 1$  (۴)  $x^2 - 1$

۴۸. در تجزیه عبارت  $2x^3 - x^2 - 8x + 4$  به عوامل اول، کدام دو جمله‌ای وجود ندارد؟

- (۱)  $x - 2$  (۲)  $2x - 1$  (۳)  $x + 2$  (۴)  $2x + 1$

۴۹. یکی از عامل‌های حاصل از تجزیه  $x^4 + 3x^2 - 4$  کدام عبارت است؟

- (۱)  $x^2 + 4$  (۲)  $x + 3$  (۳)  $x^2 + 1$  (۴)  $x + 2$

۵۰. یکی از عامل‌های  $y^4 - 3y^2 + 1$  در کدام گزینه آمده است؟

- (۱)  $y^2 + y - 1$  (۲)  $y^2 + y + 1$  (۳)  $y^2 - 2y - 1$  (۴)  $y^2 + 2y + 1$

۵۱. در تجزیه  $y^5 + 2y^3 - 24y$  کدام عامل وجود ندارد؟

- (۱)  $y^2 + 6$  (۲)  $y - 2$  (۳)  $y + 2$  (۴)  $y - 4$

۵۲. در تجزیه  $a^2 - c^2 + b^2 - 2ab$  کدام عامل وجود دارد؟

- (۱)  $a + b + c$  (۲)  $a - b - c$  (۳)  $a - c + b$  (۴)  $c - a - b$

۵۳. در تجزیه  $fa^2 - fa - b^2 - fb - 3$  کدام عامل وجود دارد؟

- (۱)  $2a + b + 3$  (۲)  $2a - b + 1$  (۳)  $2a + b - 3$  (۴)  $2a + b + 1$

۵۴. در تجزیه عبارت  $x^3 - 2xy + x^2y - 2y^2$  کدام عامل وجود دارد؟

- (۱)  $x^2 + 2y$  (۲)  $x - y$  (۳)  $x^2 - 2y$  (۴)  $2x + y^2$

۵۵. عدد  $(63)^2 + (97)^2$  الزاماً بر کدام عدد بخش‌پذیر است؟

- (۱) ۳۴ (۲) ۱۰۲ (۳) ۱۴۰ (۴) ۱۶۰

۵۶. مقدار  $A = \frac{99^3 - 1}{99^2 + 100} \times \frac{99^3 + 1}{99^2 - 98}$  برابر عدد کدام گزینه است؟

- (۱) ۹۶۰۰ (۲) ۹۸۰۰ (۳) ۲۰۰۰ (۴) ۲۰۲۰

۵۷. در تجزیه  $8a^4 - a^2b^2 + 8a^2b^2 - b^4$  کدام عامل وجود ندارد؟

- (۱)  $a^2 + b^2$  (۲)  $8a^2 + 2ab + b^2$  (۳)  $2a - b$  (۴)  $2a + b$

۵۸. اگر  $a^2 + b^2 = 2$  باشد، حاصل عبارت  $\frac{b^2 + b + 1}{a^2 + a + 1}$  برابر کدام است؟ ( $a, b \neq 1$ )

- (۱)  $\frac{1-a}{b-1}$  (۲)  $\frac{b-1}{a-1}$  (۳)  $\frac{a-1}{b-1}$  (۴)  $\frac{1-b}{a-1}$

۵۹. اگر  $x + 1$  یکی از عامل‌های  $2x^2 - x^2 - 5x - 2$  باشد، دو عامل دیگر در کدام گزینه آمده است؟

- (۱)  $(2x - 1), (x - 2)$  (۲)  $(2x - 1), (x + 2)$  (۳)  $(2x + 1), (x + 2)$  (۴)  $(2x + 1), (x - 2)$

۶۰. عبارت  $6x^2 + 5x + 1$  یک عامل  $6x^4 + 5x^3 - 5x^2 - 5x - 1$  است. اگر عامل دیگر به صورت  $(x + a)(x + b)$  باشد،  $a - b$  کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۶۱. در تجزیه عبارت  $4x^4 + 4x^3 + x^2 - 1$  کدام عامل وجود ندارد؟

- (۱)  $2x^2 + x + 1$  (۲)  $2x^2 + x - 1$  (۳)  $4x^2 + x + 1$  (۴)  $4x^2 + x - 1$

۶۲. در تجزیه عبارت  $x^2 + 8xy + 16y^2 - 2x - 12y - 4 = (x + A - 4)(x + B + 1)$  حاصل  $A + B$  کدام است؟

- (۱) صفر (۲)  $4y$  (۳) ۴ (۴)  $4y$

۶۳. در تجزیه عبارت  $a(a - 3)(a - 4) - 12a + 36$ ، کدام عامل ضرب وجود ندارد؟

- (۱)  $a - 6$  (۲)  $a - 3$  (۳)  $a - 2$  (۴)  $a + 2$

۶۴ در حاصل عبارت  $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)+1$ ، کدام عامل ضرب وجود دارد؟

(۴)  $x^2+7x+11$  (۳)  $-x^2-14x-61$  (۲)  $x^2-7x+11$  (۱)  $x^2+14x+61$

۶۵ ساده شده عبارت  $A = \frac{xy^2+y^2+y+1-x}{y^2+y+1}$  کدام است؟

(۴)  $y-x$  (۳)  $xy-x+1$  (۲)  $y^2-x$  (۱)  $xy^2-1$

مخرج مشترک



۶۶ حاصل  $\frac{a-8}{a^2-a-6} + \frac{a-2}{a-3}$  کدام است؟

(۴)  $\frac{a+4}{a+2}$  (۳)  $\frac{a+3}{a+2}$  (۲)  $\frac{a-2}{a-3}$  (۱)  $\frac{a-4}{a-3}$

۶۷ حاصل  $\frac{x^2-3x}{x-4} + \frac{5x-16}{4-x}$  برابر کدام گزینه است؟

(۴)  $x-2$  (۳)  $x-4$  (۲)  $4-x$  (۱)  $2-x$

۶۸ حاصل عبارت  $\frac{3x(x-1)}{x^2-x-2} + \frac{x}{2-x}$  کدام است؟

(۴)  $\frac{2x}{x+1}$  (۳)  $\frac{x}{x+1}$  (۲)  $\frac{x}{x-2}$  (۱)  $\frac{2x}{x-2}$

۶۹ اگر  $\frac{a}{3x-1} + \frac{b}{3x+2} = \frac{4-3x}{9x^2+3x-2}$  برقرار باشد، مقدار  $a+b$  کدام است؟

