ساختار کتاب

کتاب شب امتحان **هندسه (۲) یازدهم** از ۴ قسمت اصلی تشکیل شده است که به صورت زیر است:

۱) آزمون‌های نوبت اول: آزمون‌های شمارهٔ ۱ تا ۴ این کتاب مربوط به مباحث نوبت اول است که خودش به دو قسمت تقسیم می‌شود:

الف) آزمون‌های طبقه‌بندی‌شده: آزمون‌های شمارهٔ ۱ و ۲ را فصل به فصل طبقه‌بندی کرده‌ایم. بنابراین شما به راحتی می‌توانید پس از خواندن هر فصل از درس‌نامه تعدادی سؤال را بررسی کنید. حواستان باشد این آزمون‌ها هم، ۲۰ نمره‌ای و مثل یک آزمون کامل هستند. در کنار سؤال‌های این آزمون‌ها **نکات مشاوره‌ای** نوشته‌ایم. این نکات به شما در درس‌خواندن قبل از امتحان و پاسخگویی به آزمون در زمان امتحان کمک می‌کند.

ب) آزمون طبقه‌بندی‌نشده: آزمون‌های شمارهٔ ۳ تا ۴ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم تا دو آزمون نوبت اول مشابه آزمونی را که معلمتان از شما خواهد گرفت، ببینید.

۲) آزمون‌های نوبت دوم: آزمون‌های شمارهٔ ۵ تا ۱۲ از کل کتاب و مطابق امتحان پایان سال طرح شده‌اند. این قسمت هم، خودش به ۲ بخش تقسیم می‌شود:

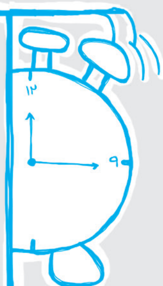
الف) آزمون‌های طبقه‌بندی‌شده: آزمون‌های شمارهٔ ۵ تا ۸ را که برای نوبت دوم طرح شده‌اند هم طبقه‌بندی کرده‌ایم. با این کار باز هم می‌توانید پس از خواندن هر فصل تعدادی سؤال مرتبط را پاسخ دهید. هر کدام از این آزمون‌ها هم، ۲۰ نمره دارند در واقع در این بخش، شما ۴ آزمون کامل را می‌بینید. این آزمون‌ها هم **نکات مشاوره‌ای** دارند.

ب) آزمون‌های طبقه‌بندی‌نشده: آزمون‌های شمارهٔ ۹ تا ۱۲ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم؛ پس، در این بخش با ۴ آزمون نوبت دوم، مشابهِ آزمون پایان سال معلمتان مواجه خواهید شد.

۳) پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون‌ها: در پاسخ تشریحی آزمون‌ها تمام آن‌چه را که شما باید در امتحان بنویسید تا نمرهٔ کامل کسب کنید، برایتان نوشته‌ایم.

۴) درس‌نامهٔ کامل شب امتحانی: این قسمت برگ برندهٔ شما نسبت به کسانی است که این کتاب را نمی‌خوانند در این قسمت تمام آن‌چه را که شما برای گرفتن نمرهٔ عالی در امتحان هندسه (۲) نیاز دارید، تنها در ۱۲ صفحه آورده‌ایم، بخوانید و لذتش را ببرید!

یک راهکار: موقع امتحان‌های نوبت اول می‌توانید از سؤال‌های فصل‌های اول و دوم آزمون‌های ۵ تا ۸ هم استفاده کنید.



فهرست

بارم‌بندی درس هندسه (۲)

فصل	نوبت اول	نوبت دوم
اول	۱۴	۵
دوم تا صفحهٔ ۴۵	۶	۲
دوم از صفحهٔ ۴۵ تا آخر	–	۵
سوم	–	۸
جمع	۲۰	۲۰

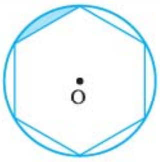
هندسه (۲)	رشته: ریاضی فیزیک	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	kheilisabz.com
ردیف	آزمون شمارهٔ ۱	نوبت اول پایهٔ یازدهم دورهٔ متوسطهٔ دوم	نمره

فصل اول

درس اول

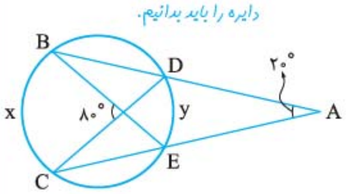
۱ ثابت کنید در هر دایره، قطر عمود بر وتر، آن وتر و کمان‌های نظیر آن وتر را نصف می‌کند. — ۱

۲ در شکل زیر، مساحت قسمت رنگی را به دست آورید. (شعاع دایره ۴ است و شش‌ضلعی منتظم است.) — ۱/۵

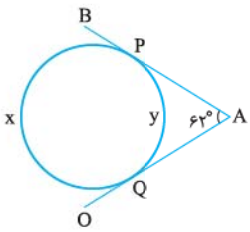


۳ مقادیر مجهول را بیابید. (در قسمت (ب) AP و AQ بر دایره مماس هستند.) — ۱/۵

اندازه‌های زاویه‌های درونی و بیرونی در دایره را باید بدانیم.



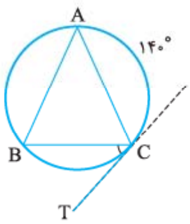
(الف)



(ب)

۴ در شکل روبه‌رو $AB = AC$، CT مماس بر دایره در نقطهٔ C و $\widehat{AC} = ۱۴۰$ است. اندازهٔ زاویهٔ $B\hat{C}T$ چه‌قدر است؟ — ۰/۷۵

ویژگی‌های زاویه‌های مماطی و ظلی در دایره رو هیچ‌وقت یادتون نره.



درس دوم

۵ قضیه: هرگاه دو وتر دلخواه AB و CD در نقطه‌ای مانند M داخل دایره، همدیگر را قطع کنند، آن‌گاه ثابت کنید: — ۱

$$MA \times MB = MC \times MD$$

اولین قضیهٔ رابطهٔ طولی بسیار مهم است.

۶ طریقهٔ رسم مماس‌مشترک خارجی دو دایرهٔ متخارج را با رسم شکل به طور دقیق بیان و طول آن را پیدا کنید. — ۱/۷۵

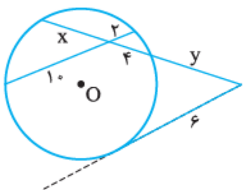
برای رسم مماس‌مشترک خارجی باید دایره‌ای اضافی به مرکز دایرهٔ بزرگ‌تر رسم شود.

۷ دو دایره به شعاع‌های ۹ و ۴ مماس خارج هستند. مطلوب است طول مماس‌مشترک خارجی این دو دایره. — ۱

رابطه‌های طول‌های مماس‌مشترک خارجی و داخلی را می‌دانید؟

۸ مقادیر مجهول را بیابید. — ۱

رابطهٔ طولی در حالتی که یکی از قاطع‌ها به صورت مماس درآید را می‌دانید؟



$x, y = ?$

درس سوم

۹ چندضلعی محاطی و محیطی را همراه با رسم شکل مناسب تعریف کنید. — ۱

۱۰ قضیه: یک چهارضلعی، محیطی است اگر و فقط اگر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل، برابر مجموع اندازه‌های دو ضلع دیگر باشند. — ۱/۵

یادآوری می‌شود که طول مماس‌های وارد بر یک دایره از یک نقطه با هم برابرند.

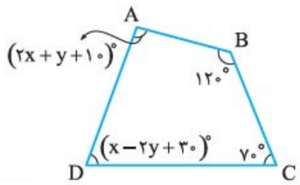
۱۱ مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی را به دست آورید که در دایره‌ای به شعاع R محاط شده باشد. — ۱

ویژگی نقطهٔ همرسی میانه‌ها در مثلث متساوی‌الاضلاع

هندسه (۲)	رشته: ریاضی فیزیک	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	kheilisabz.com

ردیف	آزمون شمارهٔ ۱	نوبت اول پایهٔ یازدهم دورهٔ متوسطهٔ دوم	نمره

۱۲ در شکل مقابل، چهارضلعی ABCD محاطی است. مقدارهای مجهول را بیابید. ۱



در چهارضلعی محاطی بین زاویه‌های مقابل چه رابطه‌ای وجود دارد؟

فصل دوم

درس اول

۱۳ درستی یا نادرستی هر عبارت داخل جدول را مشخص کنید. ۱/۵

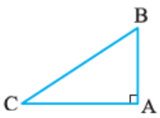
	طولپا	جهت شکل را حفظ می‌کند	مساحت را حفظ می‌کند
انتقال			
تجانس			

۱۴ بازتاب را تعریف و سه مورد از ویژگی‌های آن را بیان کنید. ۱

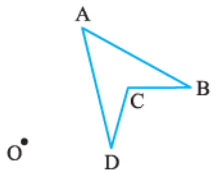
۱۵ ثابت کنید دوران، یک تبدیل طولپاست. (در دو حالت مختلف) ۱/۵

۱۶ دوران‌یافتهٔ هر شکل را در حالات زیر رسم کنید. ۱

الف) دوران به مرکز A و زاویهٔ ۹۰° در جهت عقربه‌های ساعت.