(۴) ۲ (۳) ۱ (۲) -۲ (۱) -۱

۷۰ حاصل  $\frac{x-3}{x^2-9} + \frac{x+7}{x^2+10x+21}$  کدام است؟

(۴)  $\frac{x+3}{x-7}$  (۳)  $\frac{x-3}{x+3}$  (۲)  $\frac{1}{2}(x-3)$  (۱)  $\frac{2}{x+3}$

۷۱ حاصل عبارت  $\frac{1}{a^2-8} - \frac{1}{a^2+8}$  کدام است؟

(۴)  $\frac{-16}{a^4-64}$  (۳)  $\frac{16}{a^4-64}$  (۲)  $\frac{-16}{a^{16}-64}$  (۱)  $\frac{16}{a^{16}-64}$

۷۲ حاصل عبارت  $\frac{2}{3x-3} - \frac{x}{x^2-1} + \frac{1}{2x+2}$  کدام است؟

(۴)  $\frac{1}{6x+6}$  (۳)  $\frac{1}{6(x-1)}$  (۲)  $\frac{x}{6(x^2-1)}$  (۱)  $\frac{1}{6(x^2-1)}$

۷۳ حاصل عبارت  $\frac{a^2+ab}{a^2-ab} - \frac{a^2+2a^2b+ab^2}{a^2b-b^2}$  برابر است با:

(۴)  $\frac{a+b}{b}$  (۳)  $\frac{a+b}{a}$  (۲)  $-\frac{a+b}{b}$  (۱)  $-\frac{a+b}{a}$

۷۴ حاصل عبارت  $\frac{y-3}{y^2-4} - \frac{y+2}{y^2-4y+4} - \frac{2}{2-y}$  کدام است؟

(۴)  $\frac{y+9}{(y-2)(y+2)}$  (۳)  $\frac{2y^2+9y+6}{(y-2)^2(y+2)}$  (۲)  $\frac{y-9}{(y-2)(y+2)}$  (۱)  $\frac{2y^2-9y-6}{(y-2)^2(y+2)}$

۷۵ حاصل  $\frac{x^2}{x-y} - \frac{y^2}{x+y} - \frac{2x^2y}{x^2-y^2}$  کدام است؟

(۴)  $\frac{x}{y}$  (۳)  $x-y$  (۲)  $xy$  (۱)  $x+y$

۷۶ حاصل  $(\frac{x+3}{x^2-6x+9} - \frac{x+2}{x^2-9} - \frac{5}{3-x})(\frac{9-x^2}{5x^2+7x-3})$  کدام است؟

(۴)  $3+x$  (۳)  $\frac{1}{3+x}$  (۲)  $3-x$  (۱)  $\frac{1}{3-x}$



۷۷. برای یکی کردن مخرج کسره‌های  $A = \frac{2x-1}{x(x-1)}$  و  $B = \frac{2x+5}{(x^2-1)(x^2+2x^2)}$  صورت و مخرج کسر A در کدام عبارت باید ضرب شود؟

- (۱)  $x^2 + 4x^2 + 2x$  (۲)  $x^2 + 4x + 2$  (۳)  $x^2 + 4x^2 + 2x^2$  (۴)  $(2x-1)(x^2 + 4x^2 + 2x)$

۷۸. اگر تساوی  $\frac{1}{x^2+1} = \frac{ax+b}{x^2-x+1} + \frac{c}{x+1}$  با شرط  $x \neq -1$  یک اتحاد باشد،  $a-b+2c$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{3}$  (۲)  $-\frac{1}{3}$  (۳)  $-\frac{2}{3}$  (۴)  $\frac{2}{3}$

برای ۱۰۰٪

۷۹. اگر  $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z} = 0$  و  $x+y+z=6$  باشند، مقدار  $xyz$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۸

۸۰. اگر  $x = (\sqrt{2}+1)^{\frac{1}{3}} + (\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{3}}$  باشد، حاصل  $x(x^2-3)$  کدام است؟

- (۱)  $2\sqrt{2}$  (۲)  $-2\sqrt{2}$  (۳)  $\sqrt{2}$  (۴)  $-\sqrt{2}$

۸۱. اتحاد  $(ax-y)^2 + (bx+cy)^2 = 6\delta x^2 + 5y^2 + 2\cdot xy$ ، برای سه عدد  $a, b, c$  که  $b < c < a$  برقرار است، مقدار  $a$  کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۲

۸۲. اگر بدانیم  $a+b-c=1$  است، آن‌گاه از روابط زیر چند مورد صحیح است؟

- الف)  $a^2 + b^2 - c^2 = 1 - 2ab + 2c$  (الف)  $a^2 + b^2 - c^2 = 1 - 2ab + 2c$   
 ب)  $a^2 + b^2 - c^2 = -1 - 2ab + 2a + 2b$  (ب)  $a^2 - b^2 + c^2 = 1 + 2ac - 2b$   
 ت)  $a^2 + b^2 - c^2 = -1 - 2ab + 2a + 2b$  (ت)  $a^2 + b^2 - c^2 = -1 - 2ab + 2a + 2b$
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۸۳. اگر  $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{\delta}$  باشد، حاصل  $\frac{x^2}{x^2+1}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{25}$  (۲)  $\frac{1}{24}$  (۳)  $\frac{1}{23}$  (۴)  $\frac{1}{22}$

۸۴. حاصل عبارت  $\frac{(1-x)^{-1}(1-\sqrt{x})^{-1}(1-\sqrt[3]{x})^{-1}}{(1+\sqrt{x})^2(1+\sqrt[3]{x})}$  کدام است؟ ( $x \geq 0, x \neq 1$ )

- (۱)  $1-x$  (۲)  $(1-x)^{-2}$  (۳)  $(1-\sqrt{x})^{-2}$  (۴)  $1-\sqrt{x}$

۸۵. اگر  $a+b+c=0$  باشد که در آن  $abc \neq 0$  است، حاصل  $L$  کدام است؟

$$L = \frac{b+c}{bc}(b^2+c^2-a^2) + \frac{a+c}{ac}(a^2+c^2-b^2) + \frac{a+b}{ab}(a^2+b^2-c^2)$$

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳)  $abc$  (۴)  $a^2 + b^2 + c^2$

۸۶. چند مورد از عبارات زیر همواره صحیح است؟

الف)  $(x^2+2y+1)(x^2+4y^2+4x^2y-x^2-2y+1) = (x^2+2y)^2+1$

ب)  $(x^2-2y+1)(x^2+4y^2+2x^2y-x^2-4y+1) = x^2-(2y-1)^2$

پ)  $(x^2-2y-1)(x^2+4y^2+2x^2y-2x^2-2y+1) = (x^2-1)^2-8y^2$

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۸۷. حاصل  $(\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x}-1)$  به ازای  $x \geq 0$  کدام است؟