ب) دوران به مرکز O و زاویهٔ ۱۲۰° در خلاف جهت عقربه‌های ساعت.



۱۷ نقطهٔ A' تصویر نقطهٔ A در بازتاب نسبت به خط d است. اگر فاصلهٔ A تا A' برابر ۸ و نقطهٔ M روی خط d را طوری انتخاب کنیم که $AM = ۵$ باشد، مطلوب است اندازهٔ ارتفاع وارد بر ساق مثلث $\overset{\Delta}{AMA'}$. ۱

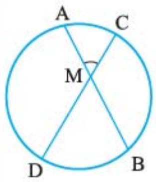
	موفق باشید	جمع نمرات	۲۰

آزمون شمارهٔ ۹

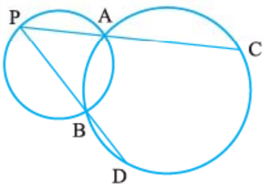
نوبت دوم پایهٔ یازدهم دورهٔ متوسطهٔ دوم

ردیف | نمره

۱ ثابت کنید اگر دو وتر از یک دایره، درون دایره متقاطع باشند، زاویهٔ بین دو وتر، برابر است با نصف مجموع دو کمان نظیر آن؛ یعنی در شکل مقابل داریم: $\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD}}{۲}$ — **۱/۲۵**

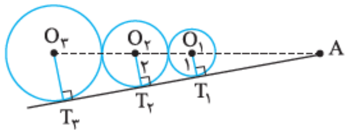


۲ دو دایره یکدیگر را در نقاط A و B قطع می‌کنند. اگر P نقطه‌ای دلخواه روی یکی از دو دایره و بیرون دایرهٔ دیگر باشد و امتدادهای PA و PB دایرهٔ دیگر را در نقاط C و D قطع کنند، ثابت کنید با تغییر نقطهٔ P روی دایرهٔ مفروض، اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{CD}$ ثابت می‌ماند. — **۱/۲۵**



۳ ثابت کنید اگر در دایره‌ای، دو وتر نابرابر باشند، وتری که بزرگ‌تر است، به مرکز نزدیک‌تر است. — **۱/۲۵**

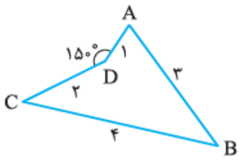
۴ سه دایره به شعاع $r_1=۱$، $r_2=۲$ و r_3 بر هم مماس‌خارج هستند. اگر AT_3 بر هر سه دایره مماس و A در امتداد مرکزهای سه دایره باشد، شعاع دایرهٔ سوم را به‌دست آورید. — **۱/۲۵**



۵ خط d و نقطهٔ A بیرون آن مفروض‌اند. بازتاب نقطهٔ A نسبت به خط d را A' می‌نامیم. مجانس نقطهٔ A' در تجانس به مرکز A و با نسبت ۲- را A'' می‌نامیم. اگر فاصلهٔ A از خط d برابر ۱ باشد، طول $A'A''$ چه‌قدر است؟ — **۱/۲۵**

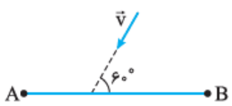
۶ دو نقطهٔ A و O به فاصلهٔ ۱ از یکدیگر قرار دارند. اگر A_1 مجانس A به مرکز نقطهٔ O و با نسبت ۲- و A_2 دوران‌یافتهٔ A_1 حول نقطهٔ O به اندازهٔ $+۹۰^\circ$ باشد، طول پاره‌خط AA_2 چه‌قدر است؟ — **۱/۲۵**

۷ اگر بخواهیم بدون تغییر محیط چهارضلعی و تعداد اضلاع آن در شکل مقابل و با استفاده از بازتاب، مساحت شکل را افزایش دهیم، مساحت آن چه مقدار افزایش می‌یابد؟ — **۱/۲۵**

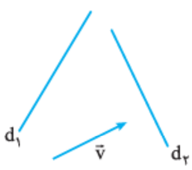


۸ اگر طول اضلاع مثلثی ۴، ۵ و ۷ باشند و مجانس این مثلث را در تجانس به مرکز O و با نسبت $k=-۴$ رسم کنیم، مساحت شکل تبدیل‌یافته چه‌قدر است؟ — **۱/۲۵**

۹ در شکل مقابل بردار $\vec{v}$ به طول ۱ با پاره‌خط AB به طول $۲\sqrt{۳}$، زاویهٔ ۶۰° می‌سازد. اگر $A'B'$ انتقال‌یافتهٔ پاره‌خط AB تحت بردار $\vec{v}$ باشد، مساحت چهارضلعی $ABB'A'$ چه‌قدر است؟ — **۰/۷۵**



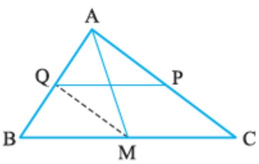
۱۰ دو خط d_1 و d_2 و بردار $\vec{v}$ داده شده‌اند. پاره‌خط AB را چنان رسم کنید که A روی d_1، B روی d_2 و $\overrightarrow{AB}$ موازی و مساوی با بردار $\vec{v}$ باشد. — **۱/۲۵**



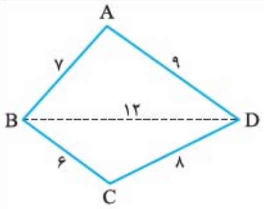
۱۱ اگر در مثلث ABC مرکزهای دایره‌های محاطی داخلی و محیطی بر هم منطبق و $AB=۵\sqrt{۳}$ باشد، طول نیمساز زاویهٔ درونی نظیر رأس A را پیدا کنید. — **۱/۵**

۱۲ در مثلث ABC داریم $\frac{p-c}{۲}=\frac{p-b}{۳}=\frac{p-a}{۴}$ و مساحت دایرهٔ محاطی داخلی آن $\frac{۸\pi}{۳}$ است. مساحت مثلث را پیدا کنید. (p نصف محیط است.) — **۱/۵**

۱۳ در شکل مقابل، نقطهٔ M، وسط BC و MQ نیمساز زاویهٔ $A\hat{M}B$ است. از Q خطی موازی با BC رسم می‌کنیم تا AC را در P قطع کند. ثابت کنید PM نیمساز زاویهٔ $A\hat{M}C$ است. — **۱/۵**



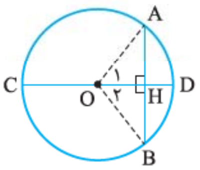
هندسه (۲)	رشته: ریاضی فیزیک	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	kheilisabz.com

ردیف	آزمون شمارهٔ ۹	نوبت دوم پایهٔ یازدهم دورهٔ متوسطهٔ دوم	نمره
۱۴	در شکل مقابل با توجه به اندازه‌های روی آن، مساحت چهارضلعی را پیدا کنید. 		۱/۵
۱۵	ثابت کنید اگر شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC برابر R باشد، آن‌گاه مساحت آن از رابطهٔ مقابل به دست می‌آید: $S = 2R^2 \sin\hat{A} \cdot \sin\hat{B} \cdot \sin\hat{C}$		۱
۱۶	در مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائم ۳ و ۷ واحد، طول نیمساز داخلی زاویهٔ قائمه را بیابید.		۱
	موفق باشید	جمع نمرات	۲۰

پاسخ‌نامهٔ تشریحی

آزمون شمارهٔ ۱ (نوبت اول)

۱- حکم: $\begin{cases} AH = BH \\ \widehat{AD} = \widehat{BD} \end{cases}$

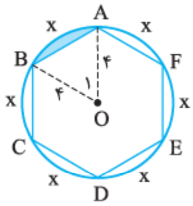


فرض کنیم O مرکز دایره باشد، از O بر وتر AB عمودی رسم می‌کنیم تا آن را در H و کمان نظیرش را در D قطع کند. از O به A و B وصل کرده ثابت می‌کنیم دو مثلث $\overset{\Delta}{OAH}$ و $\overset{\Delta}{OBH}$ همنهشت‌اند.

$$\left.\begin{matrix} OA=OB=\text{شعاع} \\ OH=\text{مشترک} \\ \hat{H}_1=\hat{H}_2=90^\circ \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$ دو مثلث قائم‌الزاویه به حالت وتر و یک ضلع قائمه همنهشت‌اند.