- (۱)  $x+1$  (۲)  $x-1$  (۳)  $x^2-1$  (۴)  $x^2+1$

۸۸. اگر  $(x-2)^2 - (x-2) + b(x-2)^2 + a(x-2) + 1 + x + 2x^2 - x^2 = 3$  به ازای تمام مقادیر  $x$  برقرار باشد، آن‌گاه  $a+b$  کدام است؟

- (۱) -۷ (۲) -۵ (۳) ۵ (۴) ۷



## آزمون فصل

۱. حاصل  $\frac{x^2}{x^6-1} - \frac{1}{x^4-1}$  به ازای  $x \neq \pm 1$  برابر کدام است؟

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{(x^2-1)(x^4+x^2+1)} & (۲) \\ \frac{-1}{(x^2-1)(x^4+x^2+1)} & (۱) \\ \frac{1}{(x^4-1)(x^4+x^2+1)} & (۴) \\ \frac{-1}{(x^4-1)(x^4+x^2+1)} & (۳) \end{array}$$

۲. با افزودن کدام عدد بر سه جمله‌ای  $\frac{1}{4}x^2 - 6x + 4x^2$  مربع یک دو جمله‌ای حاصل می‌شود؟

$$\begin{array}{llll} ۱۳ & (۴) & ۶ & (۳) \\ \frac{۱۵}{۴} & (۲) & ۲ & (۱) \end{array}$$

۳. در تجزیه کامل عبارت  $x^4 + x^2y^2 - 2y^4$  چند عامل ضرب وجود دارد؟

$$\begin{array}{llll} ۵ & (۴) & ۴ & (۳) \\ ۳ & (۲) & ۲ & (۱) \end{array}$$

۴. حاصل  $(\sqrt{2}-1)^2 + (\sqrt{2}+1)^2$  کدام است؟

$$\begin{array}{llll} ۱۳\sqrt{2} & (۴) & ۱۰\sqrt{2} & (۳) \\ ۱۲ & (۲) & ۱۰ & (۱) \end{array}$$

۵. اگر بدانیم  $a + \frac{1}{a} = 5$  است. حاصل  $a^6 + \frac{1}{a^6}$  کدام است؟

$$\begin{array}{llll} ۱۲۱۰۰ & (۴) & ۱۲۰۹۸ & (۳) \\ ۱۲۰۹۶ & (۲) & ۱۲۰۹۴ & (۱) \end{array}$$

۶. اگر  $x^2 - x - 1 = 0$  باشد. حاصل  $\frac{x^2+1}{5x+5}$  کدام است؟

$$\begin{array}{llll} ۳ & (۴) & \frac{۱۳}{۵} & (۳) \\ \frac{۱۱}{۵} & (۲) & \frac{۹}{۵} & (۱) \end{array}$$

۷. حاصل  $(\sqrt{6}-\sqrt{5})^{۱۰۰۰}(\sqrt{6}+\sqrt{5})^{۹۹۸}$  کدام است؟

$$\begin{array}{llll} ۱۱-۲\sqrt{۳۰} & (۴) & ۱۱+۲\sqrt{۳۰} & (۳) \\ ۱۱+\sqrt{۳۰} & (۲) & ۱۱-\sqrt{۳۰} & (۱) \end{array}$$

۸. حاصل عبارت  $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$  کدام است؟

$$\begin{array}{llll} a^4+b^4+a^2b^2 & (۴) & a^4+b^4-a^2b^2 & (۳) \\ a^4+b^4+a^2b^2 & (۲) & a^4+b^4-a^2b^2 & (۱) \end{array}$$

۹. اگر  $x^2+y^2+2-2x-2y=0$  باشد. حاصل  $x+y$  کدام است؟

$$\begin{array}{llll} ۱ & (۴) & ۲ & (۳) \\ ۳ & (۲) & ۴ & (۱) \end{array}$$

۱۰. حاصل  $(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})$  به ازای  $x$  و  $y$  های نامنفی کدام است؟

$$\begin{array}{llll} x+y & (۴) & \sqrt{x}-\sqrt{y} & (۳) \\ \sqrt{x}+\sqrt{y} & (۲) & x-y & (۱) \end{array}$$

برای مشاهده پاسخ‌نامه کلیدی به صفحه بعد مراجعه نمایید و برای دریافت پاسخ‌نامه تشریحی رمزینۀ مقابل را با گوشی هوشمند خود اسکن کنید یا به سایت مهروماه، صفحه مربوط به این کتاب مراجعه نمایید.





## پاسخ‌های کلیدی

۱. ۲ ۳ ۴ ۵  
۲. ۱ ۳ ۴ ۵  
۳. ۲ ۳ ۴ ۵  
۴. ۱ ۲ ۳ ۴  
۵. ۱ ۲ ۳ ۴  
۶. ۱ ۲ ۳ ۴  
۷. ۲ ۳ ۴ ۵

### پاسخ آزمون

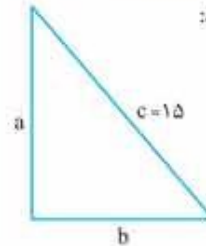
۱. ۱ ۲ ۳ ۴  
۲. ۲ ۳ ۴ ۵  
۳. ۱ ۲ ۳ ۴  
۴. ۱ ۲ ۳ ۴  
۵. ۱ ۲ ۳ ۴  
۶. ۱ ۲ ۳ ۴  
۷. ۱ ۲ ۳ ۴  
۸. ۱ ۲ ۳ ۴  
۹. ۱ ۲ ۳ ۴  
۱۰. ۲ ۳ ۴ ۵