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{O}_1=\hat{O}_2 \\ AH=BH \end{cases} \xrightarrow{\text{زوایای مرکزی}} \widehat{AD}=\widehat{BD}$$

۲- اگر وترها در دایره برابر باشند، کمان‌های نظیر آن‌ها برابرند. شش‌ضلعی منتظم است، پس کمان‌های نظیر ضلع‌های شش‌ضلعی برابرند. در نتیجه:



$$6x=360^\circ \Rightarrow x=60^\circ$$

از طرفی $\hat{O}_1$ زاویهٔ مرکزی است، پس $\hat{O}_1=x=60^\circ$.

OB و OA شعاع‌های دایره‌اند که با هم برابرند، پس مثلث $\overset{\Delta}{OAB}$ متساوی‌الاضلاع است.

$$S_{\overset{\Delta}{OAB}}=\frac{\sqrt{3}}{4}(4)^2=4\sqrt{3}$$

از طرفی مساحت قطاع AOB برابر است با:

$$S_{\text{قطاع}}=\frac{\pi(4)^2(60^\circ)}{360^\circ}=\frac{8\pi}{3} \Rightarrow S_{\text{رنگی}}=S_{\text{قطاع}}-S_{OAB}=\frac{8\pi}{3}-4\sqrt{3}$$

۳- الف) 80° اندازهٔ زاویهٔ درونی دایره است، پس: $\frac{x+y}{2}=80^\circ \Rightarrow x+y=160^\circ$

۲۰ اندازهٔ زاویهٔ بیرونی است، پس:

$$\frac{x-y}{2}=20^\circ \Rightarrow x-y=40^\circ \Rightarrow \begin{cases} x+y=160^\circ \\ x-y=40^\circ \end{cases} \Rightarrow x=100^\circ, y=60^\circ$$

ب) $\hat{A}=62^\circ$ زاویهٔ بیرونی و بین دو مماس است، پس:

$$\frac{x-y}{2}=62^\circ \Rightarrow x-y=124^\circ$$

$x+y=360^\circ$ (کل دایره)

$$\begin{cases} x+y=360^\circ \\ x-y=124^\circ \end{cases} \Rightarrow x=242^\circ, y=118^\circ$$

۴- می‌دانیم اگر وترها برابر باشند، کمان‌های نظیر نیز با هم برابرند؛ در نتیجه:

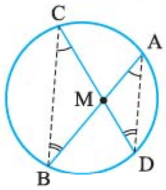
$$AB=AC \Rightarrow \widehat{AB}=\widehat{AC}=140^\circ$$

$$\widehat{AB}+\widehat{AC}+\widehat{BC}=360^\circ \Rightarrow \widehat{BC}=80^\circ$$

اندازهٔ هر زاویهٔ ظلّی نصف کمان روبه‌رو است، پس:

$$B\hat{C}T_{\text{ظلی}}=\frac{\widehat{BC}}{2}=\frac{80^\circ}{2}=40^\circ$$

۵- حکم: $MA\times MB=MC\times MD$



از C به B و از A به D وصل کرده و ثابت می‌کنیم دو مثلث $\overset{\Delta}{MBC}$ و $\overset{\Delta}{MDA}$ متشابه‌اند.

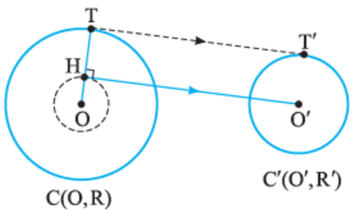
$$\left.\begin{matrix} \begin{cases} \hat{C}_{\text{محاطی}}=\frac{\widehat{BD}}{2} \\ \hat{A}_{\text{محاطی}}=\frac{\widehat{BD}}{2} \end{cases} \Rightarrow \hat{C}=\hat{A} \\ \begin{cases} \hat{B}_{\text{محاطی}}=\frac{\widehat{AC}}{2} \\ \hat{D}_{\text{محاطی}}=\frac{\widehat{AC}}{2} \end{cases} \Rightarrow \hat{B}=\hat{D} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$ دو مثلث $\overset{\Delta}{MDA}$ و $\overset{\Delta}{BMC}$ به حالت(ز ز) متشابه‌اند

نسبت تشابه را برای این دو مثلث می‌نویسیم:

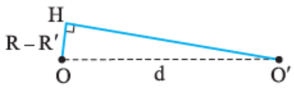
$$\Rightarrow \frac{MA}{MC}=\frac{MD}{MB} \Rightarrow MA\times MB=MC\times MD$$

۶- دو دایرهٔ متخارج $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ را در نظر می‌گیریم.

به مرکز O و شعاع $R-R'$ دایره‌ای رسم و از O' بر این دایره مماس $O'H$ را رسم می‌کنیم. از O به H وصل کرده، امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ $C(O,R)$ را در نقطه‌ای مانند T قطع کند ($OH\perp O'H$). از T به موازات $O'H$ خط TT' را رسم می‌کنیم. TT' مماس‌مشترک خارجی دو دایره است. $OH=R-R'$



اکنون در مثلث $\overset{\Delta}{OO'H}$ رابطهٔ فیثاغورس را می‌نویسیم:

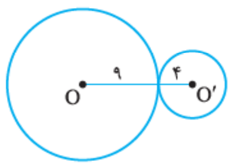


$$d^2=(R-R')^2+(O'H)^2 \Rightarrow O'H=\sqrt{d^2-(R-R')^2}$$

چهارضلعی $HTT'O'$، ۴ زاویهٔ قائمه دارد، پس مستطیل است، در نتیجه: $O'H=TT'$

$$\Rightarrow TT'_{\text{خارجی}}=\sqrt{d^2-(R-R')^2}$$

۷- دو دایرهٔ $C(O,9)$ و $C'(O',4)$ را که بر یکدیگر مماس خارج هستند در نظر می‌گیریم. واضح است که طول خط‌المرکزین این دو دایره ۱۳ است؛ یعنی: $d=OO'=9+4=13$



$$\Rightarrow TT'_{\text{خارجی}}=\sqrt{d^2-(R-R')^2}=\sqrt{(13)^2-(5)^2}=\sqrt{169-25}=\sqrt{144}=12$$

۸- ابتدا رابطهٔ طولی داخل دایره را می‌نویسیم: $4\times x=2\times 10$

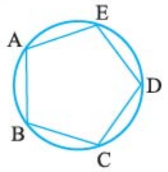
$$\Rightarrow 4x=20 \Rightarrow x=5$$

اکنون رابطهٔ طولی خارج دایره با توجه به مماس‌بودن یکی از قاطع‌ها را می‌نویسیم:

$$6^2=y(y+4+x) \Rightarrow 36=y(y+4+5)$$

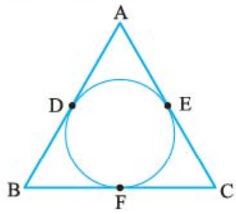
$$\Rightarrow y^2+9y-36=0 \Rightarrow (y+12)(y-3)=0 \Rightarrow y=3$$

۹- چندضلعی را محاطی گویند، اگر و فقط اگر دایره‌ای باشد که از همهٔ رئوس آن بگذرد. در این صورت دایره را محیطی و چندضلعی را محاط در دایره یا به طور خلاصه محاطی نامند.



دایرهٔ محیطی
پنج‌ضلعی محاطی

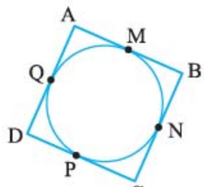
چندضلعی را محیطی نامند، اگر و فقط اگر دایره‌ای باشد که بر همهٔ ضلع‌های آن مماس باشد. در این صورت دایره را محاطی و چندضلعی را محیطی نامند.



دایرهٔ محاطی
مثلث محیطی

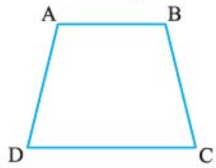
۱۰- می‌دانیم اگر از یک نقطه دو مماس بر دایره رسم کنیم، طول دو مماس با هم برابر است.