۱. ۱ ۲ ۳ ۴  
۲. ۱ ۳ ۴ ۵  
۳. ۱ ۲ ۳ ۴  
۴. ۱ ۲ ۳ ۴  
۵. ۱ ۲ ۳ ۴  
۶. ۱ ۲ ۳ ۴  
۷. ۱ ۲ ۳ ۴  
۸. ۱ ۲ ۳ ۴  
۹. ۱ ۲ ۳ ۴  
۱۰. ۱ ۲ ۳ ۴  
۱۱. ۱ ۲ ۳ ۴  
۱۲. ۱ ۲ ۳ ۴  
۱۳. ۱ ۲ ۳ ۴  
۱۴. ۱ ۲ ۳ ۴  
۱۵. ۲ ۳ ۴ ۵  
۱۶. ۲ ۳ ۴ ۵  
۱۷. ۱ ۲ ۳ ۴  
۱۸. ۱ ۲ ۳ ۴  
۱۹. ۱ ۲ ۳ ۴  
۲۰. ۲ ۳ ۴ ۵  
۲۱. ۱ ۲ ۳ ۴  
۲۲. ۱ ۲ ۳ ۴  
۲۳. ۱ ۲ ۳ ۴  
۲۴. ۲ ۳ ۴ ۵  
۲۵. ۱ ۲ ۳ ۴  
۲۶. ۱ ۲ ۳ ۴  
۲۷. ۱ ۲ ۳ ۴  
۲۸. ۱ ۲ ۳ ۴  
۲۹. ۱ ۲ ۳ ۴  
۳۰. ۱ ۲ ۳ ۴  
۳۱. ۱ ۲ ۳ ۴  
۳۲. ۱ ۲ ۳ ۴  
۳۳. ۲ ۳ ۴ ۵  
۳۴. ۱ ۲ ۳ ۴  
۳۵. ۱ ۲ ۳ ۴  
۳۶. ۱ ۲ ۳ ۴  
۳۷. ۱ ۲ ۳ ۴  
۳۸. ۱ ۲ ۳ ۴  
۳۹. ۱ ۲ ۳ ۴  
۴۰. ۱ ۲ ۳ ۴  
۴۱. ۲ ۳ ۴ ۵

۴۲. ۱ ۲ ۳ ۴  
۴۳. ۱ ۳ ۴ ۵  
۴۴. ۱ ۲ ۳ ۴  
۴۵. ۱ ۲ ۳ ۴  
۴۶. ۱ ۲ ۳ ۴  
۴۷. ۲ ۳ ۴ ۵  
۴۸. ۲ ۳ ۴ ۵  
۴۹. ۱ ۲ ۳ ۴  
۵۰. ۱ ۲ ۳ ۴  
۵۱. ۱ ۲ ۳ ۴  
۵۲. ۱ ۲ ۳ ۴  
۵۳. ۱ ۲ ۳ ۴  
۵۴. ۱ ۲ ۳ ۴  
۵۵. ۱ ۲ ۳ ۴  
۵۶. ۲ ۳ ۴ ۵  
۵۷. ۱ ۲ ۳ ۴  
۵۸. ۱ ۲ ۳ ۴  
۵۹. ۱ ۲ ۳ ۴  
۶۰. ۱ ۲ ۳ ۴  
۶۱. ۱ ۲ ۳ ۴  
۶۲. ۱ ۲ ۳ ۴  
۶۳. ۱ ۲ ۳ ۴  
۶۴. ۱ ۲ ۳ ۴  
۶۵. ۱ ۲ ۳ ۴  
۶۶. ۱ ۲ ۳ ۴  
۶۷. ۱ ۲ ۳ ۴  
۶۸. ۱ ۲ ۳ ۴  
۶۹. ۲ ۳ ۴ ۵  
۷۰. ۲ ۳ ۴ ۵  
۷۱. ۱ ۲ ۳ ۴  
۷۲. ۱ ۲ ۳ ۴  
۷۳. ۱ ۲ ۳ ۴  
۷۴. ۲ ۳ ۴ ۵  
۷۵. ۱ ۲ ۳ ۴  
۷۶. ۲ ۳ ۴ ۵  
۷۷. ۲ ۳ ۴ ۵  
۷۸. ۱ ۲ ۳ ۴  
۷۹. ۱ ۲ ۳ ۴  
۸۰. ۲ ۳ ۴ ۵  
۸۱. ۲ ۳ ۴ ۵  
۸۲. ۱ ۲ ۳ ۴

## پاسخ‌های تشریحی

۱. **گزینه ۲** مثلث قائم‌الزاویه زیر را در نظر بگیرید:



محیط مثلث ۳۴ است، بنابراین:

$$a + b + 15 = 34 \Rightarrow a + b = 19$$

طبق رابطه فیثاغورس داریم:  $a^2 + b^2 = 15^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 225$   
با استفاده از اتحاد مربع کامل می‌توان حاصل  $ab$  را یافت.

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \Rightarrow 19^2 = 225 + 2ab$$

$$\Rightarrow 361 = 225 + 2ab \Rightarrow ab = 68$$

مساحت این مثلث  $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}(68) = 34$  است.

۲. **گزینه ۱**

(مساحت مستطیل) - ۴ = مساحت کل مربع = مساحت هاشورخورده

طول ضلع مربع بزرگ  $x + y$  است.

$$\text{مساحت هاشور خورده} = (x + y)^2 - 4(x \cdot y)$$

$$= x^2 + 2xy + y^2 - 4xy = x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$$

۳. **گزینه ۲** برای تبدیل عدد به توان‌های ۱۰، بهتر است آن را به شکل

زیر بنویسیم:

$$(999995)^2 = (1000000 - 5)^2 = (10^6 - 5)^2$$

$$= (10^6)^2 - 2(10^6)(5) + 5^2$$

$$= 10^{12} - 10 \cdot (10^6) + 25 = 10^{12} - 10^7 + 25 \Rightarrow m = 12, n = 7$$

$$\Rightarrow m + n = 19$$

۴. **گزینه ۱** سه پرانتز اول با اتحاد مربع دوجمله‌ای ساده می‌شوند و

پرانتز چهارم با اتحاد مربع سه‌جمله‌ای ساده می‌شود.

$$(a + b)^2 + (b + c)^2 + (a + c)^2 - (a + b + c)^2$$

$$= a^2 + 2ab + b^2 + b^2 + 2bc + c^2 + a^2 + 2ac + c^2$$

$$- (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc) = a^2 + b^2 + c^2$$

۵. **گزینه ۳** قبل از این که مستقیماً مقدار  $\frac{2 + \sqrt{2}}{3}$  را به جای  $x$  های

عبارت  $x^2 - 2x + \frac{3}{4}$  قرار دهیم بهتر است عبارت را تبدیل به مربع کامل

کنیم. به این روش، محاسبه کمتری داریم.

$$x^2 - 2x + \frac{3}{4} = (x^2 - 2x + 1) - 1 + \frac{3}{4}$$

$$= (x - 1)^2 - 1 + \frac{3}{4} = (x - 1)^2 + \frac{1}{4}$$

اکنون به جای  $x$  مقدار  $\frac{2 + \sqrt{2}}{3}$  را قرار می‌دهیم:

$$(x - 1)^2 + \frac{1}{4} = \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{3} - 1\right)^2 + \frac{1}{4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \frac{1}{4} = 1$$

**یادآوری:** برای مربع نمودن یک عبارت درجه دوم ابتدا

ضریب  $x^2$  را از جمله‌های دارای  $x$  فاکتور می‌گیریم، سپس ضریب  $x$  را نصف می‌کنیم و به توان ۲ می‌رسانیم. عدد حاصل را به عبارت کم و زیاد می‌کنیم و اتحاد را می‌سازیم. به مثال زیر دقت کنید.

$$2x^2 + 5x + 1 = 2\left(x^2 + \frac{5}{2}x\right) + 1$$

$$= 2\left(x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{25}{16} - \frac{25}{16}\right) + 1 = 2\left(\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}\right) + 1$$

$$= 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{8} + 1 = 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{17}{8}$$

۶. **گزینه ۲** **روش اول** به جای  $x$  در عبارت  $x^2 - 4x$  مقدار آن را

جای گذاری می‌کنیم:  $x^2 - 4x = (2 + \sqrt{3})^2 - 4(2 + \sqrt{3})$

$$= 4 + 4\sqrt{3} + 3 - 8 - 4\sqrt{3} = -1$$

**روش دوم** با تبدیل نمودن عبارت  $x^2 - 4x$  به مربع کامل، داریم:

$$x^2 - 4x + 4 - 4 = (x - 2)^2 - 4$$

مقدار  $x$  را در عبارت جای گذاری می‌کنیم:

$$(x - 2)^2 - 4 = ((2 + \sqrt{3}) - 2)^2 - 4 = (\sqrt{3})^2 - 4 = 3 - 4 = -1$$

۷. **گزینه ۴** عبارت  $4x^2 + Ax + \frac{9}{4}$  مربع کامل است، یعنی به صورت

$$a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$\left. \begin{aligned} 4x^2 = a^2 &\Rightarrow a = 2x \\ b^2 = \frac{9}{4} &\Rightarrow b = \frac{3}{2} \\ Ax = \pm 2ab \end{aligned} \right\} \Rightarrow Ax = \pm 2(2x)\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow Ax = \pm 6x \Rightarrow A = \pm 6$$

۸. **گزینه ۴** برای تبدیل نمودن عبارت  $4x^2 - 10x + 9$  به اتحاد تفاضل

مربع دوجمله‌ای با توجه به گزینه‌ها که همه ضریبی از  $x$  هستند، باید ببینیم با افزودن چه عبارتی به  $-10x$  تبدیل به مربع کامل می‌شود.

با توجه به این که مربع کامل به صورت  $a^2 \pm 2ab + b^2$  است باید  $4x^2$

با  $a^2$  و  $9$  یا  $b^2$  برابر باشد، پس:

$$a^2 = 4x^2 \Rightarrow a = 2x$$

اتحاد مورد نظر به صورت زیر است:

$$a^2 - 2ab + b^2 = 4x^2 - 12x + 9$$

بنابراین با افزودن  $-2x$  به عبارت  $4x^2 - 10x + 9$  مربع کامل حاصل می‌شود.

۹. **گزینه ۱** باید ببینیم در عبارت  $4x^2 + 6x + 2$  به عدد ۲ چه مقداری

افزوده شود، تا مربع (مجذور) دوجمله‌ای حاصل شود.

مربع دوجمله‌ای به صورت  $a^2 \pm 2ab + b^2$  است، باید  $a^2$  با  $4x^2$

و  $2ab$  یا  $6x$  برابر باشند، پس:

$$a^2 = 4x^2 \Rightarrow a = 2x$$

مربع دوجمله‌ای حاصل به صورت زیر است:

$$4x^2 + 6x + \frac{9}{4} = \left(2x + \frac{3}{2}\right)^2$$

بنابراین با افزودن عدد  $\frac{1}{4}$  به عبارت  $4x^2 + 6x + 2$  مجذور دوجمله‌ای

حاصل می‌شود.





**روش دوم** **فرمول ممنوع:** به  $x$  عدد دلخواهی مانند  $x=2$  می‌دهیم:

$$(1-x)(1+x)(x^2+2) \stackrel{x=2}{=} (-1)(3)(6) = -18$$

به  $x$  های گزینه‌ها نیز ۲ می‌دهیم، گزینه‌ای درست است که حاصل آن -۱۸ شود.

گزینه «۱»:  $(-2)^4 - 3(2)^2 + 2 = -26$

گزینه «۲»:  $(-2)^4 - (2)^2 + 2 = -18$

گزینه «۳»:  $(2)^4 + 3(2)^2 - 2 = 26$

گزینه «۴»:  $(2)^4 + (2)^2 - 2 = 18$

**۱۶. گزینه ۴ روش اول** عبارت را در ۲ ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{1}{4} \times 2(x - \frac{1}{4})(\lambda x^2 + 2)(2x + 1)$$

با ضرب ۲ در پرانتز اول، عبارتهای اول و سوم تشکیل اتحاد مزدوج می‌دهند:

$$\frac{1}{4}(2x - 1)(\lambda x^2 + 2)(2x + 1) = \frac{1}{4}(2x - 1)(2x + 1)(\lambda x^2 + 2)$$

$$= \frac{1}{4}(4x^2 - 1)(\lambda x^2 + 2)$$

با فاکتور گرفتن ۲ از پرانتز دوم، عبارتهای مجدداً تشکیل اتحاد مزدوج می‌دهند:

$$\frac{1}{4} \times 2(4x^2 + 1)(4x^2 - 1) = (4x^2 + 1)(4x^2 - 1) = 16x^4 - 1$$

**روش دوم** **فرمول ممنوع:** به  $x$  عددی دلخواه مانند ۱ می‌دهیم:

$$(x - \frac{1}{4})(\lambda x^2 + 2)(2x + 1)$$

$$\stackrel{x=1}{=} (1 - \frac{1}{4})(\lambda(1)^2 + 2)(2(1) + 1) = 15$$

حال به جای  $x$  همه گزینه‌ها ۱ جای گذاری می‌کنیم:

گزینه «۱»:  $4(1)^2 - 1 = 3$

گزینه «۲»:  $\frac{1}{4}(16(1)^2 - 1) = \frac{15}{4}$

گزینه «۳»:  $64(1)^2 - 1 = 63$

گزینه «۴»:  $16(1)^2 - 1 = 15$

حاصل عبارت در گزینه «۴» با مقدار بدست آمده از جای گذاری  $x=1$

در عبارت صورت سؤال برابر است، بنابراین گزینه «۴» درست است.