فرض کنید چهارضلعی ABCD محیطی باشد:



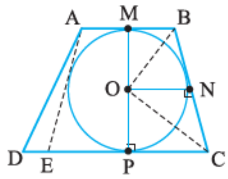
$$AB + CD = (AM + BM) + (CP + DP)$$
$$= AQ + BN + CN + DQ$$
$$= (AQ + DQ) + (BN + CN) = AD + BC$$

برعکس: فرض کنید $AB + CD = BC + AD$. نیمسازهای دو زاویهٔ B و C یکدیگر را در نقطه‌ای مانند O قطع می‌کنند. طبق خاصیت نیمساز، (هر نقطه روی نیمساز از اضلاع زاویه به یک فاصله است).



$$\Rightarrow OM = ON = OP$$

به مرکز O و شعاع OM دایره‌ای رسم می‌کنیم. این دایره بر اضلاع AB، BC و CD مماس می‌باشد. اگر بر ضلع AD نیز مماس باشد که کار تمام است. در غیر این صورت از A مماس AE را بر دایره رسم می‌کنیم.



چون ABCE محیطی است، پس بنا بر قسمت قبل:

$$AB + EC = BC + AE \Rightarrow AB - BC = AE - EC \quad (۱)$$

از طرفی بنا به فرض $AB + CD = BC + AD$، در نتیجه:

$$AB - BC = AD - CD \quad (۲)$$

از رابطه‌های (۱) و (۲) داریم:

$$AD - CD = AE - EC$$
$$\Rightarrow AD = AE + \underbrace{CD - EC}_{ED} \Rightarrow AD = AE + ED$$

اما در مثلث $\overset{\Delta}{ADE}$ چنین رابطه‌ای امکان ندارد، پس فرض مماس‌نبودن AD بر دایره باطل است و AD بر دایرهٔ رسم‌شده مماس است.

۱۱- بنا بر رابطهٔ $C_n = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}$ داریم: $a = 2R\sin\frac{180^\circ}{3} = 2R\sin 60^\circ = R\sqrt{3}$

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3}R)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\times 3R^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$$

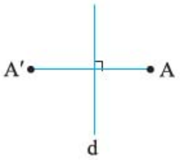
۱۲- می‌دانیم در هر چهارضلعی محاطی، زوایای روبه‌رو مکمل‌اند، پس:

$$x - 2y + 30^\circ + 120^\circ = 180^\circ \Rightarrow x - 2y = 30^\circ$$
$$2x + y + 10^\circ + 70^\circ = 180^\circ \Rightarrow 2x + y = 100^\circ$$
$$\Rightarrow 2\times\begin{cases} 2x + y = 100^\circ \\ x - 2y = 30^\circ \end{cases} \Rightarrow 5x = 230^\circ \Rightarrow x = 46^\circ, y = 8^\circ$$

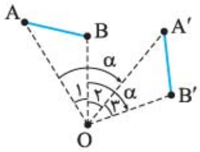
۱۳- انتقال: طولپاست، جهت شکل را حفظ می‌کند و مساحت را نیز حفظ می‌کند.

تجانس: لزوماً طولپا نیست (در حالت $|k| = 1$ طولپاست) و جهت شکل را حفظ می‌کند و اگر $|k| \neq 1$ باشد، مساحت را نیز حفظ نمی‌کند.

۱۴- تصویر نقطهٔ A تحت بازتاب نسبت به خط d، نقطهٔ A' است به طوری که خط d عمودمنصف پاره‌خط AA' باشد و اگر A بر d منطبق باشد، تصویرش بر خودش منطبق است. d را محور بازتاب می‌نامند. بازتاب، یک تبدیل طولپاست ـ شیب را لزوماً حفظ نمی‌کند ـ مقدار زاویه را حفظ می‌کند.



۱۵- **حالت اول:** مرکز دوران O بر پاره‌خط AB و امتداد آن واقع نباشد و زاویهٔ دوران از زاویهٔ $A\hat{O}B$ بیشتر باشد.



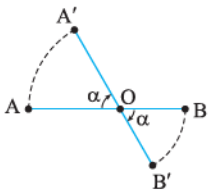
با توجه به شکل: $\left.\begin{array}{l}\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = \alpha \\ \hat{O}_2 + \hat{O}_3 = \alpha\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_3$

$$\begin{cases} OA = OA' & \text{(طبق تعریف دوران)} \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_3 \\ OB = OB' & \text{(طبق تعریف دوران)} \end{cases}$$

پس دو مثلث $\overset{\Delta}{OAB}$ و $\overset{\Delta}{OA'B'}$ به حالت (ض‌زض) همنهشت‌اند.

$\Rightarrow AB = A'B' \Rightarrow$ طولپاست

حالت دوم: اگر نقطهٔ O روی پاره‌خط AB باشد:

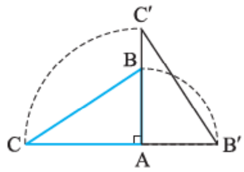


$$AB = AO + OB$$
$$A'B' = A'O + OB'$$

طبق تعریف دوران: $\left.\begin{array}{l}AO = A'O \\ BO = B'O\end{array}\right. \Rightarrow AB = A'B'$

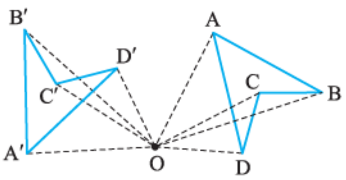
پس دوران یک تبدیل طولپاست.

۱۶- الف) نقاط B و C را به مرکز A و به اندازهٔ 90° در جهت عقربه‌های ساعت دوران می‌دهیم تا نقاط B' و C' به دست آیند. دقت کنید که دوران‌یافتهٔ نقطهٔ A با این دوران، خودِ نقطهٔ A می‌شود.



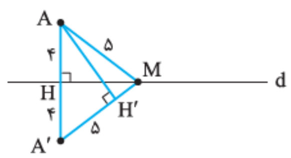
توجه کنید که $AB = AB'$ و $AC = AC'$.

ب) نقاط A، B، C و D را به O وصل کرد، دوران 120° خلاف جهت عقربه‌های ساعت انجام می‌دهیم. نقاط A'، B'، C' و D' حاصل می‌شوند.



توجه کنید که
$$OA = OA'$$
$$OB = OB'$$
$$OC = OC'$$
$$OD = OD'$$

۱۷- ابتدا شکل مناسبی رسم می‌کنیم:



A' بازتاب A نسبت به خط d است، پس $AH = A'H = 4$، طبق رابطهٔ فیثاغورس:

$$HM = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$$

چون d عمودمنصف AA' است، پس $A'M = AM$، چون $AM = 5$ پس $A'M = 5$.

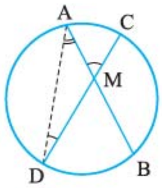
ارتفاع وارد بر ساق مثلث $\overset{\Delta}{AMA'}$ یعنی AH':

$$\left.\begin{array}{l} AA'M \text{ مساحت مثلث } = \dfrac{AH' \times A'M}{2} \\ AA'M \text{ مساحت مثلث } = \dfrac{MH \times AA'}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$AH' \times A'M = MH \times AA' \Rightarrow AH' \times 5 = 3 \times 8$$

$$\Rightarrow AH' = \frac{24}{5} = \frac{48}{10} = 4/8$$

آزمون شمارهٔ ۹ (نوبت دوم)

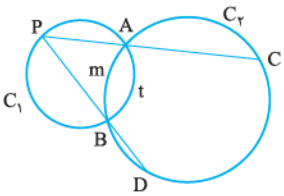


۱- از A به D وصل می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{D} = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{۲} \text{ محاطی} \\ \hat{A} = \dfrac{\overset{\frown}{BD}}{۲} \text{ محاطی} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A} + \hat{D} = \dfrac{\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD}}{۲} \quad (۱)$$

$$\text{زاویهٔ خارجی مثلث } \overset{\Delta}{AMD}\ \hat{M} \Rightarrow \hat{M} = \hat{A} + \hat{D} \quad (۲)$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow \hat{M} = \dfrac{\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD}}{۲}$$



۲- در دایرهٔ $C_۱$، $\hat{P}$ زاویه‌ای محاطی است.

پس: $\hat{P} = \dfrac{\overset{\frown}{AtB}}{۲} = $ ثابت. در دایرهٔ $C_۲$، $\hat{P}$ زاویه‌ای خارجی است، پس:

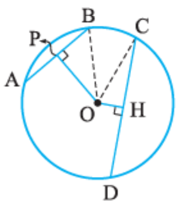
$$\hat{P} = \dfrac{\overset{\frown}{CD} - \overset{\frown}{AmB}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{CD} = ۲\hat{P} + \overset{\frown}{AmB}$$

چون $\overset{\frown}{AmB}$ و $\hat{P}$ ثابت هستند، پس اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{CD}$ ثابت است و به جای نقطهٔ P بستگی ندارد.