**۱۷. گزینه ۳** فرض کنید  $A = \sqrt{x+3} - \sqrt{x-7}$  بدین ترتیب می‌توان گفت:

$$(\sqrt{x+3} + \sqrt{x-7})(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-7}) = x+3 - (x-7)$$

$$\Rightarrow 5A = 10 \Rightarrow A = 2$$

**۱۸. گزینه ۳** دو پرانتز اول تشکیل اتحاد مزدوج می‌دهند، بنابراین:

$$(1 - \frac{1}{3})(1 + \frac{1}{3})(1 + \frac{1}{9})(1 + \frac{1}{81}) + \frac{1}{81 \times 81}$$

$$= (1 - \frac{1}{9})(1 + \frac{1}{9})(1 + \frac{1}{81}) + \frac{1}{81 \times 81}$$

دوباره دو پرانتز اول تشکیل اتحاد مزدوج می‌دهند و این عملیات تکرار می‌شود:

$$(1 - \frac{1}{81})(1 + \frac{1}{81}) + \frac{1}{81 \times 81} = (1 - \frac{1}{81 \times 81}) + \frac{1}{81 \times 81} = 1$$

**۱۹. گزینه ۴** عبارت را در  $(1 - \frac{1}{4})$  ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$(1 - \frac{1}{4})(1 + \frac{1}{4})(1 + \frac{1}{16})(1 + \frac{1}{64})(1 + \frac{1}{256})(1 + \frac{1}{1024})$$

$$(1 - \frac{1}{4})$$

**۱۰. گزینه ۱** همه عبارتهای را به یک طرف تساوی می‌بریم:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3 = 2a + 2b + 2c$$

$$\Rightarrow a^2 - 2a + b^2 - 2b + c^2 - 2c + 3 = 0$$

با وجود  $a^2$  و  $b^2$  و  $c^2$  و هم‌چنین  $2c$  به یاد اتحاد مربع دو جمله‌ای می‌افتیم که برای کامل کردن این اتحادها عدد ۳ را

به صورت سه تا ۱ می‌نویسیم:  $a^2 - 2a + 1 + b^2 - 2b + 1 + c^2 - 2c + 1 = 0$

$$\Rightarrow (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 = 0$$

هر عبارت با توان زوج همواره بزرگ‌تر و یا مساوی صفر است، بنابراین جمع آن‌ها زمانی صفر می‌شود که تمام آن‌ها صفر باشند:

$$a-1=0 \Rightarrow a=1, b-1=0 \Rightarrow b=1, c-1=0 \Rightarrow c=1$$

**۱۱. گزینه ۴** معادله را به صورت مجموع دو مربع کامل درمی‌آوریم:

$$a^2 + \delta b^2 - 2ab - 2b + 1 = (a^2 + 2b^2 - 2ab) + (b^2 - 2b + 1) = 0$$

$$\Rightarrow (a-2b)^2 + (b-1)^2 = 0$$

مجموع دو عبارت نامنفی صفر است، پس هر دو ی آن‌ها برابر صفر هستند.

$$\begin{cases} a-2b=0 \\ b-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$$

**۱۲. گزینه ۲** همه جمله‌های موجود در تساوی را به سمت چپ منتقل می‌کنیم:

$$a^2 + b^2 - 2a - 2b + 2 = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 - 2a - 2b + 1 + 1 = 0$$

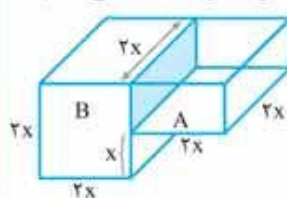
$$\Rightarrow (a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1) = 0 \Rightarrow (a-1)^2 + (b-1)^2 = 0$$

مجموع دو مقدار نامنفی برابر صفر است، پس هر دو برابر صفر هستند.

$$a=1, b=1$$

حال حاصل  $(a+b)^2$  را می‌یابیم:  $(a+b)^2 = (1+1)^2 = 4$

**۱۳. گزینه ۳** حجم را به دو مکعب مستطیل مجزا تفکیک می‌کنیم:



مکعب A به اضلاع  $2x, 2x, 2x$  و  $x$  حجمی

برابر  $4x^3 = (2x)(2x)(2x)$  دارد.

مکعب B به اضلاع  $2x, 2x, 2x$  و  $2x$  حجمی

برابر  $8x^3 = (2x)(2x)(2x)$  دارد.

حجم کل برابر است با  $4x^3 + 8x^3 = 12x^3$  یعنی  $12x^3$  که برابر ۱۵۰۰ لیتر است.

هر لیتر  $\frac{1}{1000}$  متر مکعب است، پس حجم برابر  $\frac{1}{1000} \times 1500 = 1.5$  متر مکعب است.

$$12x^3 = \frac{1500}{1000} \Rightarrow 12x^3 = 1.5 \Rightarrow x^3 = 0.125 \Rightarrow x = 0.5$$

**۱۴. گزینه ۴** به کمک اتحادها می‌توان گفت:

$$(998)^2 = (1000 - 2)^2 = 1000^2 - 4000 + 4 = 1000000 - 3996$$

$$\Rightarrow 998^2 = 996004$$

$$71 \times 69 = (70 + 1)(70 - 1) = 70^2 - 1 = 4900 - 1 = 4899$$

**۱۵. گزینه ۲ روش اول** ابتدا حاصل ضرب دو پرانتز اول را که معرف اتحاد مزدوج هستند، به دست می‌آوریم:

$$(1-x)(1+x)(x^2+2) = (1-x^2)(x^2+2)$$

اگر در پرانتز اول از منفی فاکتور بگیریم، پرانتز اول و دوم تشکیل اتحاد جمله مشترک می‌دهند، پس:

$$-(x^2-1)(x^2+2) = -((x^2)^2 + (2-1)(x^2) + (-1)(2))$$

$$= -(x^4 + x^2 - 2) = -x^4 - x^2 + 2$$

حال به  $x$  های گزینه‌ها نیز ۲ می‌دهیم:

- گزینه «۱»:  $(x-1)^2 \stackrel{x=2}{=} (2-1)^2 = 1$  ❌
- گزینه «۲»:  $(x-1)^2 (x^2+1) \stackrel{x=2}{=} (2-1)^2 ((2)^2+1) = 9$  ❌
- گزینه «۳»:  $x^2 - 1 \stackrel{x=2}{=} (2)^2 - 1 = 7$  ❌
- گزینه «۴»:  $x^6 - 1 \stackrel{x=2}{=} (2)^6 - 1 = 63$  ✔️

۲۴. **گزینه ۴** روش اول پیرانتز دوم را مرتب می‌کنیم (از توان بزرگ به کوچک) می‌توان نوشت:

$$(x+1)(x^2-x+1) - (x-1)(x^2+x+1)$$

حال هر جفت پیرانتز کنار هم تشکیل اتحاد چاق و لاغر را می‌دهند:

$$(x^2+1) - (x^2-1) = 2$$

روش دوم

**فرمول ممنوع:** به  $x$  عدد دلخواهی مانند  $x = -1$  می‌دهیم:

$$(x+1)(-x+x^2+1) - (x-1)(x^2+x+1) \stackrel{x=-1}{=} 2$$

تنها گزینه «۴» به‌ازای  $x = -1$  برابر ۲ است، پس این گزینه درست است. دقت کنید در این سؤال به  $x$  هر مقداری بدهیم باز هم حاصل برابر ۲ می‌شود می‌توانید اعداد دیگر را هم امتحان کنید.

۲۵. **گزینه ۴** ابتدا پیرانتزها را برحسب توان عبارت‌ها از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

$$(a^7-1)(a^4+a^2+1)(a^6+1)(a^{12}+1)$$

دو پیرانتز اول تشکیل اتحاد چاق و لاغر می‌دهند، پس:

$$(a^6-1)(a^6+1)(a^{12}+1)$$

دو پیرانتز  $(a^6-1)$  و  $(a^6+1)$  تشکیل اتحاد مزدوج می‌دهند، پس:

$$(a^{12}-1)(a^{12}+1) = a^{24} - 1$$

توجه کنید در این سؤال از روش فرمول ممنوع استفاده نمی‌کنیم زیرا به‌ازای  $a = 1$  (یا  $a = -1$ ) حاصل تمامی گزینه‌ها برابر می‌شوند و برای اعداد دیگر محاسبه  $a^{12}$  دشوار است.

۲۶. **گزینه ۳** صورت و مخرج کسر را در مزدوج عبارت  $x^2 + \frac{1}{x^2}$  ضرب می‌کنیم:

$$\frac{(x^2 - \frac{1}{x^2})(x^2 + \frac{1}{x^2})(x^6 + \frac{1}{x^6})(x^{12} + \frac{1}{x^{12}})}{(x^2 - \frac{1}{x^2})^2}$$

$$= \frac{(x^6 - \frac{1}{x^6})(x^6 + \frac{1}{x^6})(x^{12} + \frac{1}{x^{12}})}{(x^2 - \frac{1}{x^2})^2}$$

$$= \frac{(x^{12} - \frac{1}{x^{12}})(x^{12} + \frac{1}{x^{12}})}{(x^2 - \frac{1}{x^2})^2} = \frac{x^{24} - \frac{1}{x^{24}}}{(x^2 - \frac{1}{x^2})^2}$$

از آنجایی که  $x = \sqrt[2]{2}$  می‌باشد، پس  $x^2 = \sqrt{2}$  و  $x^6 = 2$  است.

دو پیرانتز اول تشکیل اتحاد مزدوج می‌دهند:

$$\frac{(1 - \frac{1}{2^2})(1 + \frac{1}{2^2})(1 + \frac{1}{2^4})(1 + \frac{1}{2^8})(1 + \frac{1}{2^{16}})}{(1 - \frac{1}{2})}$$

مجدداً دو پیرانتز اول با هم تشکیل اتحاد مزدوج می‌دهند و این عملیات تکرار می‌شود:

$$\frac{(1 - \frac{1}{2^4})(1 + \frac{1}{2^4})(1 + \frac{1}{2^8})(1 + \frac{1}{2^{16}})}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{(1 - \frac{1}{2^8})(1 + \frac{1}{2^8})(1 + \frac{1}{2^{16}})}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{(1 - \frac{1}{2^{16}})(1 + \frac{1}{2^{16}})}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{2^{32}}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - 2^{-32}}{\frac{1}{2}} = 2 - 2^{-31}$$

۲۰. **گزینه ۴** اگر با دقت به عبارت  $A$  نگاه کنیم متوجه می‌شویم که با ضرب عبارت  $(2-1)$  که خود برابر ۱ است در آن دو پیرانتز اول تشکیل اتحاد مزدوج می‌دهند، پس:

$$(2-1)A = \frac{(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)\dots(2^{64}+1)}{\text{اتحاد مزدوج}}$$

$$= (2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)\dots(2^{64}+1)$$

دوباره دو پیرانتز اول تشکیل اتحاد مزدوج می‌دهند:

$$= (2^4-1)(2^4+1)\dots(2^{64}+1)$$

به همین ترتیب عبارات ساده می‌شوند تا به حالت زیر می‌رسیم:

$$= (2^{64}-1)(2^{64}+1) = (2^{64})^2 - (1)^2 = 2^{128} - 1$$

۲۱. **گزینه ۴** حاصل ضرب دو پیرانتز  $(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta)(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta)$  تشکیل اتحاد مزدوج به‌صورت زیر می‌دهند:

$$(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta)(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta) = \alpha^4 + \beta^4 + \alpha^2\beta^2$$

حال مقادیر  $\alpha$  و  $\beta$  را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$(\sqrt[4]{3\sqrt{2}-4})^4 + (\sqrt[4]{3\sqrt{2}+4})^4 + (\sqrt[4]{3\sqrt{2}-4} \times \sqrt[4]{3\sqrt{2}+4})^2$$

$$= (3\sqrt{2}-4) + (3\sqrt{2}+4) + (\sqrt{(3\sqrt{2})^2 - 4^2})^2$$

$$= 6\sqrt{2} + (\sqrt{18-16})^2 = 6\sqrt{2} + \sqrt{4} = 6\sqrt{2} + \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$$

۲۲. **گزینه ۳** حاصل ضرب دو پیرانتز را به کمک اتحاد چاق و لاغر به دست می‌آوریم و مقدار  $\sqrt{2}$  را به جای  $x$  جای‌گذاری می‌کنیم:

$$(2x+1)(4x^2-2x+1) = (2x)^2 + (1)^2$$

$$= 8x^2 + 1 \stackrel{x=\sqrt{2}}{=} 8(\sqrt{2})^2 + 1 = 8(2) + 1 = 17$$

۲۳. **گزینه ۴** روش اول دو پیرانتز اول تشکیل اتحاد چاق و لاغر می‌دهند.

$$(x-1)(x^2+x+1)(x^2+1) = (x^2-1)(x^2+1)$$

این دو پیرانتز نیز تشکیل اتحاد مزدوج می‌دهند.

$$= (x^2)^2 - (1)^2 = x^4 - 1$$

روش دوم

**فرمول ممنوع:** به  $x$  عدد دلخواهی مانند  $x = 2$  می‌دهیم:

$$(x-1)(x^2+x+1)(x^2+1) \stackrel{x=2}{=} (2-1)((2)^2+(2)+1)((2)^2+1)$$

$$= 1(7)(9) = 63$$



به کمک اتحاد اویلر:

کاملاً واضح است که  $\frac{x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz}{x + y + z}$  برابر  $\frac{1}{4}((x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2)$  است.