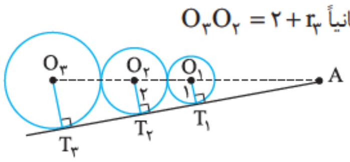
۳- فرض کنیم در دایرهٔ $C(O,R)$ وتر CD از وتر AB بزرگ‌تر باشد. اگر OP و OH به ترتیب بر AB و CD عمود باشند، آن‌گاه $PB = \frac{۱}{۲}AB$ و $CH = \frac{۱}{۲}CD$.

$$\overset{\Delta}{OBP} : OP^۲ = OB^۲ - PB^۲ = R^۲ - \dfrac{AB^۲}{۴} \quad (۱)$$

$$\overset{\Delta}{OCH} : OH^۲ = OC^۲ - CH^۲ = R^۲ - \dfrac{CD^۲}{۴} \quad (۲)$$



چون $AB < CD$، پس $-\dfrac{AB^۲}{۴} > -\dfrac{CD^۲}{۴}$ یا $R^۲ - \dfrac{AB^۲}{۴} > R^۲ - \dfrac{CD^۲}{۴}$. با توجه به رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $OP^۲ > OH^۲$ یا $OP > OH$.



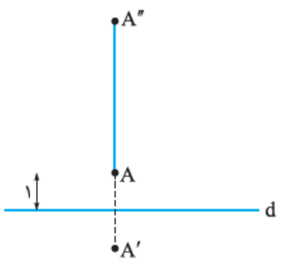
۴- اولاً $O_۱O_۲ = r_۱ + r_۲ = ۱ + ۲ = ۳$، ثانیاً $O_۲O_۳ = ۲ + r_۳$ فرض کنیم $O_۱A = x$ باشد.

پاره‌خط‌های $O_۱T_۱$ و $O_۲T_۲$ با هم موازی‌اند، در نتیجه می‌توان در مثلث $\overset{\Delta}{AO_۲T_۲}$ تالس جزء به کل نوشت:

$$\dfrac{O_۱A}{O_۲A} = \dfrac{O_۱T_۱}{O_۲T_۲} \Rightarrow \dfrac{x}{x+۳} = \dfrac{۱}{۲} \Rightarrow x = ۳$$

هم‌چنین $O_۱T_۱$ و $O_۳T_۳$ با هم موازی‌اند، در نتیجه می‌توان در مثلث $\overset{\Delta}{AO_۳T_۳}$ تالس جزء به کل نوشت:

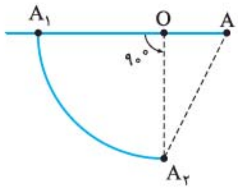
$$\dfrac{O_۱A}{O_۳A} = \dfrac{O_۱T_۱}{O_۳T_۳} \Rightarrow \dfrac{x}{x+۳+۲+r_۳} = \dfrac{۱}{r_۳} \Rightarrow \dfrac{۳}{۸+r_۳} = \dfrac{۱}{r_۳} \Rightarrow r_۳ = ۴$$



۵- واضح است که $AA' = ۲$ و چون A'' مجانس A' در تجانس به مرکز A و با نسبت -۲ است، پس باید A بین A' و A'' و $AA'' = ۲AA' = ۴$ باشد، پس با توجه به شکل داریم:

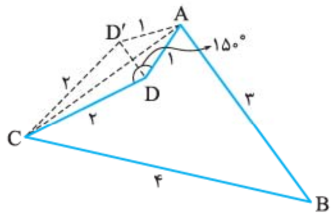
$$A'A'' = A'A + AA'' = ۲ + ۴ = ۶$$

۶- چون $A_۱$ مجانس A به مرکز O و با نسبت ۲- است، پس O بین A و $A_۱$ است و $OA_۱=۲OA=۲$ می‌باشد. با توجه به شکل، $OA_۲$ بر $AA_۱$ عمود است و $OA_۲=۲$ و چون $OA=۱$، پس در مثلث قائم‌الزاویهٔ $OAA_۲$ داریم:



$$AA_۲^۲=OA^۲+OA_۲^۲=۱^۲+۲^۲ \Rightarrow AA_۲=\sqrt{۵}$$

۷- کافی است بازتاب D نسبت به AC را پیدا کنیم. اگر این نقطه را D' بنامیم، آن‌گاه دو مثلث $\overset{\Delta}{ACD}$ و $\overset{\Delta}{ACD'}$ همنهشت هستند، پس مقدار افزایش مساحت شکل، دو برابر مساحت مثلث $\overset{\Delta}{ADC}$ است.



$$\text{افزایش مساحت}=۲S_{\overset{\Delta}{ACD}}=۲\times(\frac{۱}{۲}AD\times CD\times\sin ۱۵۰^\circ)$$
$$=۲\times\frac{۱}{۲}\times۱\times۲\times\frac{۱}{۲}=۱$$

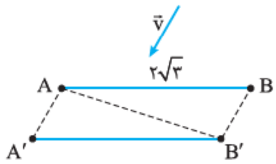
۸- مساحت مثلث اولیه را پیدا می‌کنیم. $۲p=۴+۵+۷=۱۶ \Rightarrow p=۸$

با استفاده از رابطهٔ هرون داریم:

$$S=\sqrt{۸(۸-۴)(۸-۵)(۸-۷)}=\sqrt{۸\times۴\times۳\times۱}=۴\sqrt{۶}$$

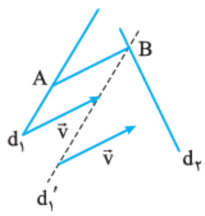
می‌دانیم تجانس، زاویه را حفظ می‌کند، پس تصویر با خود شکل، متشابه است و چون نسبت تجانس ۴- است، پس مساحت شکل مجانس $۱۶=(-۴)^۲$ برابر مساحت شکل اولیه است، در نتیجه: $\text{مساحت شکل تبدیل‌یافته}=۱۶\times۴\sqrt{۶}=۶۴\sqrt{۴}$

۹- اگر A' و B' به ترتیب انتقال‌یافته‌های A و B تحت بردار $\vec{v}$ باشند، آن‌گاه $BB'=۱$ و $\hat{B}=۶۰^\circ$، پس:



$$S_{ABB'A'}=۲S_{ABB'}$$
$$=۲(\frac{۱}{۲}AB\times BB'\times\sin\hat{B})$$
$$=۲\times\frac{۱}{۲}\times۲\sqrt{۳}\times۱\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۳$$

۱۰- اگر فرض کنیم مسئله حل شده و پاره‌خط AB جواب مسئله باشد، آن‌گاه چون $|\overrightarrow{AB}|=|\vec{v}|$، پس نقطهٔ B انتقال‌یافتهٔ نقطهٔ A تحت بردار $\vec{v}$ است. برای رسم به صورت زیر عمل می‌کنیم: انتقال‌یافتهٔ $d_۱$ را تحت بردار $\vec{v}$ خط $d_۱'$ می‌نامیم. نقطهٔ برخورد $d_۱'$ و $d_۲$ را B می‌نامیم. از B خطی موازی با $\vec{v}$ رسم می‌کنیم تا $d_۱$ را در A قطع کند. پاره‌خط AB جواب مسئله است.



۱۱- اگر در مثلثی مرکزهای دایره‌های محاطی داخلی و محیطی بر هم منطبق باشند، آن مثلث متساوی‌الاضلاع است. نیمساز زاویه‌های درونی مثلث متساوی‌الاضلاع، ارتفاع آن نیز می‌باشد، پس:

$$d_a=h_a=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times۵\sqrt{۳}=\frac{۱۵}{۲}$$

۱۲- اگر شعاع دایرهٔ محاطی داخلی را r بگیریم، آن‌گاه:

$$S=\pi r^۲=\frac{۸\pi}{۳}\Rightarrow r=۲\sqrt{\frac{۲}{۳}}$$

از طرفی با استفاده از ویژگی مهم تناسب، خواهیم داشت:

$$\frac{p-a}{۴}=\frac{p-b}{۳}=\frac{p-c}{۲}=\frac{۳p\overbrace{-a-b-c}^{=-۲p}}{۴+۳+۲}=\frac{p}{۹}=k$$

در نتیجه: $p=۹k$ و همچنین:

$$\frac{p-a}{۴}=k\Rightarrow p-a=۴k\Rightarrow a=۵k$$
$$\frac{p-b}{۳}=k\Rightarrow p-b=۳k\Rightarrow b=۶k$$
$$\frac{p-c}{۲}=k\Rightarrow p-c=۲k\Rightarrow c=۷k$$

پس:

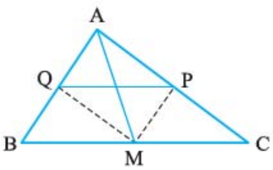
$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{۹k\times۴k\times۳k\times۲k}=۶k^۲\sqrt{۶}$$
$$r=\frac{S}{p}\Rightarrow ۲\sqrt{\frac{۲}{۳}}=\frac{۶k^۲\sqrt{۶}}{۹k}\Rightarrow\sqrt{\frac{۲}{۳}}=\frac{k\sqrt{۶}}{۳}$$

به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\frac{۲}{۳}=\frac{۶k^۲}{۹}\Rightarrow k^۲=۱\xrightarrow{k>۰}k=۱$$

پس $S=۶\sqrt{۶}$.

۱۳- چون MQ نیمساز زاویهٔ $A\hat{M}B$ است، پس بنا بر ویژگی نیمساز در مثلث $\overset{\Delta}{AMB}$ داریم:



$$\left.\begin{array}{l}\frac{AQ}{BQ}=\frac{AM}{MB}\\ PQ\parallel BC\xrightarrow{\text{تالس}}\frac{AQ}{BQ}=\frac{AP}{PC}\\ BM=CM\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{AP}{PC}=\frac{AM}{CM}$$

بنا بر ویژگی عکس نیمساز زاویه در مثلث $\overset{\Delta}{AMC}$، نتیجه می‌شود PM نیمساز زاویهٔ $A\hat{M}C$ است.

۱۴- با استفاده از رابطهٔ هرون مساحت هر یک از مثلث‌ها را پیدا می‌کنیم.

در مثلث $\overset{\Delta}{ABD}$ داریم $p=\frac{۷+۹+۱۲}{۲}=۱۴$، پس:

$$S_{\overset{\Delta}{ABD}}=\sqrt{۱۴\times(۱۴-۷)(۱۴-۹)(۱۴-۱۲)}=۱۴\sqrt{۵}$$

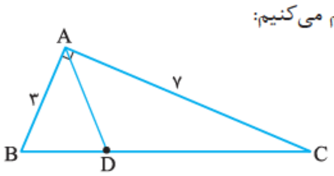
در مثلث $\overset{\Delta}{BCD}$ داریم $p=\frac{۶+۸+۱۲}{۲}=۱۳$، پس:

$$S_{\overset{\Delta}{BCD}}=\sqrt{۱۳(۱۳-۶)(۱۳-۸)(۱۳-۱۲)}=\sqrt{۴۵۵}$$
$$S_{ABCD}=۱۴\sqrt{۵}+\sqrt{۴۵۵}$$

۱۵- می‌دانیم $a=۲R\sin\hat{A}$ و $b=۲R\sin\hat{B}$. از طرفی $S=\frac{۱}{۲}ab\sin\hat{C}$، پس:

$$S=\frac{۱}{۲}\times(۲R\sin\hat{A})(۲R\sin\hat{B})\sin\hat{C}=۲R^۲\sin\hat{A}\cdot\sin\hat{B}\cdot\sin\hat{C}$$

۱۶- مثلث قائم‌الزاویه‌ای به اضلاع ۳ و ۷ رسم می‌کنیم:



نیمساز زاویهٔ $\hat{A}$ را رسم کرده، محل برخورد آن با ضلع BC را D می‌نامیم.

طول نیمساز AD برابر است با:

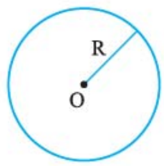
$$AD=\frac{۲AB\times AC\times\cos\frac{A}{۲}}{AB+AC}$$
$$=\frac{۲\times۳\times۷\times\cos۴۵}{۳+۷}=\frac{۲۱\sqrt{۲}}{۱۰}=۲/۱\sqrt{۲}$$

درس نامهٔ توپ برای شب امتحان

فصل ۱: دایره

درس اول: مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

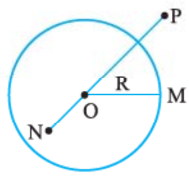
دایره



دایره، مجموعهٔ نقاطی از یک صفحه است که فاصلهٔ آن‌ها از نقطهٔ ثابتی واقع در آن صفحه، مقدار ثابتی باشد. نقطهٔ ثابت، مرکز دایره و مقدار ثابت، اندازهٔ شعاع دایره نامیده می‌شوند.
دایرهٔ به مرکز O و شعاع R را به صورت $C(O,R)$ نشان می‌دهند. هر دایره، صفحه را به ۳ قسمت جدا از هم تقسیم می‌کند:

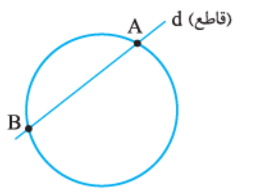
۱) داخل دایره: مجموعهٔ نقاطی مانند N که فاصلهٔ آن‌ها از مرکز دایره، کم‌تر از شعاع دایره است، پس $ON < R$.

۲) روی دایره: مجموعهٔ نقاطی مانند M که فاصلهٔ آن‌ها از مرکز دایره، برابر شعاع دایره است، پس $OM = R$.

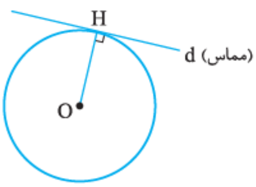


۳) خارج دایره: مجموعهٔ نقاطی مانند P که فاصلهٔ آن‌ها از مرکز دایره، بیشتر از شعاع دایره است، پس $OP > R$.

خط‌های قاطع و مماس نسبت به دایره

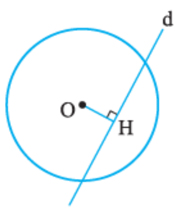


خط راستی که دایره را در دو نقطه قطع کند، قاطع نسبت به دایره یا به طور خلاصه قاطع نامیده می‌شود.

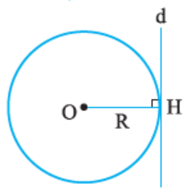


در حالتی که خط و دایره تنها در یک نقطه مشترک باشند، اصطلاحاً گفته می‌شود خط بر دایره مماس است. در این حالت شعاع گذرنده از نقطهٔ تماس، بر خط مماس عمود است.

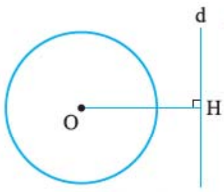
وضعیت خط و دایره: اگر OH فاصلهٔ O از خط d باشد، خط d و دایرهٔ $C(O,R)$ نسبت به هم دارای ۳ وضعیت هستند:



۱) خط و دایره متقاطع هستند: در این حالت خط و دایره دو نقطهٔ مشترک دارند و $OH < R$.



۲) خط بر دایره مماس است: در این حالت خط و دایره فقط یک نقطهٔ مشترک دارند و $OH = R$.



۳) خط d دایره را قطع نمی‌کند: در این حالت خط و دایره، نقطهٔ مشترک ندارند و $OH > R$.

چند تعریف

تعریف وتر: پاره‌خطی که دو نقطهٔ متمایز از یک دایره را به هم وصل می‌کند، وتر نامیده می‌شود.

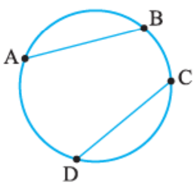
تعریف قطر: وتری که از مرکز دایره می‌گذرد، قطر نامیده می‌شود. قطر، بزرگ‌ترین وتر در دایره است.

تعریف کمان: قسمتی از دایره که بین دو نقطه روی دایره محدود باشد، کمان دایره می‌گویند.

تعریف شعاع: پاره‌خطی که یک سر آن مرکز دایره و انتهای دیگر آن نقطه‌ای روی دایره باشد، شعاع نام دارد.

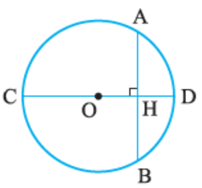
زوایای مرکزی، محاطی، ظلی، داخلی و خارجی

زاویهٔ مرکزی زاویه‌ای که رأس آن روی مرکز دایره و دو ضلع زاویه شعاع‌های دایره باشند، زاویهٔ مرکزی نام دارد. اندازهٔ هر زاویهٔ مرکزی برابر است با اندازهٔ کمان روبه‌رو به آن زاویه.