۲۹. **گزینه ۴** اول عبارت را به  $(2 + \sqrt{3})^2 + (-2 + \sqrt{3})^2 + (-2 + \sqrt{3})^2$  تبدیل می‌کنیم.

حالا دقت کنید که مجموع سه عبارت برابر صفر است:

$$(2 + \sqrt{3}) + (-2 + \sqrt{3}) + (-2 + \sqrt{3}) = 0$$

بنابراین طبق نتیجه اتحاد اویلر داریم:

$$(2 + \sqrt{3})^2 + (-2 + \sqrt{3})^2 + (-2 + \sqrt{3})^2 = 3(2 + \sqrt{3})(-2 + \sqrt{3})(-2 + \sqrt{3})$$

از پرانتز آخر، یک منفی فاکتور می‌گیریم تا با پرانتز اول تشکیل اتحاد مزدوج دهد:

$$3(2 + \sqrt{3}) \times (-2 + \sqrt{3}) \times (-2 - \sqrt{3}) = 6\sqrt{3}(2^2 - (\sqrt{3})^2) = 6\sqrt{3}(4 - 3) = 6\sqrt{3}$$

۳۰. **گزینه ۲** روش اول عبارت‌ها را به ترتیب نشان داده شده در هم ضرب می‌کنیم:

$$(a-2)(a-1)a(a+1)+1=(a^2-a-2)(a^2-a)+1$$

$a^2 - a$  را  $t$  فرض می‌کنیم:

$$(t-2)t+1=t^2-2t+1=(t-1)^2$$

حال به جای  $t$  مقدار  $a^2 - a$  را جای گذاری می‌کنیم:

$$(t-1)^2 = (a^2 - a - 1)^2$$

روش دوم

**فرمول ممنوع:** به جای  $a$  در عبارت صورت سؤال و

گزینه‌ها عدد دلخواه ۲- را جای گذاری می‌کنیم.

توجه کنید بهتر است عددی را انتخاب کنیم که عبارت

$$(a-2)(a-1)a(a+1)$$

$$(a-2)(a-1)a(a+1)+1 = (-4 \times -3 \times -2 \times -1) + 1 = 25$$

حال به جای  $a$  در گزینه‌ها ۲- قرار می‌دهیم:

گزینه ۱:  $(a^2 + a + 1)^2 = 9$

گزینه ۲:  $(a^2 - a - 1)^2 = 25$

گزینه ۳:  $(a^2 + 2a - 1)^2 = 9$

گزینه ۴:  $(a^2 - 2a + 1)^2 = 121$

بنابراین فقط گزینه «۲» می‌تواند درست باشد.

۳۱. **گزینه ۲** روش اول بهتر است عبارت‌ها را به شیوه زیر در هم ضرب کنیم:

$$a(a+1)(a+2)(a+3)+1=(a^2+3a)(a^2+3a+2)+1$$

حال عبارت  $a^2 + 3a$  را  $t$  در نظر می‌گیریم:

$$t(t+2)+1=t^2+2t+1=(t+1)^2$$

به جای  $t$  عبارت  $a^2 + 3a$  را جای گذاری می‌کنیم:

$$(t+1)^2 = (a^2 + 3a + 1)^2$$

بنابراین:

$$\frac{x^{24} - \frac{1}{x^{16}}}{(x^2 - \frac{1}{x^2})^2} = \frac{(x^6)^4 - \frac{1}{(x^6)^4}}{(x^2 - \frac{1}{x^2})^2} = \frac{2^4 - \frac{1}{2^4}}{(\frac{2-1}{\sqrt{2}})^2} = \frac{16 - \frac{1}{16}}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = \frac{16^2 - 1}{16} = \frac{256 - 1}{16} = \frac{255}{8}$$

۲۷. **گزینه ۲** عبارت  $x^6 - \frac{1}{x^6}$  را بصورت  $(x^2)^3 - \frac{1}{(x^2)^3}$  در نظر می‌گیریم.

با استفاده از اتحاد فرعی  $a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$  می‌توانیم بنویسیم:

$$(x^2)^3 - (\frac{1}{x^2})^3 = (x^2 - \frac{1}{x^2})^3 + 3x^2 \cdot \frac{1}{x^2} (x^2 - \frac{1}{x^2}) = (x^2 - \frac{1}{x^2})^3 + 3(x^2 - \frac{1}{x^2}) \quad 1$$

برای یافتن  $x^2 - \frac{1}{x^2}$  از روی  $x^2 + \frac{1}{x^2}$  نیز از اتحاد فرعی زیر استفاده می‌کنیم:

$$(a+b)^3 - (a-b)^3 = 6ab \Rightarrow (x^2 + \frac{1}{x^2})^3 - (x^2 - \frac{1}{x^2})^3 = 6 \quad 2$$

$$= 6x^2 \cdot \frac{1}{x^2} \Rightarrow (x^2 + \frac{1}{x^2})^3 - (x^2 - \frac{1}{x^2})^3 = 6$$

$$\Rightarrow (\sqrt{6})^3 - (x^2 - \frac{1}{x^2})^3 = 6 \Rightarrow x^2 - \frac{1}{x^2} = \pm 2$$

با جای گذاری مقدار  $x^2 - \frac{1}{x^2}$  در عبارت شماره ۱ حاصل خواسته شده را می‌یابیم:

$$(x^2)^3 - (\frac{1}{x^2})^3 = (x^2 - \frac{1}{x^2})^3 + 3(x^2 - \frac{1}{x^2}) = (\pm 2)^3 + 3(\pm 2) = 14 \text{ یا } -14$$

۲۸. **گزینه ۲**

**راهبرد: اتحاد اویلر:** براساس اتحاد اویلر می‌توان مجموع

مکعبات سه جمله را به صورت زیر نوشت:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$$

از طرفی عبارت  $x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz$  با اثبات زیر برابر

$$\frac{1}{4}[(x-z)^2 + (x-y)^2 + (y-z)^2]$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz$$

$$= \frac{2}{4}(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$$

$$= \frac{1}{4}(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz - 2yz)$$

$$= \frac{1}{4}((x^2 + y^2 - 2xy) + (x^2 + z^2 - 2xz) + (y^2 + z^2 - 2yz))$$

$$= \frac{1}{4}((x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2)$$

بنابراین اتحاد اویلر را می‌توان به صورت زیر تبدیل کرد:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

$$= (x+y+z) \times \frac{1}{4}((x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2)$$