دو کمان $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{CD}$ از دایرهٔ $C(O,R)$ با هم برابرند، اگر و تنها اگر دو وتر AB و CD از این دایره با هم برابر باشند.

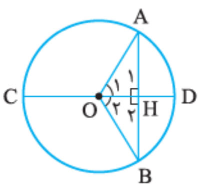
$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} \Leftrightarrow AB = CD$$



ثابت کنید در هر دایره، قطر عمود بر هر وتر، آن وتر و کمان‌های نظیر آن وتر را نصف می‌کند.

$$\text{فرض}: \begin{cases} \text{قطر}: CD \\ \hat{H} = 90^\circ \end{cases} \qquad \text{حکم}: \begin{cases} AH = BH \\ \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD} \end{cases}$$

از O به A و B وصل کرده، ثابت می‌کنیم دو مثلث حاصل همنهشت‌اند.



$$\begin{cases} OA = OB \\ OH \text{ مشترک} \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع قائمه}} \overset{\Delta}{OHA} \cong \overset{\Delta}{OHB}$$

$$\xrightarrow{\text{اجزاء نظیر}} \begin{cases} AH = HB \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{cases}$$

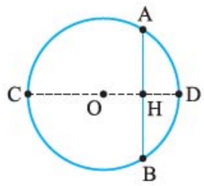
اما زوایای $\hat{O}_1$ و $\hat{O}_2$ مرکزی‌اند، پس مساوی کمان‌های روبه‌رویشان هستند.

$$\begin{cases} \hat{O}_1 = \overset{\frown}{AD} \\ \hat{O}_2 = \overset{\frown}{BD} \end{cases} \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD}$$

در هر دایره، خطی که مرکز دایره را به وسط یک وتر از آن دایره که از مرکز نگذشته باشد، وصل کند، بر آن وتر عمود است.

در هر دایره، خطی که مرکز دایره را به وسط کمان نظیر یک وتر از آن دایره وصل می‌کند، بر آن وتر عمود است.

اگر نقاط وسط وتر AB و کمان AB را داشته باشیم، چگونه می‌توانیم قطر عمود بر وتر AB را رسم کنیم؟

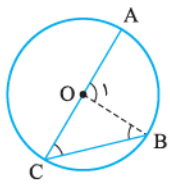


حل طبق قضیه و دو نکتهٔ قبل، کافی است وسط وتر و کمان را به هم وصل کرده و امتداد دهید تا از مرکز دایره بگذرد و دایره را در نقطهٔ دیگر قطع کند. پاره‌خط حاصل قطر موردنظر است و چون از مرکز به وسط وتر و کمان $\widehat{AB}$ وصل شده پس حتماً بر آن وتر عمود است

زاویهٔ محاطی زاویه‌ای که رأس آن روی محیط دایره و هر دو ضلع آن، دو وتر از دایره باشند زاویهٔ محاطی می‌نامند.

ثابت کنید اگر یک ضلع زاویهٔ محاطی، قطر و ضلع دیگر وتری دلخواه از دایره باشد، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ محاطی برابر است با نصف کمان نظیر آن.

حکم: $\hat{C}=\frac{\widehat{AB}}{۲}$



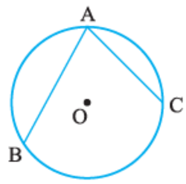
اگر از O به B وصل کنیم، آن‌گاه «OB = OC = شعاع»، پس مثلث $\overset{\Delta}{OBC}$ در رأس O متساوی‌الساقین است و $\hat{C}=\hat{B}$.

اما $\hat{O}_۱$ زاویه‌ای خارجی برای مثلث $\overset{\Delta}{OBC}$ است، پس $\hat{O}_۱=\hat{B}+\hat{C}$ و در نتیجه $\hat{O}_۱=\hat{C}+\hat{C}=۲\hat{C}$ از طرفی $\hat{O}_۱$ زاویه‌ای مرکزی است، پس $\hat{O}_۱=\widehat{AB}$؛ در نتیجه:

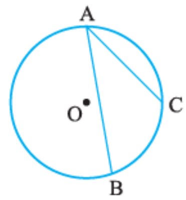
$$۲\hat{C}=\widehat{AB} \Rightarrow \hat{C}=\frac{\widehat{AB}}{۲}$$

با فرض این‌که بدانیم اگر یک ضلع زاویهٔ محاطی، قطری از دایره باشد، اندازهٔ آن نصف کمان نظیرش می‌باشد، آن‌گاه در حالت‌های زیر ثابت کنید اندازهٔ هر زاویهٔ محاطی، نصف کمان نظیر آن است: (O مرکز دایره است)

الف) O درون زاویه است.

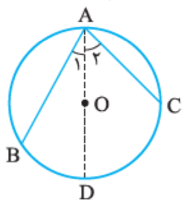


ب) O بیرون زاویه است.



حل الف) از A به O وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطهٔ D قطع کند.

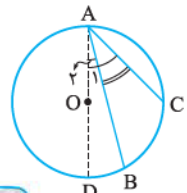
چون $\hat{A}_۱$ محاطی است و یک ضلع آن، قطری از دایره می‌باشد، پس $\hat{A}_۱=\frac{\widehat{BD}}{۲}$ و به دلیل مشابه $\hat{A}_۲=\frac{\widehat{DC}}{۲}$.



$$\hat{A}=\hat{A}_۱+\hat{A}_۲=\frac{\widehat{BD}}{۲}+\frac{\widehat{DC}}{۲}=\frac{\widehat{BD}+\widehat{DC}}{۲}=\frac{\widehat{BC}}{۲}$$

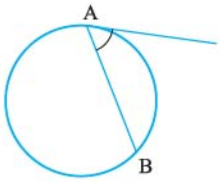
ب) از A به O وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا دایره را در D قطع کند. چون $\hat{A}_۱$ محاطی و یک ضلع آن، قطری از دایره است، پس: $\hat{A}_۱=\frac{\widehat{CD}}{۲}$

و به دلیل مشابه $\hat{A}_۲=\frac{\widehat{BD}}{۲}$.



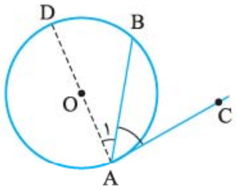
$$\hat{A}=\hat{A}_۱-\hat{A}_۲=\frac{\widehat{CD}}{۲}-\frac{\widehat{BD}}{۲}=\frac{\widehat{CD}-\widehat{BD}}{۲}=\frac{\widehat{BC}}{۲}$$

زاویهٔ ظلی زاویه‌ای را که رأس آن روی محیط دایره، یک ضلع آن مماس بر دایره و ضلع دیگر وتری از دایره باشد زاویهٔ ظلی می‌نامند.



ثابت کنید اندازهٔ هر زاویهٔ ظلی، نصف کمان نظیرش می‌باشد.

قطر AD را رسم می‌کنیم. چون شعاع وارد بر نقطهٔ تماس بر خط مماس عمود است، پس داریم:

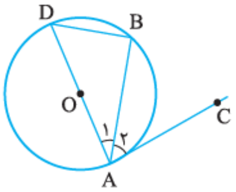


$$DA\perp AC \Rightarrow D\hat{A}C=۹۰^\circ \Rightarrow \hat{A}+\hat{A}_۱=۹۰$$
$$\Rightarrow \hat{A}=۹۰-\hat{A}_۱$$

چون $\hat{A}_۱$ محاطی است، پس $\hat{A}_۱=\frac{\widehat{BD}}{۲}$ و داریم:

$$\hat{A}=۹۰^\circ-\frac{\widehat{BD}}{۲}=\frac{۱۸۰^\circ-\widehat{BD}}{۲}=\frac{\widehat{AD}-\widehat{BD}}{۲}=\frac{\widehat{AB}}{۲}$$

اثبات دیگری برای اندازهٔ زاویهٔ ظلی



قطر AD را رسم و از D به B وصل می‌کنیم.

$$\hat{B}_{\text{محاطی}}=\frac{\widehat{AD}}{۲}=\frac{۱۸۰^\circ}{۲}=۹۰^\circ$$

پس در مثلث $\overset{\Delta}{ADB}$ داریم: $\hat{D}+\hat{A}_۱=۹۰^\circ$

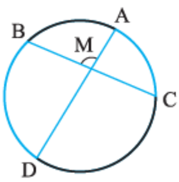
از طرفی DA قطر و AC مماس بر دایره است، بنابراین: $\hat{A}_۱+\hat{A}_۲=۹۰^\circ$

$$\Rightarrow \hat{A}_۲=\hat{D}_{\text{محاطی}}=\frac{\widehat{AB}}{۲} \Rightarrow B\hat{A}C=\frac{\widehat{AB}}{۲}$$

اگر دو وتر از یک دایره با هم موازی باشند، آن‌گاه کمان‌های محدود بین آن‌ها با هم برابرند و برعکس.

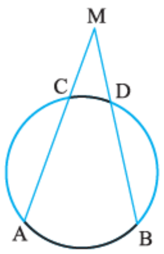
دو قضیهٔ مهم:

الف هرگاه دو وتر، داخل دایره همدیگر را قطع کنند، آن‌گاه زاویهٔ بین آن‌ها از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:



$$\hat{M}=\frac{\widehat{AB}+\widehat{CD}}{۲}$$

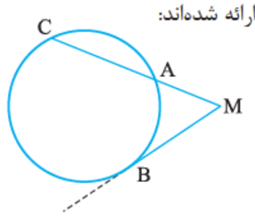
ب هرگاه دو وتر خارج دایره همدیگر را قطع کنند، آن‌گاه زاویهٔ بین آن‌ها از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:



$$\hat{M}=\frac{|\widehat{AB}-\widehat{CD}|}{۲}$$

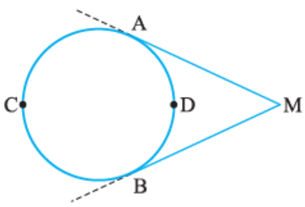
دو حالت خاص از قضیه که بسیار مهم هستند در زیر ارائه شده‌اند:

الف زاویهٔ بین قاطع و مماس:



$$\hat{M}=\frac{\widehat{BC}-\widehat{AB}}{۲}$$

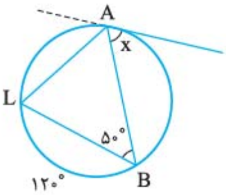
ب زاویهٔ بین دو مماس:



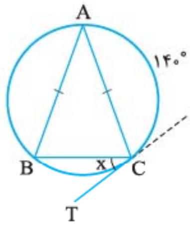
$$\hat{M}=\frac{\widehat{ACB}-\widehat{ADB}}{۲}$$

در هر حالت مقادیر مجهول را بیابید.

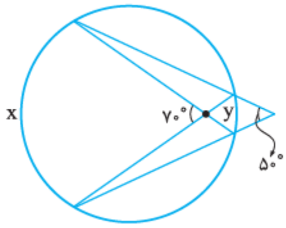
الف) $x=?$



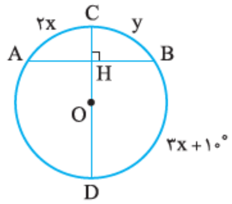
ب) $x=?$



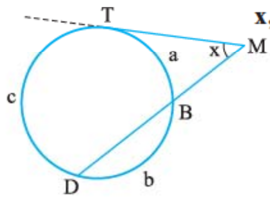
پ) $x,y=?$



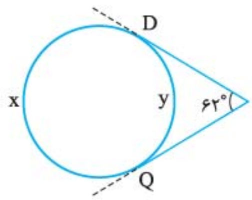
ت) $x,y=?$



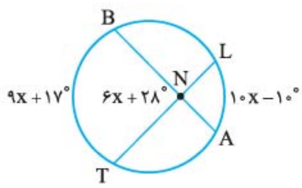
ث) اگر در شکل مقابل $\frac{a}{۱}=\frac{b}{۴}=\frac{c}{۷}$ باشد. $x,y=?$



ج) $x,y=?$



چ) $x=?$ و $B\hat{N}T=?$



حل الف)

$\hat{B}=۵۰^\circ \xrightarrow{\text{محاطی}} \hat{B}=\frac{\overset{\frown}{AL}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{AL}=۱۰۰^\circ$

$۱۰۰^\circ+۱۲۰^\circ+\overset{\frown}{AB}=۳۶۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AB}=۳۶۰^\circ-۲۲۰^\circ=۱۴۰^\circ$

$\xrightarrow{\text{ظلی}} \hat{A}=x=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}=\frac{۱۴۰^\circ}{۲}=۷۰^\circ$

ب)

$AB=AC \Rightarrow \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}=۱۴۰^\circ$

$\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BC}=۳۶۰^\circ \Rightarrow ۱۴۰^\circ+۱۴۰^\circ+\overset{\frown}{BC}=۳۶۰^\circ$

$\Rightarrow \overset{\frown}{BC}=۳۶۰^\circ-۲۸۰^\circ=۸۰^\circ$

$\xrightarrow{\text{ظلی } B\hat{C}T} x=\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}=\frac{۸۰^\circ}{۲}=۴۰^\circ$

پ) ۷۰ زاویه درونی و ۵۰ زاویه بیرونی است پس:

$$\begin{cases}\frac{x+y}{۲}=۷۰^\circ\\ \frac{x-y}{۲}=۵۰^\circ\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=۱۴۰^\circ \\ x-y=۱۰۰^\circ\end{cases}$$

$۲x=۲۴۰^\circ \Rightarrow x=۱۲۰^\circ \Rightarrow y=۲۰^\circ$

ت)

$\hat{H}=۹۰^\circ \Rightarrow \frac{۲x+۳x+۱۰^\circ}{۲}=۹۰^\circ$

$\Rightarrow ۵x=۱۸۰^\circ-۱۰^\circ=۱۷۰^\circ \Rightarrow x=\frac{۱۷۰^\circ}{۵}=۳۴^\circ$

$\overset{\frown}{CD}=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۳x+۱۰^\circ+y=۱۸۰$

$\Rightarrow ۳(۳۴^\circ)+۱۰^\circ+y=۱۸۰^\circ \Rightarrow y=۶۸^\circ$

ث)

$$\frac{a}{۱}=\frac{b}{۴}=\frac{c}{۷}=t \Rightarrow \begin{cases}a=t\\b=۴t\\c=۷t\end{cases}$$

$a+b+c=۳۶۰^\circ \Rightarrow ۱۲t=۳۶۰^\circ \Rightarrow t=۳۰^\circ$

$x=\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{TD}-\overset{\frown}{TB}}{۲}=\frac{c-a}{۲}$

$=\frac{۷t-t}{۲}=\frac{۶t}{۲}=۳t=۳(۳۰^\circ)=۹۰^\circ$

ج)

$$\frac{x-y}{۲}=۶۲^\circ \Rightarrow \begin{cases}x-y=۱۲۴^\circ\\x+y=۳۶۰^\circ\end{cases}$$

$\Rightarrow ۲x=۴۸۴^\circ \Rightarrow x=۲۴۲^\circ \Rightarrow y=۱۱۸^\circ$

چ)

$۶x+۲۸^\circ=\frac{(۹x+۱۷^\circ)+(۱۰x-۱۰^\circ)}{۲}$

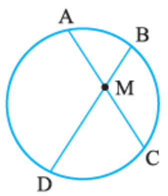
$\Rightarrow ۱۲x+۵۶^\circ=۱۹x+۷^\circ \Rightarrow ۷x=۴۹^\circ \Rightarrow x=۷^\circ$

$B\hat{N}T=۶x+۲۸^\circ=۶(۷^\circ)+۲۸^\circ=۴۲^\circ+۲۸^\circ=۷۰^\circ$

درس دوم: روابط طولی در دایره

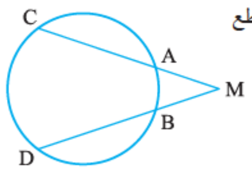
الف هرگاه دو وتر، داخل دایره همدیگر را قطع کنند، آن‌گاه:

$MA\times MC=MB\times MD$ (جزء در جزء)



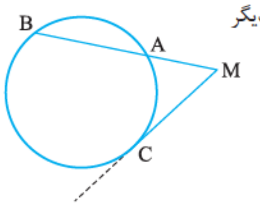
ب هرگاه امتداد دو وتر، خارج دایره همدیگر را قطع کنند، آن‌گاه:

$MA\times MC=MB\times MD$ (جزء در کل)



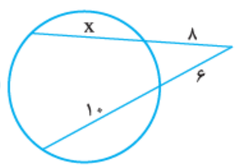
پ هرگاه یک مماس و یک قاطع در بیرون دایره همدیگر را قطع کنند، آن‌گاه:

$MC^2=MA\times MB$

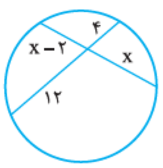


مقدار مجهول را در هر شکل بیابید.

ب)



الف)



پ)